Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, Об одном дискретном операторе Шредингера на графе, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 1, 119–133

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6566>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:36:42

© 2010 г.

Ю. П. Чубурин*

ОБ ОДНОМ ДИСКРЕТНОМ ОПЕРАТОРЕ ШРЕДИНГЕРА НА ГРАФЕ

Рассмотрен дискретный оператор Шредингера на графе, полученный в приближении сильной связи из обычного оператора Шредингера электрона в системе, состоящей из квантовой проволоки и квантовой точки. Исследованы общие спектральные свойства этого оператора, а также существование и поведение в зависимости от малой константы связи собственных значений и резонансов. Изучается задача рассеяния в стационарной постановке для малых потенциалов.

Ключевые слова: дискретный оператор Шредингера, спектр, собственное значение, резонанс, задача рассеяния, квантовая проволока.

1. ВВЕДЕНИЕ

В ряде физических работ изучаются дискретные модели на графах, при этом различные участки графа моделируют квантовую проволоку или квантовую точку, а гамильтониан представляет собой дискретный оператор Шредингера, полученный из обычного в приближении сильной связи и определенный на функциях, заданных на вершинах графа (см., например, работы [1]–[5]). Математически подобные модели изучены недостаточно, основные результаты относятся к дискретным операторам на $\mathbb{Z}^n$ [6]–[8].

Положим $\Gamma = (\mathbb{Z} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^2$, где $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$, $M \geq 2$. Множество Γ будем отождествлять с вершинами неориентируемого графа, а промежутки, на которые вершины делят множество $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, M])$ – с его ребрами (для удобства изложения граф понимается как конкретный геометрический объект). Введем в рассмотрение оператор $H_0: l^2(\Gamma) \rightarrow l^2(\Gamma)$, определенный равенствами

$$\begin{aligned} (H_0\psi)(n, 0) &= \psi(n-1, 0) + \psi(n+1, 0), & n \neq 0, \\ (H_0\psi)(0, 0) &= \psi(-1, 0) + \psi(1, 0) + w\psi(0, 1), \\ (H_0\psi)(0, m) &= v[\psi(0, m-1) + \psi(0, m+1)], & m \neq 1, M, \\ (H_0\psi)(0, 1) &= w\psi(0, 0) + v\psi(0, 2), \\ (H_0\psi)(0, M) &= v\psi(0, M-1), \end{aligned} \quad (1)$$

где $w, v \neq 0$ – вещественные числа.

*Физико-технический институт Уральского отделения РАН, Ижевск, Россия.
E-mail: chuburin@otf.pti.udm.ru

Положим $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon V$, где ε – (малый) параметр, $V \neq 0$ – вещественная функция на Γ такая, что $V(0, m) = 0$ для $m \in \mathcal{M}$ (ср. с работами [4], [5]), и удовлетворяющая оценке

$$|V(n, 0)| \leq C e^{-a|n|}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $a > 0$. Оператор H_ε является гамильтонианом квантовой частицы, находящейся в системе, которая состоит из квантовой проволоки (или ее достаточно длинного участка) и соединенной с ней квантовой точки; при этом потенциал εV моделирует влияние примесей. Кроме того, оператор H_ε может описывать распространение спиновых волн в конфигурации атомов, подобной вершинам графа Γ , при решении уравнения Гейзенберга с помощью анзаца Бете [9].

В настоящей статье исследуются общие спектральные свойства операторов H_0 и H_ε , а также вопросы существования собственных значений и резонансов и их поведение в зависимости от малой константы связи. Изучается задача рассеяния в стационарной постановке для малых потенциалов.

Далее через $\sigma(A)$, $\sigma_{\text{disc}}(A)$ и $\sigma_{\text{ess}}(A)$ обозначаются спектр, дискретный спектр и существенный спектр оператора A соответственно.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА H_0

Введем оператор H_{01} , действующий в $l^2(\mathbb{Z})$, формулой $(H_{01}\psi)(n) = \psi(n-1) + \psi(n+1)$. Спектр этого оператора совпадает с отрезком $[-2, 2]$ [10]. Обозначим через $R_{01}(\lambda)$ резольвенту оператора H_{01} , $R_{01}(\lambda) = (H_{01} - \lambda)^{-1}$. Ядро резольвенты (функция Грина оператора H_{01}) имеет вид [11]

$$G_{01}(n-m, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|n-m|}. \quad (2)$$

Заметим, что функция

$$g(\lambda) = \frac{\lambda}{2} - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 1}$$

является обратной к функции Жуковского $w = (z + z^{-1})/2$ для $z = \lambda/2$. Риманова поверхность $\mathcal{V}$ функции g двулистка, причем листы склеиваются вдоль интервала $(-2, 2)$, а точки ± 2 являются точками ветвления. Функция Грина G_{01} аналитически продолжается на второй лист поверхности $\mathcal{V}$. Выбор знака перед (арифметическим для $\lambda > 2$) корнем в (2) отвечает экспоненциальному убыванию функции G_{01} при $|n-m| \rightarrow \infty$ для $\lambda > 2$.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор H_0 самосопряжен и $\sigma_{\text{ess}}(H_0) = [-2, 2]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Самосопряженность оператора H_0 легко проверяется непосредственно. Далее, нумеруя вершины графа целыми числами, можно представить оператор H как сумму H_{01} и конечномерного оператора. Отсюда вытекает второе утверждение теоремы.

Зададим оператор $H_2 = H_2^{(M)}$ в $l^2(\mathcal{M})$ как $(M \times M)$ -матрицу с элементами $h_{ij} = v(\delta_{i-j,1} + \delta_{i-j,-1})$, $i, j = 1, \dots, M$, где δ_{nm} – символ Кронекера. Заметим, что собственные значения оператора H_2 имеют вид $2v \cos(\pi n/(M+1))$, $n = 1, \dots, M$. Пусть $R_2(\lambda) = (H_2 - \lambda)^{-1}$ – резольвента оператора H_2 . Определим функции

$$\delta_1(n) = \delta_{n0} \in l^2(\mathbb{Z}), \quad \delta_2(m) = \delta_{m1} \in l^2(\mathcal{M}), \quad m \in \mathcal{M}.$$

Функции $\psi = \psi(n, m)$, определенные на графе Γ , будем отождествлять с парами функций (ψ_1, ψ_2) , где функция $\psi_1 = \psi_1(n)$ определена на $\mathbb{Z}$, а функция $\psi_2 = \psi_2(m)$ – на $\mathcal{M}$.

