Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Верещагин, Явные решения интегрируемой граничной задачи для двумерной цепочки Тоды, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 1, 25–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6561>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 17:57:41

© 2010 г.

В. Л. Верещагин*

ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Для получения явного решения интегрируемой граничной задачи для двумерной цепочки Тоды используется метод обратной задачи рассеяния. Свойство интегрируемости интерпретируется в терминах соответствующей линейной задачи, уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко и процедуры одевания. Простейшие начальные решения граничной задачи путем одевания переходят в новые нетривиальные решения.

Ключевые слова: цепочка Тоды, интегрируемая граничная задача, процедура одевания.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерное обобщение цепочки Тоды

$$u_{xy}(n) = w(n-1) - w(n), \quad (1.1)$$

где $w(n) = e^{u(n)-u(n+1)}$, $u(n) = u(n, x, y)$, $n \in \mathbb{Z}$, было предложено в работе [1] вместе с соответствующими представлением Лакса и набором интегралов движения. В работе [2] содержится описание применения метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) к цепочке (1.1): исследована спектральная задача, решена задача восстановления потенциала, а также описаны многосолитонные решения. Однако применение МОЗР оказалось в большой степени затруднено тем фактом, что цепочка (1.1) является объектом размерности $2 + 1$: есть зависимость от времени и двух пространственных переменных, одна из которых играет роль целочисленного номера узла решетки. Тем не менее в работах [3], [4] был предложен достаточно богатый набор решений для цепочки (1.1). Далее, с развитием теории интегрируемых граничных задач и ее распространением на многомерные модели [5] стало актуальным применение этого метода к двумерной цепочке Тоды.

Обычно приложения имеют дело с математическими моделями, ассоциированными с граничными задачами в большей степени, нежели с задачами Коши, поэтому вопрос о явном решении таких граничных задач представляется актуальным. Однако далеко не каждая граничная задача совместима со схемой МОЗР в смысле

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: v_vereschagin@mail.ru

интегрируемости. Работа [6], в частности, посвящена ответу на вопрос о корректной формулировке понятия интегрируемости граничной задачи для цепочки (1.1) на диске.

Целью настоящей работы является решение интегрируемой граничной задачи для цепочки Тоды на диске и получение явных формул для соответствующих решений. В разделе 2 описываются основные атрибуты интегрируемости для цепочки (1.1): операторное представление Лакса, метод одевания, определение интегрируемости граничного условия. В разделе 3 упомянутые инструменты применяются к цепочке (1.1): описано уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко (ГЛМ), найдено его ядро и определены условия, налагаемые на это ядро фактом интегрируемости граничной задачи. Раздел 4 содержит явные формулы для решений системы ГЛМ, отвечающих интегрируемому граничному условию и простейшему начальному потенциалу. Описана процедура построения сложных формул для решений, которые условно назовем N -солитонными, и приведена численная картина для случая $N = 1$.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МОЗР

Использование МОЗР в отношении двумерной цепочки Тоды в основном базируется на следующем простом факте: нелинейное уравнение (1.1) является условием совместности системы двух линейных уравнений

$$\begin{aligned}\Psi_x(n) &= u_x(n)\Psi(n) + \Psi(n-1) = L\Psi(n), \\ \Psi_y(n) &= w(n)\Psi(n+1) = A\Psi(n),\end{aligned}\tag{2.1}$$

так что нелинейная цепочка (1.1) может быть записана в форме коммутаторного представления

$$[\partial_x - A, \partial_y - L] = 0,\tag{2.2}$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор. Напомним, следуя работе [3], что одним из способов получения решений уравнения (1.1) является метод одевания Захарова–Шабата. Для этого введем оператор $\hat{F}$ такой, что

$$(\hat{F}\Psi)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(n, k)\Psi(k),\tag{2.3}$$

$$[\partial_x - A, F] = 0, \quad [\partial_y - L, F] = 0.$$

Предположим, что $\hat{F}$ допускает треугольную факторизацию:

$$1 + \hat{F} = (1 + \hat{K})^{-1}(1 + \hat{K}^-),\tag{2.4}$$

где

$$(\hat{K}\Psi)(n) = \sum_{j=n}^{\infty} K(n, j)\Psi(j), \quad (\hat{K}^-\Psi)(n) = \sum_{j=-\infty}^{n-1} K^-(n, j)\Psi(j).\tag{2.5}$$

Теперь рассмотрим операторы L^1 и A^1 , определенные следующими условиями:

$$\begin{aligned}(\partial_x - A^1)(1 + K) &= (1 + K)(\partial_x - A^0), \\ (\partial_y - L^1)(1 + K) &= (1 + K)(\partial_y - L^0).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Они удовлетворяют коммутационному соотношению (2.2) и обладают разностной структурой, аналогичной структуре операторов L^0 и A^0 . Коэффициенты операторов L^1 и A^1 могут быть найдены из условий (2.6), таким образом, функции $u^1(n)$ являются новыми решениями цепочки Тоды.

