Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Дифференциально-разностный бикомплекс, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 2, 195–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6571>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:45:31

© 2010 г.

В. В. Жаринов*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЙ БИКОМПЛЕКС

Развита техника разностных джетов на многомерной целочисленной решетке. На этой основе построен дифференциально-разностный бикомплекс решетки в классе функций локально-конечного порядка и доказана его ацикличность.

Ключевые слова: целочисленная решетка, разностные джеты, дифференциально-разностный бикомплекс.

Как хорошо известно, в теоретических и прикладных исследованиях широко используется вариационное исчисление на евклидовых пространствах, основу которого составляет вариационный комплекс (см., например, [1]), в свою очередь являющийся частью фундаментального объекта – вариационного бикомплекса (см., например, [2]–[4]). С другой стороны, в связи с бурным ростом возможностей вычислительной техники все большую популярность приобретают решеточные модели в теоретической и математической физике и разностные уравнения в практических физических и инженерных задачах, так что весьма актуальным представляется развитие вариационной техники на решетках. В рамках такой программы в настоящей работе построен дифференциально-разностный бикомплекс на многомерной целочисленной решетке в классе функций локально-конечного порядка и доказано, что он ациклический, т. е. все его строки и столбцы точные. Для этого введено понятие разностного джета и развит соответствующий аппарат. В п. 2.5 обсуждается зависимость вида дифференциально-разностного бикомплекса от выбора класса функций на пространстве разностных джетов.

Будем использовать стандартные обозначения: $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество натуральных чисел.

1. РАССЛОЕНИЕ ДЖЕТОВ НАД РЕШЕТКОЙ

1.1. Решетка. Пусть $D \in \mathbb{N}$, $\mathbb{D} = \{1, 2, \dots, D\}$.

Решетка (точнее, D -мерная целочисленная решетка) есть множество $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^D$. На множестве $\mathbb{L}$ определены две согласованные алгебраические структуры: абелевой

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

группы по сложению и $\mathbb{Z}$ -модуля. Как $\mathbb{Z}$ -модуль, $\mathbb{L}$ имеет базис $\{e_1, \dots, e_D\}$, где

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_D = (0, \dots, 0, 1).$$

Для $i = (i^1, \dots, i^D) = \sum_{\mu \in \mathbb{D}} i^\mu e_\mu \in \mathbb{L}$ полагаем $|i| = \sum_{\mu \in \mathbb{D}} |i^\mu| \in \mathbb{Z}_+$, а для $p \in \mathbb{Z}_+$ полагаем $\mathbb{B}_p = \{i \in \mathbb{L} \mid |i| \leq p\}$.

На решетке (множестве) $\mathbb{L}$ определено действие группы $\mathbb{L}$,

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{L}), \quad i \mapsto T_i: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}, \quad k \mapsto T_i k = k + i.$$

Пусть $\mathcal{A}(\mathbb{L}) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbb{R})$ – алгебра всех функций на решетке $\mathbb{L}$. Группа $\mathbb{L}$ действует на алгебре $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ стандартным образом:

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}(\mathbb{L})), \quad i \mapsto T_i: \mathcal{A}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{L}), \quad \varphi \mapsto T_i \varphi = \varphi \circ T_i,$$

так что $(T_i \varphi)(k) = \varphi(T_i k) = \varphi(k + i)$ для всех $k \in \mathbb{L}$.

1.2. Векторное расслоение над решеткой. Пусть V – линейное пространство. Будем рассматривать прямое произведение $J = \mathbb{L} \times V$ как векторное расслоение над решеткой $\mathbb{L}$ с типичным слоем V и проекцией на первый сомножитель:

$$\pi: J = \mathbb{L} \times V \rightarrow \mathbb{L}, \quad (k, u) \mapsto \pi(k, u) = k.$$

$\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуль всех сечений расслоения π есть $\mathcal{M}(\mathbb{L}; V) = \text{Map}(\mathbb{L}; V)$ – множество всех отображений из $\mathbb{L}$ в V . Считая, что группа $\mathbb{L}$ действует на слоях тривиально, получим ее действие на расслоении π ,

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(J), \quad i \mapsto T_i: J \rightarrow J, \quad (k, u) \mapsto T_i(k, u) = (T_i k, u).$$

Индукцированное действие на сечениях имеет вид

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}(\mathbb{L}; V)), \quad i \mapsto T_i: \mathcal{M}(\mathbb{L}; V) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{L}; V), \quad \varphi \mapsto T_i \varphi,$$

где $T_i \varphi = \varphi \circ T_i$, т. е. $(T_i \varphi)(k) = \varphi(k + i)$ для всех $i, k \in \mathbb{L}$, $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$.

1.3. Расслоение разностных джетов над решеткой. Пусть $\pi: J = \mathbb{L} \times V \rightarrow \mathbb{L}$ – векторное расслоение над $\mathbb{L}$. Будем говорить, что сечения $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$ *касаются над точкой* $k \in \mathbb{L}$ *с порядком* $p \in \mathbb{Z}_+$, если $\varphi(k + i) = \psi(k + i)$ для всех $i \in \mathbb{B}_p$. Будем также говорить, что сечения $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$ *касаются над точкой* $k \in \mathbb{L}$ *с порядком* ∞ , если $\varphi(k + i) = \psi(k + i)$ для всех $i \in \mathbb{B}_\infty = \mathbb{L}$, т. е. если сечения φ и ψ совпадают.

При таком определении касания *векторное расслоение разностных джетов порядка* $p \in \mathbb{Z}_+$ *над решеткой* $\mathbb{L}$ *есть*

$$\pi_p: \mathbf{J}_p = \mathbb{L} \times \mathbf{V}_p \rightarrow \mathbb{L}, \quad (k, \mathbf{u}) \mapsto \pi_p(k, \mathbf{u}) = k,$$

где типичный слой

$$\mathbf{V}_p = \{\mathbf{u} = \mathbf{u}_p = (u_l) \mid l \in \mathbb{B}_p, u_l \in V\} = V^{\mathbb{B}_p}.$$

Будем считать, что $\mathbf{V}_0 = V$, $\mathbf{J}_0 = J$, $\pi_0 = \pi$.

$\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуль всех сечений расслоения π_p есть множество

$$\mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V}_p) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V}_p) = \{ \phi = \phi_p = (\varphi_l) \mid l \in \mathbb{B}_p, \varphi_l \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V) \}.$$

Определено отображение

$$j_p: \mathcal{M}(\mathbb{L}; V) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V}_p), \quad \varphi \mapsto j_p \varphi, \quad (j_p \varphi)_l = T_l \varphi, \quad l \in \mathbb{B}_p.$$

Сечения $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$ касаются над точкой k с порядком p тогда и только тогда, когда $(j_p \varphi)(k) = (j_p \psi)(k)$, т.е. когда их p -джеты в точке k совпадают.