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$(\sigma(H_0) \cap \sigma(H_2)) \setminus [-2, 2] = \emptyset. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что равенство (3) неверно, тогда для некоторого $\lambda \in (\sigma(H_0) \cap \sigma(H_2)) \setminus [-2, 2]$ и ненулевого вектора $\psi \in l^2(\Gamma)$ выполнено равенство $(H_0 - \lambda)\psi = 0$. Пользуясь определением (1) и видом матрицы H_2 , запишем это равенство в виде двух уравнений

$$(H_{01} - \lambda)\psi_1 = -w\psi_2(1)\delta_1, \quad (4)$$

$$(H_2 - \lambda)\psi_2 = -w\psi_1(0)\delta_2, \quad (5)$$

первое из которых можно переписать в виде

$$\psi_1 = -w\psi_2(1)R_{01}(\lambda)\delta_1. \quad (6)$$

Заметим, что кратности собственных значений оператора H_2 равны единице. Пусть λ – некоторое собственное значение, $e_1, \dots, e_M$ – ортонормированный базис в $l^2(\mathcal{M})$, состоящий из собственных векторов оператора H_2 , отвечающих его собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_M$, причем $\lambda = \lambda_1$. Имеем

$$\psi_2 = \sum_{j=1}^M (\psi_2, e_j) e_j. \quad (7)$$

Из соотношений (5), (7) получаем

$$\sum_{j=2}^M (\psi_2, e_j) (\lambda_j - \lambda_1) e_j = -w\psi_1(0)\delta_2 = -w\psi_1(0) \sum_{j=1}^M (\delta_2, e_j) e_j,$$

откуда

$$\psi_1(0)(\delta_2, e_1) = \psi_1(0)\overline{e_1(1)} = 0. \quad (8)$$

Докажем, что $\psi_1(0) = 0$. Предположим противное, тогда в силу (8) имеем $e_1(1) = 0$. Но из равенства $(H_2 - \lambda)e_1 = 0$ и вида матрицы $H_2 - \lambda$ следует, что $e_1 = 0$, и мы приходим к противоречию. Из доказанного равенства и соотношений (6) и (2) вытекает, что

$$0 = -w\psi_2(1)(R_{01}(\lambda)\delta_1)(0) = \frac{w\psi_2(1)}{\sqrt{\lambda^2 - 4}},$$

откуда $\psi_2(1) = 0$, что в силу (6) влечет $\psi_1 = 0$. Из уравнения (5) следует равенство $(H_2 - \lambda)\psi_2 = 0$. Как и выше, получаем, что $\psi_2 = 0$. Следовательно, $\psi = 0$, и мы вновь приходим к противоречию. Лемма доказана.

Положим

$$d_0(\lambda) = 1 - w^2(R_{01}(\lambda)\delta_1, \delta_1)(R_2(\lambda)\delta_2, \delta_2) = 1 + w^2 \frac{\Delta_{M-1}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - 4\Delta_M(\lambda)}},$$

где $\Delta_M(\lambda) = \det(H_2^{(M)} - \lambda)$.

ЛЕММА 2. Для $\varphi \in l^2(\Gamma)$ положим $R_0(\lambda)\varphi = \psi$. Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \psi_1(n) &= (R_{01}(\lambda)\varphi_1)(n) - \frac{w}{d_0(\lambda)} [(R_2(\lambda)\varphi_2, \delta_2) - \\ &\quad - w(R_2(\lambda)\delta_2, \delta_2)(R_{01}(\lambda)\varphi_1, \delta_1)](R_{01}(\lambda)\delta_1)(n), \\ \psi_2(m) &= (R_2(\lambda)\varphi_2)(m) - \frac{w}{d_0(\lambda)} [(R_{01}(\lambda)\varphi_1, \delta_1) - \\ &\quad - w(R_{01}(\lambda)\delta_1, \delta_1)(R_2(\lambda)\varphi_2, \delta_2)](R_2(\lambda)\delta_2)(m). \end{aligned} \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 можно считать, что $\lambda \notin [-2, 2]$. Пусть вначале $\lambda \notin \sigma(H_2)$. Для нахождения $R_0(\lambda)\varphi$ решим уравнение $(H_0 - \lambda)\psi = \varphi$ относительно ψ . Это уравнение можно записать в виде системы уравнений (ср. доказательство леммы 1)

$$\begin{aligned} \psi_1 &= R_{01}(\lambda)\varphi_1 - w\psi_2(1)R_{01}(\lambda)\delta_1, \\ \psi_2 &= R_2(\lambda)\varphi_2 - w\psi_1(0)R_2(\lambda)\delta_2. \end{aligned} \quad (10)$$

В частности, отсюда получаем линейную систему относительно $\psi_1(0), \psi_2(1)$:

$$\begin{aligned} \psi_1(0) + w\psi_2(1)(R_{01}(\lambda)\delta_1)(0) &= (R_{01}(\lambda)\varphi_1)(0), \\ w\psi_1(0)(R_2(\lambda)\delta_2)(1) + \psi_2(1) &= (R_2(\lambda)\varphi_2)(1). \end{aligned} \quad (11)$$

Формулы (9) вытекают из уравнений (10) и формул Крамера, примененных к системе (11).

Если теперь $\lambda \in \sigma(H_2)$, то в силу леммы 1 особенности выражений в правых частях уравнений (9) в этой точке устранимы.

СЛЕДСТВИЕ 1. Число λ принадлежит $\sigma_{\text{disc}}(H_0)$ тогда и только тогда, когда $d_0(\lambda) = 0$.

Действительно, $d_0(\lambda)$ является определителем системы (11).

Будем говорить, что функция Грина G_0 оператора H_0 (ядро его резольвенты) имеет полюс в точке $\lambda_0 \in \mathcal{V}$, если имеет полюс в этой точке хотя бы одна из функций (матричных элементов) $G_0((n, m), (n', m'), \lambda)$, где $(n, m), (n', m') \in \Gamma$. Полюс функции G_0 на втором листе $\mathcal{V}$ назовем *резонансом* оператора H_0 . В точках отрезка $[-2, 2]$, в которых листы отождествляются, резонансом будем называть полюс, не являющийся собственным значением. *Квазиуровнем* оператора H_0 будем называть его собственное значение или резонанс.

