Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Ташпулатов, Спектр оператора энергии двух-
магнонных систем в изотропной примесной ферромаг-
нитной модели Гейзенберга, *ТМФ*, 2010, том 164, но-
мер 3, 464–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6558>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:46:38

© 2010 г.

С. М. Ташпулатов*

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННЫХ СИСТЕМ В ИЗОТРОПНОЙ ПРИМЕСНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассматривается двухмагнонная система в изотропной примесной ферромагнитной модели Гейзенберга в ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$. Установлено, что существенный спектр системы состоит из объединения не более чем четырех отрезков. Получены нижняя и верхняя оценки для числа трехчастичных связанных состояний системы.

Ключевые слова: существенный спектр, дискретный спектр, локальные примесные состояния, связанные состояния, модель Гейзенберга, двухмагнонная система в примесной модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается двухмагнонная система в изотропной примесной ферромагнитной модели Гейзенберга на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$ с взаимодействием ближайших соседей и исследуются существенный и дискретный спектры этой системы.

Опишем сначала модель с конечным числом спинов (см. [1]). Пусть Λ – конечное подмножество в $\mathbb{Z}^\nu$. Каждой точке $t \in \mathbb{Z}^\nu$ сопоставим экземпляр пространства $\mathbb{C}^2$ и обозначим его $\mathbb{C}_t^2$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_\Lambda = \bigotimes_{t \in \Lambda} \mathbb{C}_t^2$.

Пусть σ^x , σ^y , σ^z – матрицы Паули, т.е. $\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; положим $\sigma^\pm \equiv (\sigma^x \pm i\sigma^y)/2$.

Для каждого $t \in \Lambda$ обозначим через σ_t^x , σ_t^y , σ_t^z , $\sigma_t^\pm$ операторы в $\mathcal{H}_\Lambda$, действующие соответственно как σ^x , σ^y , σ^z , $\sigma^\pm$ на t -ю компоненту тензорного произведения и как единичная матрица на остальные компоненты.

Гейзенберговский гамильтониан определяется следующим образом:

$$H_\Lambda = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{|t-\beta|=1, \\ t, \beta \in \Lambda}} (\sigma_t^z \sigma_\beta^z + 4\sigma_t^+ \sigma_\beta^-). \quad (1)$$

*Институт ядерной физики АНРУз, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: toshpul@mail.ru, toshpul@rambler.ru

Сумма берется по всем упорядоченным парам (t, β) ближайших узлов.

Рассмотрим теперь случай $\Lambda = \mathbb{Z}^\nu$. Пусть $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}^\nu} = \bigotimes_{t \in \mathbb{Z}^\nu} \mathbb{C}_t^2$ – бесконечное тензорное произведение двумерных комплексных гильбертовых пространств $\mathbb{C}^2$.

Векторы $e_1^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_0^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ обычно называют состояниями со спином вверх и спином вниз в точке t соответственно. Гильбертовым пространством состояний бесконечного числа спинов по одному в каждой точке $t \in \mathbb{Z}^\nu$ как раз и будет пространство $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}^\nu} = \bigotimes_{t \in \mathbb{Z}^\nu} \mathbb{C}_t^2$.

Множество векторов вида $\bigotimes_{t \in \mathbb{Z}^\nu} e_{a_t}^t$, где $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^\nu}$ – последовательность нулей и единиц, есть базис в $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}^\nu}$.

Пусть $\mathcal{H}_n$ – линейная оболочка тех векторов $\bigotimes_{t \in \mathbb{Z}^\nu} e_{a_t}^t$ из $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}^\nu}$, для которых только ровно в n узлах $t \in \mathbb{Z}^\nu$ спин направлен вверх, а в остальных узлах спин направлен вниз. Пространство $\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n$ является фоковским пространством. Определим теперь гамильтониан, действующий в пространстве $\mathcal{H}$.

