Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Зупник, Трехмерная $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрия
в гармоническом $\mathcal{N} = 3$ суперпространстве, *ТМФ*, 2010,
том 165, номер 1, 97–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6565>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 12:38:07

© 2010 г.

Б. М. Зупник*

ТРЕХМЕРНАЯ $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЯ В ГАРМОНИЧЕСКОМ $\mathcal{N} = 3$ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается отображение трехмерных $\mathcal{N} = 4$ суперполей в $\mathcal{N} = 3$ гармоническое суперпространство. Построены левые и правые представления $\mathcal{N} = 4$ суперконформной группы на аналитических $\mathcal{N} = 3$ суперполях. Эти представления удобны для описания $\mathcal{N} = 4$ суперконформных взаимодействий абелевых калибровочных суперполей с гипермультиплетами. Исследуется $\mathcal{N} = 4$ инвариантность в неабелевой $\mathcal{N} = 3$ теории Янга–Миллса.

Ключевые слова: гармоническое суперпространство, расширенная суперсимметрия, суперконформная симметрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Простейшая суперсимметричная теория Черна–Саймонса построена в $\mathcal{N} = 1$, $d = 3$ суперпространстве с вещественными координатами $z = (x^m, \theta^\alpha)$, где грассманова координата θ^α имеет спинорный индекс $\alpha = 1, 2$ группы $SL(2, R)$, а $m = 0, 1, 2$ – трехмерный векторный индекс [1], [2]. В этой теории используется спинорное калибровочное суперполе $A_\alpha(z)$. Суперполевое действие $\mathcal{N} = 1$ теории Черна–Саймонса было представлено в виде интеграла по суперпространству от дифференциальной суперформы Черна–Саймонса $dA + 2iA^3/3$ в рамках теории суперполевых интегральных форм [3]–[6]. Неабелево $\mathcal{N} = 2$, $d = 3$ действие Черна–Саймонса рассматривалось в суперпространстве $z = (x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha)$, где θ^α и $\bar{\theta}^\alpha$ – комплексно-сопряженные спинорные координаты [3], [7], [8]. Основным $\mathcal{N} = 2$ калибровочным суперполем является $V(z)$, а калибровочная группа сохраняет киральность материальных суперполей. $\mathcal{N} = 3$, $d = 3$ теория Черна–Саймонса была впервые исследована методом гармонического суперпространства [9], [10]. Аналитический калибровочный $\mathcal{N} = 3$, $d = 3$ препотенциал подобен калибровочному суперполю $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ теории Янга–Миллса [11], [12].

$\mathcal{N} = 5$ и $\mathcal{N} = 6$ теории Черна–Саймонса также рассматривались в методе гармонического суперпространства [13], [14], однако в этом подходе не удалось построить взаимодействие калибровочных суперполей с материей. Отметим, что $\mathcal{N} = 6$ супермультиплет Черна–Саймонса вне массовой поверхности содержит бесконечное число вспомогательных полей.

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: zupnik@theor.jinr.ru

$\mathcal{N} = 6$ модель взаимодействия полей Черна–Саймонса с материей для калибровочной группы $U(N) \times U(N)$ (*ABJM*-модель [15]) и $\mathcal{N} = 8$ *BLG*-модель для калибровочной группы $SU(2) \times SU(2)$ [16] исследовались в $\mathcal{N} = 3$ гармоническом суперпространстве [17]. В этом формализме $\mathcal{N} = 3$ суперсимметрия явная, преобразования высших суперсимметрий связывают различные суперполя, а соответствующая алгебра преобразований замыкается на массовой поверхности. Квантовые аспекты $\mathcal{N} = 3$ суперполевых теорий анализировались в работе [18].

$\mathcal{N} = 4$, $d = 3$ суперполевые теории изучались в наших работах [10], [19], [20]. В этом подходе зеркальные левые и правые $\mathcal{N} = 4$ супермультиплеты определены в разных гармонических суперпространствах, и это обстоятельство представляет собой главное препятствие для построения лево-правых взаимодействий. Мы даем обзор формул $\mathcal{N} = 4$ суперпространства в приложении.

В следующем разделе мы анализируем $\mathcal{N} = 3$, $d = 3$ суперконформные преобразования в стандартном и гармоническом суперпространствах. Соответствующий оператор Киллинга K_3 содержит генераторы $\mathcal{N} = 3$ суперконформной группы в виде дифференциальных операторов на суперпространстве P_m , M_m , D , V_{kl} , $Q_\alpha^{(kl)}$ и $S_\alpha^{(kl)}$.

В разделе 3 мы изучаем соотношения между $\mathcal{N} = 4$ и $\mathcal{N} = 3$ гармоническими суперполями. Левые $\mathcal{N} = 4$ аналитические суперполя могут быть разложены по $\mathcal{N} = 3$ спинорным координатам $\theta^{++\alpha}$, $\theta^{0\alpha}$ и дополнительной спинорной координате θ_4^α . Мы получили $\mathcal{N} = 3$ представление левых $\mathcal{N} = 4$ супермультиплетов, используя оператор, связывающий различные суперпространства. Этот оператор позволяет определить активные $\mathcal{N} = 4$ суперконформные преобразования на аналитических $\mathcal{N} = 3$ суперполях. Эти преобразования включают $\mathcal{N} = 3$ суперконформные генераторы, дополнительный четный генератор A_{kl} группы $SU_L(2) \times SU_R(2)$ и дополнительные нечетные спинорные генераторы Q_α^4 и S_α^4 . Зеркальное отображение $\mathcal{M}$ между левыми и правыми $\mathcal{N} = 4$ представлениями эквивалентно изменению знака этих дополнительных генераторов. Таким образом, мы изучаем левые и правые $\mathcal{N} = 4$ супермультиплеты в одном аналитическом суперпространстве, зеркальные супермультиплеты имеют одинаковые $\mathcal{N} = 3$ преобразования, а их дополнительные преобразования отличаются знаком.

Раздел 4 посвящен построению $\mathcal{N} = 4$ суперконформных моделей в $\mathcal{N} = 3$ гармоническом суперпространстве. Мы рассматриваем аналитический абелев калибровочный препотенциал V_0^{++} и его аналитическую суперполевую напряженность W_0^{++} и доказываем, что эти суперполя имеют зеркальные $\mathcal{N} = 4$ преобразования. $\mathcal{N} = 4$ суперконформная связь S_{BF} содержит W_0^{++} и правый абелев препотенциал A^{++} . Эта связь эквивалентна разности двух абелевых $\mathcal{N} = 3$ взаимодействий Черна–Саймонса. Левый калибровочный препотенциал V_0^{++} имеет естественное $\mathcal{N} = 4$ суперконформное взаимодействие с левыми гипермультиплетными, тогда как правый $\mathcal{N} = 4$ калибровочный мультиплет A^{++} связан с правыми гипермультиплетными. Существует также неминимальное взаимодействие W_0^{++} с правым гипермультиплетом.

Интересное $\mathcal{N} = 4$ суперконформное взаимодействие $S^\beta(V_0^{++}, A^{++})$ двух абелевых суперполей включает связь S_{BF} и улучшенные формы действий для двух суперполевых напряженностей. Аналогичные улучшенные формы рассматривались в $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ суперпространстве [12] и в $\mathcal{N} = 4$, $d = 3$ суперпространстве [20].

$\mathcal{N} = 3$ суперполевое представление удобно для анализа классических и квантовых свойств этой модели. Мы обсуждаем также действие нелинейной $\mathcal{N} = 4$ электродинамики.

В разделе 5 изучаются $\mathcal{N} = 4$ суперконформные преобразования неабелевых $\mathcal{N} = 3$ калибровочных суперполей. В частности, получено нелинейное четвертое преобразование суперсимметрии неабелевой $\mathcal{N} = 3$ суперполеовой напряженности и доказана $\mathcal{N} = 4$ инвариантность соответствующего неабелевого действия.

2. $\mathcal{N} = 3$, $D = 3$ ГАРМОНИЧЕСКОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО

Мы используем обозначения работ [10], [17] в $\mathcal{N} = 3$ суперпространстве. В центральном базисе $\mathcal{N} = 3$ суперпространства вводятся вещественные координаты

$$z = (x^m, \theta_{(kl)}^\alpha), \quad \overline{\theta_{(kl)}^\alpha} = \theta^{(kl)\alpha}, \quad (2.1)$$

где k, l – спинорные индексы группы автоморфизмов $SU_V(2)$. Переход к изовекторному представлению спинорных координат связан с матрицами Паули $\theta_B^\alpha = (i/\sqrt{2})(\tau_B)^{kl}\theta_{(kl)}^\alpha$, $B = 1, 2, 3$. Спинорные производные в вещественных координатах имеют вид

$$\begin{aligned} D_\alpha^{(kl)} &= \partial_\alpha^{(kl)} + i\theta^{(kl)\beta}\partial_{\alpha\beta}, & \partial_{\alpha\beta} &= (\gamma^m)_{\alpha\beta}\partial_m, \\ \partial_m x^n &= \delta_m^n, & \partial_\alpha^{(kl)}\theta_{(jn)}^\beta &= \frac{1}{2}(\delta_j^k\delta_n^l + \delta_j^l\delta_n^k), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $(\gamma^m)_{\alpha\beta}$ – трехмерные γ -матрицы. Преобразования $\mathcal{N} = 3$ суперконформной группы в вещественных координатах (2.1) [17] можно выразить через оператор Киллинга K_3 , который содержит генераторы соответствующей супералгебры Ли:

$$\begin{aligned} \delta_{sc}x^m &= K_3x^m, & \delta_{sc}\theta_{(kl)}^\alpha &= K_3\theta_{(kl)}^\alpha, \\ K_3(z) &= c^m P_m + l^m M_m + bD + k^m K_m + a^{kl}V_{kl} + \epsilon_{(kl)}^\alpha Q_\alpha^{(kl)} + \eta_{(kl)}^\alpha S_\alpha^{(kl)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $c^m, l^m, b, k^m, a^{kl}, \epsilon_{(kl)}^\alpha$ и $\eta_{(kl)}^\alpha$ – суперконформные параметры. Эти суперконформные генераторы легко построить в центральном базисе; например, генераторы $SU_V(2)$ имеют следующий вид:

$$V_{kl} = \varepsilon_{ln}\theta_{(kj)}^\alpha\partial_\alpha^{(jn)} + \varepsilon_{kn}\theta_{(lj)}^\alpha\partial_\alpha^{(jn)}. \quad (2.4)$$

Оператор Киллинга определяет активные суперконформные преобразования суперполей $\delta^*\mathcal{A}$ через пассивные суперконформные преобразования:

$$\delta_{sc}\mathcal{A}(z) \equiv \mathcal{A}(z + \delta_{sc}z) - \mathcal{A}(z) = \delta^*\mathcal{A}(z) + K_3\mathcal{A}(z). \quad (2.5)$$

Рассмотрим важные коммутационные соотношения оператора Киллинга со спинорными производными, которые определяют пассивные суперконформные преобразования этих производных $\delta_{sc}D_\alpha^{(kl)}$:

$$[K_3, D_\alpha^{(kl)}] = -\frac{1}{2}jD_\alpha^{(kl)} - \chi_\alpha^\gamma D_\gamma^{(kl)} + \lambda_n^k D_\alpha^{(nl)} + \lambda_n^l D_\alpha^{(kn)} = \delta_{sc}D_\alpha^{(kl)}, \quad (2.6)$$

где введены суперполевые параметры

$$\chi^{\alpha\gamma} = a^{\alpha\gamma} + \frac{1}{4} (x^{\alpha\rho} k_\rho^\gamma + x^{\gamma\rho} k_\rho^\alpha) - \frac{i}{4} \theta_{(kl)}^\beta \theta_{\beta}^{(kl)} k^{\alpha\gamma} + \frac{i}{2} (\theta_{(kl)}^\alpha \eta^{(kl)\gamma} + \theta_{(kl)}^\gamma \eta^{(kl)\alpha}), \quad (2.7)$$

$$\lambda^{kl} = a^{kl} - \frac{i}{2} \varepsilon_{jn} \theta^{kj\alpha} \theta^{nl\beta} k_{\alpha\beta} - \frac{i}{2} \varepsilon_{jn} (\theta^{kj\alpha} \eta_\alpha^{nl} + \theta^{lj\alpha} \eta_\alpha^{nk}), \quad (2.8)$$

$$j = -b - k_m x^m - i \theta_{(kl)}^\alpha \eta_\alpha^{(kl)}.$$

Полезно рассмотреть соотношения

$$D_\gamma^{(kl)} \chi_\alpha^\rho = -\delta_\gamma^\rho D_\alpha^{(kl)} j + \frac{1}{2} \delta_\alpha^\rho D_\gamma^{(kl)} j, \quad (2.9)$$

$$D_\alpha^{(ni)} \lambda^{kl} = \frac{1}{4} \varepsilon^{nk} D_\alpha^{(il)} j + \frac{1}{4} \varepsilon^{ik} D_\alpha^{(nl)} j + \frac{1}{4} \varepsilon^{il} D_\alpha^{(kn)} j + \frac{1}{4} \varepsilon^{nl} D_\alpha^{(ik)} j.$$

Определим активное суперконформное преобразование примарного скалярного суперполя веса w :

$$\delta^* A_w = w j A_w - K_3 A_w. \quad (2.10)$$

Для изучения преобразования спинорной производной суперполя A_w мы должны использовать формальное соотношение $[\delta^*, D_\alpha^{(kl)}] = 0$ и формулу (2.6).