ЛЕММА 3. В интервале $(-2, 2)$ у оператора H_0 нет собственных значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда имеем уравнения (4), (5), где $\lambda \in (-2, 2)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2) \neq 0$ и $\psi_1 \in l^2(\mathbb{Z})$. Используем преобразование Фурье

$$l^2(\mathbb{Z}) \ni \varphi(n) \mapsto \mathcal{F}(\varphi)(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{ipn} \varphi(n) \in L^2(0, 2\pi).$$

В силу (4), (5)

$$\begin{aligned} (2 \cos p - \lambda) \mathcal{F}(\psi_1) &= -\frac{w}{\sqrt{2\pi}} \psi_2(1), \\ (H_2 - \lambda) \psi_2 &= -\frac{w}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} (\mathcal{F}(\psi_1))(p) dp \cdot \delta_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathcal{F}(\psi_1) \in L^2(0, 2\pi)$ лишь в случае $\psi_2(1) = 0$ и, далее, $\mathcal{F}(\psi_1) = 0$, но тогда $(H_2 - \lambda) \psi_2 = 0$. Следовательно, $\psi_2 = 0$ (см. доказательство леммы 1) и $\psi = 0$, и мы приходим к противоречию. Лемма доказана.

В дальнейшем через $A_{kl}(\lambda)$ будем обозначать алгебраическое дополнение к элементу матрицы $H_2 - \lambda$, находящемуся на пересечении k -й строки и l -го столбца.

ТЕОРЕМА 2. Квазиуровни оператора H_0 , отличные от ± 2 , не совпадают с собственными значениями оператора H_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для собственных значений вне отрезка $[-2, 2]$ утверждение доказано в лемме 1, а в интервале $(-2, 2)$ их нет в силу леммы 3.

Докажем, что правая часть первого равенства в (9) не имеет полюсов на втором листе, лежащих в $\sigma(H_2) \setminus \{-2, 2\}$. Действительно, особенности, порожденные резольвентой $R_2(\lambda)$, являются нулями функции $\Delta_M(\lambda)$ и устранимы вследствие деления на

$$d_0(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4} \Delta_M(\lambda) + w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - 4} \Delta_M(\lambda)}. \quad (12)$$

Далее, из рекуррентной формулы $\Delta_M(\lambda) = -\lambda \Delta_{M-1}(\lambda) - w^2 \Delta_{M-2}(\lambda)$ вытекает, что если $\Delta_M(\lambda) = 0$, то $\Delta_{M-1}(\lambda) \neq 0$. Следовательно, числитель в (12) не порождает особенностей в правой части первого равенства в (9), лежащих в $\sigma(H_2) \setminus \{-2, 2\}$, ни на одном листе (принадлежность одному из двух листов для данного λ определяется знаком корня).

Проверим теперь, что правая часть второго равенства в (9) не имеет полюсов, лежащих на втором листе в указанных точках. Легко видеть, что это означает отсутствие полюсов у выражений

$$\frac{1}{\Delta_M(\lambda)} \left(A_{jm}(\lambda) - \frac{w^2 A_{j1}(\lambda) A_{1m}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - 4} \Delta_M(\lambda) + w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)} \right), \quad j, m = 1, \dots, M.$$

Пусть $\Delta_M(\lambda_0) = 0$. Обозначим через m_0 порядок нуля функции $\Delta_M(\lambda)$ в точке λ_0 , тогда на первом листе имеют место равенства

$$\left. \frac{d^k}{d\lambda^k} \left(A_{jm}(\lambda) - \frac{w^2 A_{j1}(\lambda) A_{1m}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - 4} \Delta_M(\lambda) + w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)} \right) \right|_{\lambda=\lambda_0} = 0, \quad (13)$$

где $j, m = 1, \dots, M$, $k = 0, \dots, m_0 - 1$. Действительно, если полюс не устраним, то из известной формулы, выражающей спектральный проектор через резольвенту, вытекает, что спектральный проектор оператора H_0 имеет скачок в точке полюса, а значит, полюс является собственным значением, что противоречит лемме 3. Но справедливость формулы (13) для одного знака корня в силу равенств

$$\Delta_M(\lambda_0) = \dots = \frac{d^{m_0-1} \Delta_M(\lambda_0)}{d\lambda^{m_0-1}} = 0$$

влечет ее справедливость для противоположного знака, т.е. на втором листе. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. В интервале $(-2, 2)$ у оператора H_0 нет квазиуровней.

Действительно, полюсы матричных элементов резольвенты могут располагаться лишь в точках множества $\sigma(H_2)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Число $\lambda \neq \pm 2$ является квазиуровнем оператора H_0 тогда и только тогда, когда $d_0(\lambda) = 0$.

Пусть $\lambda \in (-2, 2)$. Введем вместо λ новый параметр $k \in (0, \pi)$ (или $k \in (\pi, 2\pi)$) равенствами

$$\cos k = \frac{\lambda}{2}, \quad \sin k = -\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}. \quad (14)$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями вида $\hat{f}(k) = f(2 \cos k)$. Согласно (2) имеем

$$\hat{G}_{01}(n - m, k) = -\frac{1}{2i \sin k} e^{ik|n-m|}. \quad (15)$$

Таким образом, в дискретном случае k является волновым вектором.

Будем в дальнейшем пользоваться заменой (14) также в комплексных окрестностях точек $\lambda = \pm 2$. При этом в окрестности точки -2 мы переходим к $k' = k - \pi$, тогда $\sin k' = \sqrt{1 - (\lambda/2)^2}$, что согласуется со сменой знака корня в (2) при переходе на первом листе от точки 2 к точке -2 . Заметим, что отображения $\lambda \mapsto k$, $\lambda \mapsto k'$ переводят двулистные окрестности точек $2, -2$ соответственно в (однолистную) окрестность нуля.