Пусть $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $p \geq q$. Естественное вложение $\mathbb{B}_q \subset \mathbb{B}_p$ индуцирует проекцию

$$\pi_{pq}: \mathbf{J}_p \rightarrow \mathbf{J}_q, \quad \pi_q \circ \pi_{pq} = \pi_p,$$

так что определен проективный предел – векторное расслоение разностных джетов (бесконечного порядка)

$$\pi = \pi_\infty: \mathbf{J} = \mathbf{J}_\infty = \mathbb{L} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{L}, \quad (k, \mathbf{u}) \mapsto \pi(k, \mathbf{u}) = k,$$

где типичный слой

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{proj } \mathbf{V}_p = \{ \mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty = (u_l) \mid l \in \mathbb{L}, u_l \in V \} = V_\mathbb{L}.$$

$\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуль всех сечений расслоения π есть

$$\mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V}) = \text{Map}(\mathbb{L}; \mathbf{V}) = \{ \phi = \phi_\infty = (\varphi_l) \mid l \in \mathbb{L}, \varphi_l \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V) \}.$$

По построению $\mathbf{V} = V_\mathbb{L} = \text{Map}(\mathbb{L}; V) = \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$. Действие группы $\mathbb{L}$ на типичном слое $\mathbf{V}$ определяется согласно ее действию на $\mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$:

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{V}), \quad i \mapsto T_i: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}, \quad \mathbf{u} \mapsto T_i \mathbf{u}, \quad (T_i \mathbf{u})_l = u_{l+i}, \quad l \in \mathbb{L}.$$

Соответственно, действие группы $\mathbb{L}$ на расслоении π имеет вид

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{J}), \quad i \mapsto T_i: \mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}, \quad (k, \mathbf{u}) \mapsto T_i(k, \mathbf{u}) = (T_i k, T_i \mathbf{u}),$$

а на его сечениях –

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V})), \quad i \mapsto T_i: \mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V}), \quad \phi \mapsto T_i \phi,$$

где $T_i \phi = T_{-i} \circ \phi \circ T_i$, так что $(T_i \phi)_l(k) = \varphi_{l-i}(k+i)$, $i, l, k \in \mathbb{L}$.

Определено отображение

$$j: \mathcal{M}(\mathbb{L}; V) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V}), \quad \varphi \mapsto j \varphi, \quad (j \varphi)_l = T_l \varphi, \quad l \in \mathbb{L}.$$

Сечения $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$ касаются над точкой k с порядком ∞ тогда и только тогда, когда $(j \varphi)(k) = (j \psi)(k)$, т.е. когда их ∞ -джеты в точке k совпадают.

Сечение $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$ называется *инвариантным относительно сдвигов*, если $T_i \phi = \phi$ для всех $i \in \mathbb{L}$. Линейное пространство всех таких сечений обозначим через $\mathcal{M}_T(\mathbb{L}; \mathbf{V})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1. $T_i \circ \mathbf{j} = \mathbf{j}$ для всех $i \in \mathbb{L}$.
2. $\mathbf{j}: \mathcal{M}(\mathbb{L}; V) \simeq \mathcal{M}_T(\mathbb{L}; \mathbf{V})$.
3. Для каждой точки $(k, \mathbf{u}) \in \mathbf{J}$ существует одно и только одно сечение $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$ такое, что $(\mathbf{j}(\varphi))(k) = \mathbf{u}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для $i \in \mathbb{L}$, $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$, $l, k \in \mathbb{L}$, имеем

$$(T_i \mathbf{j}\varphi)_l(k) = (\mathbf{j}\varphi)_{l-i}(k+i) = \varphi(k+i+l-i) = \varphi(k+l) = (\mathbf{j}\varphi)_l(k).$$

Далее, пусть $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$ и $T_i \phi = \phi$, $i \in \mathbb{L}$, т. е. $\varphi_{l-i}(k+i) = \varphi_l(k)$ для всех $i, l, k \in \mathbb{L}$. В частности, при $i = l$ имеем $\varphi_0(k+l) = \varphi_l(k)$, т. е. $\varphi_l = T_l \varphi_0$ для всех $l \in \mathbb{L}$, и, значит, $\phi = \mathbf{j}\varphi_0$. Наконец, пусть $(k, \mathbf{u}) \in \mathbf{J}$. Определим сечение $\varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$ равенством $\varphi(i) = u_{i-k}$ для всех $i \in \mathbb{L}$. Тогда $(\mathbf{j}\varphi)_l(k) = \varphi(k+l) = u_{k+l-k} = u_l$, что и требовалось доказать. Единственность очевидна. ■

1.4. Функции на пространстве разностных джетов. Пусть $\pi: J = \mathbb{L} \times V \rightarrow \mathbb{L}$ – векторное расслоение, W – линейное пространство.

Для каждого $p \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\mathcal{A}(\mathbf{V}_p) = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{V}_p; \mathbb{R})$ алгебру всех гладких функций на пространстве $\mathbf{V}_p$ с естественной локально-выпуклой топологией, а через

$$\mathcal{A}(\mathbf{V}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{V}; \mathbb{R}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{ind } \mathcal{A}(\mathbf{V}_p)$$

– индуктивный предел таких алгебр относительно естественного вложения. По построению алгебра $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ состоит из всех функций $f(\mathbf{u})$ на пространстве $\mathbf{V}$, каждая из которых зависит лишь от конечного числа переменных u_l и гладкая по этим переменным. Далее, обозначим через $\mathcal{A}(\mathbf{J}) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes \mathcal{A}(\mathbf{V})$ алгебру всех функций $f(k, \mathbf{u})$ на пространстве $\mathbf{J}$ таких, что при каждом $k \in \mathbb{L}$ функция $g_k(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathbf{V})$. Заметим, что имеется естественное вложение $\mathcal{A}(\mathbf{V}) \subset \mathcal{A}(\mathbf{J})$, $f(\mathbf{u}) \mapsto f(k, \mathbf{u}) = f(\mathbf{u})$. Наконец, обозначим через $\mathcal{M}(\mathbf{J}; W) = \mathcal{A}(\mathbf{J}) \otimes W$ $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ -модуль всех отображений $f(k, \mathbf{u})$ из пространства $\mathbf{J}$ в W таких, что при каждом $k \in \mathbb{L}$ отображение $g_k(\mathbf{u}) \in \mathcal{M}(\mathbf{V}; W) = \mathcal{A}(\mathbf{V}) \otimes W$.

Имеется альтернативный выбор алгебры гладких функций на пространстве разностных джетов. Именно, для каждого $p \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\mathcal{A}(\mathbf{J}_p) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes \mathcal{A}(\mathbf{V}_p)$ алгебру всех функций разностного порядка p , а через

$$\mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \text{ind } \mathcal{A}(\mathbf{J}_p)$$

– алгебру всех функций на пространстве $\mathbf{J}$ конечного разностного порядка. Имеется по-прежнему естественное вложение $\mathcal{A}(\mathbf{V}) \subset \mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$.

Очевидно, $\mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J}) \subsetneq \mathcal{A}(\mathbf{J})$. Более того, по построению каждая функция $f(k, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$ имеет глобальный разностный порядок $p = p(f)$, так что $\partial_{u_l} f(k, \mathbf{u}) = 0$ для всех $k \in \mathbb{L}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ и $|l| > p$, тогда как каждая функция $f(k, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$ обязана лишь для каждого $k \in \mathbb{L}$ иметь локальный разностный порядок $p = p(f, k)$, так что здесь $\partial_{u_l} f(k, \mathbf{u}) = 0$ для всех $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ и $|l| > p$.

Ниже мы ограничиваемся алгеброй $\mathcal{A}(\mathbf{J})$. Алгебра $\mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$ требует отдельного рассмотрения.