$\mathcal{N} = 3$ суперконформный линейный (тензорный) мультиплет $W^{(kl)}(z)$ удовлетворяет суперполевым связям

$$D_\alpha^{((jn)} W^{(kl)}) = 0, \quad (2.11)$$

где скобки означают симметризацию по четырем индексам. Эти связи ковариантны относительно суперконформных преобразований

$$\delta^* W^{(kl)} = j W^{(kl)} + \lambda_n^k W^{(nl)} + \lambda_n^l W^{(kn)} - K_3 W^{(kl)}. \quad (2.12)$$

Определим суперконформные преобразования $SU_V(2)/U(1)$ гармоник $u_i^\pm$:

$$\delta_{sc} u_i^+ = \lambda^{kl} u_k^+ u_l^+ u_i^-, \quad \delta_{sc} u_i^- = 0, \quad (2.13)$$

где матрица λ^{kl} задана формулой (2.7). Гармоническая проекция соотношения (2.9) дает условие

$$u_n^+ u_i^+ u_k^+ u_l^+ D_\alpha^{(ni)} \lambda^{kl} = D_\alpha^{++} \lambda^{++} = 0, \quad \lambda^{++} = \lambda^{kl} u_k^+ u_l^+, \quad D_\alpha^{++} = u_n^+ u_i^+ D_\alpha^{(ni)}. \quad (2.14)$$

Вектор Киллинга $K_3^C = K_3(z) + \lambda^{++} \partial^{--}$ в расширенном центральном базисе (z, u) сохраняет условие грассмановой аналитичности $D_\alpha^{++} A(z, u) = 0$:

$$[K_3^C, D_\alpha^{++}] = -\chi_\alpha^\gamma D_\gamma^{++} - \frac{1}{2} (j - \partial^{--} \lambda^{++}) D_\alpha^{++}. \quad (2.15)$$

Грассманова аналитичность будет явной в аналитическом базисе $z_A = (\zeta, \theta^{--\alpha})$:

$$\zeta = (x_A^m, \theta^{++\alpha}, \theta^{0\alpha}, u_i^\pm), \quad (2.16)$$

$$x_A^m = x^m + i(\gamma^m)_{\alpha\beta} \theta^{++\alpha} \theta^{--\beta}, \quad \theta^{\pm\pm\alpha} = U^{\pm\pm kl} \theta_{(kl)}^\alpha, \quad \theta^{0\alpha} = U^{0kl} \theta_{(kl)}^\alpha, \quad (2.17)$$

где введены изовекторные комбинации спинорных гармоник

$$U^{++kl} = u^{+k}u^{+l}, \quad U^{--kl} = u^{-k}u^{-l}, \quad U^{0kl} = \frac{1}{2}(u^{+k}u^{-l} + u^{+l}u^{-k}), \quad (2.18)$$

$$\int du U^{++kl} U_{ij}^{--} = -2 \int du U^{0kl} U_{ij}^0 = \frac{1}{6}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l). \quad (2.19)$$

В аналитических координатах определено специальное сопряжение

$$\widetilde{u_i^\pm} = u^{\pm i}, \quad \widetilde{x_A^m} = x_A^m, \quad \widetilde{\theta_\alpha^{0,\pm\pm}} = \theta_\alpha^{0,\pm\pm}. \quad (2.20)$$

Гармонические и спинорные производные в аналитическом базисе имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{++} &= \partial^{++} + 2i\theta^{++\alpha}\theta^{0\beta}\partial_{\alpha\beta}^A + \theta^{++\alpha}\partial_\alpha^0 + 2\theta^{0\alpha}\partial_\alpha^{++}, & \partial_{\alpha\beta}^A &= (\gamma^m)_{\alpha\beta}\partial_m^A, \\ \mathcal{D}^{--} &= \partial^{--} - 2i\theta^{--\alpha}\theta^{0\beta}\partial_{\alpha\beta}^A + \theta^{--\alpha}\partial_\alpha^0 + 2\theta^{0\alpha}\partial_\alpha^{--}, \\ \mathcal{D}^0 &= \partial^0 + 2\theta^{++\alpha}\partial_\alpha^{--} - 2\theta^{--\alpha}\partial_\alpha^{++}, & [\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^{--}] &= \mathcal{D}^0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$D_\alpha^{++} = \partial_\alpha^{++}, \quad D_\alpha^{--} = \partial_\alpha^{--} + 2i\theta^{--\beta}\partial_{\alpha\beta}^A, \quad D_\alpha^0 = -\frac{1}{2}\partial_\alpha^0 + i\theta^{0\beta}\partial_{\alpha\beta}^A, \quad (2.22)$$

$$\partial_m^A x_A^n = \delta_m^n, \quad \partial_\alpha^0 \theta^{0\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad \partial_\alpha^{\mp\mp} \theta^{\pm\pm\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad [\partial^{++}, \partial^{--}] = \partial^0,$$

где ∂^0 , $\partial^{\pm\pm}$ – частные гармонические производные. Мы используем обозначения

$$\begin{aligned} (\theta^{++})^2 &= \theta^{++\alpha}\theta_\alpha^{++}, & (\theta^0)^2 &= \theta^{0\alpha}\theta_\alpha^0, & (\theta^{++}\theta^0) &= \theta^{++\alpha}\theta_\alpha^0, \\ (\theta^{++}\gamma^m\theta^0) &= \theta^{++\alpha}\theta^{0\beta}(\gamma^m)_{\alpha\beta}, \\ (D^{++})^2 &= D^{++\alpha}D_\alpha^{++}, & (D^0)^2 &= D^{0\alpha}D_\alpha^0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

$\mathcal{N} = 3$ аналитические суперполя $\phi(\zeta)$ удовлетворяют условию $D_\alpha^{++}\phi = 0$. Суперконформные преобразования аналитических координат [17] генерируются оператором Киллинга

$$K_3^A = \mathcal{K}_3(\zeta) + \delta_{sc}\theta^{--\alpha}\partial_\alpha^{++}, \quad (2.24)$$

где оператор $\mathcal{K}_3(\zeta)$ действует в аналитическом подпространстве ζ , например

$$\mathcal{K}_3 u_i^+ = \lambda^{++}(\zeta, u)u_i^-, \quad \mathcal{K}_3 u_i^- = 0, \quad (2.25)$$

$$\lambda^{++}(\zeta) = -i(\theta^{++}\gamma_m\theta^0)k^m + i(\theta^{0\alpha}U_{kl}^{++} - \theta^{++\alpha}U_{kl}^0)\eta_\alpha^{(kl)} + U_{kl}^{++}a^{kl}. \quad (2.26)$$

Аналитическое представление четных суперконформных генераторов имеет вид

$$P_m = \partial_m^A, \quad M_m = \varepsilon_{mnp}x_A^n\partial^{Ap} + \frac{1}{2}(\gamma_m)_\alpha^\beta(\theta^{++\alpha}\partial_\beta^{--} + \theta^{0\alpha}\partial_\alpha^0), \quad (2.27)$$

$$D = x_A^m\partial_m^A + \frac{1}{2}(\theta^{++\alpha}\partial_\alpha^{--} + \theta^{0\alpha}\partial_\alpha^0), \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} K_m &= x_{Am}x_A^p\partial_p^A - \frac{1}{2}(x_A)^2\partial_m^A - i(\theta^{++}\gamma_m\theta^0)\partial^{--} - \\ &\quad - \frac{i}{2}(\gamma_m)_\beta^\alpha(\theta^0)^2\theta^{++\beta}\partial_\alpha^{--} + \frac{1}{2}x_A^n(\gamma_n)^{\alpha\beta}(\gamma_m)_{\beta\gamma}(\theta^{++\gamma}\partial_\alpha^{--} + \theta^{0\gamma}\partial_\alpha^0), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$V_{kl} = U_{kl}^{++}\partial^{--} + U_{kl}^{--}\theta^{++\alpha}(\partial_\alpha^0 + 2i\theta^{0\gamma}\partial_{\alpha\gamma}^A) + 2U_{kl}^0\theta^{++\alpha}\partial_\alpha^{--}. \quad (2.30)$$

Нечетные суперконформные генераторы также действуют в аналитическом суперпространстве:

$$Q_\alpha^{(kl)} = U^{++kl} \partial_\alpha^{--} - 2iU^{--kl} \theta^{++\gamma} \partial_{\alpha\gamma}^A + U^{0kl} (\partial_\alpha^0 + 2i\theta^{0\gamma} \partial_{\alpha\gamma}^A), \quad (2.31)$$

$$S_\alpha^{(kl)} = \frac{1}{3} (\gamma^m)_\alpha^\beta [K_m, Q_\beta^{(kl)}]. \quad (2.32)$$

Мы рассматриваем активную реализацию $\mathcal{N} = 3$ суперконформных преобразований на аналитических суперполях:

$$\delta_3^* \phi = \delta_{sc} \phi - \mathcal{K}_3(\zeta) \phi. \quad (2.33)$$

Оператор Киллинга удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} [K_3^A, \mathcal{D}^{++}] &= -\lambda^{++} \mathcal{D}^0 = \delta_{sc} \mathcal{D}^{++}, \\ [K_3^A, \mathcal{D}^{--}] &= -(\mathcal{D}^{--} \lambda^{++}) \mathcal{D}^{--} = \delta_{sc} \mathcal{D}^{--}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

которые определяют пассивные преобразования операторов.

Гармоническая проекция $\mathcal{N} = 3$ линейного мультиплетта (2.11) $W^{++} = u_k^+ u_l^+ W^{(kl)}$ удовлетворяет связям

$$D_\alpha^{++} W^{++} = 0, \quad \mathcal{D}^{++} W^{++} = 0 \quad (2.35)$$

и имеет суперконформное преобразование

$$\begin{aligned} \delta_3^* W^{++} &= 2\lambda W^{++} - \mathcal{K}_3 W^{++}, \\ \lambda &= -\frac{1}{2} b - \frac{1}{2} k_m x_A^m + i(\theta^{0\alpha} U_{kl}^0 - \theta^{++\alpha} U_{kl}^{--}) \eta_\alpha^{(kl)} + U_{kl}^0 a^{(kl)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Суперполевые параметры суперконформного преобразования j и $\lambda^{(kl)}$ (2.12) можно выразить через аналитические суперконформные параметры:

$$\begin{aligned} \lambda^{kl} &= U^{--kl} \lambda^{++} - U^{0kl} \mathcal{D}^{--} \lambda^{++} + \frac{1}{2} U^{++kl} (\mathcal{D}^{--})^2 \lambda^{++}, \\ j &= 2\lambda - \mathcal{D}^{--} \lambda^{++}, \quad \lambda = -\frac{1}{2} b + U_{kl}^0 \lambda^{kl}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Абелев скалярный аналитический препотенциал $V_0^{++}(\zeta)$ имеет калибровочное преобразование

$$\delta_\Lambda V_0^{++} = -\mathcal{D}^{++} \Lambda, \quad \widetilde{V_0^{++}} = -V_0^{++}, \quad \tilde{\Lambda} = -\Lambda. \quad (2.38)$$

Калибровочно-инвариантная вещественная аналитическая напряженность выражается через это калибровочное суперполе [10], [17]:

$$\begin{aligned} W_0^{++}(\zeta) &= -\frac{1}{4} (D^{++})^2 V_0^{--} = I V_0^{++} = \int d\zeta_2^{-4} I(\zeta, \zeta_2) V_0^{++}(\zeta_2), \\ I(\zeta, \zeta_2) &= \frac{1}{16} (D^{++})^2 (D_2^{++})^2 \delta^9(z - z_2) \frac{1}{(u^+ u_2^+)^2}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где V_0^{--} – гармоническая связность, а I – интегральный оператор. Мы используем соотношения

$$\mathcal{D}^{++} V_0^{--} = \mathcal{D}^{++} V_0^{++}, \quad \mathcal{D}^{++} W_0^{++} = 0. \quad (2.40)$$

Отметим, что суперполя V_0^{++} и W_0^{++} имеют противоположные P -четности по отношению к преобразованию

$$P(x_A^0, x_A^1, x_A^2) = (x_A^0, -x_A^1, x_A^2), \quad P\theta_\alpha^{0,\pm\pm} = -(\gamma_1)_\alpha^\beta \theta_\beta^{0,\pm\pm}. \quad (2.41)$$

Компонентные поля векторного мультиплета ϕ^{kl} , A_m , λ^α , χ_{kl}^α и X^{kl} определяются в WZ-калибровке:

$$V_{WZ}^{++} = 3(\theta^{++})^2 U_{kl}^{--} \phi^{kl} + 2(\theta^{++} \gamma^m \theta^0) A_m + 2i(\theta^0)^2 \theta^{++\alpha} \lambda_\alpha + 3i(\theta^{++})^2 \theta^{0\alpha} U_{kl}^{--} \chi_\alpha^{kl} + 3i(\theta^{++})^2 (\theta^0)^2 U_{kl}^{--} X^{kl}. \quad (2.42)$$

P -четное суперполе V_0^{++} содержит псевдоскаляр ϕ^{kl} , скаляр X^{kl} и векторное поле A_m .