Непосредственно использовать формулу (1) для определения гамильтониана нельзя, ибо в этом случае сумма будет расходиться. Однако если заменить (1) на

$$H_{\mathbb{Z}^\nu} = -\frac{1}{2} J \sum_{\substack{|t-\beta|=1, \\ t, \beta \in \mathbb{Z}^\nu}} (\sigma_t^z \sigma_\beta^z + 4\sigma_t^+ \sigma_\beta^- - 1), \quad (2)$$

то это определение уже корректно. Используя равенство $\vec{S}_t = \vec{\sigma}_t/2$, где $\vec{S}_t = (S_t^x; S_t^y; S_t^z)$, $\vec{\sigma}_t = (\sigma_t^x; \sigma_t^y; \sigma_t^z)$, гейзенберговский гамильтониан можно записать в виде

$$H' = J \sum_{m, \tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}). \quad (3)$$

Далее мы будем пользоваться операторами $\vec{S}_m$ и гамильтониан системы будем описывать на языке операторов $\vec{S}_m$.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = J \sum_{m, \tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}) + (J_0 - J) \sum_{\tau} (\vec{S}_0 \vec{S}_{\tau}), \quad (4)$$

где $J < 0$ и $J_0 \neq 0$ – параметры билинейного обменного взаимодействия между атомами и между атомами и примесями соответственно, $\vec{S}_m = (S_m^x; S_m^y; S_m^z)$ – оператор атомного спина величины $s = 1/2$ в узле m , а по τ ведется суммирование по ближайшим соседям. Гамильтониан (4) действует в симметрическом фоковском пространстве $\mathcal{H}$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями $S_m^+ \varphi_0 = 0$, $S_m^z \varphi_0 = \varphi_0/2$, где $\|\varphi_0\| = 1$. Положим $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$, где S_m^- и S_m^+ – соответственно операторы рождения и уничтожения магнона в узле m . Вектор $S_m^- S_n^- \varphi_0$ описывает состояние системы двух магнов, находящихся в узлах m и n , со значением спина $s = 1/2$. Векторы $S_m^- S_n^- \varphi_0$ образуют ортонормальную систему. Гильбертово пространство, натянутое на эти векторы, обозначим через $\mathcal{H}_2$. Оно называется пространством двухмагнонных состояний оператора H . Пространство $\mathcal{H}_2$ инвариантно относительно оператора H . Обозначим через H_2 сужение оператора H на $\mathcal{H}_2$.

Наша цель состоит в изучении спектра оператора H_2 . Это удобно делать в его квазиимпульсном представлении. Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье:

$$\mathcal{F}: l_2(\mathbb{Z}^\nu \times \mathbb{Z}^\nu) \rightarrow L_2(T^\nu \times T^\nu).$$

Здесь T^ν – ν -мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda: \lambda(T^\nu) = 1$.

Оператор H_2 в квазиимпульсном представлении в пространстве $L_2(T^\nu \times T^\nu)$ действует по формуле

$$\begin{aligned} (\tilde{H}_2 f)(x; y) = & \left[-4J\nu + 2J \sum_{i=1}^{\nu} (\cos x_i + \cos y_i) \right] f(x; y) - \\ & - \varepsilon \int_{T^\nu} \left[\nu + \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(x_i - s_i) - \cos x_i - \cos s_i] \right] f(s; y) ds - \\ & - \varepsilon \int_{T^\nu} \left[\nu + \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(y_i - t_i) - \cos y_i - \cos t_i] \right] f(x; t) dt + \\ & + J \int_{T^\nu} \left[4\nu - 2 \sum_{i=1}^{\nu} [\cos x_i + \cos y_i + \cos s_i + \cos(x_i + y_i - s_i) - \right. \\ & \left. - \cos(x_i - s_i) - \cos(y_i - s_i)] \right] f(s; x + y - s) ds + \\ & + \varepsilon \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} \left[2\nu + 2 \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(x_i - s_i) + \cos(y_i - t_i) + \cos(x_i + y_i - s_i - t_i)] - \right. \\ & \left. - \cos t_i - \cos s_i - \cos x_i - \cos y_i - \cos(x_i - s_i - t_i) - \cos(y_i - s_i - t_i) - \right. \\ & \left. - \cos(x_i + y_i - s_i) - \cos(x_i + y_i - t_i) \right] f(s; t) ds dt, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\varepsilon = J_0 - J$.

