Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, Об эквивалентности различных подходов к построению многосолитонных решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили-II, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 1, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:37:59

© 2010 г. М. Бойти*, Ф. Пемпинелли*, А. К. Погребков†, Б. Принари‡*

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ МНОГОСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ-II

Неожиданно богатая структура многосолитонных решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили-II ранее исследовалась с использованием различных подходов: от метода одевания до сплетающих преобразований и τ -функциональной формулировки. Все эти подходы доказали свою полезность для выяснения различных свойств этих решений и соответствующих решений Йоста. Цель наших исследований – ввести явные формулы, связывающие все эти подходы. Обсуждаются некоторые скрытые свойства инвариантности таких многосолитонных решений.

Ключевые слова: уравнение Кадомцева–Петвиашвили-II, преобразование Беклунда, τ -функция, солитон.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП) в его версии, называемой КП-II

$$(u_t - 6uu_{x_1} + u_{x_1x_1x_1})_{x_1} = -3u_{x_2x_2}, \quad (1.1)$$

где $u = u(x, t)$, $x = (x_1, x_2)$, а индексы x_1 , x_2 и t означают частные производные, является $(2 + 1)$ -мерным обобщением знаменитого уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ). Существуют две неэквивалентные версии уравнений КП, отвечающие выбору знака в правой части, как в (1.1), и выбору противоположного знака (уравнение КП-I). Уравнения КП были выведены как модель слабодвумерных волн с малой амплитудой и большой длиной волны в слабо диспергирующей среде [1]. С начала 70-х годов известно [2], [3], что эти уравнения интегрируемы и могут рассматриваться как прототипичные $(2 + 1)$ -мерные интегрируемые уравнения.

Уравнение КП-II интегрируемо в силу того, что его можно связать с оператором

$$\mathcal{L}(x, \partial_x) = -\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - u(x), \quad (1.2)$$

*Dipartimento di Fisica, Università del Salento and Sezione, INFN, Lecce, Italy

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

E-mail: pogreb@mi.ras.ru

‡Department of Mathematics, University of Colorado, Colorado Springs, USA

задающим хорошо известное уравнение теплопроводности. Спектральная теория оператора (1.2) в случае вещественного потенциала $u(x)$, быстро убывающего на пространственной бесконечности, была развита в работах [4]–[7]. Однако этот случай не является наиболее интересным, поскольку уравнение КП-II было предложено в статье [1] именно для рассмотрения слабого двумерного поперечного возмущения односолитонного решения уравнения КдФ. Действительно, уравнение КП-II допускает односолитонное решение вида

$$u(x, t) = -\frac{(a-b)^2}{2} \operatorname{sch}^2 \left[\frac{a-b}{2} x_1 + \frac{a^2-b^2}{2} x_2 - 2(a^3-b^3)t \right], \quad (1.3)$$

где a и b – произвольные вещественные константы.

В литературе известны различные методы построения многосолитонных решений уравнения КП-II: в работе [8] решения были найдены с помощью метода Хироты, в работах [9] и [10] – с помощью метода одевания, в монографии [11] – с помощью преобразований Дарбу, а в статье [12] – с помощью техники вронскиана. Помимо этого в работах [13]–[17] было описано неупругое и резонансное рассеяние солитонов, наличие которого существенно отличает уравнение КП-II от уравнения КП-I. В последнее время большое внимание привлекла к себе проблема построения наиболее общих N -солитонных решений и их взаимодействий. В работе [18] вариант метода одевания был применен к “наложению” N солитонов на произвольный гладкий убывающий фон и для получения соответствующих решений Йоста. В этой работе был детально исследован двухсолитонный случай, показавший, что солитоны могут взаимодействовать неупруго и что их можно создавать и уничтожать. В серии статей [19]–[23], с использованием конечномерной версии теории Сато для КП-иерархии [24] было показано, что общее N -солитонное решение может быть выражено в терминах τ -функций. Детальное исследование этих решений показало, что они описывают нетривиальные пространственные взаимодействующие модели, резонансы и сетевые структуры. Обзор этих результатов дан в статье [25], а приложения к волнам на мелкой воде – в работах [25], [26]. В работе [27] решения, отвечающие N солитонам, “наложенным” на произвольный гладкий убывающий фон, и соответствующие решения Йоста были построены с помощью метода сплетающих преобразований.

Что касается спектральной теории оператора теплопроводности (1.2), то в статье [28] был развит метод обратной задачи для возмущенного односолитонного потенциала. В работе [29] была линеаризована начальная задача для уравнения КП-II с начальными данными, не убывающими вдоль прямой, при некоторых дополнительных ограничениях на спектральные данные. Однако теория, включающая также многосолитонные потенциалы, еще ждет своего построения. При решении аналогичной проблемы для нестационарного оператора Шредингера, ассоциированного с уравнением КП-I, в работе [30] был введен метод расширенной резольвенты. Соответственно, чтобы решить спектральную задачу для оператора теплопроводности, когда потенциал $u(x)$ описывает N солитонов, среди различных процедур, использованных для вывода этих потенциалов, необходимо найти именно ту, которая может быть применена для построения соответствующей расширенной резольвенты.

Поэтому цель настоящей работы – проанализировать эти различные процедуры и их взаимосвязи.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы формулируем основные понятия и приводим в общих чертах некоторые элементы стандартной задачи рассеяния для оператора (1.2) в случае убывающего потенциала. В разделе 3 мы даем обзор многосолитонных потенциалов, построенных в статье [18] посредством решения $\bar{\partial}$ -задачи, заданной рациональным преобразованием спектральных данных общего положения. В разделе 4 мы рассматриваем многосолитонные потенциалы, полученные в работе [27] с использованием сплетающих преобразований, и их связь с потенциалами, приведенными в разделе 3. В разделе 5 мы выводим некоторые альтернативные, более симметричные представления для чисто солитонных потенциалов и показываем, что они совпадают с представлениями, полученными в статьях [19]–[23] с помощью τ -функционального подхода. В разделе 6 мы рассматриваем свойства инвариантности многосолитонных потенциалов по отношению к преобразованиям солитонных параметров. Мы также выводим симметричные представления для решений Йоста, показывающие, что они, подобно решениям Бейкера–Ахиезера, могут быть получены путем мивовского сдвига [31] (см. также работу [25]).

Предварительная версия этой статьи, содержащая все основные результаты, была опубликована в электронном архиве [32]. Вскоре после этого появился е-принт [33], где представлены некоторые весьма близкие результаты, касающиеся потенциалов, а также воспроизведена классификация двусолитонных потенциалов, данная в работе [18].

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Уравнение КП-II может быть представлено как условие совместности $[\mathcal{L}, \mathcal{T}] = 0$ пары Лакса [2], [3], где $\mathcal{L}$ – оператор теплопроводности, определенный в (1.2), а оператор $\mathcal{T}$ задается как

$$\mathcal{T}(x, \partial_x, \partial_t) = \partial_t + 4\partial_{x_1}^3 - 6u\partial_{x_1} - 3u_{x_1} - 3\partial_{x_1}^{-1}u_{x_2}. \quad (2.1)$$

Поскольку оператор теплопроводности не самодуален, следует рассмотреть также дуальный оператор $\mathcal{L}^d(x, \partial_x) = \partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - u(x)$ и ввести решение Йоста $\Phi(x, \mathbf{k})$ и дуальное решение Йоста $\Psi(x, \mathbf{k})$, удовлетворяющие уравнениям

$$\mathcal{L}(x, \partial_x)\Phi(x, \mathbf{k}) = 0, \quad \mathcal{L}^d(x, \partial_x)\Psi(x, \mathbf{k}) = 0, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{k}$ – произвольная комплексная переменная, играющая роль спектрального параметра.

Для нормировки этих решений Йоста вводятся две функции

$$\chi(x, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}x_1 + \mathbf{k}^2 x_2} \Phi(x, \mathbf{k}), \quad \xi(x, \mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}x_1 - \mathbf{k}^2 x_2} \Psi(x, \mathbf{k}), \quad (2.3)$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$(-\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - 2i\mathbf{k}\partial_{x_1} - u(x))\chi(x, \mathbf{k}) = 0, \quad (2.4a)$$

$$(\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 + 2i\mathbf{k}\partial_{x_1} - u(x))\xi(x, \mathbf{k}) = 0. \quad (2.4b)$$

Тогда условие нормировки на $\mathbf{k}$ -бесконечности формулируется как

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} \chi(x, \mathbf{k}) = 1, \quad \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} \xi(x, \mathbf{k}) = 1, \quad (2.5)$$

так что в силу уравнений (2.4) эти функции связаны с потенциалом $u(x)$ уравнения теплопроводности посредством соотношений

$$u(x) = -2i \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} \mathbf{k} \partial_{x_1} \chi(x, \mathbf{k}) = 2i \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} \mathbf{k} \partial_{x_1} \xi(x, \mathbf{k}). \quad (2.6)$$

Вещественность потенциала $u(x)$, которая здесь всегда предполагается, эквивалентна свойствам сопряжения

$$\overline{\chi(x, \mathbf{k})} = \chi(x, -\bar{\mathbf{k}}), \quad \overline{\xi(x, \mathbf{k})} = \xi(x, -\bar{\mathbf{k}}). \quad (2.7)$$

В случае потенциала $u(x) \equiv u_0(x)$, быстро убывающего на пространственной бесконечности, согласно работам [4]–[7] основными средствами построения спектральной теории оператора (1.2), как в одномерном случае, являются интегральные уравнения, решения которых определяют соответствующие нормированные решения Йоста $\chi_0(x, \mathbf{k})$ и $\xi_0(x, \mathbf{k})$:

$$\chi_0(x, \mathbf{k}) = 1 + \int dx' G_0(x - x', \mathbf{k}) u_0(x') \chi_0(x', \mathbf{k}), \quad (2.8a)$$

$$\xi_0(x, \mathbf{k}) = 1 + \int dx' G_0(x' - x, \mathbf{k}) u_0(x') \xi_0(x', \mathbf{k}), \quad (2.8b)$$

где

$$G_0(x, \mathbf{k}) = -\frac{\operatorname{sgn} x_2}{2\pi} \int d\alpha \theta(\alpha(\alpha - 2\operatorname{Re} \mathbf{k}) x_2) e^{i\alpha x_1 - \alpha(\alpha - 2\mathbf{k}) x_2} \quad (2.9)$$

– функция Грина голого оператора теплопроводности, $(-\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2) G_0(x, \mathbf{k}) = \delta(x)$.

