Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Температурный скачок в вырожденных квантовых газах с энергией возбуждения Боголюбова и при наличии конденсата Бозе–Эйнштейна, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 1, 145–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:41:18

© 2010 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ СКАЧОК В ВЫРОЖДЕННЫХ КВАНТОВЫХ ГАЗАХ С ЭНЕРГИЕЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ БОГОЛЮБОВА И ПРИ НАЛИЧИИ КОНДЕНСАТА БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА

Построено линеаризованное кинетическое уравнение, моделирующее поведение вырожденного квантового бозе-газа с частотой столкновений, зависящей от импульса элементарных возбуждений. Рассмотрен общий случай зависимости энергии элементарных возбуждений от импульса согласно формуле Боголюбова. Получено аналитическое решение полупространственной граничной задачи о скачке температуры на границе вырожденного бозе-газа при наличии конденсата Бозе–Эйнштейна. Получено выражение для сопротивления Капицы.

Ключевые слова: вырожденный квантовый бозе-газ, конденсат Бозе–Эйнштейна, скачок температуры, интеграл столкновений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Неравновесные свойства ограниченных в объеме квантовых газов вызывают в последнее время значительный интерес. В частности, важное значение имеет такое явление, как скачок температуры [1] на границе газа и конденсированного (в частности, твердого) тела при наличии нормального к поверхности теплового потока. Такой скачок температуры в квантовых жидкостях часто называют скачком температуры Капицы [2].

Задача о скачке температуры является одной из важнейших в кинетической теории [3]. Аналитическое решение этой задачи для случая разреженного одноатомного газа получено в работе [4]. Задача о скачке температуры для электронного газа в металле рассматривалась в наших работах [5], [6]. В этих работах получено аналитическое решение задачи о скачке температуры, обусловленном потоком тепла к поверхности.

Поведение квантовых газов в последнее время вызывает повышенный интерес. Это связано, в частности, с развитием экспериментальных методик получения и исследования квантовых газов при экстремально низких температурах [7]. В большинстве работ исследуются объемные свойства квантовых газов [8], [9]. В то же время

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

очевидна важность учета граничных эффектов при изучении свойств таких систем. Отметим работу [10], в которой рассматриваются термодинамически равновесные свойства квантовых газов в полупространстве.

До сих пор скачок температуры Капицы вычислялся при учете только рассеяния фононов на границе между двумя средами, а рассеянием фононов в объеме пренебрегалось [11]. В работе [12] рассматривалась задача о скачке температуры в квантовом ферми-газе. Было получено аналитическое решение при произвольной степени вырождения газа. В работе [13] рассматривалась аналогичная задача для бозе-газа. Однако газ предполагался невырожденным, т.е. отсутствовал конденсат Бозе–Эйнштейна [14].

Настоящая работа посвящена анализу задачи о скачке температуры в вырожденном бозе-газе. Наличие конденсата Бозе–Эйнштейна приводит к существенной модификации как постановки задачи, так и метода ее решения. При этом для описания кинетических процессов вблизи поверхности используется кинетическое уравнение с модельным интегралом столкновений. Предполагается, что граничные условия на поверхности носят зеркально-диффузный характер. Рассматривается кинетическое уравнение, в котором согласно теории Боголюбова для бозе-газа взята общая зависимость энергии элементарных возбуждений от импульса. Характер рассеяния элементарных возбуждений на поверхности учитывается при этом путем введения феноменологического коэффициента зеркальности рассеяния на поверхности.

В работе [15] пренебрегалось наличием фононной компоненты в формуле Боголюбова, а в работе [16], наоборот, считалось, что фононная компонента преобладает в элементарных возбуждениях бозе-газа. В данной работе рассматривается общий случай зависимости энергии элементарных возбуждений от импульса.

2. ВЫВОД КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для описания поведения газа мы будем использовать кинетическое уравнение с модельным интегралом столкновений, аналогичное тому, которое используется для описания классического газа. При этом будет проведен необходимый учет квантового характера бозе-газа и наличия конденсата Бозе–Эйнштейна.

Для разреженного бозе-газа эволюция функции распределения частиц газа f описывается кинетическим уравнением [14]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{p}} \nabla f = I(f), \quad (1)$$

где $\mathcal{E}$ – кинетическая энергия частиц газа, $\mathbf{p}$ – их импульс, $I(f)$ – интеграл столкновений.

В случае вырожденного бозе-газа при кинетическом описании необходимо учитывать, что свойства конденсата Бозе–Эйнштейна могут меняться в зависимости от пространственных и временной координат, т.е., по сути дела, необходимо рассматривать двухжидкостную модель (точнее, “двухфлюидную”, так как рассматривается не жидкость, а газ). Обозначим плотность конденсата Бозе–Эйнштейна через $\rho_{\text{cond}} = \rho_{\text{cond}}(\mathbf{r}, t)$, а его скорость через $\mathbf{u}_{\text{cond}} = \mathbf{u}_{\text{cond}}(\mathbf{r}, t)$. Тогда для плотностей

потока массы $\mathbf{j}$, энергии $\mathbf{Q}$ и импульса Π_{ik} конденсата Бозе–Эйнштейна (в предположении нулевого химического потенциала) будем иметь следующие выражения [11]:

$$\mathbf{j} = \rho_{\text{cond}} \mathbf{u}_{\text{cond}}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\rho_{\text{cond}} u_{\text{cond}}^2}{2} \mathbf{u}_{\text{cond}}, \quad \Pi_{ik} = \rho_{\text{cond}} u_{\text{cond},i} u_{\text{cond},k}.$$

Законы сохранения числа частиц, энергии и импульса требуют в стационарном случае выполнения соотношений

$$\nabla \mathbf{j} = - \int I(f) d\Omega_B, \quad \nabla \mathbf{Q} = - \int \mathcal{E}(\mathbf{p}) I(f) d\Omega_B, \quad \nabla \Pi = - \int \mathbf{p} I(f) d\Omega_B,$$

где

$$d\Omega_B = \frac{(2s+1) d^3 p}{(2\pi\hbar)^3},$$

s – спин частицы, $\mathcal{E}(\mathbf{p})$ – энергия, $\hbar$ – постоянная Планка, $I(f)$ – интеграл столкновений из уравнения (1).