Спектральные свойства рассматриваемого оператора энергии двухмагнитных систем в изотропной примесной ферромагнитной модели Гейзенберга тесно связаны со спектральными свойствами его двухчастичных подсистем. Саму исходную систему обычно называют трехчастичной системой, а отвечающий ей гамильтониан – трехчастичным оператором. Сначала исследуем спектр и локализованные примесные состояния одномагнитных примесных систем, а также спектр и связанные состояния двухмагнитных систем.

2. ОДНОМАГНИТНЫЕ ПРИМЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Гамильтониан одномагнитной примесной системы также имеет вид (4). Обозначим через $\mathcal{H}_1$ пространство одномагнитных состояний оператора H . Ясно, что пространство $\mathcal{H}_1$ также является инвариантным относительно оператора H . Обозначим через H_1 сужение оператора H на пространство $\mathcal{H}_1$.

Опишем теперь спектр оператора H_1 . Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье

$$\mathcal{F}: l_2(\mathbb{Z}^\nu) \rightarrow L_2(T^\nu).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Оператор H_1 в квазиимпульсном представлении в пространстве $L_2(T^\nu)$ действует по формуле

$$(\tilde{H}_1 f)(x) = h(x)f(x) + \int_{T^\nu} h_1(x; t)f(t) dt, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} h(x) &= -2J \left[\nu - \sum_{i=1}^{\nu} \cos x_i \right], \\ h_1(x; t) &= -2\varepsilon \left[\nu + \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(x_i - t_i) - \cos x_i - \cos t_i] \right], \\ \varepsilon &= J_0 - J, \quad x, t \in T^\nu. \end{aligned}$$

Известно, что непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ не зависит от функции $h_1(x; t)$ и заполняет весь отрезок $[m_\nu; M_\nu]$, где $m_\nu = \min_{x \in T^\nu} h(x)$, $M_\nu = \max_{x \in T^\nu} h(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Собственная функция $\varphi \in L_2(T^\nu)$ оператора $\tilde{H}_1$, отвечающая собственному значению z , называется *локальным примесным состоянием* (ЛПС) оператора $\tilde{H}_1$, а величина z — *энергией* этого состояния.

Положим

$$\Delta_\nu(z) = (1 - 2\varepsilon J_{\nu,1}(z))(1 - 2\varepsilon J_{\nu,2}(z))^\nu (1 - \varepsilon J_{\nu,3}(z))^{\nu-1}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} J_{\nu,1}(z) &= \int_{T^\nu} \frac{(1 - \cos s_1)(\nu - \sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i) ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{h(s_1; s_2; \dots; s_\nu) - z}, \\ J_{\nu,2}(z) &= \int_{T^\nu} \frac{\sin^2 s_1 ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{h(s_1; s_2; \dots; s_\nu) - z}, \\ J_{\nu,3}(z) &= \int_{T^\nu} \frac{(\cos s_1 - \cos s_2)^2 ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{h(s_1; s_2; \dots; s_\nu) - z}. \end{aligned}$$

ЛЕММА. Число $z_0 \notin [m_\nu; M_\nu]$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $\Delta_\nu(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение для собственных значений является интегральным уравнением с вырожденным ядром. Поэтому оно эквивалентно системе линейных однородных алгебраических уравнений. Известно, что система линейных однородных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда детерминант системы равен нулю. Учитывая, что функция $h(s_1; s_2; \dots; s_\nu)$ является симметрической функцией относительно s_i и s_j , и выполняя соответствующие преобразования, получаем, что детерминант системы имеет вид $\Delta_\nu(z)$. ■

Уравнение $\Delta_\nu(z) = 0$ имеет место, если имеет место хотя бы одно из следующих уравнений:

$$1 - 2\varepsilon J_{\nu,1}(z) = 0, \quad (8)$$

$$(1 - 2\varepsilon J_{\nu,2}(z))^\nu = 0, \quad (9)$$

$$(1 - \varepsilon J_{\nu,3}(z))^{\nu-1} = 0. \quad (10)$$

Поэтому в ν -мерном случае возможны следующие случаи: уравнение $\Delta_\nu(z) = 0$ может не иметь ни одного решения, может иметь одно, два или три решения; эти решения соответственно невырождены, ν -кратно вырождены и $(\nu - 1)$ -кратно вырождены. Мы обозначим эти решения соответственно через z_1, z_2, z_3 .