В силу (2.8) функции χ_0 и ξ_0 имеют следующее асимптотическое поведение на x -плоскости:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \chi_0(x, \mathbf{k}) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \xi_0(x, \mathbf{k}) = 1. \quad (2.10)$$

Однако если потенциал $u(x)$ не убывает на пространственной бесконечности, как в случае солитонных потенциалов, то интегральные уравнения (2.8) плохо определены, и необходимо найти более общий подход. Спектральная теория уравнения КП-П, включающая также и солитонные решения, была исследована с помощью резольвентного подхода. В этих рамках удалось распространить метод обратной задачи на решения, описывающие один солитон на произвольном фоне [28], и исследовать проблему существования (расширенной) резольвенты для некоторых многосолитонных решений [27]. Общая теория, в известном смысле, все еще находится в процессе построения. В настоящей статье, однако, мы рассматриваем только различные подходы к построению солитонных потенциалов и соответствующих решений Йоста.

3. МНОГОСОЛИТОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В МЕТОДЕ ОДЕВАНИЯ

В работе [18] нами был использован вариант метода одевания для построения потенциала $u(x)$, описывающего N солитонов, наложенных на общий фоновый потенциал $u_0(x)$. Более точно, мы рассмотрели потенциал $u(x)$ со спектральными

данными, полученными путем рационального преобразования спектральных данных исходного (гладкого, убывающего на бесконечности) потенциала $u_0(x)$ общего положения и преобразовали задачу нахождения такого потенциала $u(x)$ в $\bar{\partial}$ -задачу относительно соответствующих решений Йоста, которая была решена с использованием процедуры одевания. Рациональное преобразование было выбрано зависящим от N пар вещественных различных параметров $a_j, b_j, j = 1, \dots, N$, а на решении Йоста $\Phi(x, \mathbf{k})$ и $\Psi(x, \mathbf{k})$ налагалось требование, чтобы они обладали нужными аналитическими свойствами, удовлетворяли условию нормировки, как в (2.3), (2.5), и свойству сопряжения (2.7).

Преобразованный потенциал $u(x)$ дается следующей формулой:

$$u(x) = u_0(x) - 2\partial_{x_1}^2 \det[C + \mathcal{F}(x)], \quad (3.1)$$

где C – вещественная постоянная $(N \times N)$ -матрица и $\mathcal{F}(x)$ – $(N \times N)$ -матричная функция x с элементами

$$\mathcal{F}_{lj}(x) = \int_{\substack{(b_1 - a_1)\infty < y_1 < x_1, \\ y_2 = x_2}} dy_1 \Psi_0(y, ib_l) \Phi_0(y, ia_j), \quad l, j = 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

где $(b_1 - a_1)\infty$ обозначает предел интегрирования, равный бесконечности со знаком, совпадающим с $\text{sgn}(b_1 - a_1)$, и $\Phi_0(x, \mathbf{k})$ и $\Psi_0(x, \mathbf{k})$ суть решение Йоста и дуальное решение Йоста уравнений (2.2) с потенциалом $u_0(x)$. Заметим, что матричные элементы функции $\mathcal{F}(x)$ выражаются в терминах значений так называемой функции Коши–Бейкера–Ахизера [34] в точках a_j и $b_l, j, l = 1, \dots, N$. В работе [18] мы показали, что матрица C не обязана быть ни регулярной, ни диагональной. Мы также отметили, что для получения вещественного потенциала достаточно рассмотреть более общую ситуацию с комплексными параметрами a_j и b_j такими, что

$$a_j = \bar{a}_{\pi_a(j)}, \quad b_j = \bar{b}_{\pi_b(j)}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

где черта означает комплексное сопряжение, а π_a, π_b – некоторые перестановки индексов (с соответствующей модификацией ограничений на постоянную матрицу C). Однако этот случай заметно более сложен для исследования, и мы его здесь не рассматриваем.

Если апостериори фоновый потенциал u_0 выбирается тождественно равным нулю, то собственные функции в (3.2) являются чисто экспоненциальными функциями,

$$\Phi_0(x, ia_j) = e^{A_j(x)}, \quad \Psi_0(x, ib_l) = e^{-B_l(x)},$$

где для удобства использования в дальнейшем мы ввели обозначения

$$A_j(x) = a_j x_1 + a_j^2 x_2, \quad B_l(x) = b_l x_1 + b_l^2 x_2, \quad j, l = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4)$$

Тогда матричный элемент (3.2) принимает вид

$$\mathcal{F}_{lj}(x) = e^{-B_l(x)} \Lambda_{lj} e^{A_j(x)}, \quad (3.5)$$

где Λ – матрица Коши,

$$\Lambda_{lj} = \frac{1}{a_j - b_l}. \quad (3.6)$$

Отметим, что в работе [18] зависимость от времени не была указана, но она сводится просто к учету зависимости от времени исходных решений Йоста $\Phi_0(x, \mathbf{k})$ и $\Psi_0(x, \mathbf{k})$, фиксированной выбором второго лаковского оператора (2.1). В случае $u_0(x, t) \equiv 0$ это означает, что вместо (3.4) мы должны использовать

$$A_j(x, t) = a_j x_1 + a_j^2 x_2 - 4a_j^3 t, \quad B_l(x, t) = b_l x_1 + b_l^2 x_2 - 4b_l^3 t. \quad (3.7)$$

В работе [18] мы обращались к проблеме регулярности потенциалов, равно как и к их асимптотическому поведению, только в случае $N = 2$, т. е. для двухсолитонных потенциалов. В этом специальном случае мы смогли сформулировать условия на (2×2) -матрицу C , которые гарантировали регулярность потенциала $u(x)$, и показали, что на больших расстояниях на x -плоскости потенциал убывает экспоненциально быстро за исключением направлений вдоль некоторых специальных лучей, где он имеет солитонное одномерное поведение вида (1.3). Классификация двухсолитонных потенциалов, данная в работе [18], была затем последовательно обобщена на случай N солитонов в статьях [23], [25].

4. МНОГОСОЛИТОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В МЕТОДЕ СПЛЕТАЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

4.1. Эквивалентность N -солитонных потенциалов, полученных в статьях [18] и [27]. В этом пункте мы рассматриваем чисто солитонные потенциалы уравнения теплопроводности, полученные путем сплетающих преобразований. Детали этого построения см. в работе [27]. Преобразование общего (гладкого, убывающего на бесконечности) исходного потенциала $u_0(x)$ в новый потенциал $u(x)$, который описывает N солитонов, “наложенных” на фон $u_0(x)$, задается двумя наборами вещественных параметров $\{a_1, \dots, a_{N_a}\}$ и $\{b_1, \dots, b_{N_b}\}$, которые мы полагаем все различными, и вещественной $(N_a \times N_b)$ -матрицей c . Числа N_a и N_b не обязаны быть равными, но

$$N_a, N_b \geq 1. \quad (4.1)$$

Мы обозначаем $N = \max\{N_a, N_b\}$. Выражение для чисто N -солитонного потенциала следует непосредственно из соотношений, выведенных в работе [27], если взять $u_0(x) \equiv 0$. А именно, мы имеем

$$u(x) = -2\partial_{x_1}^2 \ln \tau_1(x), \quad (4.2)$$

где

$$\tau_1(x) = \det(E_{N_a} + c\mathcal{F}(x)) \equiv \det(E_{N_b} + \mathcal{F}(x)c), \quad (4.3)$$

и мы ввели единичную $(N_a \times N_a)$ -матрицу E_{N_a} , единичную $(N_b \times N_b)$ -матрицу E_{N_b} , диагональные матрицы

$$e^{A(x)} = \text{diag}\{e^{A_j(x)}, j = 1, \dots, N_a\}, \quad e^{-B(x)} = \text{diag}\{e^{-B_l(x)}, l = 1, \dots, N_b\} \quad (4.4)$$

(см. (3.4)) и $(N_b \times N_a)$ -матричную функцию $\mathcal{F}(x) = \|\mathcal{F}_{lj}(x)\|_{l=1, \dots, N_b}^{j=1, \dots, N_a}$ (ср. (3.5)), так что

$$\mathcal{F}(x) = e^{-B(x)} \Lambda e^{A(x)}, \quad (4.5)$$

где Λ – постоянная $(N_b \times N_a)$ -матрица с элементами, заданными в (3.6).

Покажем теперь, что потенциалы, заданные в (3.1) с помощью $(N \times N)$ -матриц C и $\mathcal{F}$, совпадают с теми, которые получены посредством сплетающих преобразований и выражены через матрицы c и $\mathcal{F}$ в (4.3). Это очевидно, если $N_a = N_b$ и матрицы C и c не сингулярны. Тогда достаточно положить $c = C^{-1}$, при этом детерминанты в (3.1) и (4.3) равны друг другу с точностью до несущественного постоянного множителя.