Отображения $f \in \mathcal{M}(\mathbf{J}; W)$ суть сечения векторного расслоения

$$\mathbf{J} \times W \rightarrow \mathbf{J}, \quad (k, \mathbf{u}, w) \mapsto (k, \mathbf{u}).$$

Считая, что сдвиги действуют на слоях тривиально, получим действие группы $\mathbb{L}$ на этом расслоении

$$\begin{aligned} T: \mathbb{L} &\rightarrow \text{Aut}(\mathbf{J} \times W), & i &\mapsto T_i: \mathbf{J} \times W \rightarrow \mathbf{J} \times W, \\ (k, \mathbf{u}, w) &\mapsto T_i(k, \mathbf{u}, w) = (T_i k, T_i \mathbf{u}, w). \end{aligned}$$

На сечениях соответственно имеем

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}(\mathbf{J}; W)), \quad i \mapsto T_i: \mathcal{M}(\mathbf{J}; W) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{J}; W), \quad f \mapsto T_i f,$$

где $T_i f = f \circ T_i$, так что $(T_i f)(k, \mathbf{u}) = f(T_i k, T_i \mathbf{u})$.

Для каждого сечения $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$ определена подстановка

$$|_{\phi}: \mathcal{M}(\mathbf{J}; W) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{L}; W), \quad f \mapsto f|_{\phi}, \quad f|_{\phi}(k) = f(k, \phi(k)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (ПРАВИЛО ПОЛНОГО СДВИГА). Для $\phi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$ равенство $(T_i f)|_{\phi} = T_i(f|_{\phi})$ справедливо для всех $i \in \mathbb{L}$ и $f \in \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $\phi = \mathbf{j}(\varphi)$, где сечение $\varphi = \varphi_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению

$$(T_i f)|_{\phi}(k) = f(T_i k, T_i \phi(k)), \quad T_i(f|_{\phi})(k) = f(T_i k, \phi(k)),$$

так что доказываемое утверждение следует из предложения 1. ■

Функция $f \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$ называется *инвариантной относительно сдвигов*, если $T_i f = f$ для всех $i \in \mathbb{L}$. Подалгебру всех таких функций обозначим через $\mathcal{A}_T(\mathbf{J})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Имеет место изоморфизм

$$\mathcal{A}_T(\mathbf{J}) \simeq \mathcal{A}(\mathbf{V}), \quad f \mapsto g, \quad g(\mathbf{u}) = f(0, \mathbf{u}), \quad f(k, \mathbf{u}) = g(T_{-k} \mathbf{u}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $T_i f = f$ для всех $i \in \mathbb{L}$ сводится к равенству $f(k + i, T_i \mathbf{u}) = f(k, \mathbf{u})$ для всех $i, k \in \mathbb{L}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, так что достаточно положить $i = -k$. ■

СЛЕДСТВИЕ 1. $\mathcal{A}_T(\mathbf{J}) \cap \mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J}) = \mathbb{R}$.

1.5. Вертикальные дифференцирования. Пусть $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{V}))$ – линейное пространство всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}(\mathbf{V})$. Как известно, на $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{V}))$ определены две согласованные алгебраические структуры: структура алгебры Ли и структура $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ -модуля. В свою очередь, линейное пространство всех дифференцирований алгебры $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ есть $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J})) = \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{V}))$. На $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$ также определены две согласованные алгебраические структуры: структура алгебры Ли и структура $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ -модуля.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Образно говоря, дифференцирования в алгебре $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ производятся по гладким переменным $\mathbf{u}$, целочисленные переменные k здесь играют роль параметров. С точки зрения расслоения π дифференцирования в алгебре $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ являются *вертикальными*, тогда как сдвиги в алгебре $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ суть подъемы сдвигов из базы $\mathbb{L}$ и в силу этого называются *горизонтальными*. Отметим также, что вертикальные дифференцирования удовлетворяют *правилу Лейбница* $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$ для всех $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$, $f, g \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$, а горизонтальные сдвиги являются *морфизмами* алгебры $\mathcal{A}(\mathbf{J})$, $T_i(fg) = (T_i f)(T_i g)$ для всех $i \in \mathbb{L}$, $f, g \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$. Соответственно вертикальные дифференцирования образуют алгебру Ли, а горизонтальные сдвиги – абелеву группу.

Пусть $\{b_\alpha \mid \alpha \in A\}$ – базис линейного пространства V , так что

$$V \ni u = (u^\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \in A), \quad \mathbf{V} \ni \mathbf{u} = (u_l^\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \in A, l \in \mathbb{L}).$$

$\mathcal{A}(\mathbf{V})$ -модуль $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{V}))$ имеет в этом случае базис $\{\partial_{u_l^\alpha} \mid \alpha \in A, l \in \mathbb{L}\}$, так что

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{V})) = \left\{ X = \sum_{\alpha, l} X_l^\alpha \cdot \partial_{u_l^\alpha} \mid X_l^\alpha \in \mathcal{A}(\mathbf{V}) \right\}.$$

Дуальный модуль $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{V})) = \text{Hom}_{\mathcal{A}(\mathbf{V})}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{V})); \mathcal{A}(\mathbf{V}))$ имеет дуальный базис

$$\{d_V u_l^\alpha \mid \alpha \in A, l \in \mathbb{L}\}, \quad \langle d_V u_l^\alpha, \partial_{u_j^\beta} \rangle = \delta_\beta^\alpha \delta_l^j, \quad \alpha, \beta \in A, l, j \in \mathbb{L},$$

так что

$$\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{V})) = \left\{ \omega = \sum_{\alpha, l} \omega_\alpha^l \cdot d_V u_l^\alpha \mid \omega_\alpha^l \in \mathcal{A}(\mathbf{V}) \right\},$$

где лишь конечное число компонент $\omega_\alpha^l \neq 0$.

Аналогичные представления справедливы для $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ -модулей $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$ и $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$, где компоненты $X_l^\alpha, \omega_\alpha^l \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$.

На линейном пространстве $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$ определено присоединенное действие алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J})) &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))), & X &\mapsto X: \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J})) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J})), \\ & & Y &\mapsto X(Y) = [X, Y]. \end{aligned}$$

В частности, $\partial_{u_j^\beta}(\partial_{u_l^\alpha}) = 0$ для всех $\alpha, \beta \in A, j, l \in \mathbb{L}$.

На дуальном пространстве $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$ действие алгебры Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$ определяется как производная Ли:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J})) &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J}))), & X &\mapsto X: \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J})) \rightarrow \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J})), \\ & & \omega &\mapsto X(\omega) = [X, \omega], \end{aligned}$$

так что $\langle X(\omega), Y \rangle = X(\langle \omega, Y \rangle) - \langle \omega, [X, Y] \rangle$ для всех $X, Y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$, $\omega \in \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$.

В частности, $\partial_{u_j^\beta}(d_V u_l^\alpha) = 0$ для всех $\alpha, \beta \in A, j, l \in \mathbb{L}$.

Действие

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))), \quad i \mapsto T_i: \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J})) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J})), \quad X \mapsto T_i(X),$$

определяется как подъем действия с $\mathcal{A}(\mathbf{J})$, т. е. условием

$$T_i(X) \circ T_i = T_i \circ X, \quad \text{так что} \quad T_i(X) = T_i \circ X \circ T_{-i}.$$

В частности, $T_i(\partial_{u_l^\alpha}) = \partial_{u_{l+i}^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{A}$, $i, l \in \mathbb{L}$.