В работе [2] исследуется спектр и ЛПС одномагнитных систем в примесной модели Гейзенберга на ν -мерной решетке $\mathbb{Z}^\nu$, при этом рассматривается как случай ферромагнетика с ферромагнитной примесью, так и случай ферромагнетика с антиферромагнитной примесью. Показано, что в ν -мерном случае система имеет не более трех типов (без учета кратности вырождений их энергии) ЛПС, и найдено условие существования этих состояний. Определено местоположение их энергии относительно непрерывного спектра системы. Мы будем использовать результаты работы [2].

3. ДВУХМАГНОННОЕ СОСТОЯНИЕ

Гамильтониан двухмагнитной системы имеет вид (3), где $J < 0$ – параметр билинейного обменного взаимодействия между ближайшими атомами решетки. Гамильтониан (3) действует в симметрическом фоковском пространстве $\mathcal{H}$. Через $\mathcal{H}_2$ обозначим пространство двухмагнитных состояний оператора (3). Оно инвариантно относительно оператора H' . Обозначим через H'_2 сужение оператора H' на $\mathcal{H}_2$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{H}}_2 = \mathcal{F}\mathcal{H}_2$. Оператор H'_2 в квазиимпульсном представлении в пространстве $L_2(T^\nu \times T^\nu)$ действует по формуле

$$(\widetilde{H}'_2 f)(x; y) = h(x; y)f(x; y) - \int_{T^\nu} h_1(x; y; s)f(s; x + y - s) ds, \quad (11)$$

где

$$h_1(x; y; s) = h(x; y) + h_2(x; y; s),$$

$$h(x; y) = -4\nu J + 2J \sum_{i=1}^{\nu} (\cos x_i + \cos y_i),$$

$$h_2(x; y; s) = 2J \sum_{i=1}^{\nu} [\cos s_i + \cos(x_i + y_i - s_i) - \cos(x_i - s_i) - \cos(y_i - s_i)].$$

Пусть фиксирован полный квазиимпульс системы $x + y = \Lambda$. Обозначим через $L_2(\Gamma_\Lambda)$ пространство функций, квадратично интегрируемых по многообразию $\Gamma_\Lambda = \{(x; y): x + y = \Lambda\}$. Известно [3], что оператор $\widetilde{H}'_2$ и пространство $\widetilde{\mathcal{H}}_2$ можно разложить в прямой интеграл

$$\widetilde{H}'_2 = \bigoplus_{T^\nu} \widetilde{H}'_{2\Lambda} d\Lambda, \quad \widetilde{\mathcal{H}}_2 = \bigoplus_{T^\nu} \widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda} d\Lambda$$

операторов $\widetilde{H}'_{2\Lambda}$ и пространств $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda} = L_2(\Gamma_\Lambda)$ так, что пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ окажутся инвариантными относительно операторов $\widetilde{H}'_{2\Lambda}$, а операторы $\widetilde{H}'_{2\Lambda}$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ действуют по формуле

$$(\widetilde{H}'_{2\Lambda} f_\Lambda)(x) = h_\Lambda(x)f_\Lambda(x) - \int_{T^\nu} h_{1\Lambda}(x; t)f_\Lambda(t) dt,$$

где $h_\Lambda(x) = h(x; \Lambda - x)$, $h_{1\Lambda}(x; t) = h_1(x; \Lambda - x; t)$, $f_\Lambda(x) = f(x; \Lambda - x)$.

Известно, что непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}'_{2\Lambda}$ не зависит от функций $h_{1\Lambda}(x; t)$ и состоит из отрезков $G_\Lambda = [m_\Lambda; M_\Lambda]$, где $m_\Lambda = \inf_x h_\Lambda(x)$ и $M_\Lambda = \sup_x h_\Lambda(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Собственная функция $\varphi_\Lambda \in L_2(T^\nu \times T^\nu)$ оператора $\tilde{H}'_2$, отвечающая собственному значению z_Λ , называется *связанным состоянием* (СС) оператора $\tilde{H}'_2$, а величина z_Λ – *энергией* этого состояния.

Спектр и СС оператора энергии двухмагнонных систем были изучены в работах [4], [5], где показано, что такие системы в ν -мерной решетке имеют не более чем $2\nu + 1$ СС со значениями энергии, лежащими вне области G_Λ – непрерывного спектра системы.

4. СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА ТРЕХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Сначала определим структуру существенного спектра рассматриваемой трехчастичной системы, состоящей из двух магнонов и примесного спина, а затем оценим количество трехчастичных СС этой системы. Сравнивая формулы (??) и (6) и используя тензорные произведения гильбертовых пространств и тензорные произведения операторов в гильбертовых пространствах [6], можно убедиться, что оператор $\tilde{H}_2$ можно представить в виде $\tilde{H}_2 = \tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1 + K_1 + K_2$, где E – единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}_1$, а операторы K_1 , K_2 являются интегральными операторами следующего вида:

$$(K_1 f)(x; y) = J \int_{T^\nu} k_1(x; y; s) f(s; x + y - s) ds,$$

$$(K_2 f)(x; y) = \varepsilon \int_{T^\nu} \int_{T^\nu} k_2(x; y; s; t) f(s; t) ds dt.$$

Ядра этих операторов соответственно имеют вид

$$k_1(x; y; s) = 4\nu - \sum_{i=1}^{\nu} [\cos x_i + \cos y_i + \cos s_i + \cos(x_i + y_i - s_i) - \cos(x_i - s_i) - \cos(y_i - s_i)],$$

$$k_2(x; y; s; t) = 2\nu + 2 \sum_{i=1}^{\nu} \{ [\cos(x_i - s_i) + \cos(y_i - t_i) + \cos(x_i + y_i - s_i - t_i)] - \cos t_i - \cos s_i - \cos x_i - \cos y_i - \cos(x_i - s_i - t_i) - \cos(y_i - s_i - t_i) - \cos(x_i + y_i - t_i) - \cos(x_i + y_i - s_i) \},$$

где $\varepsilon = J_0 - J$.

Как уже отмечалось (см. раздел 3), при фиксированном полном квазиимпульсе двухмагнонной подсистемы $x + y = \Lambda$ оператор H'_2 и пространство $\mathcal{H}_2$ можно разложить в прямой интеграл:

$$\tilde{H}'_2 = \bigoplus \int_{T^\nu} \tilde{H}'_{2\Lambda} d\Lambda, \quad \mathcal{H}_2 = \bigoplus \int_{T^\nu} \mathcal{H}_{2\Lambda} d\Lambda,$$

так что после этого разложения операторы $K_{1\Lambda}$ становятся компактными операторами.

Из выражений для ядер операторов K_1 и K_2 видно, что операторы $K_{1\Lambda}$ и K_2 являются операторами конечного ранга, т. е. конечномерными операторами. Поэтому существенные спектры оператора $\tilde{H}_2$ и оператора $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$ совпадают.

Простая проверка показывает, что спектр оператора $\tilde{H}_1$ не зависит от Λ , т.е. от λ и μ . Спектр оператора $A \otimes E + E \otimes B$, где A и B – плотно определенные ограниченные линейные операторы, был изучен в работах [7]–[9]. В этих работах даны явные формулы, выражающие $\sigma_{\text{ess}}(A \otimes E + E \otimes B)$ и $\sigma_{\text{disc}}(A \otimes E + E \otimes B)$ через $\sigma(A)$, $\sigma_{\text{disc}}(A)$, $\sigma(B)$ и $\sigma_{\text{disc}}(B)$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{disc}}(A \otimes E + E \otimes B) &= \{\sigma(A) \setminus \sigma_{\text{ess}}(A) + \sigma(B) \setminus \sigma_{\text{ess}}(B)\} \setminus \{(\sigma_{\text{ess}}(A) + \sigma(B)) \cup \\ &\quad \cup (\sigma(A) + \sigma_{\text{ess}}(B))\}, \\ \sigma_{\text{ess}}(A \otimes E + E \otimes B) &= (\sigma_{\text{ess}}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{\text{ess}}(B)).\end{aligned}$$

Ясно, что $\sigma(A \otimes E + E \otimes B) = \{\lambda + \mu: \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$. Из результатов работы [2] видно, что спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из непрерывного спектра и не более чем трех собственных значений, которые соответственно невырождены, ν -кратно и $(\nu - 1)$ -кратно вырождены.