Общая ситуация немного более сложна. Чтобы сделать явным размер участвующих в построении матриц, мы используем обозначение A_N для $(N \times N)$ -матрицы A . Рассмотрим для определенности случай $N_a \leq N_b \equiv N$. Пусть c_N обозначает $(N \times N)$ -матрицу, полученную путем добавления $N_b - N_a$ нулевых строк к матрице c . Принимая во внимание, что произведение $\mathcal{F}c$ во втором равенстве в (4.3) является $(N \times N)$ -матрицей, замечаем, что $(\mathcal{F})_N c_N = \mathcal{F}c$, где

$$\mathcal{F}_N = (e^{-B})_N \Lambda_N (e^A)_N, \quad (4.6)$$

а параметры a_j , $j = N_a + 1, N_a + 2, \dots, N$, в $(e^A)_N$ и в Λ_N могут быть выбраны произвольно при условии, что они отличны от параметров b_l . Хорошо известно, что матрица Коши Λ_N обратима и $\Lambda_N^{-1} = G_N \tilde{\Lambda}_N F_N$, где $\tilde{\Lambda}_N$ получена из матрицы Λ_N взаимным переименованием a_j в b_j , а G_N и F_N – две обратимые диагональные матрицы. Поэтому для второго детерминанта в (4.3) мы имеем

$$\begin{aligned} \det(E_{N_b} + \mathcal{F}c) &= \det(E_N + \mathcal{F}_N c_N) = \\ &= \det(e^{-B} \Lambda e^A G F)_N \det((e^{-A})_N \tilde{\Lambda}_N (e^B)_N + G_N^{-1} c_N F_N^{-1}). \end{aligned}$$

Множитель $\det(e^{-B} \Lambda e^A G F)_N$ не дает вклада в потенциал благодаря производной в (4.2). Более того, в силу (3.5) и (4.6) $(N \times N)$ -матрица $e^{-A(x)} \tilde{\Lambda} e^{B(x)}$ совпадает с $(N \times N)$ -матрицей $\mathcal{F}(x)$ в (3.5), как только параметры a_j и b_j взаимно заменены. Поэтому соотношения (4.3) и (4.2) действительно порождают те же потенциалы при условии, что

$$c_N = G_N C F_N \quad (4.7)$$

и параметры a_j переименованы в b_j и наоборот.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. В случае ненулевого исходного потенциала $u_0(x)$ можно доказать, что два потенциала, полученные при этих двух подходах, эквивалентны с точностью до дополнительного слагаемого $\partial_{x_1}^2 \ln \det \mathcal{F}_N(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Здесь и ниже мы опускаем зависимость от времени, поскольку ее легко включить, используя (3.7) вместо (3.4).

4.2. Условия регулярности потенциала. Учитывая ведущуюся дискуссию о необходимых и достаточных условиях регулярности многосолитонных решений уравнений в иерархии уравнения КП-II, мы воспроизводим здесь в эквивалентной формулировке условия, достаточные для регулярности многосолитонных потенциалов уравнения теплопроводности, а следовательно, и многосолитонных решений уравнения КП-II, уже данные в работах [20], [25].

Рассмотрим снова второе равенство в (4.3). Мы имеем

$$\det(E_{N_b} + \mathcal{F}c) = \sum_{n=0}^{N_b} \sum_{1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_n \leq N_b} (\mathcal{F}c) \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots, l_n \\ l_1, l_2, \dots, l_n \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Здесь и далее $A \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots, l_n \\ l_1, l_2, \dots, l_n \end{pmatrix}$ означает минор матрицы A , полученный выбором строк с номерами $l_1, l_2, \dots, l_n$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots, j_n$. Главный минор произведения $\mathcal{F}c$ в (4.8) может быть записан по формуле Бине–Коши как

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}c) \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots, l_n \\ l_1, l_2, \dots, l_n \end{pmatrix} &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq N_a} \left(\prod_{m=1}^n e^{-B_{l_m}(x)} \right) \left(\prod_{m=1}^n e^{A_{j_m}(x)} \right) \times \\ &\times \Lambda \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots, l_n \\ j_1, j_2, \dots, j_n \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_n \\ l_1, l_2, \dots, l_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{F} - (N_b \times N_a)$ -матрица, а $c - (N_a \times N_b)$ -матрица, мы получаем, что все миноры $\mathcal{F}c$ равны нулю при $n > \min(N_a, N_b)$.

Напомним, что член, отвечающий $n = 0$ в (4.8), равен единице, т. е. больше нуля, отсюда мы заключаем, что достаточное условие регулярности солитонного потенциала дается следующими характеристическими условиями на вещественную матрицу c :

$$\Lambda \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots, l_n \\ j_1, j_2, \dots, j_n \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_n \\ l_1, l_2, \dots, l_n \end{pmatrix} \geq 0, \quad (4.10)$$

для любого $1 \leq n \leq \min(N_a, N_b)$ и всех миноров, т. е. при любом выборе $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq N_a$ и $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_n \leq N_b$. При этом для получения нетривиального потенциала при подстановке τ_1 в (4.2) необходимо наложить условие, что по крайней мере одно из неравенств в (4.10) является строгим.

Далее, поскольку любая подматрица матрицы Коши Λ также является матрицей Коши, мы имеем для произвольного минора матрицы Λ соотношение

$$\Lambda \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots, l_p \\ j_1, j_2, \dots, j_p \end{pmatrix} = \frac{\prod_{1 \leq i < m \leq p} (a_{j_i} - a_{j_m})(b_{l_m} - b_{l_i})}{\prod_{i,m=1}^p (a_{j_i} - b_{j_m})}. \quad (4.11)$$

Таким образом, существуют такие упорядочения параметров a и b , для которых все миноры матрицы Λ положительны. Например, если

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{N_a-1} < a_{N_a} < b_1 < b_2 < \dots < b_{N_b-1} < b_{N_b}, \quad (4.12)$$

то условия регулярности (4.10) превращаются в

$$c \begin{pmatrix} l_1, l_2, \dots, l_n \\ j_1, j_2, \dots, j_n \end{pmatrix} \geq 0, \quad (4.13)$$

т. е. все миноры матрицы c должны быть неотрицательны. Такие матрицы называются совершенно неотрицательными матрицами [35]. Очевидно, что тот же результат получается при использовании первого равенства в (4.3), а формула Бине–Коши позволяет непосредственно проверить, что два детерминанта в (4.3) совпадают.

5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ τ -ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ

5.1. Детерминантные представления для потенциала и решений Йоста.

В работе [27] мы вывели преобразованный потенциал $u(x)$ (см. (4.2) и (4.3)) и решения Йоста прямой и дуальной задач (2.2), связанные с этим потенциалом. Соответствующие нормированные (по формулам (2.3)) решения Йоста выражаются как

$$\begin{aligned}\chi(x, \mathbf{k}) &= 1 + \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{l, l'=1}^{N_b} e^{A_j(x)} c_{jl'} (E_{N_b} + \mathcal{F}(x)c)_{ll'}^{-1} \frac{e^{-B_l(x)}}{b_l + i\mathbf{k}} \equiv \\ &\equiv 1 + \sum_{j, j'=1}^{N_a} \sum_{l=1}^{N_b} e^{A_j(x)} (E_{N_a} + c\mathcal{F}(x))_{jj'}^{-1} \frac{c_{j'l} e^{-B_l(x)}}{b_l + i\mathbf{k}},\end{aligned}\quad (5.1a)$$

$$\begin{aligned}\xi(x, \mathbf{k}) &= 1 - \sum_{j=1}^{N_a} \sum_{l, l'=1}^{N_b} \frac{e^{A_j(x)}}{a_j + i\mathbf{k}} c_{jl} (E_{N_b} + \mathcal{F}(x)c)_{ll'}^{-1} e^{-B_l(x)} \equiv \\ &\equiv 1 - \sum_{j, j'=1}^{N_a} \sum_{l=1}^{N_b} \frac{e^{A_j(x)}}{a_j + i\mathbf{k}} (E_{N_a} + c\mathcal{F}(x))_{jj'}^{-1} c_{j'l} e^{-B_l(x)}.\end{aligned}\quad (5.1б)$$

По аналогии с (4.3) все соотношения даются в двух эквивалентных формах, и, хотя достаточно сохранять только одну из них, мы продолжаем рассматривать обе, чтобы подчеркнуть свойство симметрии всей конструкции по отношению к числам N_a и N_b , играющим роль топологических зарядов.

Для получения представления равенств (4.3) и (5.1) в терминах τ -функций следует провести несколько простых алгебраических операций. Во-первых, благодаря стандартному тождеству для детерминантов объемлющих матриц, мы можем переписать (5.1) как

$$\chi(x, \mathbf{k}) = \frac{\tau_{1, \chi}(x, \mathbf{k})}{\tau_1(x)}, \quad \xi(x, \mathbf{k}) = \frac{\tau_{1, \xi}(x, \mathbf{k})}{\tau_1(x)}, \quad (5.2)$$

где $\tau_1(x)$ дано в (4.3) и

$$\tau_{1, \chi}(x, \mathbf{k}) = \det \begin{pmatrix} E_{N_b} + \mathcal{F}(x)c & \frac{-e^{-B_*(x)}}{b_* + i\mathbf{k}} \\ \sum_{j=1}^{N_a} e^{A_j(x)} c_{j*} & 1 \end{pmatrix} \equiv \quad (5.3a)$$

$$\equiv \det \begin{pmatrix} E_{N_a} + c\mathcal{F}(x) & -\sum_{l=1}^{N_b} \frac{c_{*l} e^{-B_l(x)}}{b_l + i\mathbf{k}} \\ e^{A_*(x)} & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.3б)$$

$$\tau_{1, \xi}(x, \mathbf{k}) = \det \begin{pmatrix} E_{N_b} + \mathcal{F}(x)c & e^{-B_*(x)} \\ \sum_{j=1}^{N_a} \frac{e^{A_j(x)}}{a_j + i\mathbf{k}} c_{j*} & 1 \end{pmatrix} \equiv \quad (5.3в)$$

$$\equiv \det \begin{pmatrix} E_{N_a} + c\mathcal{F}(x) & \sum_{l=1}^{N_b} c_{*l} e^{-B_l(x)} \\ \frac{e^{A_*(x)}}{a_* + i\mathbf{k}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3г)$$