Преобразования $\mathcal{N} = 3$ суперсимметрии компонентных полей

$$\delta_\epsilon \phi^{kl} = -i\epsilon^{(kl)\alpha} \lambda_\alpha - \frac{i}{2}(\epsilon^{(kj)\alpha} \chi_{j\alpha}^l + \epsilon^{(lj)\alpha} \chi_{j\alpha}^k), \quad (2.43)$$

$$\delta_\epsilon A_m = \frac{i}{2}(\epsilon_{(kl)} \gamma_m X^{kl}), \quad \delta_\epsilon \lambda_\alpha = -\epsilon_{(kl)}^\gamma \partial_{\alpha\gamma} \phi^{(kl)} - \epsilon_\alpha^{(kl)} X_{kl}, \quad (2.44)$$

$$\delta_3 \chi_\alpha^{kl} = \epsilon^{(kj)\gamma} \partial_{\alpha\gamma} \phi_j^l + \epsilon^{(lj)\gamma} \partial_{\alpha\gamma} \phi_j^k + (\gamma_m)_{\alpha\beta} F^m \epsilon^{\beta(kl)} - \epsilon_\alpha^{(kj)} X_j^l - \epsilon_\alpha^{(lj)} X_j^k, \quad (2.45)$$

$$F^m = \varepsilon^{mnp} (\partial_n A_p - \partial_p A_n), \quad \delta_\epsilon X^{kl} = -i\epsilon^{(kl)\alpha} \partial_{\alpha\gamma} \lambda^\gamma + i(\epsilon^{(kj)\alpha} \partial_{\alpha\gamma} \chi_j^{l\gamma} + \epsilon^{(lj)\alpha} \partial_{\alpha\gamma} \chi_j^{k\gamma}) \quad (2.46)$$

могут быть получены из суперполевого преобразования V_{WZ}^{++} .

Абелева суперполевая напряженность в этой калибровке имеет простой вид:

$$W_0^{++} = \left[-(D^0)^2 + \frac{1}{2}(D^0)^2 \mathcal{D}^{--} \mathcal{D}^{++} + \frac{1}{2}(D^0 D^{--}) \mathcal{D}^{++} - \frac{1}{12}(D^0)^2 (\mathcal{D}^{--})^2 (\mathcal{D}^{++})^2 - \frac{1}{6}(D^0 D^{--}) \mathcal{D}^{--} (\mathcal{D}^{++})^2 - \frac{1}{24}(D^{--})^2 (\mathcal{D}^{++})^2 \right] V_{WZ}^{++}. \quad (2.47)$$

Компонентное разложение суперполевой связности содержит поля и их производные:

$$W_0^{++} = U_{kl}^{++} \phi^{kl} - 2i(\theta^{++} \gamma^m \theta^0) U_{kl}^0 \partial_m^A \phi^{kl} + (\theta^{++})^2 (\theta^0)^2 U_{kl}^{--} \square \phi^{kl} - i(\theta^{++} \gamma_m \theta^0) F^m + i\theta^{++\alpha} \lambda_\alpha - (\theta^0)^2 \theta^{++\alpha} \partial_{\alpha\gamma}^A \lambda^\gamma + i(\theta^{++\alpha} U_{kl}^0 - i\theta^{0\alpha} U_{kl}^{++}) \chi_\alpha^{kl} + [(\theta^0)^2 \theta^{++\alpha} U_{kl}^0 + (\theta^{++})^2 \theta^{0\alpha} U_{kl}^{--}] \partial_{\alpha\gamma}^A \chi^{kl\gamma} + i[(\theta^{++})^2 U_{kl}^{--} + (\theta^0)^2 U_{kl}^{++} - 2(\theta^{++} \theta^0) U_{kl}^0] X^{kl}, \quad (2.48)$$

где $\square = \eta^{mn} \partial_m^A \partial_n^A$ и F^m – абелева напряженность.

3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ $\mathcal{N} = 4$ И $\mathcal{N} = 3$ ГАРМОНИЧЕСКИМИ СУПЕРПОЛЯМИ

3.1. Левые $\mathcal{N} = 4$ представления. Расширенный $\mathcal{N} = 3$ аналитический базис включает координаты (2.17) и дополнительную спинорную координату θ_4^α :

$$x_A^m, \theta^{\pm\pm\alpha}, \theta^{0\alpha}, \theta_4^\alpha, u_k^\pm. \quad (3.1)$$

Мы анализируем связь между левым аналитическим $\mathcal{N} = 4$ базисом (см. формулу (II.15) в приложении) и расширенным $\mathcal{N} = 3$ базисом:

$$\theta^{+-\alpha} = \theta^{0\alpha} + \frac{1}{2} \theta_4^\alpha, \quad \theta^{-+\alpha} = \theta^{0\alpha} - \frac{1}{2} \theta_4^\alpha, \quad (3.2)$$

$$x_L^m = x_A^m + i(\gamma^m)_{\alpha\beta} \theta^{0\alpha} \theta_4^\beta. \quad (3.3)$$

Рассмотрим соотношения между дифференциальными операторами в двух базисах:

$$\frac{\partial}{\partial x_L^m} = \frac{\partial}{\partial x_A^m}, \quad \partial_\alpha^{+-} = \frac{1}{2} \partial_\alpha^0 - i\theta^{0\beta} \partial_{\alpha\beta}^A - \partial_\alpha^4 - \frac{i}{2} \theta_4^\beta \partial_{\alpha\beta}^A, \quad (3.4)$$

$$\partial_\alpha^{-+} = \frac{1}{2} \partial_\alpha^0 + i\theta^{0\beta} \partial_{\alpha\beta}^A + \partial_\alpha^4 - \frac{i}{2} \theta_4^\beta \partial_{\alpha\beta}^A, \quad (3.5)$$

$$D_L^{++} = \mathcal{D}^{++}, \quad D_L^{--} = \mathcal{D}^{--}. \quad (3.6)$$

Частные гармонические производные в различных базисах идентичны, поскольку замена координат (3.2), (3.3) не содержит гармоник явно. Генераторы $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии (см. формулу (II.22) в приложении) легко переписать в базисе (3.1):

$$Q_\alpha^4 = \partial_\alpha^4 - \frac{i}{2} \theta_4^\beta \partial_{\alpha\beta}^A, \quad (3.7)$$

а операторы $Q_\alpha^{(kl)}$ задаются стандартной формулой (2.31).

Левое аналитическое $\mathcal{N} = 4$ суперполе $\widehat{\Phi}_L$ в расширенном $\mathcal{N} = 3$ аналитическом базисе

$$\Phi_L(x_L^m, \theta^{++\alpha}, \theta^{+-\alpha}, u) = O\phi_L(x_A^m, \theta^{++\alpha}, \theta^{0\alpha}, u), \quad (3.8)$$

$$O = e^{-\theta_4^\alpha D_\alpha^0} = 1 - \theta_4^\alpha D_\alpha^0 - \frac{1}{4} (\theta_4)^2 (D^0)^2, \quad (3.9)$$

связано обратимым оператором O с соответствующим $\mathcal{N} = 3$ аналитическим суперполем $\phi_L(\zeta)$. Очевидно, что размерности $\mathcal{N} = 4$ и $\mathcal{N} = 3$ аналитических суперпространств одинаковы, а дифференциальные операторы в них связаны O -отображением:

$$\begin{aligned} O^{-1} \partial_\alpha^{+-} O &= -\partial_\alpha^4, & O^{-1} \partial_\alpha^{-+} O &= \partial_\alpha^0 + \partial_\alpha^4, \\ O^{-1} \partial_m^L O &= \partial_m^A, & O^{-1} \partial^{\pm\pm} O &= \partial^{\pm\pm}, \\ O^{-1} x_L^m O &= x_A^m, & O^{-1} \theta^{+-\alpha} O &= \theta^{0\alpha}, & O^{-1} \theta^{-+\alpha} O &= \theta^{0\alpha} - \theta_4^\alpha. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Представление (3.8) обладает явной левой аналитичностью.

O -преобразования генераторов $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии и гармонических производных дают нам

$$O^{-1} Q_\alpha^{(kl)} O = Q_\alpha^{(kl)}, \quad O^{-1} Q_\alpha^4 O = \mathcal{Q}_\alpha^4 + \partial_\alpha^4, \quad \mathcal{Q}_\alpha^4 = -D_\alpha^0, \quad (3.11)$$

$$O^{-1} D_L^{\pm\pm} O = \mathcal{D}_L^{\pm\pm} = \mathcal{D}^{\pm\pm} - \theta_4^\alpha D_\alpha^{\pm\pm}, \quad [\mathcal{D}_L^{\pm\pm}, (\mathcal{Q}_\alpha^4 + \partial_\alpha^4)] = 0. \quad (3.12)$$

Аналогично получаем O -преобразования $SU_L(2) \times SU_R(2)$ генераторов L_{kl} и R_{kl} (см. формулы (II.24), (II.25) в приложении)

$$O^{-1} L_{kl} O \phi_L = \mathcal{L}_{kl} \phi_L, \quad O^{-1} R_{kl} O \phi_L = \mathcal{R}_{kl} \phi_L, \quad (3.13)$$

где аналитические части операторов имеют вид

$$\mathcal{L}_{kl} = U_{kl}^{++} \partial^{--} + U_{kl}^{++} \theta^{0\alpha} \partial_{\alpha}^{--} + U_{kl}^0 (\theta^{++\alpha} \partial_{\alpha}^{--} + \theta^{0\alpha} \partial_{\alpha}^0) + 2i U_{kl}^{--} \theta^{++\alpha} \theta^{0\alpha} \partial_{\alpha\beta}^A, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{R}_{kl} = -U_{kl}^{++} \theta^{0\alpha} \partial_{\alpha}^{--} + U_{kl}^0 \theta^{++\alpha} \partial_{\alpha}^{--} - U_{kl}^0 \theta^{0\alpha} \partial_{\alpha}^0 + U_{kl}^{--} \theta^{++\alpha} \partial_{\alpha}^0. \quad (3.15)$$

Отображение (3.8) определяет представление $\mathcal{N} = 4$ суперконформной группы на $\mathcal{N} = 3$ суперполе $\phi_L(\zeta)$:

$$K_4 \Phi_L(\hat{\zeta}_L) \rightarrow \mathcal{K}_L \phi_L(\zeta) = O^{-1} K_4 O \phi_L, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{K}_L = \mathcal{K}_3(\zeta) + \mathcal{K}_{4/3}(\zeta), \quad \mathcal{K}_{4/3} = \epsilon_4^\alpha \mathcal{Q}_\alpha^4 + \eta_4^\alpha \mathcal{S}_\alpha^4 + b^{kl} \mathcal{A}_{kl}, \quad (3.17)$$