В дальнейшем нас будет интересовать случай движения с малыми (по сравнению с тепловыми) скоростями. Отметим, что для конденсата Бозе–Эйнштейна величины $\mathbf{Q}$ и Π_{ik} зависят от скорости нелинейно (пропорциональны третьей и второй степеням скорости). Поэтому в линейном приближении по скорости $\mathbf{u}_{\text{cond}}$ законы сохранения энергии и импульса можно записать в виде

$$\int \mathcal{E}(\mathbf{p}) I(f) d\Omega_B = 0, \quad \int \mathbf{p} I(f) d\Omega_B = 0.$$

Для слабовзаимодействующего бозе-газа согласно теории Боголюбова справедливо следующее соотношение для энергии возбуждений $\mathcal{E}(p)$ [14]:

$$\mathcal{E}(p) = \left[u_0^2 p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad u_0 = \left(\frac{4\pi\hbar^2 a n}{m^2} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где a – длина рассеяния молекул газа, n – концентрация, m – масса частиц газа, $\mathbf{p}$ – импульс элементарных возбуждений, u_0 – скорость звука. Параметр a характеризует силу взаимодействия молекул газа. Для слабовзаимодействующего газа этот параметр можно считать малым.

В нашей предыдущей работе [15] рассмотрен случай, когда для достаточно малых значений величины a выполняется соотношение $u_0^2 \ll kT/m$, k – постоянная Больцмана, T – температура. В этом случае первым слагаемым в квадратных скобках в формуле (2) можно пренебречь. Выражение для энергии $\mathcal{E}(p)$ приобретет тот же вид, что и в случае невзаимодействующих молекул: $\mathcal{E}(p) = p^2/2m$. В этом случае $\partial \mathcal{E}(p)/\partial \mathbf{p} = \mathbf{v}$.

В работе [16] рассмотрен случай, когда в выражении (2) превалирует фоновая компонента, т.е. когда $T \ll m u_0^2/k$. В этом случае согласно (2) получаем, что $\mathcal{E}(p) = u_0 |\mathbf{p}|$. Следовательно, $\partial \mathcal{E}(p)/\partial \mathbf{p} = u_0 \mathbf{p}/p$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда ни первым, ни вторым слагаемым в элементарных возбуждениях нельзя пренебречь. В этом случае

$$\frac{\partial \mathcal{E}(p)}{\partial \mathbf{p}} = \alpha(p) \mathbf{p},$$

где

$$\alpha(p) = \frac{u_0^2 + p^2/(2m^2)}{\mathcal{E}(p)}.$$

При рассмотрении кинетического уравнения (1) под частицами газа необходимо понимать элементарные возбуждения бозе-газа со спектром энергий (2). Характер элементарных возбуждений проявляется в свойствах интеграла столкновений. Возьмем в уравнении (1) в качестве интеграла столкновений его τ -приближение. Тогда характер элементарных возбуждений будет отражаться в зависимости частоты столкновений от импульса возбуждений [14], [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha(p)\mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \nu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)(f_{\text{B}}^* - f). \quad (3)$$

Здесь f – функция распределения, $\nu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = \nu_0|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^\gamma$ – зависимость частоты столкновений от импульса возбуждений, γ – постоянная (в случае, например, когда в элементарных возбуждениях превалирует фононная компонента, величина $\gamma \geq 3$ [14]), $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$, где $\mathbf{v}_0$ – скорость нормальной компоненты бозе-газа, f_{B}^* – равновесная функция распределения Бозе–Эйнштейна,

$$f_{\text{B}}^* = [e^{\mathcal{E}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_*)/(kT_*)} - 1]^{-1},$$

ν_0 – параметр модели, $\nu_0 = \nu_1/(mkT_s)^{1/2}$, величина ν_1 имеет смысл обратной средней длины свободного пробега l , $\nu_1 \sim 1/l$, T_s – температура газа в некоторой точке поверхности,

$$\mathcal{E}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_*) = \left[u_0^2(\mathbf{p} - \mathbf{p}_*)^2 + \left(\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_*)^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Параметры, входящие в f_{B}^* , а именно $T_* = T_*(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{p}_* = \mathbf{p}_*(\mathbf{r}, t)$, определяются из требования выполнения законов сохранения импульса и энергии:

$$\int \nu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\mathbf{p}[f - f_{\text{B}}^*] d^3p = 0, \quad \int \nu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\mathcal{E}(\mathbf{p})[f - f_{\text{B}}^*] d^3p = 0. \quad (4)$$

Эти параметры будем называть соответственно эффективной температурой и импульсом.

Закон сохранения числа частиц здесь не выполняется, так как часть частиц переходит в конденсат Бозе–Эйнштейна.

Будем считать, что скорость газа много меньше средней тепловой скорости, а возникающие характерные перепады температуры на длине свободного пробега l малы по сравнению с температурой газа. В этих предположениях возможна линеаризация задачи. Перейдем к линеаризации уравнения (3).