Дуальным образом действие группы $\mathbb{L}$ на дуальном пространстве $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$ задается правилом

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J}))), \quad i \mapsto T_i: \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J})) \rightarrow \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J})), \\ \omega \mapsto T_i(\omega) = T_i \circ \omega \circ T_{-i}.$$

В частности, $T_i(d_V u_l^\alpha) = d_V u_{l+i}^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{A}$, $i, l \in \mathbb{L}$.

Дифференцирование $X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$ называется *инвариантным относительно сдвигов*, если $T_i(X) = X$, т. е. $T_i \circ X = X \circ T_i$ для всех $i \in \mathbb{L}$. Подалгебру Ли всех таких дифференцирований обозначим через $\mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеют место следующие представления:*

- 1) $\mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{J})) = \{X = \sum_{\alpha, l} (T_l f^\alpha) \cdot \partial_{u_l^\alpha} \mid f^\alpha \in \mathcal{A}(\mathbf{J})\}$;
- 2) $\mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\mathbf{J})) \simeq \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{V}))$, $X = \sum_{\alpha, l} (T_l f^\alpha) \cdot \partial_{u_l^\alpha} \mapsto Y = \sum_{\alpha, l} g_l^\alpha \cdot \partial_{u_l^\alpha}$,
где $g_l^\alpha(\mathbf{u}) = f^\alpha(l, T_l \mathbf{u})$, $f^\alpha(k, \mathbf{u}) = g_k(T_{-k} \mathbf{u})$.

Доказательство проводится прямыми вычислениями.

1.6. Горизонтальные разностные операторы. Разностные операторы $\Delta_\mu = T_{e_\mu} - T_0$, $\mu \in \mathbb{D}$, действуют во всех пространствах, где определено действие группы сдвигов $\mathbb{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть $f \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; W)$ и ряд $\sum f = \sum_{k \in \mathbb{L}} f(k)$ абсолютно сходится. Тогда для всех $i \in \mathbb{L}$ ряд $\sum T_i f = \sum_{k \in \mathbb{L}} f(k+i)$ также абсолютно сходится, причем $\sum T_i f = \sum f$. В частности, в этом случае $\sum \Delta_\mu f = 0$ для всех $\mu \in \mathbb{D}$.*

Доказательство проводится стандартными рассуждениями.

Введем свободный $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуль

$$\mathfrak{D}(\mathbb{L}) = \left\{ \zeta = \sum_{\mu} \zeta^\mu \cdot \Delta_\mu \mid \zeta^\mu \in \mathcal{A}(\mathbb{L}) \right\} \subset \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}(\mathbb{L}))$$

с базисом $\{\Delta_1, \dots, \Delta_D\}$.

Дуальный $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модуль $\mathfrak{D}^*(\mathbb{L}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}(\mathbb{L})}(\mathfrak{D}(\mathbb{L}); \mathcal{A}(\mathbb{L}))$ имеет дуальный базис $\{d_H i^1, \dots, d_H i^D\}$, где $\langle d_H i^\mu, \Delta_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu$ для всех $\mu, \nu \in \mathbb{D}$, так что

$$\mathfrak{D}^*(\mathbb{L}) = \left\{ \varrho = \sum_{\mu} \varrho_\mu \cdot d_H i^\mu \mid \varrho_\mu \in \mathcal{A}(\mathbb{L}) \right\}.$$

Группа $\mathbb{L}$ действует на $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модулях $\mathfrak{D}(\mathbb{L})$ и $\mathfrak{D}^*(\mathbb{L})$ покомпонентно (естественное действие группы $\mathbb{L}$ на базисные разностные операторы Δ_μ тривиальное, $T_i(\Delta_\mu) = \Delta_\mu$):

$$T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}(\mathbb{L})), \quad i \mapsto T_i: \mathfrak{D}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathfrak{D}(\mathbb{L}), \quad \zeta \mapsto T_i \zeta, \\ T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}^*(\mathbb{L})), \quad i \mapsto T_i: \mathfrak{D}^*(\mathbb{L}) \rightarrow \mathfrak{D}^*(\mathbb{L}), \quad \varrho \mapsto T_i \varrho,$$

где

$$\begin{aligned}\zeta &= \sum_{\mu} \zeta^{\mu} \cdot \Delta_{\mu} & \mapsto & T_i \zeta = \sum_{\mu} (T_i \zeta^{\mu}) \cdot \Delta_{\mu}, \\ \varrho &= \sum_{\mu} \varrho_{\mu} \cdot d_H i^{\mu} & \mapsto & T_i \varrho = \sum_{\mu} (T_i \varrho_{\mu}) \cdot d_H i^{\mu}.\end{aligned}$$

2. БИКОМПЛЕКС

2.1. Вертикальный дифференциальный комплекс. Определена градуированная внешняя алгебра дифференциальных форм

$$\Omega(\mathbf{V}) = \Omega(\mathcal{A}(\mathbf{V})) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+} \Omega^p(\mathbf{V}),$$

где $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ -модули

$$\Omega^p(\mathbf{V}) = \Omega^p(\mathcal{A}(\mathbf{V})) = \text{Hom}_{\mathcal{A}(\mathbf{V})}(\wedge_{\mathcal{A}(\mathbf{V})}^p \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{V})); \mathcal{A}(\mathbf{V})) = \wedge_{\mathcal{A}(\mathbf{V})}^p \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{V})).$$

Пусть $\{b_{\alpha} \mid \alpha \in A\}$ – базис линейного пространства V , $p \in \mathbb{Z}_+$. Положим $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in A^p$, $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{L}^p$ и будем писать для такой пары мультииндексов $|\alpha, \mathbf{i}| = p$.

В таких обозначениях

$$\Omega^p(\mathbf{V}) = \left\{ \chi = \frac{1}{p!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p} \chi_{\alpha}^{\mathbf{i}} \cdot d_V u_{\mathbf{i}}^{\alpha} \mid \chi_{\alpha}^{\mathbf{i}} \in \mathcal{A}(\mathbf{V}) \right\},$$

где:

- 1) лишь конечное число компонент $\chi_{\alpha}^{\mathbf{i}} \neq 0$,
- 2) $\chi_{\sigma(\alpha)}^{\sigma(\mathbf{i})} = \text{sign}(\sigma) \chi_{\alpha}^{\mathbf{i}}$ для всех перестановок $\sigma \in \Sigma_p$,
- 3) $d_V u_{\mathbf{i}}^{\alpha} = d_V u_{i_1}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge d_V u_{i_p}^{\alpha_p}$.