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что $\lambda = \pm 2$ не принадлежит $\sigma(H_2)$. Тогда оператор H_0 имеет квазиуровень в нуле относительно параметра k (параметра k') тогда и только тогда, когда $\Delta_{M-1}(\pm 2) = 0$. Этот квазиуровень является резонансом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим точку $\lambda = 2$. Предположим, что $\Delta_{M-1}(2) = 0$, тогда особенность в точке $\lambda = 2$ во втором равенстве (9) неустранима, поскольку выражение

$$\frac{1}{d_0(\lambda)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4} \Delta_M(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - 4} \Delta_M(\lambda) + w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\lambda + 2} \Delta_M(\lambda)}{\sqrt{\lambda + 2} \Delta_M(\lambda) + w^2 \sqrt{\lambda - 2} f(\lambda)} \quad (16)$$

отлично от нуля вблизи точки 2 (здесь $f(\lambda) = \Delta_{M-1}(\lambda)/(\lambda - 2)$ – аналитическая функция).

Пусть теперь $\Delta_{M-1}(2) \neq 0$, тогда, очевидно, особенность во втором равенстве (9) устранима. Слагаемое в составе матричного элемента G_0 , относящегося к первому равенству (9), которое может содержать особенность в точке $\lambda = 2$, имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \left(- \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|n-m|} + \frac{w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - 4} \Delta_M(\lambda) + w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)} \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|n|+|m|} \right).$$

Устранимость данной особенности очевидна.

Доказательство того, что квазиуровень в точке $\lambda = 2$ не является собственным значением, подобно доказательству леммы 3. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Спектр оператора H_0 на промежутке $(-2, 2)$ абсолютно непрерывен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы XIII.20 из книги [12] достаточно доказать, что для любой финитной функции $\varphi \in l^2(\Gamma)$ и любого $\delta > 0$ справедлива оценка

$$\sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \int_{-2+\delta}^{2-\delta} |(R_0(\lambda + i\varepsilon)\varphi, \varphi)|^2 d\lambda < \infty, \quad (17)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое (достаточно малое) число. Согласно (9) имеем

$$\begin{aligned} (R_0(\lambda + i\varepsilon)\varphi, \varphi) &= (R_{01}\varphi_1, \varphi_1) - \frac{w}{d_0} [(R_2\varphi_2, \delta_2) - w(R_2\delta_2, \delta_2)(R_{01}\varphi_1, \delta_1)](R_{01}\delta_1, \varphi_1) + \\ &+ (R_2\varphi_2, \varphi_2) - \frac{w}{d_0} [(R_{01}\varphi_1, \delta_1) - w(R_{01}\delta_1, \delta_1)(R_2\varphi_2, \delta_2)](R_2\delta_2, \varphi_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Для финитных функций $\varphi_1, \psi_1 \in l^2(\mathbb{Z})$ выражение

$$(R_{01}(\lambda)\varphi_1, \psi_1) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \right)^{|n-m|} \varphi_1(m) \overline{\psi_1(n)}$$

аналитически зависит от λ в комплексной окрестности промежутка $[-2 + \delta, 2 - \delta]$ (будучи аналитически продолжено сверху через вещественную ось). Далее, функция $1/d_0(\lambda)$ также аналитически продолжается в окрестность отрезка $[-2 + \delta, 2 - \delta]$, поскольку (см. формулу (16)) для $\lambda \in (-2, 2)$

$$|\sqrt{\lambda^2 - 4} \Delta_M(\lambda) + w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)|^2 = (4 - \lambda^2) \Delta_M^2(\lambda) + w^4 \Delta_{M-1}^2(\lambda) \neq 0$$

(функции $\Delta_M(\lambda)$ и $\Delta_{M-1}(\lambda)$ одновременно не обращаются в нуль, см. доказательство теоремы 2). Наконец, полюсы выражений (9) в точках $\lambda \in \sigma(H_2) \cap (-2, 2)$ устранимы (см. доказательство теоремы 2). Из сказанного вытекает аналитичность выражения (18) в комплексной окрестности промежутка $[-2 + \delta, 2 - \delta]$, а значит, искомое неравенство (17).

3. КВАЗИУРОВНИ СЛАБО ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

Будем теперь рассматривать оператор H_ε (см. раздел 1). Резольвенту оператора H_ε обозначим через $R_\varepsilon(\lambda)$. В дальнейшем только для операторов V и $V_1 = V(n, 0)$ мы будем использовать обозначение вида $\sqrt{V} = \sqrt{|V|} \operatorname{sgn} V$. Положим $H_{\varepsilon 1} = H_{01} + \varepsilon V_1$ и $R_{\varepsilon 1}(\lambda) = (H_{\varepsilon 1} - \lambda)^{-1}$. Операторнозначная функция $\sqrt{|V_1|} R_{01}(\lambda) \sqrt{V_1}$ аналитически продолжается по параметру λ своим ядром на риманову поверхность $\mathcal{V}$ в окрестности точек из интервала $(-2, 2)$ как функция со значениями в множестве операторов Гильберта–Шмидта [11]. Потенциал εV_1 является относительно компактным возмущением оператора H_{01} [11]. Из этого вытекает, что εV – относительно компактное возмущение оператора H_0 . Отсюда с учетом теоремы 1 следует (см. книгу [12]), что $\sigma_{\text{ess}}(H_\varepsilon) = \sigma_{\text{ess}}(H_0) = [-2, 2]$.

Уравнение на собственные значения оператора H_ε в области, где существует $R_0(\lambda)$, можно записать в виде $\psi = -\varepsilon R_0(\lambda) V \psi$, где $\psi \in l^2(\Gamma)$ отлично от нуля, или согласно лемме 2 в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(n) &= -\varepsilon (R_{01}(\lambda) V_1 \psi_1)(n) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)}{d_0(\lambda) \Delta_M(\lambda)} (R_{01}(\lambda) V_1 \psi_1, \delta_1) (R_{01}(\lambda) \delta_1)(n), \\ \psi_2(m) &= \frac{\varepsilon w}{d_0(\lambda)} (R_{01}(\lambda) V_1 \psi_1, \delta_1) (R_2(\lambda) \delta_2)(m). \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что второе уравнение здесь не играет роли. Для того чтобы, оставаясь в рамках пространства $l^2(\Gamma)$, исследовать также резонансы, как обычно (см., например, книгу [13], приложение В), переходим к новой функции $\varphi = \sqrt{|V|} \psi \in l^2(\Gamma)$.