В предыдущих формулах мы используем $*$ в номере строки и столбца, объемлющих матриц $E_{N_b} + \mathcal{F}c$ и $E_{N_a} + c\mathcal{F}$, чтобы отметить индекс, бегущий, соответственно, от 1

до N_b и от 1 до N_a . Отметим, что функция τ_1 в (4.3) также может быть получена как предельное значение:

$$\tau_1(x) = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} \tau_{1,\chi}(x, \mathbf{k}) = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} \tau_{1,\xi}(x, \mathbf{k}). \quad (5.4)$$

Используя (2.3) для того, чтобы вернуться от (5.2) и (5.3) к решениям Йоста $\Phi(x, \mathbf{k})$ и $\Psi(x, \mathbf{k})$, можно проверить, что они имеют полюсы, соответственно, при $\mathbf{k} = ib_l$, $l = 1, \dots, N_b$, и $\mathbf{k} = ia_j$, $j = 1, \dots, N_a$, с вычетами

$$\Phi_{b_l}(x) = \text{res}_{\mathbf{k}=ib_l} \Phi(x, \mathbf{k}), \quad \Psi_{a_j}(x) = \text{res}_{\mathbf{k}=ia_j} \Psi(x, \mathbf{k}), \quad (5.5)$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\Phi_{b_l}(x) = -i \sum_{j=1}^{N_a} \Phi(x, ia_j) c_{jl}, \quad \Psi_{a_j}(x) = i \sum_{l=1}^{N_b} c_{jl} \Psi(x, ib_l). \quad (5.6)$$

Отметим, что эти уравнения совместно с требованиями аналитичности и нормирующим условием (2.10) позволяют восстановить нормированные решения Йоста (5.2) и (5.3), а затем с помощью соотношений (2.6) – потенциал $u(x)$ в виде (4.2), (4.3).

Далее, мы переписываем (5.3) как

$$\begin{aligned} \tau_{1,\chi}(x, \mathbf{k}) &= \left(\prod_{l=1}^{N_b} \frac{e^{-B_l(x)}}{b_l + i\mathbf{k}} \right) \det \begin{pmatrix} (b_* + i\mathbf{k})(e^{B(x)} + \Lambda e^{A(x)}c) & -1_* \\ \sum_{j=1}^{N_a} e^{A_j(x)} c_{j*} & 1 \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \left(\prod_{j=1}^{N_a} e^{A_j(x)} \right) \det \begin{pmatrix} e^{-A(x)} + ce^{-B(x)}\Lambda & -\sum_{l=1}^{N_b} \frac{c_{*l} e^{-B_l(x)}}{b_l + i\mathbf{k}} \\ 1_* & 1 \end{pmatrix}, \\ \tau_{1,\xi}(x, \mathbf{k}) &= \left(\prod_{l=1}^{N_b} e^{-B_l(x)} \right) \det \begin{pmatrix} e^{B(x)} + \Lambda e^{A(x)}c & 1_* \\ \sum_{j=1}^{N_a} \frac{e^{A_j(x)}}{a_j + i\mathbf{k}} c_{j*} & 1 \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \left(\prod_{j=1}^{N_a} \frac{e^{A_j(x)}}{a_j + i\mathbf{k}} \right) \det \begin{pmatrix} (e^{-A(x)} + ce^{-B(x)}\Lambda)(a_* + i\mathbf{k}) & \sum_{l=1}^{N_b} c_{*l} e^{-B_l(x)} \\ 1_* & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Путем элементарных преобразований матриц в правых частях можно сделать так, что строки и столбцы со всеми элементами, равными 1 или -1 , преобразуются в строки и столбцы со всеми элементами, равными 0, за исключением 1 на последнем месте.

Для того чтобы представить результат этих преобразований, введем функции

$$\tau_{2,\chi}(x, \mathbf{k}) = \left(\prod_{l=1}^{N_b} e^{B_l(x)} (b_l + i\mathbf{k}) \right) \tau_{1,\chi}(x, \mathbf{k}), \quad (5.7a)$$

$$\tau'_{2,\chi}(x, \mathbf{k}) = \left(\prod_{j=1}^{N_a} \frac{e^{-A_j(x)}}{a_j + i\mathbf{k}} \right) \tau_{1,\chi}(x, \mathbf{k}), \quad (5.7б)$$

$$\tau_{2,\xi}(x, \mathbf{k}) = \left(\prod_{l=1}^{N_b} \frac{e^{B_l(x)}}{b_l + i\mathbf{k}} \right) \tau_{1,\xi}(x, \mathbf{k}), \quad (5.7в)$$

$$\tau'_{2,\xi}(x, \mathbf{k}) = \left(\prod_{j=1}^{N_a} e^{-A_j(x)} (a_j + i\mathbf{k}) \right) \tau_{1,\xi}(x, \mathbf{k}). \quad (5.7г)$$

Тогда

$$\tau_{2,\chi}(x, \mathbf{k}) = \det \left(\delta_{ll'} (b_l + i\mathbf{k}) e^{B_l(x)} + \sum_{j=1}^{N_a} \frac{a_j + i\mathbf{k}}{a_j - b_l} e^{A_j(x)} c_{jl'} \right)_{l,l'=1}^{N_b}, \quad (5.8a)$$

$$\tau'_{2,\chi}(x, \mathbf{k}) = \det \left(\delta_{jj'} \frac{e^{-A_j(x)}}{a_j + i\mathbf{k}} + \sum_{l=1}^{N_b} \frac{c_{jl} e^{-B_l(x)}}{(a_{j'} - b_l)(b_l + i\mathbf{k})} \right)_{j,j'=1}^{N_a}, \quad (5.8б)$$

$$\tau_{2,\xi}(x, \mathbf{k}) = \det \left(\delta_{ll'} \frac{e^{B_l(x)}}{b_l + i\mathbf{k}} + \sum_{j=1}^{N_a} \frac{e^{A_j(x)} c_{jl'}}{(a_j - b_l)(a_j + i\mathbf{k})} \right)_{l,l'=1}^{N_b}, \quad (5.8в)$$

$$\tau'_{2,\xi}(x, \mathbf{k}) = \det \left(\delta_{jj'} (a_j + i\mathbf{k}) e^{-A_j(x)} + \sum_{l=1}^{N_b} \frac{c_{jl} (b_l + i\mathbf{k})}{a_{j'} - b_l} e^{-B_l(x)} \right)_{j,j'=1}^{N_a}. \quad (5.8г)$$

Легко видеть, что предельные значения

$$\begin{aligned} \tau_2(x) &= \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} (i\mathbf{k})^{-N_b} \tau_{2,\chi}(x, \mathbf{k}) = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} (i\mathbf{k})^{N_b} \tau_{2,\xi}(x, \mathbf{k}), \\ \tau'_2(x) &= \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} (i\mathbf{k})^{N_a} \tau'_{2,\chi}(x, \mathbf{k}) = \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} (i\mathbf{k})^{-N_a} \tau'_{2,\xi}(x, \mathbf{k}) \end{aligned}$$

как τ -функций, так и τ' -функций с индексами χ и ξ совпадают и благодаря (5.8) равны

$$\tau_2(x) = \det \left(\delta_{ll'} e^{B_l(x)} + \sum_{j=1}^{N_a} \frac{e^{A_j(x)} c_{jl'}}{a_j - b_l} \right)_{l,l'=1}^{N_b}, \quad (5.9a)$$

$$\tau'_2(x) = \det \left(\delta_{jj'} e^{-A_j(x)} + \sum_{l=1}^{N_b} \frac{c_{jl} e^{-B_l(x)}}{a_{j'} - b_l} \right)_{j,j'=1}^{N_a}. \quad (5.9б)$$

В силу (5.4)

$$\tau_2(x) = \left(\prod_{l=1}^{N_b} e^{B_l(x)} \right) \tau_1(x), \quad \tau'_2(x) = \left(\prod_{j=1}^{N_a} e^{-A_j(x)} \right) \tau_1(x), \quad (5.10)$$

и эти выражения эквивалентны в том смысле, что порождают один и тот же потенциал

$$u(x) = -2\partial_{x_1}^2 \ln \tau_2(x) = -2\partial_{x_1}^2 \ln \tau'_2(x). \quad (5.11)$$

Для функций $\chi(x, \mathbf{k})$ и $\xi(x, \mathbf{k})$ (см. (2.3)) мы получаем, используя (5.2) и (5.7), что

$$\chi(x, \mathbf{k}) = \left(\prod_{l=1}^{N_b} (b_l + i\mathbf{k})^{-1} \right) \frac{\tau_{2,\chi}(x, \mathbf{k})}{\tau_2(x)} \equiv \left(\prod_{j=1}^{N_a} (a_j + i\mathbf{k}) \right) \frac{\tau'_{2,\chi}(x, \mathbf{k})}{\tau'_2(x)}, \quad (5.12a)$$

$$\xi(x, \mathbf{k}) = \left(\prod_{l=1}^{N_b} (b_l + i\mathbf{k}) \right) \frac{\tau_{2,\xi}(x, \mathbf{k})}{\tau_2(x)} \equiv \left(\prod_{j=1}^{N_a} (a_j + i\mathbf{k})^{-1} \right) \frac{\tau'_{2,\xi}(x, \mathbf{k})}{\tau'_2(x)}. \quad (5.12б)$$