Для отыскания матрицы K необходимо решить аналог уравнения ГЛМ, возникающий из соотношений (2.4), (2.5):

$$K(n, m) + F(n, m) + \sum_{k=n}^{\infty} K(n, k)F(k, m) = 0, \quad m \geq n. \quad (2.7)$$

Итак, процедура одевания выглядит следующим образом: стартовав с простого потенциала $u^0(n)$, решаем линейные уравнения (2.3) для ядра $F(n, m)$. Затем подставляем $F(n, m)$ в уравнение ГЛМ (2.7) и находим матрицу $K(n, m)$, которая с помощью формулы (2.6) позволяет получить новые решения нелинейной цепочки Тоды (1.1).

Нашей задачей является выбор среди “одетых” решений тех, которые удовлетворяют интегрируемому граничному условию [6], [7]. Поэтому потребуется следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть нелинейное уравнение допускает два разных представления Лакса, так что

$$\{Y_x = LY, Y_y = AY\}, \quad \{\widehat{Y}_x = \widehat{L}\widehat{Y}, \widehat{Y}_y = \widehat{A}\widehat{Y}\}.$$

Тогда граничное условие $\Omega(u) = 0$ на границе $x = 0$ называется интегрируемым, если существует линейный дифференциальный (разностный) оператор B такой, что на $x = 0$ функция $\widehat{Y} = BY$ решает уравнение $\widehat{Y}_y = \widehat{A}\widehat{Y}$ для любого решения Y уравнения $Y_y = AY$ при условии выполнения граничного условия $\Omega(u) = 0$.

3. ИНТЕГРИРУЕМАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА И МОЗР

Выберем окружность фиксированного радиуса a на плоскости (x, y) в качестве границы для нашей задачи. Перепишем цепочку Тоды в полярных координатах (r, θ) :

$$u_{rr}(n) + \frac{1}{r} u_r(n) + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}(n) = w(n-1) - w(n), \quad (3.1)$$

$w(n) = e^{u(n)-u(n+1)}$, а также соответствующую линейную задачу:

$$\Psi_r(n) = A\Psi(n), \quad (3.2)$$

$$\Psi_\theta(n) = L\Psi(n), \quad (3.3)$$

где

$$A_{nm} = \frac{e^{i\theta}}{2} \delta_{n,m-1} - \frac{1}{2} \left(u_r(n) - \frac{i}{r} u_\theta(n) \right) \delta_{n,m} - \frac{e^{-i\theta}}{2} w(n-1) \delta_{n-1,m}, \quad (3.4)$$

$$L_{nm} = \frac{ire^{i\theta}}{2} \delta_{n,m-1} - \frac{ir}{2} \left(u_r(n) - \frac{i}{r} u_\theta(n) \right) \delta_{n,m} + \frac{ire^{-i\theta}}{2} w(n-1) \delta_{n-1,m}, \quad (3.5)$$

и определим процедуру одевания в полярных координатах. Линейные уравнения (2.3) для ядра $F(n, m)$ системы ГЛМ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} F_{nm} &= -\frac{e^{-i\theta}}{2} w(n-1) F_{n-1,m} - \frac{1}{2} \left(u_r(n) - \frac{i}{r} u_\theta(n) \right) F_{nm} + \\ &+ \frac{e^{i\theta}}{2} (F_{n+1,m} - F_{n,m-1}) + \frac{1}{2} \left(u_r(m) - \frac{i}{r} u_\theta(m) \right) F_{nm} + \\ &+ \frac{e^{-i\theta}}{2} w(m) F_{n,m+1}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} F_{nm} &= -\frac{ire^{-i\theta}}{2} w(n-1) F_{n-1,m} - \frac{ir}{2} \left(u_r(n) - \frac{i}{r} u_\theta(n) \right) F_{nm} + \\ &+ \frac{ire^{i\theta}}{2} (F_{n+1,m} - F_{n,m-1}) + \frac{ir}{2} \left(u_r(m) - \frac{i}{r} u_\theta(m) \right) F_{nm} - \\ &- \frac{ire^{-i\theta}}{2} w(m) F_{n,m+1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Интересующие нас решения отвечают ядру $F_{nm} = \Phi(n) \widehat{\Phi}(m)$. Подставим его в систему (3.6) и убедимся, что функция Φ является решением линейной системы (3.3), т.е. $\Phi(n) = \Psi(n)$, и функция $\widehat{\Phi}(n) = \widehat{\Psi}(n)$ есть решение следующей системы, в некотором смысле сопряженной к (3.3):