Следующие теоремы описывают структуру существенного спектра оператора $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\nu = 1$ и $0 < \varepsilon \leq -J$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из единственного отрезка $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -8J]$, и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $0 \leq N \leq 12$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\nu = 1$ и $J \leq \varepsilon < 0$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из объединения двух отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -8J] \cup [z_1; -4J + z_1]$, и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $1 \leq N \leq 13$.

ТЕОРЕМА 3. Если $\nu = 1$ и $\varepsilon > -J$ или $\varepsilon < J$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из объединения трех отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -8J] \cup [z_1; -4J + z_1] \cup [z_2; -4J + z_2]$, и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $3 \leq N \leq 15$.

ТЕОРЕМА 4. Если $\nu = 2$ и $0 < \varepsilon \leq -J$ или $J/3 < \varepsilon < 0$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из единственного отрезка $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -16J]$, и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $0 \leq N \leq 22$.

ТЕОРЕМА 5. Если $\nu = 2$ и $-J < \varepsilon \leq -100J/27$ или $25J/9 < \varepsilon < 0$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из объединения двух отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -16J] \cup [z_1; -8J + z_1]$, и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $1 \leq N \leq 23$.

ТЕОРЕМА 6. Если $\nu = 2$ и $-100J/27 < \varepsilon \leq -25J/9$ или $100J/27 < \varepsilon \leq 25J/9$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из объединения трех отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -16J] \cup [z_1; -8J + z_1] \cup [z_2; -8J + z_2]$, и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $3 \leq N \leq 25$.

ТЕОРЕМА 7. Если $\nu = 2$ и $\varepsilon > -25J/9$ или $\varepsilon \leq 100J/27$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из объединения четырех отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -16J] \cup [z_1; -8J + z_1] \cup [z_2; -8J + z_2] \cup [z_3; -8J + z_3]$, и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $6 \leq N \leq 28$.

ТЕОРЕМА 8. Если $\nu = 3$ и $0 < \varepsilon < -J$ или $J/3 < \varepsilon < 0$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из единственного отрезка $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -24J]$, и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $0 \leq N \leq 32$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3 (п. А) работы [2] видно, что для $\nu = 3$ и $0 < \varepsilon < -J$ или $J/3 < \varepsilon < 0$ оператор $\tilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$, а непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ состоит из отрезка $[0; -12J]$, поэтому существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из отрезка $[0; -24J]$, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = \sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_1) + \sigma(\tilde{H}_1) = \{\lambda + \mu: \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_1), \mu \in \sigma(\tilde{H}_1)\} = [0; -24J]$. Поэтому оператор $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$ вне отрезка $[0; -24J]$ не имеет собственных значений, а операторы $(K_{1\Lambda}f)(x) = (K_{1\Lambda}f)(x; \Lambda - x)$ и $(K_2f)(x; y)$ являются операторами рангов 7 и 25 соответственно. Следовательно, в этом случае число трехчастичных СС $N \leq 32$. ■

Теоремы 1–7 доказываются аналогично.

Введем обозначения:

$$a = \int_{T^3} \frac{\sin^2 s_1 ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_3}, \quad b = \int_{T^3} \frac{(\cos s_1 - \cos s_2)^2 ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_3}.$$

Ясно, что $0 < a < b < 1$ и $2a < b$.

ТЕОРЕМА 9. Если $\nu = 3$ и $-J \leq \varepsilon < -2J/b$ или $2J/b \leq \varepsilon \leq J/3$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из объединения двух отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1]$, где z_1 – решение уравнения (8), и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $1 \leq N \leq 33$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3 (п. Б) работы [2] видно, что для $\nu = 3$ и $2J/b \leq \varepsilon \leq J/3$ или $-J \leq \varepsilon < -2J/b$ оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = z_1$, лежащее вне области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Поэтому множество $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = \sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_1) + \sigma(\tilde{H}_1) = \{\lambda + \mu: \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_1), \mu \in \sigma(\tilde{H}_1)\}$ состоит из объединения двух отрезков: $[0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1]$, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1]$. Число $2z_1$ является собственным значением для оператора $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$, и оно лежит вне области существенного спектра оператора $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$. Поэтому для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $1 \leq N \leq 33$. ■