Отметим, что функции в (5.8) могут быть получены из функций (5.9) с помощью следующих подстановок:

$$\tau_2(x) \rightarrow \tau_{2,\chi}(x, \mathbf{k}) \quad \text{при} \quad e^{A_j} \rightarrow e^{A_j}(a_j + i\mathbf{k}), \quad e^{B_l} \rightarrow e^{B_l}(b_l + i\mathbf{k}), \quad (5.13a)$$

$$\tau'_2(x) \rightarrow \tau'_{2,\chi}(x, \mathbf{k}) \quad \text{при} \quad e^{A_j} \rightarrow e^{A_j}(a_j + i\mathbf{k}), \quad e^{B_l} \rightarrow e^{B_l}(b_l + i\mathbf{k}), \quad (5.13б)$$

$$\tau_2(x) \rightarrow \tau_{2,\xi}(x, \mathbf{k}) \quad \text{при} \quad e^{A_j} \rightarrow \frac{e^{A_j}}{a_j + i\mathbf{k}}, \quad e^{B_l} \rightarrow \frac{e^{B_l}}{b_l + i\mathbf{k}}, \quad (5.13в)$$

$$\tau'_2(x) \rightarrow \tau'_{2,\xi}(x, \mathbf{k}) \quad \text{при} \quad e^{A_j} \rightarrow \frac{e^{A_j}}{a_j + i\mathbf{k}}, \quad e^{B_l} \rightarrow \frac{e^{B_l}}{b_l + i\mathbf{k}}. \quad (5.13г)$$

Эти правила позволяют заметно сократить список формул, приводимый ниже (см. также замечание 6.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В силу соотношений (5.8), (5.9) и (5.12) функция χ переходит в ξ и наоборот при преобразованиях $x \rightarrow -x$, $N_a \longleftrightarrow N_b$, $\{a_1, \dots, a_{N_a}\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_{N_a}\}$, $\{b_1, \dots, b_{N_b}\} \rightarrow \{a_1, \dots, a_{N_b}\}$ и $c_{jl} \rightarrow -c_{lj}$.

5.2. Симметричное представление потенциала и сравнение с τ -функциональным подходом. Здесь мы доказываем, что выражение (5.11) для потенциала эквивалентно тому, которое получено в рамках τ -функционального подхода в серии работ, цитированных во введении; обзор этих работ дан в статье [25].

Мы уже отмечали, что двойные представления решений Йоста, выведенные выше, подчеркивают симметричную роль, которую играют параметры a_j и b_l . Для того чтобы наглядно продемонстрировать этот факт, мы вводим $N_a + N_b$ (вещественных) параметров

$$\{\kappa_1, \dots, \kappa_{N_a+N_b}\} = \{a_1, \dots, a_{N_a}, b_1, \dots, b_{N_b}\} \quad (5.14)$$

и по аналогии с (3.4) обозначаем

$$K_n(x) = \kappa_n x_1 + \kappa_n^2 x_2, \quad n = 1, \dots, N_a + N_b, \quad (5.15)$$

где $K_n(x) = A_n(x)$ при $n = 1, \dots, N_a$ и $K_n(x) = B_{n-N_a}(x)$ при $n = N_a+1, \dots, N_a+N_b$.

В соответствии с (3.7) зависимость от времени учитывается просто путем добавления члена $-4\kappa_n^3 t$ в правую часть $K_n(x)$ (5.15).

Пусть d обозначает вещественную $(N_a \times N_b)$ -матрицу с элементами, задающимися через элементы матрицы c как

$$d_{jl} = \prod_{l'=1}^{N_b} (a_j - b_{l'})^{-1} c_{jl} \prod_{\substack{1 \leq l' \leq N_b, \\ l' \neq l}} (b_l - b_{l'}), \quad j = 1, \dots, N_a, \quad l = 1, \dots, N_b. \quad (5.16)$$

Введем также постоянные $((N_a + N_b) \times N_b)$ - и $(N_a \times (N_a + N_b))$ -матрицы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$, имеющие блочную структуру,

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} d \\ E_{N_b} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}' = (E_{N_a}, -d), \quad (5.17)$$

и постоянную диагональную, вещественную $((N_a + N_b) \times (N_a + N_b))$ -матрицу

$$\gamma = \text{diag} \left\{ \prod_{n'=1, n' \neq n}^{N_a + N_b} (\kappa_n - \kappa_{n'})^{-1}, \quad n = 1, \dots, N_a + N_b \right\}. \quad (5.18)$$

Докажем теперь, что при еще одном масштабировании $\tau_2(x)$ и $\tau'_2(x)$,

$$\tau(x) = \left(\prod_{1 \leq l < l' \leq N_b} (b_{l'} - b_l) \right) \tau_2(x), \quad (5.19a)$$

$$\tau'(x) = \left(\prod_{1 \leq j < j' \leq N_a} (a_j - a_{j'})^{-1} \right) \left(\prod_{j=1}^{N_a} \prod_{l=1}^{N_b} (a_j - b_l)^{-1} \right) \tau'_2(x), \quad (5.19b)$$

мы получаем вместо (5.9) соотношения

$$\tau(x) = \frac{\det(\mathcal{K} e^{K(x)} \mathcal{D})}{\prod_{1 \leq l < l' \leq N_b} (b_l - b_{l'})}, \quad \tau'(x) = \frac{\det(\mathcal{D}' e^{-K(x)} \gamma \mathcal{K}')}{\prod_{1 \leq j < j' \leq N_a} (a_j - a_{j'})}, \quad (5.20)$$

где по аналогии с (4.4) мы ввели диагональную $((N_a + N_b) \times (N_a + N_b))$ -матрицу

$$e^{K(x)} = \text{diag}\{e^{K_n(x)}, n = 1, \dots, N_a + N_b\}, \quad (5.21)$$

а также новые постоянные $(N_b \times (N_a + N_b))$ - и $((N_a + N_b) \times N_a)$ -матрицы

$$\mathcal{K} = \|\mathcal{K}_{ln}\|, \quad \mathcal{K}_{ln} = \prod_{\substack{1 \leq l' \leq N_b, \\ l' \neq l}} (\kappa_n - b_{l'}), \quad l = 1, \dots, N_b, \quad (5.22)$$

и

$$\mathcal{K}' = \|\mathcal{K}'_{nj}\|, \quad \mathcal{K}'_{nj} = \prod_{\substack{1 \leq j' \leq N_b, \\ j' \neq j}} (a_{j'} - \kappa_n), \quad j = 1, \dots, N_a; \quad (5.23)$$

здесь $n = 1, \dots, N_a + N_b$. Заметим, что они обладают блочной структурой, поскольку $\mathcal{K}_{l, N_a + l'}$ и $\mathcal{K}'_{j'j}$, $l, l' = 1, \dots, N_b$, $j, j' = 1, \dots, N_a$, – диагональные подматрицы. Подчеркнем также, что, поскольку $N_a, N_b \geq 1$ (см. (4.1)), постоянные матрицы $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ не являются квадратными, и потому детерминанты не могут быть разложены в произведения детерминантов, что привело бы к $u(x) \equiv 0$.

Чтобы доказать равенство (5.20), заметим, что

$$\begin{aligned} (\mathcal{K} e^{K(x)} \mathcal{D})_{l, l'=1}^{N_b} &\equiv \left(\sum_{n=1}^{N_a + N_b} \left(\prod_{\substack{1 \leq l'' \leq N_b, \\ l'' \neq l}} (\kappa_n - b_{l''}) \right) e^{K_n(x)} \mathcal{D}_{nl'} \right)_{l, l'=1}^{N_b} = \\ &= \sum_{j=1}^{N_a} e^{A_j(x)} d_{jl'} \prod_{\substack{1 \leq l'' \leq N_b, \\ l'' \neq l}} (a_j - b_{l''}) + \sum_{l''=1}^{N_b} e^{B_{l''}(x)} \delta_{l'', l'} \prod_{\substack{1 \leq l'' \leq N_b, \\ l'' \neq l}} (b_{l''} - b_{l''}), \end{aligned}$$

где были использованы соотношения (5.17), (5.21) и (5.22). Все члены в последней сумме исчезают, за исключением случая $l''' = l$. Таким образом, с учетом (5.16) мы получаем

$$\det(\mathcal{K}e^{K(x)}\mathcal{D})_{l,l'=1}^{N_b} = (-1)^{N_b(N_b-1)/2} \left(\prod_{1 \leq l < l' \leq N_b} (b_{l'} - b_l)^2 \right) \times \\ \times \det \left(\delta_{ll'} e^{B_l(x)} + \sum_{j=1}^{N_a} \frac{e^{A_j(x)} c_{jl'}}{a_j - b_l} \right)_{l,l'=1}^{N_b}.$$

Детерминант в правой части равенства совпадает с детерминантом в (5.9a), что доказывает первое из соотношений (5.20). Второе равенство сводится к (5.96) аналогично, в этом случае также следует принять во внимание явное выражение для матрицы γ в (5.18).

Применяя подходящие линейные преобразования строк и столбцов матриц в (5.20), можно получить более симметричные выражения для $\tau(x)$ и $\tau'(x)$, включающие только параметры κ_n . Рассмотрим первое равенство в (5.20). Вычтем последнюю строку матрицы $\mathcal{K}$ из всех предыдущих строк. Тогда l -я ($l > 1$) строка будет выглядеть как $(b_l - b_{N_b}) \prod_{l'=1, l' \neq l}^{N_b-1} (\kappa_n - b_{l'})$. Вынесем из детерминанта все множители $b_l - b_{N_b}$ при $l = 1, \dots, N_b$ и повторим ту же процедуру с предпоследней строкой и т. д. вплоть до второй строки. Тогда первая строка будет содержать только единицы, а вторая строка будет иметь элементы $\kappa_l - b_1$ для $l = 1, \dots, N_a + N_b$. Затем можно легко совершить сдвиг $\kappa_l - b_1 \rightarrow \kappa_l$, используя первую строку. Аналогично можно преобразовать общий элемент последующих строк в κ_n^j . Окончательно вместо (5.20) получаем

$$\tau(x) = \det(\mathcal{V}e^{K(x)}\mathcal{D}), \quad \tau'(x) = \det(\mathcal{D}'e^{-K(x)}\gamma\mathcal{V}'), \quad (5.24)$$

где через $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$ мы обозначаем “неполные матрицы Вандермонда”, т. е. $(N_b \times (N_a + N_b))$ - и $((N_a + N_b) \times N_a)$ -матрицы, заданные как

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_1^{N_b-1} & \dots & \kappa_{N_a+N_b}^{N_b-1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \kappa_1^{N_a-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \kappa_{N_a+N_b}^{N_a-1} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В равенствах (5.20) все величины, за исключением $K_n(x)$, инвариантны по отношению к общему сдвигу всех параметров a_j и b_l (или, эквивалентно, всех κ_n) на одну и ту же константу, хотя в (5.25) эта инвариантность неочевидна. На самом деле, следуя процедуре, использованной для преобразования (5.20) в (5.25), можно получить матрицы $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$, построенные из степеней $\kappa_n + z$ вместо κ_n , где z совершенно произвольно.