Начнем с линеаризации эффективной температуры:

$$T_* = T_s + \delta T_* = T_s \left(1 + \frac{\delta T_*}{T_s} \right).$$

Функция распределения Бозе–Эйнштейна является функцией импульса $\mathbf{p}$ и параметров $\mathbf{p}_*$ и $\delta T_*/T_s$. Ее линеаризацию проведем по двум последним параметрам:

$$f_{\text{B}}^* \left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_*, \frac{\delta T_*}{T_s} \right) = f_{\text{B}}^*(\mathbf{p}, 0, 0) + \frac{\partial f_{\text{B}}^*}{\partial \mathbf{p}_*}(\mathbf{p}, 0, 0)\mathbf{p}_* + \frac{\partial f_{\text{B}}^*}{\partial (\delta T_*/T_s)}(\mathbf{p}, 0, 0) \frac{\delta T_*}{T_s}.$$

В результате такой линеаризации получаем

$$f_B^*\left(\mathbf{p}, \mathbf{p}_*, \frac{\delta T_*}{T_s}\right) = f_B(p) + g(p)\alpha(p)\frac{\mathbf{p}\mathbf{p}_*}{kT_s} + g(p)\frac{\mathcal{E}(p)}{kT_s}\frac{\delta T_*}{T_s}, \quad (5)$$

где

$$f_B(p) \equiv f_B^*(\mathbf{p}, 0, 0) = \frac{1}{e^{\mathcal{E}(p)/(kT_s)} - 1}, \quad g(p) = \frac{e^{\mathcal{E}(p)/(kT_s)}}{[e^{\mathcal{E}(p)/(kT_s)} - 1]^2}.$$

Линеаризацию функции распределения согласно (5) проведем следующим образом:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_B(p) + g(p)h(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (6)$$

Из (5) и (6) находим

$$f_B - f = g(p)\left[\alpha(p)\frac{\mathbf{p}\mathbf{p}_*}{kT_s} + \frac{\mathcal{E}(p)}{kT_s}\frac{\delta T_*}{T_s}\right].$$

Вернемся к уравнению (3). Выполним линеаризацию этого уравнения согласно (5). Заметим, что в линейном приближении величину $\nu(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ в уравнении (3) можно заменить на $\nu(p) = \nu_0 p^\gamma$. Тогда уравнение (3) в результате линеаризации имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \alpha(p)\mathbf{p}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} = \nu_0 p^\gamma \left[\alpha(p)\frac{\mathbf{p}\mathbf{p}_*}{kT_s} + \frac{\mathcal{E}(p)}{kT_s}\frac{\delta T_*}{T_s} \right]. \quad (7)$$

В уравнении (7) введем безразмерный импульс (скорость) $\mathbf{C} = \mathbf{v}/v_T = \mathbf{p}_T/p_T$, где $v_T = \sqrt{kT_s/m}$ – тепловая скорость частиц газа, $\mathbf{p}_T$ – их импульс. Тогда $\mathcal{E}(p) = kT_s\mathcal{E}(C)$, где $\mathcal{E}(C) = \sqrt{w_0^2 C^2 + C^4/4}$, а $w_0 = u_0/v_T$ – безразмерная скорость звука. Кроме того, заметим, что $\alpha(p) = \alpha(C)/m$, где

$$\alpha(C) = \frac{w_0^2 + C^2/2}{\sqrt{w_0^2 C^2 + (C^2/2)^2}}.$$

Введем безразмерные время $\tau = \nu_0 t$ и координату $\mathbf{r}_1 = \nu_0 \sqrt{m/(kT_s)}\mathbf{r}$. Уравнение (3) в безразмерных переменных принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \alpha(C)\mathbf{C}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}_1} = C^\gamma \left[\alpha(C)\mathbf{C}\mathbf{C}_*(\mathbf{r}_1, \tau) + \mathcal{E}(C)\frac{\delta T_*}{T_s}(\mathbf{r}_1, \tau) - h(\mathbf{r}_1, \mathbf{C}, \tau) \right]. \quad (8)$$

В законах сохранения (4) также проведем линеаризацию. В результате получаем законы сохранения импульса и энергии в следующей форме:

$$\begin{aligned} \int p^\gamma \mathbf{p} \left[\alpha(p)\frac{\mathbf{p}\mathbf{p}_*}{kT_s} + \frac{\mathcal{E}(p)}{kT_s}\frac{\delta T_*}{T_s} - h(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}, \tau) \right] g(p) d^3 p &= 0, \\ \int p^\gamma \mathcal{E}(p) \left[\alpha(p)\frac{\mathbf{p}\mathbf{p}_*}{kT_s} + \frac{\mathcal{E}(p)}{kT_s}\frac{\delta T_*}{T_s} - h(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}, \tau) \right] g(p) d^3 p &= 0. \end{aligned}$$

В этих равенствах выполним интегрирование по безразмерному импульсу:

$$\begin{aligned} \int C^\gamma \mathbf{C} \left[\alpha(C)\mathbf{C}\mathbf{C}_* + \mathcal{E}(C)\frac{\delta T_*}{T_s} - h(\mathbf{r}_1, \mathbf{C}, \tau) \right] g(C) d^3 C &= 0, \\ \int C^\gamma \mathcal{E}(C) \left[\alpha(C)\mathbf{C}\mathbf{C}_* + \mathcal{E}(C)\frac{\delta T_*}{T_s} - h(\mathbf{r}_1, \mathbf{C}, \tau) \right] g(C) d^3 C &= 0, \end{aligned}$$