где $\mathcal{K}_3(\zeta)$ – аналитическое представление $\mathcal{N} = 3$ оператора Киллинга (2.33), а дополнительные операторы в $\mathcal{K}_{4/3}$ имеют вид

$$\mathcal{Q}_\alpha^4 = -D_\alpha^0, \quad \mathcal{S}_\alpha^4 = \frac{1}{3} (\gamma^m)_{\alpha\beta} [K_m, \mathcal{Q}^{4\beta}], \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{kl} = \mathcal{L}_{kl} - \mathcal{R}_{kl} = & U_{kl}^{++} (\partial^{--} + 2\theta^{0\alpha} \partial_{\alpha}^{--}) + 2U_{kl}^0 \theta^{0\alpha} \partial_{\alpha}^0 - \\ & - U_{kl}^{--} \theta^{++\alpha} (\partial_{\alpha}^0 + 2i\theta^{0\beta} \partial_{\alpha\beta}^A). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Легко проверить соотношение

$$[\mathcal{A}_{kl}, \mathcal{Q}_\alpha^4] = -[\mathcal{A}_{kl}, D_\alpha^0] = -Q_{(kl)\alpha}. \quad (3.20)$$

Мы будем использовать коммутационное соотношение

$$\begin{aligned} [\mathcal{K}_{4/3}, \mathcal{D}^{++}] &= -\lambda_4^{++} \mathcal{D}^0, \\ \lambda_4^{++} &= -\frac{i}{2} \eta_4^\alpha \theta_\alpha^{++} + b^{kl} U_{kl}^{++} = \mathcal{D}^{++} \lambda_4, \quad \lambda_4 = -\frac{i}{2} \eta_4^\alpha \theta_\alpha^0 + b^{kl} U_{kl}^0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

$\mathcal{N} = 4$ суперконформное преобразование левого тензорного мультиплета L^{++} в $\mathcal{N} = 3$ представлении имеет вид

$$\delta_4^* L^{++} = 2(\lambda + \lambda_4) L^{++} - \mathcal{K}_L L^{++}. \quad (3.22)$$

3.2. Правые $\mathcal{N} = 4$ представления. Альтернативный базис в правом $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве (см. формулу (II.30) в приложении) содержит x_R^m и спинорные координаты $\theta_\alpha^{\pm\pm} = u_k^\pm u_l^\pm \theta_\alpha^{(kl)}$, $\theta_\alpha^{\pm\mp} = u_k^\pm u_l^\mp \theta_\alpha^{(kl)}$. Мы рассмотрим связь между правым аналитическим $\mathcal{N} = 4$ суперпространством и расширенным $\mathcal{N} = 3$ базисом (3.1):

$$x_R^m = \mathcal{M} x_L^m = x_A^m - i(\gamma^m)_{\alpha\beta} \theta^{0\alpha} \theta_4^\beta. \quad (3.23)$$

Действие отображения $\mathcal{M}$ на левое $\mathcal{N} = 4$ аналитическое суперполе в расширенном $\mathcal{N} = 3$ базисе в представлении (3.8) меняет знак θ_4^α и дает формулу для правого аналитического суперполя:

$$\mathcal{M} \Phi_L = \Phi_R(x_R^m, \theta^{++\alpha}, \theta^{-+\alpha}, u) = O^{-1} \phi_R(x_A^m, \theta^{++\alpha}, \theta^{0\alpha}, u), \quad (3.24)$$

$$O^{-1} = \mathcal{M} O = e^{\theta_4^\alpha D_\alpha^0} = 1 + \theta_4^\alpha D_\alpha^0 - \frac{1}{4} (\theta_4)^2 (D^0)^2, \quad (3.25)$$

где $\phi_R(\zeta)$ – соответствующее $\mathcal{N} = 3$ аналитическое суперполе.

Представление (3.24) гарантирует явную правую аналитичность:

$$\partial_\alpha^- [O^{-1}\phi_R(\zeta)] = 0. \quad (3.26)$$

Правое представление $SU_L(2) \times SU_R(2)$ генераторов можно получить зеркальным отображением формул (3.13):

$$\begin{aligned} O\hat{L}_{kl}O^{-1}\phi_R &= \mathcal{M}\mathcal{L}_{kl}\phi_L = \mathcal{R}_{kl}\phi_R, \\ O\hat{R}_{kl}O^{-1}\phi_R &= \mathcal{M}\mathcal{R}_{kl}\phi_L = \mathcal{L}_{kl}\phi_R, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где аналитические операторы заданы формулами (3.14) и (3.15).

Зеркальное отображение $\mathcal{N} = 4$ суперконформной группы имеет вид

$$K_4\Phi_R(\hat{\zeta}_R) \rightarrow \mathcal{K}_R\phi_R(\zeta), \quad (3.28)$$

$$\mathcal{K}_R = \mathcal{M}\mathcal{K}_L = \mathcal{K}_3(\zeta) - \mathcal{K}_{4/3}, \quad (3.29)$$

где $\mathcal{K}_{4/3}(\zeta)$ включает дополнительные $\mathcal{N} = 4$ генераторы (3.17). Таким образом, отображение $\phi_R(\zeta) = \mathcal{M}\phi_L$ меняет знак в преобразованиях с дополнительными $\mathcal{N} = 4$ генераторами; например, $\mathcal{M}\epsilon_4^\alpha D_\alpha^0\phi_L = -\epsilon_4^\alpha D_\alpha^0\phi_R$.

4. $\mathcal{N} = 4$ СУПЕРКОНФОРМНЫЕ МОДЕЛИ В $\mathcal{N} = 3$ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Явно суперсимметричные $\mathcal{N} = 4$ модели исследовались в $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве [20]. Мы переформулируем эти модели в $\mathcal{N} = 3$ базисе (3.1). Рассмотрим соответствующее представление левого абелевого $\mathcal{N} = 4$ калибровочного суперполя

$$V_{4L}^{++} = \left[1 - \theta_4^\alpha D_\alpha^0 - \frac{1}{4}(\theta_4)^2 (D^0)^2 \right] V_0^{++}(\zeta), \quad (4.1)$$

где $V_0^{++}(\zeta)$ – абелев $\mathcal{N} = 3$ аналитический препотенциал (2.38). Неаналитическая $\mathcal{N} = 4$ абелева гармоническая связность удовлетворяет уравнению

$$D_L^{++}V_{4L}^{--} = D_L^{--}V_{4L}^{++}. \quad (4.2)$$

Определим левое представление генератора четвертой суперсимметрии $\mathcal{Q}_\alpha^4$ на $\mathcal{N} = 3$ калибровочном $U(1)$ препотенциале (2.38):

$$\mathcal{Q}_\alpha^4 V_0^{++} = -D_\alpha^0 V_0^{++}. \quad (4.3)$$

В калибровке (2.42) преобразование суперсимметрии содержит дополнительный член с композитным параметром $\Lambda_4(\epsilon_4)$:

$$\delta^*(\epsilon_4)V_{WZ}^{++} = \epsilon_4^\alpha D_\alpha^0 V_{WZ}^{++} - \mathcal{D}^{++}\Lambda_4(\epsilon_4), \quad (4.4)$$

и $\mathcal{Q}_\alpha^4$ -преобразования компонентных полей имеют вид

$$\delta(\epsilon_4)\phi^{kl} = \frac{i}{2}\epsilon_4^\alpha\chi_\alpha^{kl}, \quad \delta(\epsilon_4)A_m = \frac{i}{2}(\epsilon_4\gamma_m\lambda), \quad (4.5)$$

$$\delta(\epsilon_4)\lambda_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon_4^\beta(\gamma_m)_{\alpha\beta}F^m, \quad \delta(\epsilon_4)\chi_\alpha^{kl} = \epsilon_4^\beta\partial_{\alpha\beta}\phi^{kl} + \epsilon_{4\alpha}X^{kl}, \quad (4.6)$$

$$\delta(\epsilon_4)X^{kl} = \frac{i}{2}\epsilon_4^\alpha\partial_{\alpha\beta}\chi^{\beta kl}. \quad (4.7)$$

$\mathcal{N} = 4$ абелева суперполевая напряженность выражается через суперполе V_{4L}^{--} :

$$W_{4R}^{++}(V_L^{++}) = -\frac{1}{4}(D^{++})^2 V_{4L}^{--} = \left[1 + \theta_4^\alpha D_\alpha^0 - \frac{1}{4}(\theta_4)^2 (D^0)^2\right] W_0^{++}(\zeta), \quad (4.8)$$

и может быть связана с абелевой $\mathcal{N} = 3$ аналитической напряженностью W_0^{++} (2.39). Напряженность левого калибровочного суперполя W_{4R}^{++} по определению удовлетворяет условию правой аналитичности

$$D_\alpha^{++} W_{4R}^{++} = 0, \quad D_\alpha^{-+} W_{4R}^{++} = 0 \quad (4.9)$$

и гармоническому условию $D_L^{++} W_{4R}^{++} = D_R^{++} W_{4R}^{++} = 0$. Суперконформное преобразование этого правого аналитического суперполя имеет вид

$$\delta_4^* W_{4R}^{++} = 2\lambda_R W_{4R}^{++} - \widehat{K}_4 W_{4R}^{++}, \quad (4.10)$$

$$\lambda_R = \lambda(\zeta) + \frac{i}{2} k_m (\theta^0 \gamma^m \theta_4) - U_{kl}^0 b^{kl} - \frac{i}{2} U_{kl}^0 \eta_\alpha^{(kl)} + \frac{i}{2} \left(\theta^{0\alpha} - \frac{1}{2} \theta_4^\alpha \right) \eta_\alpha^4, \quad (4.11)$$

где параметр $\lambda(\zeta)$ определен формулой (2.36).

Суперполя V_{4L}^{++} и W_{4L}^{++} определены в разных $\mathcal{N} = 4$ суперпространствах, поэтому удобно использовать их представления V_0^{++} (4.1) и W_0^{++} (4.8) в $\mathcal{N} = 3$ суперпространстве. Соответствующие преобразования суперсимметрии для псевдоскалярной суперполевой напряженности W_0^{++} получаются из $\mathcal{N} = 4$ преобразований W_{4L}^{++} :

$$\mathcal{Q}_\alpha^4 W_0^{++}(V_0^{++}) = D_\alpha^0 W_0^{++}(V_0^{++}). \quad (4.12)$$

По сравнению с выражением (4.3) это преобразование имеет зеркальный вид. Эта формула также легко проверяется с помощью соотношения

$$\delta^*(\epsilon_4) V_0^{--} = -\frac{1}{2} \epsilon_4^\alpha \mathcal{D}^{--} D_\alpha^{++} V_0^{--} = -\epsilon_4^\alpha D_\alpha^0 V_0^{--} - \frac{1}{2} \epsilon_4^\alpha D_\alpha^{++} \mathcal{D}^{--} V_0^{--}. \quad (4.13)$$

Активное правое $\mathcal{N} = 4$ суперконформное преобразование напряженности

$$\delta_4^* W_0^{++} = 2(\lambda - \lambda_4) W_0^{++} - \mathcal{K}_R W_0^{++} \quad (4.14)$$

содержит оператор $\mathcal{K}_R$, $\mathcal{N} = 3$ множитель λ (2.36) и дополнительный множитель λ_4 (3.21).

Аналитическое абелево действие $\mathcal{N} = 3$ теории Черна–Саймонса

$$\int d\zeta^{-4} V_0^{++} W_0^{++} = \int d^6 z du V_0^{++} V_0^{--} \quad (4.15)$$

неинвариантно относительно $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии и преобразований P -четности.

Рассмотрим абелево аналитическое псевдоскалярное калибровочное суперполе $A^{++}(\zeta)$:

$$\delta_\Lambda A^{++} = -\mathcal{D}^{++} \Lambda_A, \quad P A^{++} = -A^{++}, \quad \widetilde{A^{++}} = -A^{++}. \quad (4.16)$$

WZ-калибровка для этого суперполя

$$\begin{aligned} A_{WZ}^{++} = & 3(\theta^{++})^2 U_{kl}^{--} \Lambda^{kl} + 2(\theta^{++} \gamma^m \theta^0) B_m + 2i(\theta^0)^2 \theta^{++\alpha} \xi_\alpha + \\ & + 3i(\theta^{++})^2 \theta^{0\alpha} U_{kl}^{--} \rho_\alpha^{kl} + 3i(\theta^{++})^2 (\theta^0)^2 U_{kl}^{--} Y^{kl} \end{aligned} \quad (4.17)$$

включает скаляр Λ^{kl} , псевдоскаляр Y^{kl} , псевдовекторное поле B_m и спинорные поля $\xi_\alpha, \rho_\alpha^{kl}$.