Назовем *резонансом* оператора H_ε полюс операторнозначной функции $\sqrt{|V|} R_\varepsilon(\lambda) \sqrt{V}$ на втором листе римановой поверхности $\mathcal{V}$ (аналитическое продолжение операторнозначной функции, осуществляемое ее ядром, обозначаем тем же символом).

Заметим, что приведенное определение не имеет смысла для оператора H_0 . Если H_ε имеет резонанс в смысле предыдущего раздела и $V_1(n) \neq 0$ для $n \in \mathbb{Z}$, то H_ε имеет резонанс и в смысле последнего определения.

Из разновидности резольвентного тождества

$$[1 + \varepsilon \sqrt{|V|} R_0(\lambda) \sqrt{V}]^{-1} = 1 - \varepsilon \sqrt{|V|} R_\varepsilon(\lambda) \sqrt{V}$$

и аналитической теоремы Фредгольма [10] вытекает, что точка λ на втором листе $\mathcal{V}$, не являющаяся полюсом функции $\sqrt{|V|} R_0(\lambda) \sqrt{V}$, есть резонанс оператора H_ε тогда и только тогда, когда существует ненулевая функция $\varphi \in l^2(\Gamma)$ такая, что

$$\varphi = -\varepsilon \sqrt{|V|} R_0(\lambda) \sqrt{V} \varphi \quad (20)$$

(см. подобное определение в книге [13]). При этом функция

$$\psi = -\varepsilon R_0(\lambda) \sqrt{V} \varphi = -\varepsilon R_0(\lambda) V \psi$$

удовлетворяет уравнению Шредингера $H_\varepsilon \psi = \lambda \psi$.

Заметим, что если в уравнении (20) число $\lambda \in \mathcal{V} \setminus [-2, 2]$ лежит на первом листе, то функция $\psi_1(n)$ экспоненциально убывает при $|n| \rightarrow \infty$ вместе с функцией $G_{01}(n - m, \lambda)$ [11], и λ является собственным значением. Если $\lambda \notin [-2, 2]$ и лежит на втором листе, то функция $\psi_1(n)$, вообще говоря, экспоненциально возрастает.

Назовем *квазиуровнем* оператора H_ε его собственное значение или резонанс.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что число $\lambda_0 \neq \pm 2$ является квазиуровнем оператора H_0 (следовательно, $d_0(\lambda_0) = 0$, см. следствие 3 из теоремы 2), причем $d'_0(\lambda_0) \neq 0$. Тогда для всех достаточно малых ε существует единственный квазиуровень $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ оператора H_ε в окрестности точки λ_0 , аналитически зависящий от ε , для которого справедлива формула*

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\varepsilon w^2 \Delta_{M-1}(\lambda_0)}{d'_0(\lambda_0) \Delta_M(\lambda_0) (\lambda_0^2 - 4)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_1(n) \left(\frac{\lambda_0 - \sqrt{\lambda_0^2 - 4}}{2} \right)^{2|n|} + o(\varepsilon). \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь уравнениями (19), перепишем равенство (20) для $\varphi = (\varphi_1, 0)$ в виде

$$\varphi_1 = -\varepsilon \sqrt{|V_1|} R_{01}(\lambda) \sqrt{V_1} \varphi_1 - \frac{\varepsilon w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)}{d_0(\lambda) \Delta_M(\lambda)} (R_{01}(\lambda) \sqrt{V_1} \varphi_1, \delta_1) \sqrt{|V_1|} R_{01}(\lambda) \delta_1. \quad (22)$$

В силу теоремы 2 $\Delta_M(\lambda_0) \neq 0$. Резольвента $R_{01}(\lambda)$ не имеет особенностей в окрестности точки λ_0 (см. формулу (2)), и для малых ε уравнение (22) можно переписать в виде

$$\varphi_1 = -\frac{\varepsilon w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)}{d_0(\lambda) \Delta_M(\lambda)} (R_{01}(\lambda) \sqrt{V_1} \varphi_1, \delta_1) [1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} R_{01}(\lambda) \sqrt{V_1}]^{-1} \sqrt{|V_1|} R_{01}(\lambda) \delta_1.$$

Отсюда находим следующее алгебраическое уравнение, определяющее квазиуровни:

$$d_0(\lambda) = -\frac{\varepsilon w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)}{\Delta_M(\lambda)} \times \\ \times (R_{01}(\lambda) \sqrt{V_1} [1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} R_{01}(\lambda) \sqrt{V_1}]^{-1} \sqrt{|V_1|} R_{01}(\lambda) \delta_1, \delta_1), \quad (23)$$

или уравнение

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\varepsilon w^2 \Delta_{M-1}(\lambda)}{g(\lambda) \Delta_M(\lambda)} \times \\ \times (R_{01}(\lambda) \sqrt{V_1} [1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} R_{01}(\lambda) \sqrt{V_1}]^{-1} \sqrt{|V_1|} R_{01}(\lambda) \delta_1, \delta_1), \quad (24)$$

где $g(\lambda) = d_0(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)$ – аналитическая функция; заметим, что $g(\lambda_0) = d'_0(\lambda_0) \neq 0$. Из теоремы о неявной функции [14] следует, что для всех достаточно малых ε существует единственное решение $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ уравнения (24), аналитически зависящее от ε . Формула (21) вытекает из (24) с учетом того, что, снова в силу (24), $\lambda - \lambda_0 = O(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь квазиуровни в окрестностях точек $\lambda_0 = \pm 2$. В этих окрестностях будем пользоваться вместо λ параметром k из (14) (или параметром $k' = k - \pi$),

пробегающим окрестность нуля (см. предыдущий раздел). Резонансы понимаются относительно параметра k (параметра k').