Выражения (5.11) для потенциала инвариантны по отношению к перенормировке (5.19) и, следовательно,

$$u(x) = -2\partial_{x_1}^2 \ln \tau(x) = -2\partial_{x_1}^2 \ln \tau'(x). \quad (5.26)$$

То, что τ и τ' дают один и тот же потенциал, можно также получить непосредственно, поскольку в силу (5.10), (5.14), (5.15) и (5.19)

$$\tau(x) = (-1)^{N_a N_b + N_a(N_a - 1)/2} \left(\prod_{n=1}^{N_a + N_b} e^{K_n(x)} \right) V(\kappa_1, \dots, \kappa_{N_a + N_b}) \tau'(x), \quad (5.27)$$

где V означает детерминант Вандермонда,

$$V(\kappa_1, \dots, \kappa_{N_a + N_b}) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_1^{N_a + N_b - 1} & \dots & \kappa_{N_a + N_b}^{N_a + N_b - 1} \end{pmatrix} \equiv \prod_{1 \leq m < n \leq N_a + N_b} (\kappa_n - \kappa_m). \quad (5.28)$$

Таким образом, мы показали эквивалентность представлений (4.2) (или (5.11)) для потенциала и тех представлений, в которых τ -функции в (5.24) выражены как детерминанты произведений трех и четырех матриц. Эти представления совпадают с представлениями, полученными с использованием τ -функционального подхода в работе [20] и детально исследованными в работах [21]–[23], [25]. Заметим, что специальная блочная форма матриц $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ в (5.17) не сохраняется в общей ситуации, когда мы производим перенумерацию параметров κ_n в детерминантах (5.24), например, чтобы получить $\kappa_1 < \kappa_2 < \dots < \kappa_{N_a + N_b}$. Мы рассмотрим эту проблему подробнее в п. 6.3.

5.3. Явное представление для τ -функций. Для исследования поведения потенциалов и решений Йоста, которое мы планируем провести в последующей публикации, удобно вывести явные представления рассматриваемых детерминантов (см. также работы [19]–[23], [25]). Эти представления включают в себя максимальные миноры матриц $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ (см. (5.17)), для которых мы используем упрощенные выражения

$$\mathcal{D}(n_1, \dots, n_{N_b}) = \mathcal{D} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_{N_b} \\ 1 & 2 & \dots & N_b \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

$$\mathcal{D}'(n_1, \dots, n_{N_a}) = \mathcal{D}' \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N_a \\ n_1 & n_2 & \dots & n_{N_a} \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

т.е. детерминант $(N_b \times N_b)$ -матрицы, состоящей из строк с номерами $n_1, \dots, n_{N_b}$ матрицы $\mathcal{D}$ и всех ее столбцов, и детерминант $(N_a \times N_a)$ -матрицы, состоящей из всех строк матрицы $\mathcal{D}'$ и столбцов с номерами $n_1, \dots, n_{N_a}$ этой матрицы. Тогда, используя формулу Бине–Коши для детерминанта произведения матриц и обозначение (5.28), мы можем переписать соотношения (5.24) в виде

$$\tau(x) = \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{N_b} \leq N_a + N_b} f_{n_1, \dots, n_{N_b}} \prod_{l=1}^{N_b} e^{K_{n_l}(x)}, \quad (5.31a)$$

$$\tau'(x) = \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{N_a} \leq N_a + N_b} f'_{n_1, \dots, n_{N_a}} \prod_{j=1}^{N_a} e^{-K_{n_j}(x)}, \quad (5.31b)$$

где

$$f_{n_1, n_2, \dots, n_{N_b}} = V(\kappa_{n_1}, \dots, \kappa_{n_{N_b}}) \mathcal{D}(n_1, \dots, n_{N_b}), \quad (5.32a)$$

$$f'_{n_1, n_2, \dots, n_{N_a}} = V(\kappa_{n_1}, \dots, \kappa_{n_{N_a}}) \mathcal{D}'(n_1, \dots, n_{N_a}) \prod_{j=1}^{N_a} \gamma_{n_j}. \quad (5.32b)$$

Из равенства (5.27) следует, что коэффициенты f и f' в разложениях (5.31) связаны уравнением

$$f'_{n_1, \dots, n_{N_a}} = (-1)^{N_a N_b + N_a(N_a - 1)/2} \frac{f_{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_{N_b}}}{V(\kappa_1, \dots, \kappa_{N_a + N_b})}, \quad (5.33)$$

где $\{n_1, \dots, n_{N_a}\}$ и $\{\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_{N_b}\}$ – два непересекающихся упорядоченных подмножества множества целых чисел от 1 до $N_a + N_b$.

Отметим, что в нашем построении два эквивалентных представления для τ -функций в (5.27) были получены как следствие двух равенств в (2.6), хотя, конечно, их можно получить непосредственно, используя формулы (5.31) и (5.33) (см. работу [23], где это свойство названо дуальностью).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. В соответствии с (5.32) и (5.33) имеем

$$\prod_{j=1}^{N_a} \gamma_{n_j} V(\kappa_{n_1}, \dots, \kappa_{n_{N_a}}) = \det \pi \cdot (-1)^{N_a N_b + N_a(N_a - 1)/2} \frac{V(\kappa_{\tilde{n}_1}, \dots, \kappa_{\tilde{n}_{N_b}})}{V(\kappa_1, \dots, \kappa_{N_a + N_b})} \quad (5.34)$$

и

$$\mathcal{D}'(n_1, \dots, n_{N_a}) = \det \pi \cdot \mathcal{D}(\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_{N_b}), \quad (5.35)$$

где π – матрица, которая осуществляет перестановку $(\kappa_{n_1}, \dots, \kappa_{n_{N_a}}, \kappa_{\tilde{n}_1}, \dots, \kappa_{\tilde{n}_{N_b}})$ в $(\kappa_1, \dots, \kappa_{N_a + N_b})$.

6. РЕШЕНИЯ ЙОСТА И СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОСТИ

6.1. Свойства матриц $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$. Матрицы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$, введенные в (5.17), обладают весьма интересными свойствами. Как следует непосредственно из определения, они ортогональны в том смысле, что

$$\mathcal{D}' \mathcal{D} = 0, \quad (6.1)$$

где нуль в правой части является $(N_a \times N_b)$ -матрицей. Более того, матрицы

$$\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} = E_{N_b} + d^\dagger d, \quad \mathcal{D}' \mathcal{D}'^\dagger = E_{N_a} + dd^\dagger, \quad (6.2)$$

где $\dagger$ означает эрмитово сопряжение матриц (здесь на самом деле – транспонирование), обратимы, поэтому матрицы (см. монографию [36])

$$(\mathcal{D})^{(-1)} = (E_{N_b} + d^\dagger d)^{-1} \mathcal{D}^\dagger, \quad (6.3)$$

$$(\mathcal{D}')^{(-1)} = \mathcal{D}'^\dagger (E_{N_a} + dd^\dagger)^{-1}, \quad (6.4)$$

являются, соответственно, левой обратной к матрице $\mathcal{D}$ и правой обратной к матрице $\mathcal{D}'$, т. е.

$$(\mathcal{D})^{(-1)} \mathcal{D} = E_{N_b}, \quad \mathcal{D}' (\mathcal{D}')^{(-1)} = E_{N_a}. \quad (6.5)$$

Произведения этих матриц в обратном порядке дают вещественные самосопряженные $((N_a + N_b) \times (N_a + N_b))$ -матрицы

$$P = \mathcal{D}(\mathcal{D})^{(-1)} = \mathcal{D}(E_{N_b} + d^\dagger d)^{-1}(\mathcal{D})^\dagger, \quad (6.6)$$

$$P' = (\mathcal{D}')^{(-1)}\mathcal{D}' = (\mathcal{D}')^\dagger(E_{N_a} + dd^\dagger)^{-1}\mathcal{D}', \quad (6.7)$$

являющиеся ортогональными проекторами, т. е.

$$P^2 = P, \quad (P')^2 = P', \quad PP' = 0 = P'P, \quad (6.8)$$

и дополнительные в том смысле, что

$$P + P' = E_{N_a + N_b}. \quad (6.9)$$

Ортогональность проекторов следует из (6.1), а последнее равенство – из очевидных соотношений типа $(E_{N_b} + d^\dagger d)^{-1}d^\dagger = d^\dagger(E_{N_a} + dd^\dagger)^{-1}$.