По определению это $\mathcal{N} = 3$ суперполе преобразуется как правый $\mathcal{N} = 4$ супермультиплет:

$$\delta_4^* A^{++} = -\mathcal{K}_R A^{++}. \quad (4.18)$$

Соответствующая скалярная суперполевая напряженность описывает левый тензорный $\mathcal{N} = 4$ мультиплет (3.22):

$$L_A^{++}(A^{++}) = I A^{++}, \quad (4.19)$$

где линейный интегральный оператор I определен в (2.39).

Теперь мы можем построить BF-взаимодействие двух абелевых суперполей с константой связи β :

$$S_{\text{BF}}(V_0^{++}, A^{++}) = -i\beta \int d\zeta^{-4} V_0^{++} L_A^{++} = -i\beta \int d\zeta^{-4} du A^{++} W_0^{++}, \quad (4.20)$$

которое инвариантно относительно $\mathcal{N} = 4$ суперконформных преобразований и преобразований P -четности. Эквивалентное взаимодействие определено в $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве [20]. BF-взаимодействие в $\mathcal{N} = 3$ суперпространстве можно выразить через разность двух абелевых членов Черна–Саймонса:

$$\begin{aligned} S_{\text{BF}} &= -i\beta \int d\zeta^{-4} (V_L^{++} W_L^{++} - V_R^{++} W_R^{++}), \\ V_0^{++} &= V_L^{++} + V_R^{++}, \quad A^{++} = V_L^{++} - V_R^{++}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Отметим, что каждый член Черна–Саймонса нетривиально преобразуется относительно четвертой суперсимметрии:

$$\delta^*(\epsilon_4) V_L^{++} = \epsilon_4^\alpha D_\alpha^0 V_R^{++}, \quad \delta^*(\epsilon_4) V_R^{++} = \epsilon_4^\alpha D_\alpha^0 V_L^{++}. \quad (4.22)$$

Левый гипермультиплет $q^+(\zeta)$ имеет $\mathcal{N} = 4$ преобразование

$$\delta_4^* q^+ = (\lambda + \lambda_4) q^+ - \mathcal{K}_L q^+. \quad (4.23)$$

$\mathcal{N} = 4$ суперконформное минимальное взаимодействие левых суперполей q^+ и V_0^{++} имеет вид

$$\int d\zeta^{-4} \bar{q}^+ \nabla^{++} q^+ = \int d\zeta^{-4} \bar{q}^+ (\mathcal{D}^{++} q^+ + V_0^{++} q^+). \quad (4.24)$$

Нетрудно также построить неминимальное $\mathcal{N} = 4$ суперконформное взаимодействие напряженности $W_0^{++}(V_0^{++})$ с правым вещественным гипермультиплетом Ω :

$$\int d\zeta^{-4} [(\mathcal{D}^{++} \Omega)^2 + \Omega^{-2} (W_0^{++})^2], \quad (4.25)$$

$$\delta_4^* \Omega = (\lambda - \lambda_4) \Omega - \mathcal{K}_R \Omega. \quad (4.26)$$

Взаимодействие калибровочного суперполя A^{++} с двумя комплексными гипермультиплетами q^{+a} ($a = 1, 2$) рассматривалось в работе [17]:

$$S(q, \bar{q}, A) = \int d\zeta^{-4} \bar{q}_a^+ (\mathcal{D}^{++} + A^{++}) q^{+a}, \quad (4.27)$$

$$\widetilde{q^{+a}} = \bar{q}_a^+ = \varepsilon_{ab} \bar{q}^{+b}, \quad Pq^{+a} = \bar{q}^{+a}, \quad P(\bar{q}_a^+ q^{+a}) = -\bar{q}_a^+ q^{+a}. \quad (4.28)$$

Действие абелевой $ABJM$ -модели $S_{\text{ABJM}}^0 = S_{\text{BF}}(V_0, A) + S(q, \bar{q}, A)$ инвариантно относительно трех нелинейных преобразований суперсимметрии [17]:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon V_0^{++} &= \frac{2}{\beta} \epsilon^{\alpha ab} \theta_\alpha^0 \bar{q}_a^+ q_b^+, & \delta_\epsilon A^{++} &= 0, \\ \delta_\epsilon q^{+a} &= i\epsilon^{\alpha ab} \left[D_\alpha^0 + \frac{1}{2} D_\alpha^{++} A^{--} + \theta_\alpha^{--} L_A^{++} \right] q_b^+, \\ \delta_\epsilon \bar{q}_a^+ &= i\epsilon_{ab}^\alpha \left[D_\alpha^0 - \frac{1}{2} D_\alpha^{++} A^{--} - \theta_\alpha^{--} L_A^{++} \right] \bar{q}_b^+, \end{aligned} \quad (4.29)$$

которые образуют $\mathcal{N} = 6$ суперсимметрию вместе с $\mathcal{N} = 3$ преобразованиями. Алгебра этих нелинейных преобразований замыкается на соответствующих уравнениях движения.

Действие S_{ABJM}^0 также инвариантно относительно дополнительной немассовой суперсимметрии:

$$\begin{aligned} \delta^*(\epsilon_4) V_0^{++} &= \epsilon_4^\alpha D_\alpha^0 V_0^{++}, & \delta^*(\epsilon_4) A^{++} &= -\epsilon_4^\alpha D_\alpha^0 A^{++}, \\ \delta^*(\epsilon_4) q^{+a} &= -\epsilon_4^\alpha D_\alpha^0 q^{+a}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Эти преобразования не коммутируют с нелинейными преобразованиями (4.29):

$$\begin{aligned} [\delta^*(\epsilon_4), \delta_\epsilon] V_0^{++} &= -\frac{1}{\beta} \epsilon_4^\alpha \epsilon_\alpha^{ab} \bar{q}_a^+ q_b^+, & [\delta^*(\epsilon_4), \delta_\epsilon] A^{++} &= 0, \\ [\delta^*(\epsilon_4), \delta_\epsilon] q^{+a} &= \epsilon_4^\alpha \epsilon^{\beta ab} \left[-i\partial_{\alpha\beta}^A + \frac{1}{2} D_\alpha^0 D_\beta^{++} A^{--} - \theta_\beta^{--} D_\alpha^0 L_A^{++} \right] q_b^+. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Улучшенный $\mathcal{N} = 3$ линейный мультиплет w^{++} можно связать с абелевой суперполевой напряженностью:

$$W_0^{++}(V_0^{++}) = \gamma(u_k^+ u_l^+ C^{kl} + w^{++}), \quad C^{kl} C_{kl} = 2, \quad (4.32)$$

используя константу γ размерности 1 и безразмерные константы C_{kl} , описывающие спонтанное нарушение симметрии. Аналогично вводится улучшенный абелев препотенциал v^{++} :

$$\begin{aligned} V_0^{++} &= 3\gamma C^{--} (\theta^{++})^2 + \gamma v^{++}, \\ w^{++}(v^{++}) &= I v^{++}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $C^{--} = u_k^- u_l^- C^{kl}$.

Улучшенное взаимодействие V_0^{++} определяется в $\mathcal{N} = 3$ суперпространстве по аналогии с $\mathcal{N} = 2$, $d = 4$ и $\mathcal{N} = 4$, $d = 3$ случаями [12], [20]:

$$\begin{aligned} S_0^L(V_0^{++}) &= -\frac{1}{\gamma} \int d\zeta^{-4} \left(\frac{w^{++}}{1 + \sqrt{1 + w^{++} C^{--}}} \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{\gamma} \int dz du \frac{v^{--} w^{++}}{(1 + \sqrt{1 + w^{++} C^{--}})^2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Это взаимодействие обладает $\mathcal{N} = 4$ суперконформной симметрией относительно преобразований

$$\delta^* w^{++} = 2(\lambda - \lambda_4)(w^{++} + C^{++}) - 2(\lambda^{++} - \lambda_4^{++})C^0 - \mathcal{K}_R w^{++}, \quad (4.35)$$

которые эквивалентны преобразованиям (4.14). $\mathcal{N} = 2$, $d = 3$ представление действия (4.34) изучено в работах [21].

Вариация этого действия по v^{++} выражается через нелинейную функцию $B_C^{++}(w^{++})$:

$$\delta S_0^L(V_0^{++}) = -\frac{1}{\gamma} \int dz du \delta v^{--} B_C^{++}(w^{++}) = -\frac{1}{\gamma} \int d\zeta^{-4} \delta v^{++} \mathcal{F}_C^{++}(w^{++}), \quad (4.36)$$

$$B_C^{++}(w^{++}) = \frac{w^{++}}{(1 + \sqrt{1 + w^{++} C^{--}}) \sqrt{1 + w^{++} C^{--}}},$$

$$\mathcal{F}_C^{++}(w^{++}) = I B_C^{++}(w^{++}), \quad \mathcal{D}^{++} \mathcal{F}_C^{++} = 0. \quad (4.37)$$

Действие S_0^L дает линейное уравнение для функции B_C^{++} .

Подобное $\mathcal{N} = 4$ суперконформное взаимодействие правого калибровочного суперполя A^{++} получается из улучшенного суперполя l^{++} :

$$L_A^{++}(A^{++}) = \gamma(u_k^+ u_l^+ c^{kl} + l^{++}), \quad c^{kl} c_{kl} = 2, \quad (4.38)$$

$$S_0^R(A^{++}) = -\frac{1}{\gamma} \int d\zeta^{-4} \left(\frac{l^{++}}{1 + \sqrt{1 + l^{++} c^{--}}} \right)^2. \quad (4.39)$$

Комбинированное $\mathcal{N} = 3$ действие

$$S^\beta(V_0^{++}, A^{++}) = S_{\text{BF}} + S_0^L + S_0^R \quad (4.40)$$

описывает нетривиальное суперконформное взаимодействие двух абелевых калибровочных суперполей. Квантовые свойства этой модели можно изучать методом $\mathcal{N} = 3$ супердиаграмм [18].

Эквивалентная суперконформная модель ранее рассматривалась в $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве [20]. Соответствующие абелевы $\mathcal{N} = 4$ препотенциалы были определены в различных зеркальных суперпространствах. На уровне полевых компонент эта модель описывает нелинейное взаимодействие двух топологически массивных калибровочных полей со спинорными, скалярными и псевдоскалярными полями.

Действие $\mathcal{N} = 4$ электродинамики содержит размерную константу g :

$$S_2^E = -\frac{1}{g^2} \int d\zeta^{-4} (W_0^{++})^2. \quad (4.41)$$

Оно сохраняет P -четность и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрию, однако нарушает масштабную инвариантность.

Определим безразмерную незаряженную аналитическую функцию абелевой напряженности, которая имеет правое $\mathcal{N} = 4$ преобразование:

$$K = \xi^2 (D^{++})^2 (D^{--})^2 (\mathcal{D}^{--})^2 (W_0^{++})^2, \quad \delta^*(\epsilon_4) K = -\epsilon_4^\alpha D_\alpha^0 K, \quad (4.42)$$

где константа ξ имеет размерность -2 . Аналитическая $\mathcal{N} = 3$ суперполевая плотность действия нелинейной электродинамики

$$S_N^E = -\frac{1}{g^2} \int d\zeta^{-4} (W_0^{++})^2 [1 + f(K)] \quad (4.43)$$

пропорциональна плотности квадратичного действия (4.41) и нелинейной функции суперполя K . Это действие обладает $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрией. В компонентах лагранжиан содержит нелинейные члены $(F_m F^m)^n$, $(\partial_m \phi^{kl} \partial^m \phi_{kl})^n$ и т.п.