По стандартным правилам дифференциальной геометрии определяются линейные отображения:

- 1) $\partial_{u_i^{\alpha}} : \Omega^p(\mathbf{V}) \rightarrow \Omega^p(\mathbf{V}), \quad \chi \mapsto \partial_{u_i^{\alpha}} \chi,$
- 2) $\iota_{\alpha}^i = \partial_{u_i^{\alpha}} \lrcorner : \Omega^p(\mathbf{V}) \rightarrow \Omega^{p-1}(\mathbf{V}), \quad \chi \mapsto \iota_{\alpha}^i \chi,$
- 3) $\varepsilon_i^{\alpha} = d_V u_i^{\alpha} \wedge : \Omega^p(\mathbf{V}) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathbf{V}), \quad \chi \mapsto \varepsilon_i^{\alpha} \chi,$

где

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{p!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p} \chi_{\alpha}^{\mathbf{i}} \cdot d_V u_{\mathbf{i}}^{\alpha} \in \Omega^p(\mathbf{V}), & \partial_{u_i^{\alpha}} \chi &= \frac{1}{p!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p} (\partial_{u_i^{\alpha}} \chi_{\alpha}^{\mathbf{i}}) \cdot d_V u_{\mathbf{i}}^{\alpha}, \\ \iota_{\alpha}^i \chi &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p-1} \chi_{\alpha \alpha}^{i \mathbf{i}} \cdot d_V u_{\mathbf{i}}^{\alpha}, & \varepsilon_i^{\alpha} \chi &= \frac{1}{p!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p} \chi_{\alpha}^{\mathbf{i}} \cdot d_V u_{i \mathbf{i}}^{\alpha \alpha},\end{aligned}$$

во второй строке слева $\alpha \alpha = (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$, $i \mathbf{i} = (i, i_1, \dots, i_{p-1})$, а справа $\alpha \alpha = (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $i \mathbf{i} = (i, i_1, \dots, i_p)$.

Вертикальный дифференциал действует по формуле

$$d_V = d_V^p = \sum_{\alpha, i} \varepsilon_i^{\alpha} \circ \partial_{u_i^{\alpha}} : \Omega^p(\mathbf{V}) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathbf{V}),$$

так что

$$\chi = \frac{1}{p!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p} \chi_{\alpha}^{\mathbf{i}} \cdot d_V u_{\mathbf{i}}^{\alpha} \quad \mapsto \quad d_V \chi = \frac{1}{(p+1)!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p+1} (d_V \chi)_{\alpha}^{\mathbf{i}} \cdot d_V u_{\mathbf{i}}^{\alpha},$$

$$(d_V \chi)_{\alpha}^{\mathbf{i}} = \sum_{0 \leq r \leq p} (-1)^r \partial_{u_{i_r}^{\alpha_r}} \chi_{\alpha}^{\mathbf{i}^r},$$

здесь $\alpha^r = (\alpha_0, \dots, \widetilde{\alpha_r}, \dots, \alpha_p)$, $\mathbf{i}^r = (i_0, \dots, \widetilde{i_r}, \dots, i_p)$, индекс под знаком “ $\sim$ ” пропускается. В частности, d_V – косое дифференцирование внешней алгебры $\Omega(\mathbf{V})$.

Заметим, что вертикальный дифференциал функции $f(\mathbf{u}) = u_i^{\alpha} \in \mathcal{A}(\mathbf{V}) = \Omega^0(\mathbf{V})$ есть $d_V u_i^{\alpha}$ в соответствии с введенными выше обозначениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Справедливы стандартные равенства:*

$$[d_V, \partial_{u_i^{\alpha}}] = 0, \quad (1)$$

$$d_V \circ \iota_{\alpha}^i + \iota_{\alpha}^i \circ d_V = \partial_{u_i^{\alpha}}, \quad (2)$$

$$d_V \circ \varepsilon_i^{\alpha} + \varepsilon_i^{\alpha} \circ d_V = 0, \quad (3)$$

$$d_V \circ d_V = 0 \quad (4)$$

для всех $\alpha \in \mathbf{A}$, $i \in \mathbb{L}$.

Доказательство проводится прямыми вычислениями.

В силу (4) определен вертикальный комплекс $\{\Omega(\mathbf{V}); d_V\}$ – комплекс де Рама бесконечномерного пространства $\mathbf{V} \simeq \mathbb{R}_{\mathbb{L}}^{\mathbf{A}}$.

ТЕОРЕМА 1. *Полненный комплекс де Рама пространства $\mathbf{V}$*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0(\mathbf{V}) \xrightarrow{d_V} \Omega^1(\mathbf{V}) \xrightarrow{d_V} \Omega^2(\mathbf{V}) \xrightarrow{d_V} \Omega^3(\mathbf{V}) \xrightarrow{d_V} \dots$$

точный, т.е. все его пространства когомологий тривиальные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в данном случае справедлива гомотопическая формула Пуанкаре (см., например, [5]; то, что пространство $\mathbf{V}$ бесконечномерно, несущественно, поскольку каждая компонента $\chi_{\alpha}^{\mathbf{i}}$ зависит лишь от конечного числа переменных u_i^{α} и число ненулевых компонент тоже конечно):

$$d_V \circ h_V + h_V \circ d_V = \text{id} - \varrho_V,$$

где гомотопический оператор $h_V = h_V^p : \Omega^p(\mathbf{V}) \rightarrow \Omega^{p-1}(\mathbf{V})$ действует по правилу

$$h_V^0 = 0,$$

$$\chi = \frac{1}{p!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p} \chi_{\alpha}^{\mathbf{i}} \cdot d_V u_{\mathbf{i}}^{\alpha} \mapsto h_V^p \chi = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p-1} (h_V^p \chi)_{\alpha}^{\mathbf{i}} \cdot d_V u_{\mathbf{i}}^{\alpha},$$

$$(h_V^p \chi)_{\alpha}^{\mathbf{i}}(\mathbf{u}) = \int_0^1 t^{p-1} \sum_{\alpha, \mathbf{i}} u_i^{\alpha} \chi_{\alpha}^{\mathbf{i}}(t\mathbf{u}) dt, \quad p \in \mathbb{N},$$

а линейное отображение $\varrho_V = \varrho_V^p : \Omega^p(\mathbf{V}) \rightarrow \Omega^p(\mathbf{V})$ действует по правилу

$$f \mapsto \varrho_V^0 f, \quad (\varrho_V^0 f)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{0}), \quad p = 0,$$

$$\varrho_V^p = 0, \quad p \in \mathbb{N}.$$

2.2. Горизонтальный разностный комплекс. Определена градуированная внешняя алгебра разностных форм

$$\Omega(\mathbb{L}) = \Omega(\mathcal{A}(\mathbb{L})) = \bigoplus_{0 \leq q \leq D} \Omega^q(\mathbb{L}),$$

где $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модули

$$\Omega^q(\mathbb{L}) = \Omega^q(\mathcal{A}(\mathbb{L})) = \text{Hom}_{\mathcal{A}(\mathbb{L})}(\wedge_{\mathcal{A}(\mathbb{L})}^q \mathfrak{D}(\mathbb{L}); \mathcal{A}(\mathbb{L})) = \wedge_{\mathcal{A}(\mathbb{L})}^q \mathfrak{D}^*(\mathbb{L}).$$

Положим $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{D}^q$ и будем в этом случае писать $|\boldsymbol{\mu}| = q$. В таких обозначениях

$$\Omega^q(\mathbb{L}) = \left\{ \varrho = \frac{1}{q!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q} \varrho_{\boldsymbol{\mu}} \cdot d_H i^{\boldsymbol{\mu}} \mid \varrho_{\boldsymbol{\mu}} \in \mathcal{A}(\mathbb{L}) \right\},$$

где:

- 1) $\varrho_{\sigma(\boldsymbol{\mu})} = \text{sign}(\sigma) \varrho_{\boldsymbol{\mu}}$ для всех перестановок $\sigma \in \Sigma_q$,
- 2) $d_H i^{\boldsymbol{\mu}} = d_H i^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d_H i^{\mu_q}$.