где

$$g(C) = \frac{e^{\mathcal{E}(C)}}{(e^{\mathcal{E}(C)} - 1)^2}.$$

Из этих законов сохранения энергии и импульса находим

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_*(\mathbf{r}_1, \tau) &= \frac{\int C^\gamma \mathbf{C} h(\mathbf{r}_1, \mathbf{C}, \tau) g(C) d^3 C}{\int C^\gamma C_x^2 \alpha(C) g(C) d^3 C}, \\ \frac{\delta T_*}{T_s}(\mathbf{r}_1, \tau) &= \frac{\int C^\gamma \mathcal{E}(C) h(\mathbf{r}_1, \mathbf{C}, \tau) g(C) d^3 C}{\int C^\gamma \mathcal{E}^2(C) g(C) d^3 C}. \end{aligned}$$

Вычислим интегралы, стоящие в знаменателях двух последних равенств. Имеем

$$\int C^\gamma C_x^2 \alpha(C) g(C) d^3 C = \frac{4\pi}{3} g_1, \quad \int C^\gamma \mathcal{E}^2(C) g(C) d^3 C = 4\pi g_2,$$

где

$$g_1 = \int_0^\infty C^{\gamma+4} \alpha(C) g(C) dC, \quad g_2 = \int_0^\infty C^{\gamma+2} \mathcal{E}^2(C) g(C) dC.$$

Таким образом, параметры уравнения окончательно имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_*(\mathbf{r}_1, \tau) &= \frac{3}{4\pi g_1} \int C^\gamma \mathbf{C} h(\mathbf{r}_1, \mathbf{C}, \tau) g(C) d^3 C, \\ \frac{\delta T_*}{T_s}(\mathbf{r}_1, \tau) &= \frac{1}{4\pi g_2} \int C^\gamma \mathcal{E}(C) h(\mathbf{r}_1, \mathbf{C}, \tau) g(C) d^3 C. \end{aligned} \quad (9)$$

С помощью равенств (9) представим уравнение (8) в стандартной для теории переноса форме:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \alpha(C) \mathbf{C} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}_1} + C^\gamma h(\mathbf{r}_1, \mathbf{C}, \tau) = \frac{C^\gamma}{4\pi} \int K(\mathbf{C}, \mathbf{C}') h(\mathbf{r}_1, \mathbf{C}', \tau) C'^\gamma g(C') d^3 C', \quad (10)$$

где

$$K(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = \frac{3\alpha(C) \mathbf{C} \mathbf{C}'}{g_1} + \frac{\mathcal{E}(C) \mathcal{E}(C')}{g_2}.$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рассматриваемой задаче вырожденный бозе-газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской поверхностью, с которой происходит теплообмен между конденсированной фазой и газом. Поэтому далее функцию h можно рассматривать в виде $h(\tau, \mathbf{r}_1, \mathbf{C}) = h(x, \mu, C)$. Здесь μ есть косинус угла между направлением вектора скорости $\mathbf{C}$ и осью x в сферической системе скоростей бозе-частиц, $C_x = \mu C$. Уравнение (10) для функции h запишется в виде

$$\mu \frac{\alpha(C)}{C^{\gamma-1}} \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu, C) = \frac{3\alpha(C) C \mu}{2g_1} W_1(x) + \frac{\mathcal{E}(C)}{2g_2} W_2(x), \quad (11)$$

где

$$W_1(x) = \int_{-1}^1 \int_0^\infty C'^{\gamma+3} \mu' h(x, \mu', C') g(C') d\mu' dC',$$

$$W_2(x) = \int_{-1}^1 \int_0^\infty \mathcal{E}(C') h(x, \mu', C') C'^{\gamma+2} g(C') d\mu' dC'.$$

Задача состоит в нахождении величины относительного скачка температуры $\varepsilon_T = \Delta T/T_s$, $\Delta T = T_s - T$, как функции Q_x – величины проекции на ось x потока тепла. Учитывая линейный характер задачи, можно записать $\varepsilon_T = RQ_x$. Безразмерный коэффициент R в выражении для скачка температуры называется сопротивлением Капицы.

Очевидно, что уравнение (11) имеет следующие частные решения: $h_1(x, \mu, C) = \alpha(C)C\mu$ и $h_2(x, \mu, C) = \mathcal{E}(C)$. Следовательно, функцией распределения Чепмена–Энскога является функция

$$h_{as}(x, \mu, C) = B^+ \alpha(C)C\mu - \varepsilon_T \mathcal{E}(C),$$

где величина B^+ пропорциональна величине потока тепла Q_x .

Теперь, предполагая отражение элементарных возбуждений от стенки зеркально-диффузным, сформулируем граничные условия:

$$\begin{aligned} h(0, \mu, C) &= qh(0, -\mu, C), & 0 < \mu < 1, \\ h(x, \mu, C) &= B^+ \alpha(C)C\mu - \varepsilon_T \mathcal{E}(C) + o(1), & x \rightarrow +\infty, \quad -1 < \mu < 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, задача состоит в решении уравнения (11) с граничными условиями (12). Особый интерес представляет нахождение величины температурного скачка ε_T .