5. НЕАБЕЛЕВА КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ

Рассмотрим представление $V_{4L}^{++}(\hat{\zeta}_L) = [1 - \theta_4^\alpha D_\alpha^0 - (1/4)(\theta_4)^2 (D^0)^2] V^{++}(\zeta)$ для неабелевых калибровочных полей. В этом случае оператор суперконформной $\mathcal{N} = 4$ симметрии $\mathcal{K}_L$ (3.17) действует линейно на неабелевом препотенциале V^{++} , например, преобразование четвертой суперсимметрии имеет вид $\mathcal{Q}_\alpha^4 V^{++} = -D_\alpha^0 V^{++}$. Соответствующее нелинейное преобразование четвертой суперсимметрии неабелевой $\mathcal{N} = 3$ связности $\delta^*(\epsilon_4) V^{--} = -\epsilon_4^\alpha \hat{\mathcal{Q}}_\alpha^4 V^{--}$ получается из гармонического уравнения нулевой кривизны [22]:

$$\hat{\mathcal{Q}}_\alpha^4 V^{--} = \frac{1}{2} \nabla^{--} D_\alpha^{++} V^{--} = D_\alpha^0 V^{--} - \frac{1}{2} [D_\alpha^{++} V^{--}, V^{--}] + \frac{1}{2} D_\alpha^{++} \mathcal{D}^{--} V^{--}, \quad (5.1)$$

$$\nabla^{++} \hat{\mathcal{Q}}_\alpha^4 V^{--} = \nabla^{--} \mathcal{Q}_\alpha^4 V^{++}, \quad \nabla^{\pm\pm} = \mathcal{D}^{\pm\pm} + V^{\pm\pm}, \quad [\nabla^{++}, \nabla^{--}] = \mathcal{D}^0. \quad (5.2)$$

Оператор K_3^A (2.33) (2.34) действует линейно на суперполе V^{--} . Нелинейное действие оператора специальной конформной суперсимметрии на V^{--} возникает из коммутатора $(1/3)(\gamma^m)^{\alpha\beta} [K_m, \hat{\mathcal{Q}}_\beta^4]$.

Рассмотрим неабелеву $\mathcal{N} = 3$ напряженность

$$\mathcal{W}^{++} = -\frac{1}{4} (D^{++})^2 V^{--}. \quad (5.3)$$

Преобразование четвертой суперсимметрии для этого суперполя имеет вид

$$\hat{\mathcal{Q}}_\alpha^4 \mathcal{W}^{++} = -\frac{1}{4} (D^{++})^2 \hat{\mathcal{Q}}_\alpha^4 V^{--} = D_\alpha^0 \mathcal{W}^{++} - [D_\alpha^{++} V^{--}, \mathcal{W}^{++}], \quad (5.4)$$

оно сохраняет аналитичность:

$$D_\beta^{++} \hat{\mathcal{Q}}_\alpha^4 \mathcal{W}^{++} = 0, \quad D_\beta^{++} D_\alpha^{++} V^{--} = -2\varepsilon_{\beta\alpha} \mathcal{W}^{++}. \quad (5.5)$$

Отметим, что нелинейные члены в преобразованиях (5.1) и (5.4) отличаются множителем 2.

Действие $\mathcal{N} = 3$ теории Янга–Миллса имеет вид

$$S_{\text{SYM}} = \frac{1}{4g^2} \int d\zeta^{-4} (D^{++})^2 \text{Tr} V^{--} \mathcal{W}^{++} = -\frac{1}{g^2} \int d\zeta^{-4} \text{Tr} (\mathcal{W}^{++})^2. \quad (5.6)$$

Калибровочно-инвариантная аналитическая плотность действия $L^{(+4)} = \text{Tr} (\mathcal{W}^{++})^2$ преобразуется линейно по аналогии с абелевой величиной $(W_0^{++})^2$ (4.14):

$$\delta_4^* L^{(+4)} = 4(\lambda - \lambda_4) L^{(+4)} - \mathcal{K}_R L^{(+4)}, \quad (5.7)$$

поэтому действие S_{SYM} инвариантно относительно четвертой суперсимметрии $Q_\alpha^{(+4)} = D_\alpha^0 L^{(+4)}$, хотя и нарушает конформную инвариантность.

Используя улучшенный абелев правый тензорный мультиплет $w^{++}(V_0^{++})$ (4.35), мы можем построить правую аналитическую плотность $F(w) = (1 + w^{++}C^{--})^{-3/2}$:

$$\delta_4^* F(w) = -2(\lambda - \lambda_4)F(w) + \mathcal{D}^{++}A^{--} - \mathcal{K}_R F(w), \quad (5.8)$$

где A^{--} – некоторое аналитическое суперполе, которое представляет собой ряд по степеням $w^{++}C^{--}$ и линейно по суперконформным параметрам $\lambda - \lambda_4$ и $\lambda^{++} - \lambda_4^{++}$. Эта плотность позволяет определить суперконформное обобщение действия неабелевого калибровочного суперполя

$$S(V^{++}, V_0^{++}) = -\frac{1}{g^2} \int d\zeta^{-4} F(w) \text{Tr}(\mathcal{W}^{++})^2, \quad (5.9)$$

которое содержит также и абелево калибровочное суперполе w^{++} . При проверке суперконформной симметрии используются преобразования $F(w)$ и $L^{(+4)}$, а также формулы

$$-\int d\zeta^{-4} \mathcal{K}_R L^{(+4)} = -2 \int d\zeta^{-4} (\lambda - \lambda_4) L^{(+4)}, \quad \mathcal{D}^{++} L^{(+4)} = 0. \quad (5.10)$$

Суперконформное обобщение неабелевой теории можно также построить с помощью правого гипермультиплета $\Omega(\zeta) = \gamma C^{kl} U_{kl}^0 + \omega(\zeta)$ (4.26), тогда суперконформная плотность имеет вид $\Omega^{-2} \text{Tr}(\mathcal{W}^{++})^2$. Кинетический член для суперполя Ω имеет стандартный вид. Параметры γ и C^{kl} в этих взаимодействиях описывают спонтанное нарушение суперконформной симметрии.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы даем обзор суперконформных преобразований в стандартном и аналитическом гармоническом суперпространствах с $\mathcal{N} = 3$, $d = 3$ суперсимметрией. Активная локальная форма $\mathcal{N} = 3$ преобразования суперполей определяется оператором Киллинга K_3 , который содержит суперконформные генераторы. Коммутаторы K_3 с плоскими $\mathcal{N} = 3$ спинорными производными содержат матрицы суперконформных преобразований. Эти матрицы используются в преобразованиях стандартных $\mathcal{N} = 3$ суперполей. $\mathcal{N} = 3$ аналитическое суперпространство удобно для описания взаимодействия гипермультиплетов с калибровочными суперполями Черна–Саймонса или Янга–Миллса. Аналогичные суперконформные структуры рассматривались в $\mathcal{N} = 4$, $d = 3$ суперпространствах [20], однако в этом формализме трудно изучать связь левых и правых $\mathcal{N} = 4$ супермультиплетов.

Мы исследуем $\mathcal{N} = 4$ суперконформные модели в рамках более гибкого $\mathcal{N} = 3$ гармонического суперпространства. Левые и правые суперполя из зеркальных $\mathcal{N} = 4$ суперпространств можно связать операторными преобразованиями с соответствующими $\mathcal{N} = 3$ гармоническими суперполями в одном суперпространстве. В $\mathcal{N} = 3$ аналитическом суперпространстве построены представления дополнительных $\mathcal{N} = 4$ суперконформных генераторов Q_α^4 , S_α^4 и A_{kl} . Зеркальное отображение меняет знак

соответствующих $\mathcal{N} = 4$ суперконформных преобразований левых и правых представлений в $\mathcal{N} = 3$ суперпространстве.

$\mathcal{N} = 4$ суперполевые модели [20] легко переформулировать в $\mathcal{N} = 3$ суперполе-вом представлении, при этом нужно следить за дополнительной суперсимметрией. Мы доказываем, что калибровочный препотенциал V_0^{++} и его суперполевая напряженность W_0^{++} являются зеркальными $\mathcal{N} = 4$ супермультиплетами. Суперполевое абелево $\mathcal{N} = 3$ BF-взаимодействие S_{BF} (4.20) связывает левый скалярный калибровочный препотенциал с суперполевой напряженностью правого псевдоскалярного калибровочного препотенциала. Это BF-взаимодействие представляет собой часть $U(1) \times U(1)$ *ABJM*-модели в $\mathcal{N} = 3$ суперпространстве, которая обладает $\mathcal{N} = 6$ суперсимметрией на массовой поверхности [17]. Улучшенные суперконформные представления левых и правых линейных мультиплетов S_0^L (4.34) и S_0^R (4.39) определены в одном $\mathcal{N} = 3$ суперпространстве. Получены $\mathcal{N} = 3$ представления суперполевых уравнений движения для интересной модели с действием $S_{\text{BF}} + S_0^L + S_0^R$.

Рассмотрены преобразования $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии на неабелевых $\mathcal{N} = 3$ суперполях и построено суперконформное взаимодействие этих суперполей с абелевым калибровочным суперполем. Аналогичное взаимодействие рассматривалось ранее в $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве [20].

ПРИЛОЖЕНИЕ

$\mathcal{N} = 4$, $d = 3$ суперпространство ковариантно относительно группы Лоренца $SO(2, 1) \sim SL(2, R)$ и группы автоморфизмов $SU_L(2) \times SU_R(2)$. Важное свойство $\mathcal{N} = 4$ суперпространства связано с дискретной симметрией по отношению к зеркальному отображению

$$\mathcal{M}: SU_L(2) \leftrightarrow SU_R(2). \quad (\text{П.1})$$

Рассмотрим координаты $\mathcal{N} = 4$, $d = 3$ суперпространства в центральном базисе [10], [19], [20]:

$$z = (x^m, \theta_{ka}^\alpha), \quad (\text{П.2})$$

где i и a – двухкомпонентные индексы групп $SU_L(2)$ и $SU_R(2)$ соответственно.

В этой работе мы отождествим индексы двух групп $SU(2)$ и рассмотрим следующее разложение $\mathcal{N} = 4$ спинорных координат:

$$\theta_{ka}^\alpha \rightarrow \theta_{kl}^\alpha = \theta_{(kl)}^\alpha + \frac{1}{2} \varepsilon_{kl} \theta_4^\alpha, \quad (\text{П.3})$$

где $\theta_{(kl)}^\alpha$ – $\mathcal{N} = 3$ координаты и θ_4^α – дополнительная четвертая спинорная координата. $\mathcal{N} = 3$ центральный базис в $\mathcal{N} = 4$ суперпространстве имеет вид

$$\hat{z} = (x^m, \theta_{(kl)}^\alpha, \theta_4^\alpha). \quad (\text{П.4})$$

Соответственно определим разложение частных спинорных производных:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^{kl} &= \partial_\alpha^{(kl)} - \varepsilon^{kl} \partial_\alpha^4, & \partial_\alpha^{kl} \theta_{jn}^\beta &= \delta_\alpha^\beta \delta_j^k \delta_n^l, \\ \partial_\alpha^{(kl)} \theta_{(jn)}^\beta &= \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta (\delta_j^k \delta_n^l + \delta_n^k \delta_j^l), & \partial_\alpha^4 \theta_4^\beta &= \delta_\alpha^\beta, \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

и $\mathcal{N} = 4$ спинорных производных:

$$D_{\alpha}^{kl} = D_{\alpha}^{(kl)} - \varepsilon^{kl} D_{\alpha}^4, \quad D_{\alpha}^4 = \partial_{\alpha}^4 + \frac{i}{2} \theta_4^{\gamma} \partial_{\alpha\gamma}. \quad (\text{П.6})$$

$\mathcal{N} = 3$ суперпространство инвариантно при зеркальном отображении:

$$\mathcal{M}\theta_{kl}^{\alpha} = \theta_{lk}^{\alpha}, \quad \mathcal{M}\theta_{(kl)}^{\alpha} = \theta_{(kl)}^{\alpha}, \quad \mathcal{M}\theta_4^{\alpha} = -\theta_4^{\alpha}. \quad (\text{П.7})$$

$\mathcal{N} = 4$ оператор Киллинга содержит соответствующие суперконформные параметры и генераторы:

$$K_4 = c^m P_m + l^m \widehat{M}_m + b \widehat{D} + k^m \widehat{K}_m + \omega^{kl} L_{kl} + \Omega^{kl} R_{kl} + \\ + \epsilon_{(kl)}^{\alpha} Q_{\alpha}^{(kl)} + \epsilon_4^{\alpha} Q_{\alpha}^4 + \eta_{(kl)}^{\alpha} \widehat{S}_{\alpha}^{(kl)} + \eta_4^{\alpha} S_{\alpha}^4. \quad (\text{П.8})$$