По аналогии с вертикальным комплексом для всех $i \in \mathbb{L}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{D}$ определены следующие линейные отображения:

- 1) $T_i: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^q(\mathbb{L}), \quad \varrho \mapsto T_i \varrho,$
- 2) $\Delta_{\boldsymbol{\mu}}: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^q(\mathbb{L}), \quad \varrho \mapsto \Delta_{\boldsymbol{\mu}} \varrho,$
- 3) $\iota_{\boldsymbol{\mu}}: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^{q-1}(\mathbb{L}), \quad \varrho \mapsto \iota_{\boldsymbol{\mu}} \varrho = \Delta_{\boldsymbol{\mu}} \lrcorner \varrho,$
- 4) $\varepsilon^{\boldsymbol{\mu}}: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{L}), \quad \varrho \mapsto d_H i^{\boldsymbol{\mu}} \wedge \varrho,$

где

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{q!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q} \varrho_{\boldsymbol{\mu}} \cdot d_H i^{\boldsymbol{\mu}}, \\ T_i \varrho &= \frac{1}{q!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q} (T_i \varrho_{\boldsymbol{\mu}}) \cdot d_H i^{\boldsymbol{\mu}}, & \Delta_{\boldsymbol{\mu}} \varrho &= \frac{1}{q!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q} (\Delta_{\boldsymbol{\mu}} \varrho_{\boldsymbol{\mu}}) \cdot d_H i^{\boldsymbol{\mu}}, \\ \iota_{\boldsymbol{\mu}} \varrho &= \frac{1}{(q-1)!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q-1} \varrho_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}} \cdot d_H i^{\boldsymbol{\mu}}, & \varepsilon^{\boldsymbol{\mu}} \varrho &= \frac{1}{q!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q} \varrho_{\boldsymbol{\mu}} \cdot d_H i^{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}}, \end{aligned}$$

здесь слева $\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu} = (\mu, \mu_1, \dots, \mu_{q-1})$, а справа $\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu} = (\mu, \mu_1, \dots, \mu_q)$.

Заметим, что отображения $\iota_{\boldsymbol{\mu}}$ суть косые дифференцирования внешней алгебры $\Omega(\mathbb{L})$.

Горизонтальный дифференциал действует по формуле

$$d_H = d_H^q = \sum_{\boldsymbol{\mu}} \varepsilon^{\boldsymbol{\mu}} \circ \Delta_{\boldsymbol{\mu}}: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{L}),$$

так что

$$\begin{aligned} \varrho = \frac{1}{q!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q} \varrho_{\boldsymbol{\mu}} \cdot d_H i^{\boldsymbol{\mu}} &\mapsto d_H \varrho = \frac{1}{(q+1)!} \sum_{|\boldsymbol{\mu}|=q+1} (d_H \varrho)_{\boldsymbol{\mu}} \cdot d_H i^{\boldsymbol{\mu}}, \\ (d_H \varrho)_{\boldsymbol{\mu}} &= \sum_{0 \leq r \leq q} (-1)^r \Delta_{\boldsymbol{\mu}_r} \varrho_{\boldsymbol{\mu}^r}, \end{aligned}$$

здесь $\mu^r = (\mu_0, \dots, \widetilde{\mu_r}, \dots, \mu_q)$, индекс под знаком “ $\sim$ ” пропускается.

Заметим, что горизонтальный дифференциал функции $f(i) = i^\mu \in \mathcal{A}(\mathbb{L}) = \Omega^0(\mathbb{L})$ есть $d_H i^\mu$ в соответствии с введенными выше обозначениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Справедливы следующие равенства:*

$$[d_H, T_i] = [d_H, \Delta_\mu] = 0, \quad (5)$$

$$d_H \circ \iota_\mu + \iota_\mu \circ d_H = \Delta_\mu, \quad (6)$$

$$d_H \circ \varepsilon^\mu + \varepsilon^\mu \circ d_H = 0, \quad (7)$$

$$d_H \circ d_H = 0 \quad (8)$$

для всех $i \in \mathbb{L}$, $\mu \in \mathbb{D}$.

Доказательство проводится прямыми вычислениями.

Равенство (6) имеет следующее обобщение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Для каждой пары $i \in \mathbb{L}$, $q \in \mathbb{Z}_+$ существует линейное отображение $I_i = I_i^q: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^{q-1}(\mathbb{L})$ такое, что*

$$d_H \circ I_i + I_i \circ d_H = T_i - \text{id}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соединим точку $0 \in \mathbb{L}$ с точкой $i = \sum_{\mu \in \mathbb{D}} i^\mu e_\mu$ стандартной целочисленной ломаной с вершинами

$$i_0 = 0, \quad i_\nu = i_{\nu-1} + i^\nu e_\nu, \quad \nu \in \mathbb{D}, \quad (10)$$

и зададим линейные отображения $S_i^\nu = (S_i^\nu)^q: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^q(\mathbb{L})$, $\nu \in \mathbb{D}$, правилом

$$S_i^\nu = \begin{cases} \sum_{0 \leq r < i^\nu} T_{i_{\nu-1} + r e_\nu}, & i^\nu > 0, \\ 0, & i^\nu = 0, \\ - \sum_{i^\nu \leq r < 0} T_{i_{\nu-1} + r e_\nu}, & i^\nu < 0. \end{cases}$$

Очевидно, $[\Delta_\mu, S_i^\nu] = 0$ для всех $\mu, \nu \in \mathbb{D}$, и легко проверяется, что $S_i^\nu \circ \Delta_\nu = T_{i_\nu} - T_{i_{\nu-1}}$ для всех $\nu \in \mathbb{D}$. Более того, в силу равенств (5) и (6) линейное отображение $I_i = \sum_{\nu \in \mathbb{D}} S_i^\nu \circ \iota_\nu$ удовлетворяет требуемому соотношению (9). ■

В силу (8) определен горизонтальный комплекс $\{\Omega(\mathbb{L}); d_H\}$ – разностный комплекс решетки $\mathbb{L}$.

ТЕОРЕМА 2. *Полноценный разностный комплекс решетки $\mathbb{L}$*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0(\mathbb{L}) \xrightarrow{d_H} \Omega^1(\mathbb{L}) \xrightarrow{d_H} \dots \xrightarrow{d_H} \Omega^D(\mathbb{L}) \longrightarrow 0$$

точный, т. е. все его пространства когомологий тривиальные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема доказана в работе [6], однако ради полноты изложения приведем доказательство здесь. Зададим линейные отображения $S^\nu: \mathcal{A}(\mathbb{L}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{L})$, $f \mapsto S^\nu f$, правилом $(S^\nu f)(i) = (S_i^\nu f)(0)$ (см. доказательство предложения 8), $\nu \in \mathbb{D}$. Легко проверяется, что

$$(\Delta_\mu S^\nu f)(i) = \begin{cases} (S^\nu \Delta_\mu f)(i), & \mu < \nu, \\ f(i_\mu), & \mu = \nu, \\ 0, & \mu > \nu, \end{cases}$$

для всех $\mu, \nu \in \mathbb{D}$ и

$$(S^\mu \Delta_\mu f)(i) = f|_{i_{\mu-1}}^{i_\mu} = f(i_\mu) - f(i_{\mu-1})$$

для всех $\mu \in \mathbb{D}$.