$$\widehat{\Psi}_r(n) = -\frac{e^{i\theta}}{2} \widehat{\Psi}(n-1) + \frac{1}{2} \left(u_r(n) - \frac{i}{r} u_\theta(n) \right) \widehat{\Psi}(n) + \frac{e^{-i\theta}}{2} w(n) \widehat{\Psi}(n+1), \quad (3.7)$$

$$\widehat{\Psi}_\theta(n) = -\frac{ire^{i\theta}}{2} \widehat{\Psi}(n-1) + \frac{ir}{2} \left(u_r(n) - \frac{i}{r} u_\theta(n) \right) \widehat{\Psi}(n) - \frac{ire^{-i\theta}}{2} w(n) \widehat{\Psi}(n+1). \quad (3.8)$$

В этом случае нужное решение уравнения ГЛМ (2.7) имеет следующий вид:

$$K(n, m) = -\frac{\Psi(n) \widehat{\Psi}(m)}{1 + \sum_{j=n}^{\infty} \Psi(j) \widehat{\Psi}(j)}. \quad (3.9)$$

Процедура одевания исходного решения $u^0(n)$ использует формулу (3.9) и линейное уравнение (2.6), из которого следует уравнение для коэффициентов операторов A^0, A^1 :

$$\begin{aligned} K_r(n, m) &+ \frac{e^{-i\theta}}{2} w^1(n-1) K(n-1, m) + \frac{1}{2} \left(u_r^1(n) - \frac{i}{r} u_\theta^1(n) \right) K(n, m) - \\ &- \frac{e^{i\theta}}{2} K(n+1, m) + \frac{e^{i\theta}}{2} K(n, m-1) - \frac{1}{2} \left(u_r^0(m) - \frac{i}{r} u_\theta^0(m) \right) K(n, m) - \\ &- \frac{e^{-i\theta}}{2} w^0(m) K(n, m+1) - \frac{1}{2} \left(u_r^0(n) - \frac{i}{r} u_\theta^0(n) \right) \delta_{nm} - \frac{e^{-i\theta}}{2} w^0(n-1) \delta_{n-1,m} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(u_r^1(n) - \frac{i}{r} u_\theta^1(n) \right) \delta_{nm} + \frac{e^{-i\theta}}{2} w^1(n-1) \delta_{n-1,m} = 0, \end{aligned}$$

где $w^j(n) = e^{u^j(n) - u^j(n+1)}$, $j = 0, 1$. При $m = n-1$ это дает уравнение

$$w^1(n-1) K(n-1, n-1) - w^0(n-1) K(n, n) - w^0(n-1) + w^1(n-1) = 0$$

и формулу для “одетого” решения:

$$u^1(n) = u^0(n) - \ln(1 + K(n, n)). \quad (3.10)$$

Нетрудно убедиться, что система (3.7), (3.8) совместна при условии (3.1), поэтому она задает дополнительное коммутативное представление для двумерной цепочки Тоды. Таким образом, наличие двух L , A -пар для цепочки (3.1) позволяет использовать приведенное выше определение для формулировки условия интегрируемости граничной задачи в виде существования линейного соотношения между решениями уравнений (3.3) и (3.8) на границе:

$$\widehat{\Psi}(n) = B(n)\Psi(n), \quad (3.11)$$

где $B(n)$ – некоторый разностный оператор. Конкретный вид оператора $B(n)$ и граничного условия может быть получен путем подстановки соотношения (3.11) в уравнение (3.8) при выполнении уравнения (3.3). Собираем коэффициенты при функциях $\Psi(n-1)$, $\Psi(n)$, $\Psi(n+1)$ и приходим к следующему: уравнение

$$u_r(n)|_{r=a} = \frac{2n}{a} + g(\theta) \quad (3.12)$$

определяет интегрируемое граничное условие (см. работу [6]), $g(\theta)$ – произвольная функция,

$$B(n) = (-1)^n e^{2in\theta + u^0(n) + ia \int g(\theta) d\theta}. \quad (3.13)$$

Теперь опишем процедуру отыскания явных решений интегрируемой граничной задачи (1.1), (3.12).

1. Для простого исходного потенциала $u^0(n)$ решим линейные уравнения (3.3), (3.8).
2. Наложим граничные условия (3.11), (3.13) на полученные функции $\Psi(n)$, $\widehat{\Psi}(n)$ и с помощью формулы $F(n, m) = \Psi(n)\widehat{\Psi}(m)$ получим ядро уравнения ГЛМ, отвечающее нашей граничной задаче.
3. Формулы (3.9) и (3.10) позволяют получить явный вид новых “одетых” решений.

4. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ

Применим описанную выше схему к простому решению граничной задачи (3.1), (3.12):

$$u^0(n) = 2n \ln r. \quad (4.1)$$

Линейные задачи (3.3) и (3.8) с коэффициентами, заданными формулой (4.1), легко решаются и дают следующие выражения для N -солитонного случая:

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= r^{-n} e^{-i\theta n} \sum_{k=1}^N c_k p_k^n r^{(p_k-1/p_k)/2} e^{i\theta(p_k+1/p_k)/2}, \\ \widehat{\Psi}(n) &= r^n e^{i\theta n} \sum_{k=1}^N d_k q_k^n r^{(q_k-1/q_k)/2} e^{-i\theta(q_k+1/q_k)/2}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где p_k, q_k – произвольные параметры, c_k, d_k – постоянные коэффициенты, $k = 1, 2, \dots, N$.

Мы ищем решения граничной задачи (3.12), поэтому наложим дополнительные условия (3.11), (3.13) на функции $\Psi(n)$ и $\widehat{\Psi}(n)$:

$$\widehat{\Psi}(n)|_{r=a} = (-1)^n a^{2n} e^{2i\theta n} \Psi(n). \quad (4.3)$$

Используя формулы (4.2), выводим уравнение

$$(-1)^n \sum_{k=1}^N d_k q_k^n a^{(q_k-1/q_k)/2} e^{-i\theta(q_k+1/q_k)/2} = \sum_{k=1}^N c_k p_k^n a^{(p_k-1/p_k)/2} e^{i\theta(p_k+1/p_k)/2}, \quad (4.4)$$

которое должно выполняться для всех n и θ . Таким образом, получаем следующие условия для параметров:

$$q_k = -p_k, \quad d_k = c_k a^{p_k-1/p_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.5)$$

которые соответствуют граничному условию (3.12). Далее, находим решение уравнения ГЛМ (2.7) в виде

$$K(n, m) = -\frac{\Psi(n)\widehat{\Psi}(m)}{1 + \sum_{j=n}^{\infty} \Psi(j)\widehat{\Psi}(j)}, \quad (4.6)$$

используем решения $\Psi, \widehat{\Psi}$ (4.2), условия (4.5) и из формулы (3.10) получаем решение нашей граничной задачи:

$$u^1(n) = 2n \ln r - \ln(1 + K(n, n)). \quad (4.7)$$

В простейшем нетривиальном случае ($N = 1$) соответствующие формулы принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= r^{-n} e^{-i\theta n} p^n r^{(p-1/p)/2} e^{i\theta(p+1/p)/2}, \\ \widehat{\Psi}(n) &= r^n e^{i\theta n} q^n r^{(q-1/q)/2} e^{-i\theta(q+1/q)/2}, \quad q = -p, \\ F(n, m) &= (-1)^m p^{n+m} e^{i\theta(p+1/p)}, \quad K(n, n) = -\left[(-p^2)^n e^{-i\theta(p+1/p)} + \frac{1}{1+p^2}\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Вещественный потенциал отвечает чисто мнимым значениям параметра p :

$$u(n) = 2n \ln r - \ln(1 + K(n, n)), \quad (4.8)$$

где

$$K(n, n) = -\left[h^{-2n} e^{\theta(h-1/h)} + \frac{1}{1-h^2}\right]^{-1}, \quad h = \operatorname{Im} p.$$

Здесь $K(n, n)$ не зависит от r , поэтому решение (4.8) удовлетворяет нашему граничному условию. При $0 < \text{Im } p < 1$ оно регулярно вне окрестности точки $r = 0$. Соответствующий граф для фиксированного значения индекса n представлен на рисунке.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору И. Т. Хабибуллину за полезные советы и консультации. Работа была частично поддержана грантами Программы РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” и РФФИ № 07-01-00081.

Список литературы

- [1] А. В. Михайлов, *Письма в ЖЭТФ*, **30**:7 (1979), 443–448.
- [2] A. V. Mikhailov, *Physica D*, **3**:1–2 (1981), 73–117.
- [3] A. Nakamura, *J. Phys. Soc. Japan*, **52**:2 (1983), 380–387.
- [4] М. В. Бабич, В. Б. Матвеев, М. А. Салль, “Бинарное преобразование Дарбу для цепочки Тоды”, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики* 5, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **145**, ред. П. П. Кулиш, В. Н. Попов, ПОМИ, СПб., 1985, 34–45.
- [5] И. Т. Хабибуллин, Е. В. Гудкова, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:2 (2004), 71–83.
- [6] M. Gürses, I. T. Habibullin, K. Zheltukhin, *J. Math. Phys.*, **48**:10 (2007), 102702, 16 pp.
- [7] В. Э. Адлер, И. Т. Хабибуллин, А. Б. Шабат, *ТМФ*, **110**:1 (1997), 98–113.

Поступила в редакцию 1.02.2010