Положим

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sqrt{|V_1|} \widehat{R}_{\varepsilon 1}(k) \sqrt{V_1} \varphi_1 = \\ &= [1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} \widehat{R}_{01}(k) \sqrt{V_1}]^{-1} \sqrt{|V_1|} \widehat{R}_{01}(k) \sqrt{V_1} \varphi_1.\end{aligned}\quad (25)$$

ЛЕММА 4. Для всех достаточно малых ε справедлива формула

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sqrt{|V_1|} \widehat{R}_{\varepsilon 1}(k) \sqrt{V_1} \varphi_1 = \\ &= [1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \left(\widehat{K}(k) \varphi_1 + \frac{([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \varphi_1, \sqrt{V_1}) \sqrt{|V_1|}}{\pm 2i \sin k + \varepsilon ([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \sqrt{|V_1|}, \sqrt{V_1})} \right),\end{aligned}\quad (26)$$

где $\varphi_1 \in l^2(\mathbb{Z})$ и $\widehat{K}(k)$ – оператор Гильберта–Шмидта с ядром

$$\pm \sqrt{|V_1(n)|} \frac{e^{ik|n-m|} - 1}{2i \sin k} \sqrt{V_1(m)};$$

знак $\pm$ соответствует знаку в $\lambda_0 = \pm 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (25) и вида (15) ядра оператора $\widehat{R}_{01}(k)$ (в окрестности точки $\lambda = -2$ перед дробью будет стоять знак минус) находим

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sqrt{|V_1|} \widehat{R}_{01}(k) \sqrt{V_1} (\varphi_1 - \varepsilon \xi_1) = \\ &= \pm \frac{\sqrt{|V_1|}}{2i \sin k} (\varphi_1 - \varepsilon \xi_1, \sqrt{V_1}) + \widehat{K}(k) (\varphi_1 - \varepsilon \xi_1).\end{aligned}\quad (27)$$

Положим

$$\vartheta = [1 + \varepsilon \widehat{K}(k)] \xi_1, \quad (28)$$

тогда в силу (27)

$$\vartheta = \widehat{K}(k) \varphi_1 + C \sqrt{|V_1|}, \quad (29)$$

где

$$C = \frac{([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \varphi_1, \sqrt{V_1})}{\pm 2i \sin k + \varepsilon ([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \sqrt{|V_1|}, \sqrt{V_1})}. \quad (30)$$

Равенство (26) следует из формул (28)–(30). Лемма доказана.

Введем обозначение $v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} V(n)$.

ТЕОРЕМА 6. Предположим, что точка $\lambda = \pm 2$ не принадлежит $\sigma(H_2)$ и является резонансом оператора H_0 . Тогда в ее окрестности для всех достаточно малых ε существует единственный квазиуровень $k = k(\varepsilon)$ оператора H_ε , аналитически зависящий от ε , для которого имеет место равенство

$$k(\varepsilon) = \mp \frac{\varepsilon v}{2i} + o(\varepsilon). \quad (31)$$

При этом если $v > 0$ и $\lambda = 2$ или $v < 0$ и $\lambda = -2$, то $k(\varepsilon)$ является собственным значением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $\lambda = 2$. Предположим вначале, что $V_1(0) \neq 0$. Пользуясь леммой 4, перепишем уравнение (23), определяющее квазиуровни, в виде

$$1 - \frac{w^2 \widehat{\Delta}_{M-1}(k)}{2i \widehat{\Delta}_M(k) \sin k} = - \frac{\varepsilon w^2 \widehat{\Delta}_{M-1}(k)}{\widehat{\Delta}_M(k) \sqrt{V_1(0)}} \left([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left(\widehat{K}(k) \delta_1 + \frac{([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \delta_1, \sqrt{V_1}) \sqrt{|V_1|}}{2i \sin k + \varepsilon([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \sqrt{|V_1|}, \sqrt{V_1})} \right), \sqrt{V_1} \widehat{R}_{01}^*(k) \delta_1 \right). \quad (32)$$

В силу теоремы 3 и обозначений (14) функция

$$\widehat{\Delta}_{M-1}(k) = \Delta_{M-1}(\lambda) = (\lambda - 2)f(\lambda) = 4 \sin^2 \left(\frac{k}{2} \right) \widehat{f}(k) = k^2 \widehat{g}(k)$$

(здесь $f, \widehat{g}$ – аналитические функции) имеет нуль второго порядка в нуле. Запишем уравнение (32) в виде

$$2i \sin k + \varepsilon([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \sqrt{|V_1|}, \sqrt{V_1}) = \\ = - \frac{2i \varepsilon w^2 k^2 \widehat{g}(k) \sin k}{(2i \widehat{\Delta}_M(k) \sin k - w^2 k^2 \widehat{g}(k)) \sqrt{V_1(0)}} \times \\ \times ((2i \sin k + \varepsilon([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \sqrt{|V_1|}, \sqrt{V_1})) [1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \widehat{K}(k) \delta_1 + \\ + ([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \delta_1, \sqrt{V_1}) [1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \sqrt{|V_1|}, \sqrt{V_1} \widehat{R}_{01}^*(k) \delta_1). \quad (33)$$

Из теоремы о неявной функции [14] вытекает существование, единственность и аналитическая зависимость от ε решения $k = k(\varepsilon)$ уравнения (33) в окрестности точки $k = 0$. Из (33) теперь легко получаем равенство $k(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ и формулу (31).

Если $v > 0$, то из соотношений (31), (19) и (15) вытекает экспоненциальное убывание функции $\psi_1(n)$ (см. подобные рассуждения в статье [11]), что доказывает последнее утверждение теоремы.

Пусть теперь $V_1(0) = 0$. Рассмотрим вместо V_1 потенциал $V_{\sigma 1} = V_1 + \sigma \delta_1$. Тогда в уравнении (33) $\sqrt{V_{\sigma 1}(0)} = \sqrt{\sigma}$ в знаменателе сокращается с $\sqrt{\sigma}$, порожденным выражениями $\widehat{K}(k) \delta_1$ и $([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \delta_1, \sqrt{V_1})$. После сокращения левая и правая части (33), очевидно, непрерывно зависят от σ . Переходя к пределу при $\sigma \rightarrow 0$, получаем подобное уравнение и те же утверждения. Теорема доказана.

4. РАССЕЯНИЕ

Для оператора H_0 рассеяние исследовалось в работе [1]. В частности, там доказано, что условие полного прохождения в точке k имеет вид $\widehat{\Delta}_{M-1}(k) = 0$, а условие полного отражения имеет вид $\widehat{\Delta}_M(k) = 0$.