4. СВЕДЕНИЕ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Продолжим функцию h в полупространство $x < 0$ симметричным образом:

$$h(x, \mu, C) = h(-x, -\mu, C).$$

Тогда при $x < 0$ распределение Чепмена–Энскога имеет вид

$$h_{as}(x, \mu, C) = B^- \alpha(C)C\mu - \varepsilon_T \mathcal{E}(C),$$

причем $B^+ = -B^-$. Теперь выделим у функции h составляющую, представляющую собой распределение Чепмена–Энскога, полагая, что

$$h(x, \mu, C) = B^\pm \alpha(C)C\mu - \varepsilon_T \mathcal{E}(C) + h_c(x, \mu, C), \quad \text{если } \pm x > 0.$$

Сформулируем граничные условия для функции h_c для нижнего и верхнего полупространств:

$$\begin{aligned} h_c(+0, \mu, C) &= -(1+q)B^+ \alpha(C)C\mu + \\ &\quad + (1-q)\varepsilon_T \mathcal{E}(C) + qh_c(+0, -\mu, C), & 0 < \mu < 1, \\ h_c(-0, \mu, C) &= -(1+q)B^- \alpha(C)C\mu + \\ &\quad + (1-q)\varepsilon_T \mathcal{E}(C) + qh_c(-0, -\mu, C), & -1 < \mu < 0, \\ h_c(+\infty, \mu, C) &= 0, & h_c(-\infty, \mu, C) = 0. \end{aligned}$$

Вставим эти граничные условия в кинетическое уравнение. Получаем следующее уравнение:

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + \frac{C^{\gamma-1}}{\alpha(C)} h_c(x, \mu, C) = \frac{C^{\gamma-1}}{\alpha(C)} \left\{ \frac{3\alpha(C)C\mu}{2g_1} W_1(x) + \frac{\mathcal{E}(C)}{2g_2} W_2(x) + \right. \\ \left. + |\mu| [-(1+q)B^+ \alpha(C)C|\mu| + (1-q)\varepsilon_T \mathcal{E}(C) - (1-q)h_c(\mp 0, \mu, C)] \delta(x) \right\}, \quad (13)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Уравнение (13) фактически объединяет два уравнения. Дело в том, что слагаемое $h_c(-0, \mu, C)$ отвечает положительным значениям переменной μ : $0 < \mu < 1$, а слагаемое $h_c(+0, \mu, C)$ – отрицательным значениям μ : $-1 < \mu < 0$.

Решение уравнений (13) будем искать в виде интегралов Фурье:

$$h_c(x, \mu, C) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \Phi(k, \mu, C) dk, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk, \\ W_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E_1(k) dk, \quad W_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E_2(k) dk.$$

Начнем с поиска неизвестных граничных значений $h_c(\mp 0, \mu, C)$. Выразим эти значения через спектральные плотности $E_1(k)$ и $E_2(k)$. Для этого будем рассматривать уравнение (13) при $x < 0$ и $x > 0$. В обоих случаях слагаемое с дельта-функцией выпадает из уравнения (13). Решая сначала уравнение (13) при $x > 0$, $\mu < 0$, считая известной правую часть этого уравнения и удовлетворяя граничным условиям вдали от стенки, получаем

$$h_c^+(x, \mu, C) = -\frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu} \frac{C^{\gamma-1}}{\alpha(C)}\right) \int_x^{+\infty} \exp\left(\frac{t}{\mu} \frac{C^{\gamma-1}}{\alpha(C)}\right) W(t, \mu, C) dt, \quad (14)$$

где

$$W(t, \mu, C) = \frac{C^{\gamma-1}}{\alpha(C)} \left[\frac{3\alpha(C)C\mu}{2g_1} W_1(t) + \frac{\mathcal{E}(C)}{2g_2} W_2(t) \right].$$

При $x < 0$, $\mu > 0$ аналогично получаем

$$h_c^-(x, \mu, C) = \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu} \frac{C^{\gamma-1}}{\alpha(C)}\right) \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{t}{\mu} \frac{C^{\gamma-1}}{\alpha(C)}\right) W(t, \mu, C) dt.$$

Подчеркнем, что в уравнении (13) граничные значения функции $h_c(\pm 0, \mu, C)$ являются граничными значениями приведенных выше функций $h_c^\pm(x, \mu, C)$ при $x \rightarrow \pm 0$ из соответствующих полуплоскостей. Из двух последних равенств для интегралов Фурье вытекает, что

$$W(t, \mu, C) = \frac{C^{\gamma-1}}{\alpha(C)} \left[\frac{3\alpha(C)C\mu}{2g_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} E_1(k) dk + \frac{\mathcal{E}(C)}{2g_2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} E_2(k) dk \right].$$

После несложных вычислений в (14) находим

$$h_c^+(x, \mu, C) = \frac{C^{2(\gamma-1)}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \left[\frac{3\alpha(C)C\mu}{2g_1} E_1(k) + \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{E}(C)}{2g_2} E_2(k) \right] \frac{dk}{C^{2(\gamma-1)} + k^2 \mu^2 \alpha^2(C)}.$$

Аналогично можно показать, что для функции $h_c^-(x, \mu, C)$ получается точно такое же выражение. Следовательно, учитывая четность по k функций $E_1(k)$ и $E_2(k)$, получаем

$$h_c^\pm(0, \mu, C) = \frac{C^\gamma}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{3\alpha(C)C\mu}{2g_1} E_1(k) + \frac{\mathcal{E}(C)}{2g_2} E_2(k) \right] \frac{dk}{C^{2(\gamma-1)} + k^2 \mu^2 \alpha^2(C)}. \quad (15)$$

Итак, граничные значения искомой функции $h_c(\pm 0, \mu, C)$ из уравнения (13) являются функциями $h_c^\pm(0, \mu, C)$, определенными равенством (15).