Генераторы $SU_L(2) \times SU_R(2)$ -преобразований $L_{kl} = (V_{kl} + A_{kl})/2$ и $R_{kl} = (V_{kl} - A_{kl})/2$ можно выразить через $SU_V(2)$ -генератор V_{kl} (2.4) и дополнительный генератор $A_{kl} = \theta_4^{\alpha} \partial_{\alpha(kl)} - 2\theta_{(kl)}^{\alpha} \partial_{\alpha}^4$, который связывает спинорные координаты $\theta_{(kl)}^{\alpha}$ и θ_4^{α} . Теперь мы можем выделить оператор $\mathcal{N} = 3$ суперконформных преобразований K_3 и оператор дополнительных преобразований $K_{4/3}$:

$$K_4 = K_3 + K_{4/3}, \quad K_{4/3} = b^{kl} A_{kl} + \epsilon_4^{\alpha} Q_{\alpha}^4 + \eta_4^{\alpha} S_{\alpha}^4. \quad (\text{П.9})$$

$\mathcal{N} = 4$ суперконформные преобразования спинорных координат имеют вид

$$\delta\theta_{kl}^{\alpha} = \epsilon_{kl}^{\alpha} + l_{\gamma}^{\alpha} \theta_{kl}^{\gamma} + \frac{1}{2} b \theta_{kl}^{\alpha} - \omega_k^j \theta_{jl}^{\alpha} - \Omega_l^j \theta_{kj}^{\alpha} - \frac{1}{2} k_{\gamma}^{\beta} x_{\beta}^{\alpha} \theta_{kl}^{\gamma} - \frac{i}{4} \left[\Theta + \frac{1}{2} (\theta_4)^2 \right] \theta_{kl}^{\gamma} k_{\gamma}^{\alpha} - \\ - \frac{1}{2} x_{\gamma}^{\alpha} \eta_{kl}^{\gamma} + i \eta^{jn\gamma} \theta_{jn}^{\alpha} \theta_{kl\gamma} - \frac{i}{4} \left[\Theta + \frac{1}{2} (\theta_4)^2 \right] \eta_{kl}^{\alpha} = K_4 \theta_{kl}^{\alpha}, \quad (\text{П.10})$$

где $\Theta = \theta_{(kl)}^{\alpha} \theta_{\alpha}^{(kl)}$, $\Theta + (\theta_4)^2/2 = \theta_{kl}^{\alpha} \theta_{\alpha}^{kl}$.

Четвертый генератор суперсимметрии содержит θ_4^{γ} и соответствующую спинорную производную:

$$Q_{\alpha}^4 = \partial_{\alpha}^4 - \frac{i}{2} \theta_4^{\gamma} \partial_{\alpha\gamma}. \quad (\text{П.11})$$

Зеркальное отображение (П.7) порождает автоморфизм суперконформной $\mathcal{N} = 4$ супералгебры Ли:

$$\mathcal{M}A_{kl} = -A_{kl}, \quad \mathcal{M}Q_{\alpha}^4 = -Q_{\alpha}^4, \quad \mathcal{M}S_{\alpha}^4 = -S_{\alpha}^4, \quad \mathcal{M}K_3 = K_3. \quad (\text{П.12})$$

Левый аналитический $\mathcal{N} = 4$ базис [20] использует левые $SU(2)_L/U(1)$ -гармоники $u_k^{\pm}$ и координаты

$$\zeta_L = (x_L^m, \theta_L^{\pm\alpha}, u_i^{\pm}), \quad \theta_l^{-\alpha}, \quad \theta_l^{\pm\alpha} = -u^{\pm k} \theta_{kl}^{\alpha}, \quad \partial_{\beta}^{\mp k} \theta_l^{\pm\alpha} = \delta_l^k \delta_{\beta}^{\alpha}, \\ x_L^m = x^m + i u^{+j} u^{-k} \varepsilon^{ln} (\gamma^m)_{\alpha\beta} \theta_{jn}^{\alpha} \theta_{kl}^{\beta}, \quad \partial_n^L x_L^m = \delta_n^m, \quad (\text{П.13})$$

$$u_l^{+} D_{\alpha}^{kl} = D_{\alpha}^{+k} = \partial_{\alpha}^{+k}, \quad u_l^{-} D_{\alpha}^{kl} = D_{\alpha}^{-k} = -\partial_{\alpha}^{-k} + 2i \theta^{-k\beta} \partial_{\alpha\beta}^L. \quad (\text{П.14})$$

Мы рассмотрим альтернативное представление левого аналитического базиса:

$$\hat{\zeta}_L = (x_L^m, \theta^{++\alpha}, \theta^{+-\alpha}, u_i^\pm), \quad \theta^{\pm\pm\alpha} = u^{\pm k} u^{\pm l} \theta_{kl}^\alpha, \quad \theta^{\pm\mp\alpha} = u^{\pm k} u^{\mp l} \theta_{kl}^\alpha, \quad (\text{П.15})$$

$$x^m = x_L^m - i(\gamma^m)_{\alpha\beta} \theta^{++\alpha} \theta^{--\beta} + i(\gamma^m)_{\alpha\beta} \theta^{+-\alpha} \theta^{-+\beta}, \quad (\text{П.16})$$

$$\theta_l^{+\alpha} = u_l^+ \theta^{+-\alpha} - u_l^- \theta^{++\alpha}, \quad \theta_l^{-\alpha} = u_l^+ \theta^{--\alpha} - u_l^- \theta^{-+\alpha}. \quad (\text{П.17})$$

Нетрудно связать частные производные в различных представлениях, например:

$$\partial_\alpha^{+l} = -u^{-l} \partial_\alpha^{++} - u^{+l} \partial_\alpha^{+-}, \quad \partial_L^{++} = \partial^{++} + \theta^{-+\alpha} \partial_\alpha^{++} + \theta^{++\alpha} \partial_\alpha^{+-}. \quad (\text{П.18})$$

$\mathcal{N} = 4$ спинорные и гармонические производные в альтернативном левом базисе имеют вид

$$\begin{aligned} D_\alpha^{++} &= \partial_\alpha^{++}, & D_\alpha^{+-} &= -\partial_\alpha^{+-}, \\ D_\alpha^{-+} &= -\partial_\alpha^{-+} + 2i\theta^{-+\beta} \partial_{\alpha\beta}^L, & D_\alpha^{--} &= \partial_\alpha^{--} + 2i\theta^{--\beta} \partial_{\alpha\beta}^L, \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

$$\begin{aligned} D_L^{++} &= \partial^{++} + 2i\theta^{++\alpha} \theta^{+-\beta} \partial_{\alpha\beta}^L + \theta^{++\alpha} (\partial_\alpha^{+-} + \partial_\alpha^{-+}) + (\theta^{+-\alpha} + \theta^{-+\alpha}) \partial_\alpha^{++}, \\ D_L^{-+} &= \partial^{-+} - 2i\theta^{-+\alpha} \theta^{-+\beta} \partial_{\alpha\beta}^L + \theta^{-+\alpha} (\partial_\alpha^{+-} + \partial_\alpha^{-+}) + (\theta^{-+\alpha} + \theta^{-+\alpha}) \partial_\alpha^{-+}, \\ D_L^0 &= \partial^0 + 2\theta^{++\alpha} \partial_\alpha^{--} - 2\theta^{--\alpha} \partial_\alpha^{++}, \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

где использованы частные производные в новых координатах

$$\partial_\alpha^{\mp\mp} \theta^{\pm\pm\beta} = \partial_\alpha^{\mp\pm} \theta^{\pm\mp\beta} = \delta_\alpha^\beta, \quad \partial^{\pm\pm} \theta^{\pm\pm\beta} = 0. \quad (\text{П.21})$$

Генераторы $\mathcal{N} = 4$ суперсимметрии $Q_\alpha^{kl} = Q_\alpha^{(kl)} - \varepsilon^{kl} Q_\alpha^4$ в левом базисе имеют вид

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(kl)} &= U^{++kl} \partial_\alpha^{--} + U^{--kl} (\partial_\alpha^{++} - 2i\theta^{++\beta} \partial_{\alpha\beta}^L) + \\ &\quad + U^{0kl} (\partial_\alpha^{+-} + \partial_\alpha^{-+} + 2i\theta^{+-\beta} \partial_{\alpha\beta}^L), \\ Q_\alpha^4 &= \frac{1}{2} (\partial_\alpha^{--} - \partial_\alpha^{++}) - i\theta^{+-\beta} \partial_{\alpha\beta}^L. \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

Нетрудно также построить генератор специальных конформных преобразований $K_m = \mathcal{K}_m^L + K'_m$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m^L &= -i(\theta^{++} \gamma_m \theta^{+-}) \partial^{--} + x_{mL} x_L^n \partial_n^L - \frac{1}{2} (x_L)^2 \partial_m^L - \\ &\quad - \frac{i}{2} (\gamma_m)_\gamma^\alpha \theta^{++\gamma} (\theta^{+-})^2 \partial_\alpha^{--} + \\ &\quad + \frac{1}{2} x_L^n (\gamma_n)^{\alpha\beta} (\gamma_m)_{\beta\gamma} [\theta^{++\gamma} \partial_\alpha^{--} + \theta^{+-\gamma} \partial_\alpha^{+-}], \\ K'_m &= \frac{1}{2} x_L^n (\gamma_n)^{\alpha\beta} (\gamma_m)_{\beta\gamma} [\theta^{-+\gamma} \partial_\alpha^{+-} + \theta^{--\gamma} \partial_\alpha^{++}] - \\ &\quad - \frac{i}{2} (\gamma_m)_\gamma^\alpha \theta^{+-\gamma} (\theta^{--})^2 \partial_\alpha^{+-} + \\ &\quad + i(\gamma_m)_{\beta\gamma} \theta^{++\beta} (\theta^{-+\gamma} - \theta^{+-\gamma}) \theta^{--\alpha} \partial_\alpha^{+-} + \\ &\quad + \frac{i}{2} (\gamma_m)_\gamma^\alpha \theta^{++\gamma} (\theta^{--})^2 \partial_\alpha^{++}, \end{aligned} \quad (\text{П.23})$$

где оператор $\mathcal{K}_m^L$ действует на левых аналитических суперполях.

Рассмотрим представления $SU_L(2) \times SU_R(2)$ суперконформных генераторов в этом базисе:

$$\begin{aligned} L_{kl} = & U_{kl}^{++} \partial^{--} + U_{kl}^{++} \theta^{+-\alpha} \partial_{\alpha}^{--} + U_{kl}^{++} \theta^{--\alpha} \partial_{\alpha}^{+-} + \\ & + U_{kl}^0 (\theta^{++\alpha} \partial_{\alpha}^{--} + \theta^{+-\alpha} \partial_{\alpha}^{+-}) - U_{kl}^0 (\theta^{--\alpha} \partial_{\alpha}^{++} + \theta^{-+\alpha} \partial_{\alpha}^{+-}) + \\ & + U_{kl}^{--} (\theta^{+-\alpha} \partial_{\alpha}^{++} + \theta^{++\alpha} \partial_{\alpha}^{+-}) + 2i U_{kl}^{--} \theta^{++\alpha} \theta^{+-\alpha} \partial_{\alpha\beta}^L, \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

$$\begin{aligned} R^{kl} = & -U^{++kl} \theta^{+-\alpha} \partial_{\alpha}^{--} + U^{0kl} \theta^{++\alpha} \partial_{\alpha}^{--} - \\ & - U^{0kl} \theta^{+-\alpha} \partial_{\alpha}^{+-} + U^{--kl} \theta^{++\alpha} \partial_{\alpha}^{+-} - \\ & - U^{++kl} \theta^{--\alpha} \partial_{\alpha}^{+-} - U^{0kl} \theta^{--\alpha} \partial_{\alpha}^{++} + \\ & + U^{0kl} \theta^{-+\alpha} \partial_{\alpha}^{+-} + U^{--kl} \theta^{-+\alpha} \partial_{\alpha}^{++}. \end{aligned} \quad (\text{П.25})$$

Мы можем изучать активные $\mathcal{N} = 4$ суперконформные преобразования левых аналитических суперполей $\Phi_L(\hat{\zeta}_L)$, например:

$$\begin{aligned} \delta^* \Phi_L = & -[\omega^{kl} L_{kl} + \Omega^{kl} R_{kl} + \epsilon_{kl}^{\alpha} Q_{\alpha}^{kl}] \Phi_L = \\ = & -[a^{kl} V_{kl} + b^{kl} A_{kl} + \epsilon_{(kl)}^{\alpha} Q_{\alpha}^{(kl)} + \epsilon_4^{\alpha} Q_{\alpha}^4] \Phi_L. \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