Уравнение Липпмана–Швингера для оператора H_ε запишем согласно (19) в виде

$$\psi_1(n) = e^{ikn} - \varepsilon(\widehat{R}_{01}(k) V_1 \psi_1)(n) - \frac{\varepsilon w^2 \widehat{\Delta}_{M-1}(k)}{\widehat{d}_0(\lambda) \widehat{\Delta}_M(k)} (\widehat{R}_{01}(k) V_1 \psi_1, \delta_1) (\widehat{R}_{01}(k) \delta_1)(n). \quad (34)$$

Заметим, что, как следует из свойств функции Жуковского, изменению k в интервале $(0, \pi)$ соответствует предел $\lambda - i0$, а изменению k в интервале $(\pi, 2\pi)$ (или $(-\pi, 0)$) – предел $\lambda + i0$. После замены $\varphi_1 = \sqrt{|V_1|}\psi_1$ получаем из (34) уравнение

$$\begin{aligned} \varphi_1(n) = & \varphi_{01}(n) - \varepsilon(\sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01}(k) \sqrt{V_1} \varphi_1)(n) - \\ & - \frac{\varepsilon w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(k)}{\hat{d}_0(k) \hat{\Delta}_M(k)} (\hat{R}_{01}(k) \sqrt{V_1} \varphi_1, \delta_1) (\sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01}(k) \delta_1)(n), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\varphi_{01}(n) = \sqrt{|V_1|} e^{ikn}$.

ЛЕММА 5. Для всех достаточно малых ε существует единственное решение уравнения (35), имеющее вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & [1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01} \sqrt{V_1}]^{-1} \varphi_{01} - \\ & - \frac{\varepsilon w^2 \hat{\Delta}_{M-1} (\hat{R}_{01} \sqrt{V_1} [1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01} \sqrt{V_1}]^{-1} \varphi_{01}, \delta_1)}{\hat{d}_0 \hat{\Delta}_M + \varepsilon w^2 \hat{\Delta}_{M-1} (\hat{R}_{01} \sqrt{V_1} [1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01} \sqrt{V_1}]^{-1} \sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01} \delta_1, \delta_1)} \times \\ & \times [1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01} \sqrt{V_1}]^{-1} \sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01} \delta_1. \end{aligned} \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (35) следует равенство

$$\varphi_1 = [1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01} \sqrt{V_1}]^{-1} \varphi_{01} + C [1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01} \sqrt{V_1}]^{-1} \sqrt{|V_1|} \hat{R}_{01} \delta_1, \quad (37)$$

где C – константа. Пользуясь соотношениями (37) и (35), находим C и получаем из (37) искомую формулу (36). При малых ε знаменатель в (36) в нуль не обращается, поскольку

$$|\hat{d}_0(k) \hat{\Delta}_M(k)| = \left| \hat{\Delta}_M(k) - \frac{w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(k)}{2i \sin k} \right| \neq 0$$

в силу вещественности $\hat{\Delta}_M(k)$ и $\hat{\Delta}_{M-1}(k)$, а также того обстоятельства, что $\hat{\Delta}_M(k)$ и $\hat{\Delta}_{M-1}(k)$ одновременно в нуль не обращаются (см. доказательство теоремы 2). Лемма доказана.

Согласно (34) и (15) амплитуда отражения $a_-(k)$ в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} a_-(k) = & - \frac{\varepsilon}{2i \sin k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{ikm} V_1(m) \psi_1(m) - \\ & - \frac{\varepsilon w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(k)}{2i \sin k (2i \hat{\Delta}_M(k) \sin k - w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(k))} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{ik|m|} V_1(m) \psi_1(m) = \\ = & - \frac{\varepsilon}{2i \sin k} \left(\frac{2i \hat{\Delta}_M(k) \sin k}{2i \hat{\Delta}_M(k) \sin k - w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(k)} \sum_{m \geq 0} e^{ikm} V_1(m) \psi_1(m) + \right. \\ & \left. + \sum_{m < 0} \left(e^{ikm} + \frac{w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(k) e^{-ikm}}{2i \hat{\Delta}_M(k) \sin k - w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(k)} \right) V_1(m) \psi_1(m) \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Из формул (36) и (38) вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Имеет место формула*

$$a_-(k) = -\frac{\varepsilon}{2i \sin k} \left(\frac{2i \widehat{\Delta}_M(k) \sin k}{2i \widehat{\Delta}_M(k) \sin k - w^2 \widehat{\Delta}_{M-1}(k)} \sum_{m \geq 0} e^{2ikm} V_1(m) + \right. \\ \left. + \sum_{m < 0} \left(e^{2ikm} + \frac{w^2 \widehat{\Delta}_{M-1}(k)}{2i \widehat{\Delta}_M(k) \sin k - w^2 \widehat{\Delta}_{M-1}(k)} \right) V_1(m) \right) + O(\varepsilon^2).$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для полного прохождения (с точностью до члена порядка малости $O(\varepsilon^2)$ в амплитуде отражения) достаточно выполнения одного из следующих условий:*

$$\widehat{\Delta}_M(k) = 0, \quad \sum_{m < 0} (e^{2ikm} - 1) V_1(m) = 0$$

или

$$\widehat{\Delta}_{M-1}(k) = 0, \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2ikm} V_1(m) = 0.$$

Рассмотрим теперь рассеяние вблизи граничных точек $\lambda = \pm 2$ существенного спектра. Положим

$$\varphi_1 = \left(1 + \varepsilon \sqrt{|V_1|} \widehat{R}_{01}(k) \sqrt{V_1} \right)^{-1} \varphi_0, \quad \varphi_0 \in l^2(\mathbb{Z}).$$

ЛЕММА 6. *Для всех достаточно малых ε имеет место равенство*

$$\varphi_1 = [1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \left(\varphi_0 - \frac{\varepsilon ([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \varphi_0, \sqrt{V_1}) \sqrt{|V_1|}}{\pm 2i \sin k + \varepsilon ([1 + \varepsilon \widehat{K}(k)]^{-1} \sqrt{|V_1|}, \sqrt{V_1})} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО подобно доказательству леммы 4.