Из соотношения (15) видно, что два уравнения (13) можно объединить в одно:

$$\begin{aligned} \frac{\mu\alpha(C)}{C^{\gamma-1}} \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu, C) &= \frac{3\alpha(C)C\mu}{2g_1} W_1(x) + \frac{\mathcal{E}(C)}{2g_2} W_2(x) + \\ &+ |\mu| \{ -(1+q)B^+ |\mu| \alpha(C)C + (1-q)\varepsilon_T \mathcal{E}(C) - (1-q)h_c^\pm(0, \mu, C) \} \delta(x). \end{aligned} \quad (16)$$

5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Перейдем в уравнении (16) к интегралам Фурье. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} [C^\gamma + ik\mu\alpha(C)C] \Phi(k, \mu, C) &= \frac{3\alpha(C)C^{\gamma+1}\mu}{2g_1} E_1(k) + \frac{\mathcal{E}(C)C^\gamma}{2g_2} E_2(k) - \\ &- (1+q)B^+ \mu^2 C^\gamma + (1-q)\varepsilon_T C^{\gamma+1} |\mu| - (1-q)|\mu| \frac{C^{3\gamma}}{\pi} \times \\ &\times \int_0^\infty \left[\frac{3\alpha(C)C\mu}{2g_1} E_1(k) + \frac{\mathcal{E}(C)}{2g_2} E_2(k) \right] \frac{dk}{C^{2\gamma} + k^2 \mu^2 \alpha^2(C) C^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Несложно найти выражения для $E_1(k)$ и $E_2(k)$:

$$\begin{aligned} E_1(k) &= \int_{-1}^1 \int_0^\infty C^{\gamma+3} \mu \Phi(k, \mu, C) g(C) d\mu dC, \\ E_2(k) &= \int_{-1}^1 \int_0^\infty \mathcal{E}(C) C^{\gamma+2} \Phi(k, \mu, C) g(C) d\mu dC. \end{aligned}$$

Выразим функцию $\Phi(k, \mu, C)$ из уравнения (17) и подставим его в последние два выражения. Получим характеристическую систему уравнений, которую запишем в векторной форме:

$$\Lambda(k) E(k) = 2(1+q)B^+ T_1(k) - 2(1-q)\varepsilon_T T_2(k) + \frac{1-q}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1) E(k_1) dk_1, \quad (18)$$

где введены следующие обозначения: $\Lambda(k)$ – дисперсионная матрица-функция, $E(k)$ – неизвестный вектор-столбец,

$$\Lambda(k) = \begin{pmatrix} \frac{3k^2}{g_1} T_{\gamma+6,4}^{3,0}(k) & \frac{ik}{g_2} T_{2\gamma+4,2}^{1,1}(k) \\ \frac{3ik}{g_1} T_{2\gamma+4,2}^{2,1}(k) & \frac{k^2}{g_2} T_{\gamma+4,2}^{2,2}(k) \end{pmatrix}, \quad E(k) = \begin{pmatrix} E_1(k) \\ E_2(k) \end{pmatrix},$$

$T_1(k)$ и $T_2(k)$ – вектор-столбцы свободных членов,

$$T_1(k) = \begin{pmatrix} ikT_{2\gamma+4,4}^{1,0}(k) \\ -T_{3\gamma+2,2}^{0,1}(k) \end{pmatrix}, \quad T_2(k) = \begin{pmatrix} ikT_{2\gamma+5,3}^{1,0}(k) \\ -T_{3\gamma+3,1}^{0,1}(k) \end{pmatrix},$$

$$T_{m,n}^{r,s}(k) = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\alpha^r(C) \mathcal{E}^s(C) C^m \mu^n}{C^{2\gamma} + k^2 \mu^2 \alpha^2(C) C^2} d\mu dC, \quad r, s = 0, 1, 2, \dots,$$

$J(k, k_1)$ – матричное ядро интегрального уравнения (17),

$$J(k, k_1) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{g_1} J_{5\gamma+4,3}^{1,0}(k, k_1) & \frac{ik}{g_2} J_{4\gamma+4,3}^{1,1}(k, k_1) \\ \frac{3ik}{g_1} J_{4\gamma+4,3}^{2,1}(k, k_1) & -\frac{1}{g_2} J_{5\gamma+2,1}^{0,2}(k, k_1) \end{pmatrix}.$$

В матрице $J(k, k_1)$ введены интегралы

$$J_{m,l}^{r,s}(k, k_1) = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{\alpha^r(C) \mathcal{E}^s(C) C^m \mu^l g(C) d\mu dC}{(C^{2\gamma} + k^2 \mu^2 \alpha^2(C) C^2)(C^{2\gamma} + k_1^2 \mu^2 \alpha^2(C) C^2)}.$$

6. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Решение уравнения (18) будем искать в виде

$$\varepsilon_T = \frac{1+q}{1-q} [\varepsilon_0 + \varepsilon_1(1-q) + \varepsilon_2(1-q)^2 + \dots], \quad (19)$$

$$E(k) = 2(1+q) [E^{(0)}(k) + E^{(1)}(k)(1-q) + E^{(2)}(k)(1-q)^2 + \dots].$$

Подставим эти равенства в характеристическое уравнение. Получим счетную систему уравнений:

$$\Lambda(k)E^{(0)}(k) = -B^+T_1(k) + \varepsilon_0T_2(k), \quad (20)$$

$$\Lambda(k)E^{(1)}(k) = \varepsilon_1T_2(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1)E^{(0)}(k_1) dk_1, \quad (21)$$

$$\Lambda(k)E^{(2)}(k) = \varepsilon_2T_2(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1)E^{(1)}(k_1) dk_1, \quad \dots \quad (22)$$