Определим гомотопический оператор $h_H = h_H^q: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^{q-1}(\mathbb{L})$ правилом

$$h_H^0 = 0, \\ \varrho = \frac{1}{q!} \sum_{|\mu|=q} \varrho_\mu \otimes d_H i^\mu \mapsto h_H^q \varrho = \frac{1}{(q-1)!} \sum_{|\mu|=q-1} (h_H^q \varrho)_\mu \otimes d_H i^\mu,$$

где

$$(h_H^q \varrho)_\mu(i) = \sum_{\nu > \mu} (S^\nu \varrho_\nu)_\mu(i), \quad i \in \mathbb{L}, \quad 1 \leq q \leq D,$$

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{q-1})$, $\nu \mu = (\nu, \mu_1, \dots, \mu_{q-1})$, запись $\nu > \mu$ означает, что $\nu > \mu_r$ для всех $1 \leq r \leq q-1$.

Линейное отображение $R_H = R_H^q: \Omega^q(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega^q(\mathbb{L})$ определим правилом

$$(R_H^0 f)(i) = f(0) \quad \text{для всех } f \in \mathcal{A}(\mathbb{L}) = \Omega^0(\mathbb{L}), \quad i, 0 \in \mathbb{L}, \\ R_H^q = 0, \quad 1 \leq q \leq D.$$

Справедлива гомотопическая формула

$$d_H \circ h_H + h_H \circ d_H = \text{id} - R_H.$$

Действительно, пусть

$$\varrho = \frac{1}{q!} \sum_{|\mu|=q} \varrho_\mu \otimes d_H i^\mu \in \Omega^q(\mathbb{L}), \quad \varrho_\mu \in \mathcal{A}(\mathbb{L}), \quad 1 \leq q \leq D.$$

Тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} (d_H h_H \varrho)_\mu(i) &= \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^{r-1} \Delta_{\mu_r} (h_H \varrho)_{\mu^r}(i) = \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^{r-1} \Delta_{\mu_r} \sum_{\nu > \mu^r} (S^\nu \varrho_\nu)_{\mu^r}(i) = \\ &= (-1)^{r_{\max}-1} \Delta_{\mu_{\max}} \sum_{\nu \geq \mu_{\max}} (S^\nu \varrho_\nu)_{\mu^r_{\max}}(i) + \sum_{r \neq r_{\max}} (-1)^{r-1} \Delta_{\mu_r} \sum_{\nu > \mu_{\max}} (S^\nu \varrho_\nu)_{\mu^r}(i) = \\ &= \varrho_\mu(i_{\mu_{\max}}) + \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^{r-1} \sum_{\nu > \mu_{\max}} (S^\nu \Delta_{\mu_r} \varrho_\nu)_{\mu^r}(i), \end{aligned}$$

где $\mu_{\max} = \mu_{r_{\max}} > \mu_r$ для всех $1 \leq r \leq q$, $r \neq r_{\max}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} (h_H d_H \varrho)_\mu(i) &= \sum_{\nu > \mu} (S^\nu(d_H \varrho)_{\nu\mu})(i) = \\ &= \sum_{\nu > \mu_{\max}} S^\nu \left(\Delta_\nu \varrho_\mu + \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^r \Delta_{\mu_r} \varrho_{\nu\mu^r} \right)(i) = \\ &= \varrho_\mu \Big|_{i_{\mu_{\max}}}^i + \sum_{\nu > \mu_{\max}} \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^r (S^\nu \Delta_{\mu_r} \varrho_{\nu\mu^r})(i). \end{aligned}$$

Складывая полученные представления, убеждаемся в справедливости гомотопической формулы для $1 \leq q \leq D$. Случай $q = 0$ проверяется элементарно. ■

2.3. Дифференциально-разностный бикомплекс. Определена биградуированная внешняя алгебра дифференциально-разностных форм

$$\Omega(\mathbf{J}) = \Omega(\mathcal{A}(\mathbf{J})) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq q \leq D} \Omega^{pq}(\mathbf{J}), \quad \Omega^{pq}(\mathbf{J}) = \Omega^p(\mathbf{V}) \wedge_{\mathbb{R}} \Omega^q(\mathbb{L}),$$

где $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ -модули $\Omega^{pq}(\mathbf{J})$ имеют представления

$$\begin{aligned} \Omega^{pq}(\mathbf{J}) &= \left\{ \omega = \frac{1}{q!} \sum_{|\mu|=q} \chi_\mu \wedge d_H i^\mu \mid \chi_\mu \in \mathcal{A}(\mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^p(\mathbf{V}) \right\} = \\ &= \left\{ \omega = \frac{1}{p!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p} d_V u_{\mathbf{i}}^\alpha \wedge \varrho_\alpha^{\mathbf{i}} \mid \varrho_\alpha^{\mathbf{i}} \in \mathcal{A}(\mathbf{V}) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^q(\mathbb{L}) \right\} = \\ &= \left\{ \omega = \frac{1}{p!q!} \sum_{|\alpha, \mathbf{i}|=p} \sum_{|\mu|=q} \omega_{\mathbf{i}, \mu}^\alpha \cdot d_V u_{\mathbf{i}}^\alpha \wedge d_H i^\mu \mid \omega_{\mathbf{i}, \mu}^\alpha \in \mathcal{A}(\mathbf{J}) \right\}. \end{aligned}$$

Все вертикальные операции, определенные выше на алгебре вертикальных форм $\Omega(\mathbf{V})$, переносятся на алгебру $\Omega(\mathbf{J})$ тривиальным образом:

$$L(\chi \wedge \varrho) = (L\chi) \wedge \varrho, \quad L = \partial_{u_i^\alpha}, \iota_\alpha^i, \varepsilon_i^\alpha, d_V,$$

для всех $\chi \in \Omega(\mathbf{V})$, $\varrho \in \Omega(\mathbb{L})$. В свою очередь, сдвиги T_i , $i \in \mathbb{L}$, определяются как морфизмы алгебры $\Omega(\mathbf{J})$:

$$T_i(\omega_1 \wedge \omega_2) = (T_i \omega_1) \wedge (T_i \omega_2) \quad \text{для всех} \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega(\mathbf{J}),$$

причем

$$T_i(f) = f \circ T_i, \quad T_i(d_V u_j^\alpha) = d_V u_{j+i}^\alpha, \quad T_i(d_H i^\mu) = d_H i^\mu$$

для всех $i, j \in \mathbb{L}$, $f \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$, $\alpha \in \mathbf{A}$, $\mu \in \mathbb{D}$. Эти правила полностью определяют действие на алгебре $\Omega(\mathbf{J})$ горизонтальных операций Δ_μ , ι_μ , ε^μ и d_H . Например, $d_H u_i^\alpha = \sum_\mu \Delta_\mu u_i^\alpha \cdot d_H i^\mu$, $\Delta_\mu u_i^\alpha = u_{i+e_\mu}^\alpha - u_i^\alpha$.