ЛЕММА 7. *Предположим, что точка $\lambda = \pm 2$ не принадлежит спектру оператора H_2 . Пусть k связано с ε соотношением $k = a\varepsilon$, где константа $a \neq 0$. Тогда, если точка $\lambda = \pm 2$ является резонансом оператора H_0 (относительно k или k'), то решение φ_1 уравнения (35) имеет вид*

$$\varphi_1 = \frac{\pm 2ia}{\pm 2ia + v} \sqrt{|V_1|} + O(\varepsilon); \quad (39)$$

если же $\lambda = \pm 2$ не является резонансом, то

$$\varphi_1 = \sqrt{|V_1|} + O(\varepsilon). \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим λ вблизи точки 2. Без потери общности можно считать, что $V_1(0) \neq 0$ (см. доказательство теоремы 6). В силу

лемм 4–6 имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & [1 + \varepsilon \hat{K}]^{-1} (\varphi_{01} - \varepsilon \hat{d}^{-1} ([1 + \varepsilon \hat{K}]^{-1} \varphi_{01}, \sqrt{V_1}) \sqrt{|V_1|}) - \\ & - \varepsilon w^2 \hat{\Delta}_{M-1} ([1 + \varepsilon \hat{K}]^{-1} (\varphi_{01} - \varepsilon \hat{d}^{-1} ([1 + \varepsilon \hat{K}]^{-1} \varphi_{01}, \sqrt{V_1}) \sqrt{|V_1|}), \sqrt{V_1} \hat{R}_{01}^* \delta_1) \times \\ & \times \left\{ \hat{\Delta}_M - w^2 \hat{\Delta}_{M-1} \frac{1}{2i \sin k} + \varepsilon w^2 \hat{\Delta}_{M-1} (V_1(0))^{-1/2} \times \right. \\ & \times ([1 + \varepsilon \hat{K}]^{-1} (\hat{K} \delta_1 + \hat{d}^{-1} ([1 + \varepsilon \hat{K}]^{-1} \delta_1, \sqrt{V_1}) \sqrt{|V_1|}), \sqrt{V_1} \hat{R}_{01}^* \delta_1) \left. \right\}^{-1} \times \\ & \times (V_1(0))^{-1/2} [1 + \varepsilon \hat{K}]^{-1} (\hat{K} \delta_1 + \hat{d}^{-1} ([1 + \varepsilon \hat{K}]^{-1} \delta_1, \sqrt{V_1}) \sqrt{|V_1|}), \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\hat{d} = 2i \sin k + \varepsilon ([1 + \varepsilon \hat{K}]^{-1} \sqrt{V_1}, \sqrt{|V_1|}).$$

Учитывая, что $\varphi_{01} = \sqrt{|V_1|} + O(\varepsilon)$, перепишем равенство (41) в виде

$$\varphi_1 = \left(\frac{2ia}{2ia + v} - \frac{w^2 \hat{\Delta}_{M-1} v}{(\varepsilon \hat{\Delta}_M (2ia + v) - w^2 \hat{\Delta}_{M-1}) (2ia + v)} \right) \sqrt{|V_1|} + O(\varepsilon). \quad (42)$$

Если в точке $\lambda = 2$ есть резонанс, то $\hat{\Delta}_{M-1}(k) = O(k^2)$ (см. доказательство теоремы 6), и из (42) получаем равенство (39). При отсутствии резонанса в силу теоремы 3 $\hat{\Delta}_{M-1}(k) \neq 0$, и, очевидно, выполнено равенство (40). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 8. В условиях леммы 7 при наличии резонанса в точке $\lambda = \pm 2$

$$a_-(k) = -\frac{v}{\pm 2ia + v} + O(\varepsilon),$$

а при его отсутствии

$$a_-(k) = \frac{\varepsilon v \hat{\Delta}_M(0)}{w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(0)} + o(\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (38)

$$\begin{aligned} a_-(k) = & \mp \frac{1}{2ia} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sqrt{V_1(m)} \varphi_1(m) \left(1 + \frac{w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(0)}{\pm 2ia \varepsilon \hat{\Delta}_M(0) - w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(0)} \right) = \\ = & -\frac{\varepsilon \hat{\Delta}_M(0)}{\pm 2ia \varepsilon \hat{\Delta}_M(0) - w^2 \hat{\Delta}_{M-1}(0)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sqrt{V_1(m)} \varphi_1(m). \end{aligned}$$

Утверждение теоремы следует теперь из леммы 7.

Список литературы

- [1] P. A. Orellana, F. Domínguez-Adame, I. Gómez, M. L. Ladrón de Guevara, *Phys. Rev. B*, **67**:8 (2003), 085321, 5 pp., arXiv: cond-mat/0210589.
- [2] W. Z. Shangguan, T. C. Au Yeung, Y. B. Yu, C. H. Kam, *Phys. Rev. B*, **63**:23 (2001), 235323, 9 pp.
- [3] Yan Chen, Shi-Jie Xiong, S. N. Evangelou, *Phys. Rev. B*, **56**:8 (1997), 4778–4785.

- [4] A. E. Miroschnichenko, Yu. S. Kivshar, *Phys. Rev. E*, **72**:5 (2005), 056611, 7 pp., arXiv: [cond-mat/0505023](#).
- [5] A. Chakrabarti, *Phys. Lett. A*, **336**:4–5 (2007), 507–512, arXiv: [cond-mat/0611211](#).
- [6] N. I. Karachalios, *J. Phys. A*, **41**:45 (2008), 455201, 14 pp.
- [7] D. E. Pelinovsky, A. Stefanov, *J. Math. Phys.*, **49**:11 (2008), 113501, 17 pp., arXiv: [0804.1963](#).
- [8] D. E. Dutkay, P. E. T. Yorgensen, *Spectral theory for discrete Laplacians*, arXiv: [0802.2347](#).
- [9] Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Скрябин, *Статистическая механика магнито-упорядоченных систем*, Наука, М., 1987.
- [10] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [11] L. Y. Baranova, Y. P. Chuburin, *J. Phys. A*, **41**:43 (2008), 435205, 11 pp.
- [12] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [13] С. Альбеверлио, Ф. Гестези, Р. Хезг-Крон, Х. Холден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, М., 1991.
- [14] Р. Ганнинг, Х. Росси, *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.

Поступила в редакцию 14.01.2010