Определитель дисперсионной матрицы назовем дисперсионной функцией: $\lambda(z) \equiv \det \Lambda(z) = k^2 \omega(k)$, где

$$\omega(k) = \frac{3}{g_1 g_2} [k^2 T_{\gamma+4,6}^{3,0}(k) T_{\gamma+4,2}^{2,2}(k) + T_{2\gamma+4,2}^{1,1}(k) T_{2\gamma+4,2}^{2,1}(k)].$$

Обратная к дисперсионной матрица такова: $\Lambda^{-1}(k) = D(k)/\lambda(k)$, где

$$D(k) = \begin{pmatrix} \frac{k^2}{g_2} T_{\gamma+4,2}^{2,2}(k) & -\frac{ik}{g_2} T_{2\gamma+4,2}^{1,1}(k) \\ -\frac{3ik}{g_1} T_{2\gamma+4,2}^{2,1}(k) & \frac{3k^2}{g_1} T_{\gamma+4,6}^{3,0}(k) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим построение рядов (19). Введем обозначение:

$$E^{(m)}(k) = \begin{pmatrix} E_1^{(m)}(k) \\ E_2^{(m)}(k) \end{pmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Из уравнения (20) находим

$$E_1^{(0)}(k) = \frac{ik}{\omega(k)g_2} T_{\gamma+4,2}^{2,2}(k) [B^+ T_{2\gamma+4,4}^{1,0}(k) - \varepsilon_0 T_{2\gamma+5,3}^{1,0}(k)] + \frac{i}{k\omega(k)g_2} T_{2\gamma+4,2}^{1,1}(k) [B^+ T_{3\gamma+2,2}^{0,1}(k) - \varepsilon_0 T_{3\gamma+3,1}^{0,1}(k)], \quad (23)$$

$$E_2^{(0)}(k) = \frac{3}{\omega(k)g_1} T_{2\gamma+4,2}^{2,1}(k) [B^+ T_{2\gamma+4,4}^{1,0}(k) - \varepsilon_0 T_{2\gamma+5,3}^{1,0}(k)] + \frac{3}{\omega(k)g_1} T_{\gamma+4,6}^{3,0}(k) [-B^+ T_{3\gamma+2,2}^{0,1}(k) + \varepsilon_0 T_{3\gamma+3,1}^{0,1}(k)]. \quad (24)$$

Величина $E_2^{(0)}(k)$ существует при всех значениях k , но величина $E_1^{(0)}(k)$ имеет в нуле простой полюс. Для его устранения возьмем ε_0 в виде

$$\varepsilon_0 = B^+ \frac{T_{3\gamma+2,2}^{0,1}(0)}{T_{3\gamma+3,1}^{0,1}(0)} = B^+ \frac{g_{\varepsilon,2}(\gamma)}{3g_{\varepsilon,3}(\gamma)},$$

где

$$g_{\varepsilon,2}(\gamma) = \int_0^\infty \mathcal{E}(C) C^{\gamma+2} g(C) dC, \quad g_{\varepsilon,3}(\gamma) = \int_0^\infty \mathcal{E}(C) C^{\gamma+3} g(C) dC, \\ \mathcal{E}(C) = \sqrt{w_0^2 c^2 + \left(\frac{C^2}{2}\right)^2}, \quad g(C) = \frac{e^{\mathcal{E}(C)}}{(e^{\mathcal{E}(C)} - 1)^2}.$$

Выражение для ε_0 подставим в (23) и (24), а затем подставим выражения (23) и (24) в (21) и находим $E^{(1)}(k)$. Далее подставим $E^{(1)}(k)$ в уравнение (22) и находим $E^{(2)}(k)$. Продолжая этот процесс неограниченно, построим все члены рядов (19).

7. СКАЧОК ТЕМПЕРАТУРЫ И СОПРОТИВЛЕНИЕ КАПИЦЫ

Найдем величину ε_0 в явном виде. Величина B^+ пропорциональна величине потока тепла:

$$\mathbf{Q} = \int f(x, \mathbf{p}) \frac{\partial \mathcal{E}(p)}{\partial \mathbf{p}} \mathcal{E}(p) d\Omega_{\mathbf{B}}.$$

Преобразуем это выражение:

$$\mathbf{Q} = \frac{(2s+1)u_0^2}{(2\pi\hbar)^3} \int h(x, \mathbf{p}) g(p) \alpha(p) \mathbf{p} \mathcal{E}(p) d^3 p,$$

а затем проинтегрируем его по безразмерному импульсу. Для этого заметим, что

$$\alpha(p) \mathbf{p} \mathcal{E}(p) d^3 p = \frac{kT_s}{m} (kT_s m)^2 \alpha(C) \mathbf{C} \mathcal{E}(C).$$

В результате получим

$$\mathbf{Q} = \frac{(2s+1)(kT_s)^3 m}{(2\pi\hbar)^3} \int h(x, \mathbf{C}) \alpha(C) \mathbf{C} \mathcal{E}(C) g(C) d^3 C.$$

Заменим здесь функцию h на ее разложение Чепмена–Энскога h_{as} . В результате для x -компоненты потока тепла имеем

$$Q_x = \frac{(2s+1)(kT_s)^3 m}{(2\pi\hbar)^3} \int_{-1}^1 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} [B^+ \alpha(C) C \mu - \varepsilon_T \mathcal{E}(C)] \times \\ \times \alpha(C) C \mu \mathcal{E}(C) C^2 g(C) d\mu dC d\chi = \frac{(2s+1)(kT_s)^3 m}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{4\pi}{3} g_{\alpha\varepsilon}(\gamma) B^+,$$