6.2. Симметричные представления решений Йоста. Чтобы получить τ -представления решений Йоста, мы используем соотношения (5.12), причем следует заметить, что перенормировка (5.19) не влияет на правила подстановки, данные в (5.13). В обозначениях (5.14), (5.15) и (5.21) эти правила имеют вид

$$\tau(x) \rightarrow \tau_\chi(x, \mathbf{k}) \quad \text{при} \quad e^K \rightarrow e^K(\kappa + i\mathbf{k}), \quad (6.10a)$$

$$\tau'(x) \rightarrow \tau'_\chi(x, \mathbf{k}) \quad \text{при} \quad e^K \rightarrow e^K(\kappa + i\mathbf{k}), \quad (6.10б)$$

$$\tau(x) \rightarrow \tau_\xi(x, \mathbf{k}) \quad \text{при} \quad e^K \rightarrow \frac{e^K}{\kappa + i\mathbf{k}}, \quad (6.10в)$$

$$\tau'(x) \rightarrow \tau'_\xi(x, \mathbf{k}) \quad \text{при} \quad e^K \rightarrow \frac{e^K}{\kappa + i\mathbf{k}}, \quad (6.10г)$$

где $\kappa + i\mathbf{k}$ означает диагональную $((N_a + N_b) \times (N_a + N_b))$ -матрицу,

$$\kappa + i\mathbf{k} = \text{diag}\{\kappa_1 + i\mathbf{k}, \dots, \kappa_{N_a + N_b} + i\mathbf{k}\}, \quad (6.11)$$

и аналогично для матрицы $(\kappa + i\mathbf{k})^{-1}$. В явном виде эти замены дают (см. (5.24))

$$\tau_\chi(x, \mathbf{k}) = \det(\mathcal{V}e^{K(x)}(\kappa + i\mathbf{k})\mathcal{D}), \quad (6.12a)$$

$$\tau'_\chi(x, \mathbf{k}) = \det(\mathcal{D}'e^{-K(x)}(\kappa + i\mathbf{k})^{-1}\gamma\mathcal{V}'), \quad (6.12б)$$

$$\tau_\xi(x, \mathbf{k}) = \det(\mathcal{V}e^{K(x)}(\kappa + i\mathbf{k})^{-1}\mathcal{D}), \quad (6.12в)$$

$$\tau'_\xi(x, \mathbf{k}) = \det(\mathcal{D}'e^{-K(x)}(\kappa + i\mathbf{k})\gamma\mathcal{V}'). \quad (6.12г)$$

Итак, в силу (5.12) мы имеем

$$\left(\prod_{l=1}^{N_b}(b_l + i\mathbf{k})\right)\chi(x, \mathbf{k}) = \frac{\tau_\chi(x, \mathbf{k})}{\tau(x)} \equiv \left(\prod_{n=1}^{N_a + N_b}(\kappa_n + i\mathbf{k})\right)\frac{\tau'_\chi(x, \mathbf{k})}{\tau'(x)}, \quad (6.13a)$$

$$\left(\prod_{l=1}^{N_b}(b_l + i\mathbf{k})^{-1}\right)\xi(x, \mathbf{k}) = \frac{\tau_\xi(x, \mathbf{k})}{\tau(x)} \equiv \left(\prod_{n=1}^{N_a + N_b}(\kappa_n + i\mathbf{k})^{-1}\right)\frac{\tau'_\xi(x, \mathbf{k})}{\tau'(x)}. \quad (6.13б)$$

Сами решения Йоста тогда даются формулами (2.3), и для упрощения их аналитических свойств удобно перенормировать их следующим образом:

$$\Phi(x, \mathbf{k}) \rightarrow \frac{\Phi(x, \mathbf{k})}{\prod_{l=1}^{N_b} (b_l + i\mathbf{k})}, \quad \Psi(x, \mathbf{k}) \rightarrow \left(\prod_{l=1}^{N_b} (b_l + i\mathbf{k}) \right) \Psi(x, \mathbf{k}). \quad (6.14)$$

Тогда, чтобы сохранить соотношения (2.3), мы нормируем $\chi(x, \mathbf{k})$ и $\xi(x, \mathbf{k})$ так, что вместо (6.13) имеем

$$\chi(x, \mathbf{k}) = \frac{\tau_\chi(x, \mathbf{k})}{\tau(x)} \equiv \left(\prod_{n=1}^{N_a+N_b} (\kappa_n + i\mathbf{k}) \right) \frac{\tau'_\chi(x, \mathbf{k})}{\tau'(x)}, \quad (6.15a)$$

$$\xi(x, \mathbf{k}) = \frac{\tau_\xi(x, \mathbf{k})}{\tau(x)} \equiv \left(\prod_{n=1}^{N_a+N_b} (\kappa_n + i\mathbf{k})^{-1} \right) \frac{\tau'_\xi(x, \mathbf{k})}{\tau'(x)}. \quad (6.15b)$$

Теперь $\chi(x, \mathbf{k})$ – полином по переменной $\mathbf{k}$ порядка $\mathbf{k}^{N_b}$ и $\xi(x, \mathbf{k})$ – мероморфная функция переменной $\mathbf{k}$, которая становится полиномом порядка $\mathbf{k}^{N_a}$ после умножения на $\prod_{n=1}^{N_a+N_b} (\kappa_n + i\mathbf{k})$. Другими словами, теперь $\Phi(x, \mathbf{k})$ – целая функция от $\mathbf{k}$, а функция $\Psi(x, \mathbf{k})$ мероморфна и имеет полюсы во всех точках $\mathbf{k} = i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N_a + N_b$. Вводя дискретные значения $\Phi(x, \mathbf{k})$ как $(N_a + N_b)$ -строку

$$\Phi(x, i\kappa) = \{ \Phi(x, i\kappa_1), \dots, \Phi(x, i\kappa_{N_a+N_b}) \}, \quad (6.16)$$

а вычеты в этих точках

$$\Psi_{\kappa_n}(x) = \text{res}_{\mathbf{k}=i\kappa_n} \Psi(x, \mathbf{k}) \quad (6.17)$$

– как $(N_a + N_b)$ -столбец

$$\Psi_\kappa(x) = \{ \Psi_{\kappa_1}(x), \dots, \Psi_{\kappa_{N_a+N_b}}(x) \}^T, \quad (6.18)$$

мы благодаря (5.14), (5.16) и (5.17) получаем, что соотношения (5.6) принимают более симметричную форму

$$\Phi(x, i\kappa) \mathcal{D} = 0, \quad \mathcal{D}' \Psi_\kappa(x) = 0. \quad (6.19)$$

Необходимо отметить, что после перенормировки (6.13) асимптотические условия (2.5) переходят в

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} (i\mathbf{k})^{-N_b} \chi(x, \mathbf{k}) = 1, \quad \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} (i\mathbf{k})^{N_b} \xi(x, \mathbf{k}) = 1, \quad (6.20)$$

а соотношения (2.6) принимают вид

$$u(x) = -2 \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} (i\mathbf{k})^{-N_b+1} \partial_{x_1} \chi(x, \mathbf{k}) = 2 \lim_{\mathbf{k} \rightarrow \infty} (i\mathbf{k})^{N_b+1} \partial_{x_1} \xi(x, \mathbf{k}). \quad (6.21)$$

Наконец, отметим, что если ввести бесконечный набор времен или, точнее, заметить $K_n(x)$ в (5.31) и (6.12) формальным рядом [31]

$$K_n(t_1, t_2, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_n^j t_j, \quad (t_1, t_2) = (x_1, x_2), \quad (6.22)$$

то выбор t_j в качестве параметра эволюции дает многосолитонное решение $(j - 2)$ -го нелинейного уравнения иерархии КП-II, равно как и соответствующие решения Йоста.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Многовременное многосолитонное решение всех уравнений иерархии КП-II задается разложением (5.31), где теперь все экспоненты независимы. Таким образом, (4.10) есть необходимое и достаточное условие регулярности решения любого уравнения иерархии.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. В соотношениях (6.10) мы показали, что решения Йоста могут быть получены посредством преобразований, которые эквивалентны формальному мивовскому сдвигу, используемому при построении функций Бейкера–Ахиезера в терминах τ -функций. Действительно, подстановки (6.10a) и (6.10б) могут быть выведены (с точностью до несущественного множителя) путем рассмотрения многовременных τ -функций, полученных заменой K_n на бесконечный формальный ряд (6.22), и последующего сдвига $t_j \rightarrow t_j - (i/\mathbf{k})^j(1/j)$. Аналогично подстановки (6.10в) и (6.10г) могут быть получены (опять с точностью до несущественного множителя) путем сдвига $t_j \rightarrow t_j + (i/\mathbf{k})^j(1/j)$. Тогда неформальные решения Йоста уравнения теплопроводности с потенциалом, являющимся решением КП-II, получаются при $t_3 = -4t$ и всех высших временах, равных нулю.

6.3. Свойства инвариантности многосолитонного потенциала. В некоторых случаях полезно перенумеровать спектральные параметры $\kappa_n \rightarrow \tilde{\kappa}_n$, например так, что перенумерованные параметры $\tilde{\kappa}_n$ упорядочены:

$$\tilde{\kappa}_1 < \tilde{\kappa}_2 < \dots < \tilde{\kappa}_N. \quad (6.23)$$

Эту перестановку можно выполнить с помощью $((N_a + N_b) \times (N_a + N_b))$ -матрицы π такой, что

$$(\tilde{\kappa}_1, \dots, \tilde{\kappa}_{N_a+N_b}) = (\kappa_1, \dots, \kappa_{N_a+N_b})\pi. \quad (6.24)$$

Эта матрица унитарна,

$$\pi^\dagger = \pi^{-1}, \quad (6.25)$$

и все ее строки и столбцы имеют один элемент, равный 1, и все остальные, равные 0. Удобно записать эту матрицу в блочном виде:

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix}, \quad (6.26)$$

где $\pi_{11} - (N_a \times N_a)$ -матрица, $\pi_{22} - (N_b \times N_b)$ -матрица, $\pi_{12} - (N_a \times N_b)$ -матрица и $\pi_{21} - (N_b \times N_a)$ -матрица.