ТЕОРЕМА 10. Если $\nu = 3$ и $-2J/b \leq \varepsilon < -J/a$ или $J/a \leq \varepsilon \leq 2J/b$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из объединения трех отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1] \cup [z_2; -12J + z_2]$, где z_1 – решение уравнения (8), а z_2 – решение уравнения (9), и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $3 \leq N \leq 35$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3 (п. В) работы [2] видно, что для $\nu = 3$ и $-2J/b \leq \varepsilon \leq J/a$ или $-J/a \leq \varepsilon \leq 2J/b$ оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2 , лежащих вне области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Поэтому множество $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = \sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_1) + \sigma(\tilde{H}_1) = \{\lambda + \mu: \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_1), \mu \in \sigma(\tilde{H}_1)\}$ состоит из объединения трех отрезков: $[0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1] \cup [z_2; -12J + z_2]$, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1] \cup [z_2; -12J + z_2]$. Числа $2z_1$, $2z_2$ и $z_1 + z_2$ являются собственными значениями для оператора $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$, и они лежат

вне области существенного спектра оператора $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$. Поэтому для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $3 \leq N \leq 35$. ■

ТЕОРЕМА 11. Если $\varepsilon \geq -J/a$ или $\varepsilon \leq J/a$, то существенный спектр оператора $\tilde{H}_2$ состоит из объединения четырех отрезков: $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1] \cup [z_2; -12J + z_2] \cup [z_3; -12J + z_3]$, где z_1, z_2, z_3 – соответственно решения уравнений (8)–(10), и для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $6 \leq N \leq 38$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3 (п. Г) работы [2] видно, что для $\nu = 3$ и $\varepsilon \geq -J/a$ или $\varepsilon \leq J/a$ оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно три собственных значения z_1, z_2 и z_3 , лежащих вне области непрерывного спектра оператора $\tilde{H}_1$. Поэтому множество $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = \sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_1) + \sigma(\tilde{H}_1) = \{\lambda + \mu: \lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_1), \mu \in \sigma(\tilde{H}_1)\}$ состоит из объединения четырех отрезков: $[0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1] \cup [z_2; -12J + z_2] \cup [z_3; -12J + z_3]$, т. е. $\sigma_{\text{ess}}(\tilde{H}_2) = [0; -24J] \cup [z_1; -12J + z_1] \cup [z_2; -12J + z_2] \cup [z_3; -12J + z_3]$. Числа $2z_1, 2z_2, 2z_3, z_1 + z_2, z_1 + z_3$ и $z_2 + z_3$ являются собственными значениями для оператора $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$, и они лежат вне области существенного спектра оператора $\tilde{H}_1 \otimes E + E \otimes \tilde{H}_1$. Поэтому для числа трехчастичных СС имеет место соотношение $6 \leq N \leq 38$.

Отметим, что структура существенного спектра рассматриваемого оператора в трехмерном случае была исследована в работе автора [10], где была показана конечность дискретного спектра системы в краях существенного спектра.

Результаты, относящиеся к случаям размерности $\nu = 1$ и $\nu = 2$, являются новыми. Для случая $\nu = 3$ конечность дискретного спектра установлена в [10], в настоящей работе даны новые оценки для числа N трехчастичных СС.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору В. И. Чилину за полезные обсуждения. Автор также признателен Р. А. Минлосу за замечания, которые способствовали улучшению настоящей работы.

Список литературы

- [1] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. т. 3, Мир, М., 1982.
- [2] С. М. Ташпулатов, *ТМФ*, **126**:3 (2001), 482–488.
- [3] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Наука, М., 1968.
- [4] M. Wortis, *Phys. Rev.*, **132**:1 (1963), 85–97.
- [5] С. М. Ташпулатов, *ТМФ*, **107**:1 (1996), 155–161.
- [6] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [7] T. Ichinose, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **235** (1978), 75–113.
- [8] T. Ichinose, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **237** (1978), 223–254.
- [9] T. Ichinose, “On the spectral properties of tensor products of linear operators in Banach spaces”, *Spectral Theory*, Banach Center Publ., **8**, eds. W. Żelazko, PWN, Warsaw, 1982, 294–300.
- [10] С. М. Ташпулатов, *ТМФ*, **162**:2 (2010), 227–242.