где

$$g_{\alpha\varepsilon}(\gamma) = \int_0^\infty \alpha^2(C) \mathcal{E}(C) C^4 g(C) dC.$$

Отсюда находим

$$B^+ = Q_x \frac{6\pi^2 \hbar^3}{(2s+1)m(kT_s)^3 g_{\alpha\varepsilon}(\gamma)}.$$

Таким образом, величина ε_0 имеет вид

$$\varepsilon_0 = Q_x \frac{6\pi^2 \hbar^3}{(2s+1)m(kT_s)^3} \cdot \frac{g_{\varepsilon,2}(\gamma)}{3g_{\varepsilon,3}(\gamma)g_{\alpha\varepsilon}(\gamma)}. \quad (25)$$

Возвращаясь к формуле для скачка температуры $\Delta T = RQ_x$, получаем из (25) выражение для сопротивления Капицы в нулевом приближении

$$R = C(\gamma, q) \frac{\hbar^3}{(2s+1)k^3 T_s^2 m},$$

где

$$C(\gamma, q) = \frac{4\pi^2 g_{\varepsilon,2}(\gamma)}{g_{\varepsilon,3}(\gamma)g_{\alpha\varepsilon}(\gamma)} \cdot \frac{1+q}{1-q} \quad (26)$$

– безразмерный коэффициент скачка температуры.

Положительность коэффициента при Q_x в формуле (25) указывает на то, что стенка имеет температуру выше, чем квантовый бозе-газ.

Графики поведения коэффициента скачка температуры согласно (26) представлены на рис. 1–4. Из приведенных графиков видно, что при фиксированных значениях остальных параметров величина коэффициента $C(\gamma, q)$:

- а) монотонно убывает с ростом параметра γ ;
- б) монотонно растет с ростом параметра зеркальности q ;
- в) монотонно растет с ростом безразмерной величины скорости звука w_0 .

Кроме того, при стремлении коэффициента зеркальности q к единице величина $C(\gamma, q)$ неограниченно возрастает, так как в этом пределе теплообмен между стенкой и прилегающим к ней газом становится невозможным.

Рис. 1. Зависимость коэффициента скачка температуры от параметра γ в случае нулевого коэффициента зеркальности ($q = 0$). Кривые 1, 2, 3 отвечают значениям безразмерной скорости $w_0 = 1, 2, 3$.

Рис. 2. Зависимость коэффициента скачка температуры от коэффициента зеркальности q в случае, когда безразмерная скорость звука $w_0 = 10$. Кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра столкновений $\gamma = 1, 3, 10$.

Рис. 3. Зависимость коэффициента скачка температуры от коэффициента зеркальности q в случае $\gamma = 1$. Кривые 1, 2, 3 отвечают значениям безразмерной скорости $w_0 = 5, 10, 20$.

Рис. 4. Зависимость коэффициента скачка температуры от безразмерной скорости w_0 в случае $q = 0.5$. Кривые 1, 2, 3 отвечают значениям параметра $\gamma = 1, 5, 10$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для вырожденного квантового бозе-газа с частотой столкновений, зависящей от импульса элементарных возбуждений бозе-газа, построено кинетическое уравнение. Рассмотрен общий случай зависимости энергии элементарных возбуждений бозе-газа от импульса. Граничные условия предполагаются зеркально-диффузными. Получено решение полупространственной граничной задачи о скачке температуры на границе вырожденного бозе-газа при наличии конденсата Бозе-Эйнштейна. Выведена формула для нахождения величины скачка температуры и вычисления сопротивления Капицы. Разработан достаточно общий метод решения кинетических уравнений с зеркально-диффузными граничными условиями, впервые предложенный в работе [17] в задаче о скин-эффекте.

Список литературы

- [1] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика*. т. 10: *Физическая кинетика*, Наука, М., 1979.
- [2] А. М. Прохоров (ред.), *Физический энциклопедический словарь*, Большая российская энциклопедия, М., 1995.
- [3] К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, М., 1978.
- [4] А. В. Латышев, *ПММ*, **54**:4 (1990), 581–586.
- [5] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **142**:1 (2005), 93–111.
- [6] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **161**:1 (2009), 95–108.
- [7] Л. П. Питаевский, *УФН*, **176**:4 (2006), 345–364.
- [8] H. Spohn, *Physica D*, **239**:10 (2010), 627–634, arXiv:0809.4551v1.
- [9] Hai Pang, Wu-Sheng Dai, Mi Xie, *J. Phys. A*, **39**:11 (2006), 2563–2571, arXiv:cond-mat/0603289.
- [10] L. Šamaj, B. Jancovici, *J. Stat. Mech.*, **02** (2007), P02002, 19 pp., arXiv:cond-mat/0701773.
- [11] И. М. Халатников, *Введение в теорию сверхтекучести*, Наука, М., 1965.
- [12] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **134**:2 (2003), 310–324.
- [13] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Матем. моделирование*, **15**:5 (2003), 80–94.
- [14] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*. т. 9: *Статистическая физика. Ч. 2. Теория конденсированного состояния*, Наука, М., 1978.
- [15] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **155**:3 (2008), 498–511.
- [16] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **162**:1 (2010), 112–124, arXiv:1001.0433.
- [17] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **49**:1 (2009), 137–151.

Поступила в редакцию 11.01.2010