Эти суперконформные операторы R_{kl} не действуют на левых четных координатах:

$$R_{kl} x_L^m = 0, \quad R_{kl} u_i^{\pm} = 0, \quad [R_{kl}, D_L^{\pm\pm}] = 0. \quad (\text{П.27})$$

$\mathcal{N} = 4$ оператор Киллинга K_4 удовлетворяет следующим соотношениям в левом базисе:

$$[K_4, D_L^{++}] = -\lambda_L^{++} D_L^0, \quad [K_4, D_L^{--}] = -(D_L^{--} \lambda_L^{++}) D_L^{--}, \quad (\text{П.28})$$

$$\begin{aligned} \lambda_L^{++} = & (a^{kl} + b^{kl}) u_k^+ u_l^+ - i(\theta^{++} \gamma^m \theta^{+-}) k_m + \\ & + i(\theta^{+-\alpha} u_k^+ u_l^+ - \theta^{++\alpha} u_k^- u_l^+) \eta_{\alpha}^{(lk)} - \frac{i}{2} \theta^{++\alpha} \eta_{\alpha}^4. \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

Координаты и частные производные правого аналитического $\mathcal{N} = 4$ базиса $\hat{\zeta}_R = \mathcal{M} \hat{\zeta}_L$ мы получаем зеркальным отображением из левого базиса (П.15):

$$\hat{\zeta}_R = \mathcal{M} \hat{\zeta}_L = (x_R^m, \theta^{++\alpha}, \theta^{-+\alpha}, u_i^{\pm}), \quad (\text{П.30})$$

$$\begin{aligned} x_R^m = & \mathcal{M} x_L^m = x^m + i u^{+j} u^{-k} \varepsilon^{ln} (\gamma^m)_{\alpha\beta} \theta_{nj}^{\alpha} \theta_{lk}^{\beta} = \\ = & x_L^m + 2i (\gamma^m)_{\alpha\beta} \theta^{+-\alpha} \theta^{-+\beta}, \end{aligned} \quad (\text{П.31})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \theta^{\pm\pm\alpha} = & \theta^{\pm\pm\alpha}, \quad \mathcal{M} \theta^{\pm\mp\alpha} = \theta^{\mp\pm\alpha}, \quad \mathcal{M} u_k^{\pm} = u_k^{\pm}, \\ \mathcal{M} \partial_m^L = & \partial_m^R, \quad \mathcal{M} \partial_{\alpha}^{\pm\pm} = \hat{\partial}_{\alpha}^{\pm\pm}, \\ \mathcal{M} \partial_{\alpha}^{\pm\mp} = & \hat{\partial}_{\alpha}^{\mp\pm}, \quad \mathcal{M} \partial^{\pm\pm} = \partial^{\pm\pm}. \end{aligned} \quad (\text{П.32})$$

Напомним, что правый базис в работе [20] содержит независимые правые гармоники $v_a^{(\pm)}$. Мы рассматриваем только активные преобразования суперполей и поэтому можем формально использовать одинаковые гармоники и частные гармонические

производные в левом и правом базисах. Спинорные и гармонические производные в правом базисе имеют вид

$$\widehat{D}_\alpha^{++} = \hat{\partial}_\alpha^{++} = \mathcal{M}D_\alpha^{++}, \quad \widehat{D}_\alpha^{-+} = -\hat{\partial}_\alpha^{-+} = \mathcal{M}D_\alpha^{+-}, \quad (\text{П.33})$$

$$\widehat{D}_\alpha^{+-} = -\hat{\partial}_\alpha^{+-} + 2i\theta^{+-\beta}\partial_{\alpha\beta}^R = \mathcal{M}D_\alpha^{+-}, \quad \widehat{D}_\alpha^{--} = \hat{\partial}_\alpha^{--} + 2i\theta^{-\beta}\partial_{\alpha\beta}^R = \mathcal{M}D_\alpha^{--}, \quad (\text{П.34})$$

$$D_R^{++} = \partial^{++} + 2i\theta^{++\alpha}\theta^{-+\beta}\partial_{\alpha\beta}^R + \theta^{++\alpha}(\hat{\partial}_\alpha^{-+} + \hat{\partial}_\alpha^{+-}) + (\theta^{+-\alpha} + \theta^{-+\alpha})\hat{\partial}_\alpha^{++} = \mathcal{M}D_L^{++}, \quad (\text{П.35})$$

$$D_R^{--} = \partial^{--} - 2i\theta^{-\alpha}\theta^{+-\beta}\partial_{\alpha\beta}^R + \theta^{-\alpha}(\hat{\partial}_\alpha^{+-} + \hat{\partial}_\alpha^{--}) + (\theta^{+-\alpha} + \theta^{-+\alpha})\hat{\partial}_\alpha^{--}.$$

Правая аналитическая часть генератора специальных конформных преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_m^R = \mathcal{M}\mathcal{K}_m^L = & -i(\theta^{++}\gamma_m\theta^{-+})\partial^{--} + x_{mR}x_R^n\partial_n^R - \\ & - \frac{1}{2}(x_R)^2\partial_m^R - \frac{i}{2}(\gamma_m)^\alpha_\gamma\theta^{++\gamma}(\theta^{-+})^2\hat{\partial}_\alpha^{--} + \\ & + \frac{1}{2}x_R^n(\gamma_n)^{\alpha\beta}(\gamma_m)_{\beta\gamma}[\theta^{++\gamma}\hat{\partial}_\alpha^{--} + \theta^{-+\gamma}\hat{\partial}_\alpha^{+-}]. \end{aligned} \quad (\text{П.36})$$

Правое представление $SU_L(2) \times SU_R(2)$ -генераторов и генераторов суперсимметрии также получается зеркальным отображением левого представления:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{kl} = \mathcal{M}R_{kl} = & -U^{++kl}\theta^{-+\alpha}\hat{\partial}_\alpha^{--} + U^{0kl}\theta^{++\alpha}\hat{\partial}_\alpha^{--} - \\ & - U^{0kl}\theta^{-+\alpha}\hat{\partial}_\alpha^{+-} + U^{--kl}\theta^{++\alpha}\hat{\partial}_\alpha^{+-} - \\ & - U^{++kl}\theta^{-\alpha}\hat{\partial}_\alpha^{+-} - U^{0kl}\theta^{-\alpha}\hat{\partial}_\alpha^{++} + \\ & + U^{0kl}\theta^{+-\alpha}\hat{\partial}_\alpha^{+-} + U^{--kl}\theta^{+-\alpha}\hat{\partial}_\alpha^{++}, \end{aligned} \quad (\text{П.37})$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{kl} = \mathcal{M}L_{kl}, \quad \hat{A}_{kl} = -\mathcal{M}A_{kl} = \mathcal{M}(R_{kl} - L_{kl}), \\ \hat{Q}_\alpha^{(kl)} = U^{++kl}\hat{\partial}_\alpha^{--} + U^{--kl}(\hat{\partial}_\alpha^{++} - 2i\theta^{++\beta}\partial_{\alpha\beta}^R) + \\ + U^{0kl}(\hat{\partial}_\alpha^{+-} + \hat{\partial}_\alpha^{--} + 2i\theta^{-+\beta}\partial_{\alpha\beta}^R), \end{aligned} \quad (\text{П.38})$$

$$\hat{Q}_\alpha^4 = -\mathcal{M}Q_\alpha^4 = \frac{1}{2}(\hat{\partial}_\alpha^{+-} - \hat{\partial}_\alpha^{--}) + i\theta^{-+\gamma}\partial_{\alpha\gamma}^R.$$

Правое представление оператора Киллинга $\hat{K}_4 = K_3 - K_{4/3}$ удовлетворяет соотношению

$$[\hat{K}_4, D_R^{++}] = -\lambda_R^{++}D_R^0, \quad (\text{П.39})$$

$$\begin{aligned} \lambda_R^{++} = \mathcal{M}\lambda_L^{++} = & (a^{kl} - b^{kl})u_k^+u_l^+ - i(\theta^{++}\gamma^m\theta^{-+})k_m + \\ & + i(\theta^{-+\alpha}u_k^+u_l^+ - \theta^{++\alpha}u_k^-u_l^+)\eta_\alpha^{(lk)} + \frac{i}{2}\theta^{++\alpha}\eta_\alpha^4. \end{aligned} \quad (\text{П.40})$$

Благодарности. Автор признателен Е. А. Иванову за интересные обсуждения. Работа частично поддержана грантами РФФИ № 09-02-01209, 09-01-93107-НЦНИЛ и 09-02-91349-ННИО, грантом DFG 436 RUS 113/669/0-4R и программой Гейзенберг–Ландау.

Список литературы

- [1] W. Siegel, *Nucl. Phys. B*, **156** (1979), 135–143.
- [2] J. Schonfeld, *Nucl. Phys. B*, **185**:1 (1981), 157–171.
- [3] Б. М. Зупник, Д. Г. Пак, *ТМФ*, **77**:1 (1988), 97–106.
- [4] D. G. Pak, B. M. Zupnik, *Class. Quant. Grav.*, **6**:5 (1989), 723–729.
- [5] Б. М. Зупник, *ТМФ*, **89**:2 (1991), 253–262.
- [6] B. M. Zupnik, *Phys. Lett. B*, **254**:1–2 (1991), 127–131.
- [7] E. A. Ivanov, *Phys. Lett. B*, **268**:2 (1991), 203–208.
- [8] S. J. Gates (jr.), H. Nishino, *Internat. J. Modern Phys.*, **8**:19 (1993), 3371–3421.
- [9] Б. М. Зупник, Д. В. Хецелиус, *ЯФ*, **47**:8 (1988), 1147–1156.
- [10] B. M. Zupnik, “Harmonic superspaces for three-dimensional theories”, *Supersymmetries and Quantum Symmetries*, Lecture Notes in Phys., **524**, eds. J. Wess, E. Ivanov, Springer, Berlin, 1999, 116–123, arXiv:hep-th/9804167.
- [11] A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev, *Class. Quant. Grav.*, **1**:5 (1984), 469–498.
- [12] A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky, E. S. Sokatchev, *Harmonic Superspace*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [13] P. S. Howe, M. I. Leeming, *Class. Quant. Grav.*, **11**:12 (1994), 2843–2852, arXiv:hep-th/9408062.
- [14] B. M. Zupnik, *Phys. Lett. B*, **660**:3 (2008), 254–259, arXiv:0711.4680; Б. М. Зупник, *ТМФ*, **157**:2 (2008), 217–234, arXiv:0802.0801.
- [15] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis, J. Maldacena, *JHEP*, **10** (2008), 091, 38 pp., arXiv:0806.1218.
- [16] J. Bagger, N. Lambert, *Phys. Rev. D*, **77**:6 (2008), 065008, 6 pp., arXiv:0711.0955; A. Gustavsson, *Nucl. Phys. B*, **811**:1–2 (2009), 66–76; arXiv:0709.1260.
- [17] I. L. Buchbinder, E. A. Ivanov, O. Lechtenfeld, N. G. Pletnev, I. B. Samsonov, B. M. Zupnik, *JHEP*, **03** (2009), 096, 36 pp., arXiv:0811.4774.
- [18] I. L. Buchbinder, E. A. Ivanov, O. Lechtenfeld, N. G. Pletnev, I. B. Samsonov, B. M. Zupnik, *JHEP*, **10** (2009), 075, 38 pp., arXiv:0909.2970.
- [19] B. M. Zupnik, *Nucl. Phys. B*, **554**:1–2 (1999), 365–390, arXiv:hep-th/9902038; Erratum **644**:1–2 (2002), 405–406, arXiv:hep-th/9902038; Б. М. Зупник, *ТМФ*, **120**:2 (1999), 324–331, arXiv:hep-th/9812249.
- [20] Б. М. Зупник, *ТМФ*, **162**:1 (2010), 87–105, arXiv:0905.1179.
- [21] E. Koh, S. Lee, S. Lee, *JHEP*, **09** (2009), 122, 29 pp., arXiv:0907.1641; I. L. Buchbinder, N. G. Pletnev, I. B. Samsonov, *JHEP*, **04** (2010), 1–27, arXiv:1003.4806.
- [22] B. M. Zupnik, *Phys. Lett. B*, **183** (1987), 175; Б. М. Зупник, *ТМФ*, **69**:2 (1986), 207–213; Б. М. Зупник, *ЯФ*, **44**:3 (1986), 794–802.

Поступила в редакцию 20.04.2010