Тогда представления (5.24) при преобразовании (6.24) сохраняют ту же форму, если матрицы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ преобразуются следующим образом:

$$\mathcal{D} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}} = \pi \mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}' \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}' = \mathcal{D}' \pi^\dagger = (d'_1, -d'_2), \quad (6.27)$$

где из (5.17) мы имеем

$$d_1 = \pi_{11}d + \pi_{12}, \quad d_2 = \pi_{21}d + \pi_{22}, \quad (6.28)$$

$$d'_1 = \pi_{11}^\dagger - d\pi_{12}^\dagger, \quad -d'_2 = \pi_{21}^\dagger - d\pi_{22}^\dagger. \quad (6.29)$$

Хотя размеры блоков в (6.27) такие же, как и в (5.17), структура блоков, вообще говоря, отличается. Тем не менее благодаря унитарности матрицы π соотношение (6.1) остается справедливым для преобразованных матриц, и это в силу (6.27) означает, что

$$d'_1 d_1 = d'_2 d_2. \quad (6.30)$$

Для преобразованных величин также сохраняются все соотношения (6.19), и можно построить преобразованные проекторы $\tilde{P}$ и $\tilde{P}'$.

Отметим, что специальная блочная структура матриц $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ в (5.17) однозначно определяет их в соответствии с заданным потенциалом. От этого свойства можно освободиться, не изменяя потенциал, если умножить матрицу $\mathcal{D}$ на любую несингулярную $(N_b \times N_b)$ -матрицу справа, а матрицу $\mathcal{D}'$ – на любую несингулярную $(N_a \times N_a)$ -матрицу слева. Действительно, детерминанты этих матриц выпадают из (5.26) и (6.13). Обратно, можно воспользоваться этой процедурой, чтобы преобразовать структуру матриц $\tilde{\mathcal{D}}$ и $\tilde{\mathcal{D}}'$ от блочной (6.27) к специальной вида (5.17). С этой целью воспользуемся матрицами $(d_2)^{-1}$ и $(d'_1)^{-1}$, если они существуют, и проведем преобразования

$$\tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}(d_2)^{-1} = \begin{pmatrix} d_1(d_2)^{-1} \\ E_{N_b} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{D}}' \rightarrow (d'_1)^{-1}\tilde{\mathcal{D}}' = (E_{N_a}, -(d'_1)^{-1}d'_2); \quad (6.31)$$

далее, заметим, что благодаря (6.30)

$$d_1(d_2)^{-1} = (d'_1)^{-1}d'_2 = \tilde{d}, \quad (6.32)$$

где матрица $\tilde{d}$ определена этим равенством. Принимая во внимание, что оба представления в (5.24) эквивалентны, мы заключаем, что матрицы d_2 и d'_1 одновременно обратимы. Итак, мы доказали, что если перестановка π такова, что матрица d_2 (или d'_1) несингулярна, то перестановка параметров κ_n эквивалентна преобразованию матрицы d в матрицу $\tilde{d}$ или, в силу (5.16), в соответствующее преобразование матрицы s . В частности, обе матрицы d_2 и d'_1 обратимы, и можно использовать описанную выше процедуру, когда матрица π имеет диагональную блочную структуру, т. е. когда $\pi_{12} = \pi_{21} = 0$. Заметим, что в этом случае перестановка параметров κ_n не смешивает исходные параметры a_j с b_l (см. соотношение (5.14)).

В общем случае, выполняя перестановку параметров κ_n , например, сводя их к упорядочению (6.23), мы теряем блочную структуру (5.17), и можно сказать только, что τ -функции задаются формулами (5.24) и (6.12), где обе матрицы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ имеют по крайней мере два ненулевых максимальных минора.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы описали соотношения между различными существующими в литературе представлениями многосолитонных потенциалов уравнения теплопроводности и вывели формы этих представлений, которые позволят в последующей публикации детально исследовать асимптотическое поведение самих потенциалов и соответствующих решений Йоста на x -плоскости. Мы также представили различные формулировки условий, гарантирующих регулярность потенциала. Тем не менее существенная

проблема нахождения необходимых условий регулярности многосолитонных решений для уравнения КП-II остается открытой (ср. замечание 6.1). В этой связи отметим выделенную роль специального подкласса потенциалов, заданных строгими неравенствами в (4.10), в соответствии с (5.31a) это эквивалентно требованию, что все $f_{n_1, \dots, n_{N_b}}$ имеют один и тот же знак (аналогично, в соответствии с (5.316), что все $f'_{n_1, \dots, n_{N_a}}$ имеют один и тот же знак). Данные условия полностью определяют резонансные солитонные решения (ср. с работами [19], [20]). Когда такие условия наложены, все максимальные миноры матриц $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ отличны от нуля, как следует из (5.32), и тогда благодаря свойствам инвариантности, обсуждавшимся выше, мы всегда можем переставить параметры κ_n любым образом, например, как в (6.23), и в то же время иметь дело с преобразованными матрицами $\tilde{\mathcal{D}}$ и $\tilde{\mathcal{D}}'$, имеющими специальную блочную структуру, как в (5.17).

Благодарности. Эта работа частично поддержана РФФИ (гранты № 08-01-00501, КЭ-09-01-92433), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-795.2008.1), Программой РАН “Математические методы нелинейной динамики”, INFN и консорциумом E.I.N.S.T.E.I.N. А. К. Погребков благодарит физический факультет Университета Саленто (Лечче) за гостеприимство.

Список литературы

- [1] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, *Докл. АН СССР*, **192** (1970), 753–756.
- [2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **8:3** (1974), 43–53.
- [3] В. С. Дрюма, *Письма в ЖЭТФ*, **19:12** (1974), 753–755.
- [4] M. J. Ablowitz, D. Bar Yaacov, A. S. Fokas, *Stud. Appl. Math.*, **69:2** (1983), 135–143.
- [5] В. Г. Липовский, *Функц. анализ и его прил.*, **20:4** (1986), 35–45.
- [6] M. V. Wickerhauser, *Comm. Math. Phys.*, **108:1** (1987), 67–89.
- [7] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **22:1** (1988), 23–33.
- [8] J. Satsuma, *J. Phys. Soc. Japan*, **40** (1976), 286–290.
- [9] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its, V. B. Matveev, *Phys. Lett. A*, **63:3** (1977), 205–206.
- [10] B. G. Konopel'chenko, *Solitons in Multidimensions: Inverse Spectral Transform Method*, World Sci., Singapore, 1993.
- [11] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1991.
- [12] N. C. Freeman, J. J. C. Nimmo, *Phys Lett. A*, **95:1** (1983), 1–3.
- [13] J. W. Miles, *J. Fluid Mech.*, **79** (1977), 157–169; 171–179.
- [14] В. Е. Захаров, *Радиофизика и квантовая электроника*, **29:9** (1986), 813–817.
- [15] M. Boiti, F. Pempinelli, B. Prinari, A. K. Pogrebkov, “Some nondecaying potentials for the heat conduction equation”, *Proc. Workshop “Nonlinearity, Integrability and All That: Twenty Years After NEEDS ’79”*, eds. M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli, B. Prinari, G. Soliani, World Sci., Singapore, 2000, 42–50.
- [16] B. Prinari, *Inverse Problems*, **16:3** (2000), 589–603.
- [17] E. Medina, *Lett. Math. Phys.*, **62:2** (2002), 91–99.
- [18] M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov, B. Prinari, *Inverse Problems*, **17:4** (2001), 937–957, arXiv:nlⁱⁿ/0101030.
- [19] G. Biondini, Y. Kodama, *J. Phys. A*, **36:42** (2003), 10519–10536, arXiv:nlⁱⁿ/0306003.
- [20] G. Biondini, S. Chakravarty, *J. Math. Phys.*, **47:3** (2006), 033514, 26 pp., arXiv:nlⁱⁿ/0511068.
- [21] G. Biondini, S. Chakravarty, *Math. Comput. Simulation*, **74:2–3** (2007), 237–250.

- [22] G. Biondini, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:6 (2007), 064103, 4 pp.
- [23] S. Chakravarty, Y. Kodama, *J. Phys. A*, **41**:27 (2008), 275209, 33 pp., arXiv: 0710.1456.
- [24] M. Sato, “Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifolds”, *Random Systems and Dynamical Systems*, RIMS Kokyuroku, **439**, ed. H. Tōtōki, Kyoto Univ., Kyoto, 1981, 30–46.
- [25] S. Chakravarty, Y. Kodama, *Stud. Appl. Math.*, **123**:1 (2009), 83–151, arXiv: 0902.4433.
- [26] G. Biondini, K.-I. Maruno, M. Oikawa, H. Tsuji, *Stud. Appl. Math.*, **122**:4 (2009), 377–394, arXiv: 0903.5279.
- [27] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, *ТМФ*, **159**:3 (2009), 364–378, arXiv: 0901.3857.
- [28] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, B. Prinari, *J. Math. Phys.*, **43**:2 (2002), 1044–1062.
- [29] J. Villarroel, M. J. Ablowitz, *Stud. Appl. Math.*, **109**:3 (2002), 151–162; *Nonlinearity*, **17**:5 (2004), 1843–1866.
- [30] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, *J. Math. Phys.*, **47**:12 (2006), 123510, 43 pp.
- [31] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras*, Cambridge Tracts Math., **135**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [32] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, B. Prinari, *On the equivalence of different approaches for generating multisoliton solutions of the KP II equation*, arXiv: 0911.1675.
- [33] S. Chakravarty, T. Lewkova, K.-i. Maruno, *On the construction of the KP line-solitons and their interactions*, arXiv: 0911.2290v1.
- [34] P. G. Grinevich, A. Yu. Orlov, “Virasoro action on Riemann surfaces, grassmannians, $\det \bar{\partial}_j$ and Segal–Wilson τ -function”, *Problems of Modern Quantum Field Theory*, Res. Rep. Phys., eds. A. A. Belavin, A. U. Klimyk, A. B. Zamolodchikov, Springer, Berlin, 1989, 86–106.
- [35] Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн, *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, ГТТИ, М., Л., 1950.
- [36] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.

Поступила в редакцию 11.03.2010