По-прежнему справедливы равенства $d_V \circ d_V = 0$, $d_H \circ d_H = 0$, и, кроме того, выполняется связующее равенство $d_V \circ d_H + d_H \circ d_V = 0$, так что определен бикомплекс $\{\Omega(\mathbf{J}); d_V, d_H\}$ – дифференциально-разностный бикомплекс пространства разностных джетов $\mathbf{J}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& \uparrow d_V & & \uparrow d_V & & \uparrow d_V & & \uparrow d_V \\
0 & \longrightarrow & \Omega_T^{20}(\mathbf{J}) & \longrightarrow & \Omega^{20}(\mathbf{J}) & \xrightarrow{d_H} & \Omega^{21}(\mathbf{J}) & \xrightarrow{d_H} \dots \xrightarrow{d_H} \Omega^{2D}(\mathbf{J}) \longrightarrow 0 \\
& \uparrow d_V & & \uparrow d_V & & \uparrow d_V & & \uparrow d_V \\
0 & \longrightarrow & \Omega_T^{10}(\mathbf{J}) & \longrightarrow & \Omega^{10}(\mathbf{J}) & \xrightarrow{d_H} & \Omega^{11}(\mathbf{J}) & \xrightarrow{d_H} \dots \xrightarrow{d_H} \Omega^{1D}(\mathbf{J}) \longrightarrow 0 \\
& \uparrow d_V & & \uparrow d_V & & \uparrow d_V & & \uparrow d_V \\
0 & \longrightarrow & \Omega_T^{00}(\mathbf{J}) & \longrightarrow & \Omega^{00}(\mathbf{J}) & \xrightarrow{d_H} & \Omega^{01}(\mathbf{J}) & \xrightarrow{d_H} \dots \xrightarrow{d_H} \Omega^{0D}(\mathbf{J}) \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0(\mathbb{L}) & \xrightarrow{d_H} & \Omega^1(\mathbb{L}) & \xrightarrow{d_H} \dots \xrightarrow{d_H} \Omega^D(\mathbb{L}) \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Рис. 1. Пополненный бикомплекс на пространстве $\mathbf{J}$.

Нам еще понадобится подалгебра *инвариантных форм* (внешняя алгебра дифференциально-разностных форм, инвариантных относительно сдвигов)

$$\Omega_T(\mathbf{J}) = \{\omega \in \Omega(\mathbf{J}) \mid T_i \omega = \omega \text{ для всех } i \in \mathbb{L}\}.$$

Алгебра $\Omega_T^{00}(\mathbf{J})$, т. е. инвариантные функции на пространстве $\mathbf{J}$, описана выше (см. предложение 3), полное описание инвариантных форм будет дано ниже (см. предложение 10).

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *вертикальные дифференциалы имеют сужения*

$$d_V = d_V^{pq} : \Omega_T^{pq}(\mathbf{J}) \rightarrow \Omega_T^{p+1,q}(\mathbf{J}), \quad p \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq q \leq D;$$

2) *определен пополненный бикомплекс пространства разностных джетов, изображенный на рис. 1;*

3) *пополненный бикомплекс пространства разностных джетов ациклический, т. е. все его строки и столбцы точные.*

Отдельные утверждения этой теоремы можно доказать непосредственно в данной постановке, однако полное доказательство естественно проводить в специальной системе координат. Эта система координат введена в п. 2.4, там же дано и доказательство данной теоремы (см. следствие 2). Заметим, что в случае стандартного вариационного бикомплекса евклидова пространства $\mathbb{R}^D$ такая система координат отсутствует, чем и объясняется различие свойств бикомплекса для решетки и для евклидова пространства.

2.4. Факторизующее представление. Пусть $\tilde{\mathbf{V}}$ – копия пространства $\mathbf{V}$ с координатами $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_l^\alpha)$, а $\tilde{\mathbf{J}}$ – копия пространства $\mathbf{J}$ с координатами $(k, \tilde{\mathbf{u}})$. Введем замену переменных

$$\varkappa: \tilde{\mathbf{J}} \simeq \mathbf{J}, \quad (k, \tilde{\mathbf{u}}) \mapsto \varkappa(k, \tilde{\mathbf{u}}) = (k, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = T_k \tilde{\mathbf{u}}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = T_{-k} \mathbf{u},$$

или подробнее $u_l^\alpha = \tilde{u}_{l+k}^\alpha$, $\tilde{u}^\alpha = u_{l-k}^\alpha$ для всех $\alpha \in A$, $k, l \in \mathbb{L}$.

При такой замене

$$T_i: \mathbf{J} \simeq \mathbf{J} \mapsto \tilde{T}_i: \tilde{\mathbf{J}} \simeq \tilde{\mathbf{J}}, \quad \tilde{T}_i = \varkappa^{-1} \circ T_i \circ \varkappa,$$

или подробнее $(k, \tilde{\mathbf{u}}) \mapsto \tilde{T}_i(k, \tilde{\mathbf{u}}) = (T_i k, \tilde{\mathbf{u}})$ для всех $(k, \tilde{\mathbf{u}}) \in \tilde{\mathbf{J}}$, $i \in \mathbb{L}$. Таким образом, в новой системе координат полные сдвиги действуют лишь на целочисленные переменные $k \in \mathbb{L}$.

Для расслоений соответственно имеем

$$\pi: \mathbf{J} \rightarrow \mathbb{L} \mapsto \tilde{\pi}: \tilde{\mathbf{J}} \rightarrow \mathbb{L}, \quad \tilde{\pi} = \pi \circ \varkappa, \quad (k, \tilde{\mathbf{u}}) \mapsto k,$$

а для сечений имеем изоморфизм

$$\varkappa_*: \mathcal{M}(\mathbb{L}; \tilde{\mathbf{J}}) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{J}), \quad \tilde{\phi} \mapsto \phi = \varkappa_* \tilde{\phi},$$

так что $\phi(k) = T_k \tilde{\phi}(k)$, подробнее $\varphi_l^\alpha(k) = \tilde{\varphi}_{l+k}^\alpha(k)$ для всех $\tilde{\phi} \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; \tilde{\mathbf{J}})$, $k, l \in \mathbb{L}$, $\alpha \in A$.

Действие $T: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V}))$ индуцирует соответствующее действие $\tilde{T}: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{M}(\mathbb{L}; \tilde{\mathbf{V}}))$:

$$\tilde{\phi} \mapsto \tilde{T}_i \tilde{\phi} = \varkappa^{-1} \circ T_i \circ \varkappa_* \tilde{\phi}, \quad (\tilde{T}_i \tilde{\phi})_l^\alpha(k) = \tilde{\varphi}_l^\alpha(k + i),$$

для всех $\tilde{\phi} = (\tilde{\varphi}_l^\alpha(k))$, $i, k, l \in \mathbb{L}$, $\alpha \in A$. Образно говоря, здесь сдвиги действуют послойно.

Отображение джетов $\mathbf{j}: \mathcal{M}(\mathbb{L}; V) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{L}; \mathbf{V})$ индуцирует соответствующее отображение

$$\tilde{\mathbf{j}}: \mathcal{M}(\mathbb{L}; V) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{L}; \tilde{\mathbf{V}}), \quad \tilde{\mathbf{j}} = \varkappa^{-1} \circ \mathbf{j},$$

т. е. $(\tilde{\mathbf{j}}\varphi)(k) = \varkappa^{-1}(\mathbf{j}\varphi(k))$, подробнее $(\tilde{\mathbf{j}}\varphi)_l(k) = (\mathbf{j}\varphi)_{l-k}(k) = \varphi(l)$, или коротко

$$(\tilde{\mathbf{j}}\varphi)(k) = (\mathbf{j}\varphi)(0) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V), \quad k \in \mathbb{L}.$$

Таким образом, в новых координатах предложение 1 принимает следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $\tilde{T}_i \circ \tilde{\mathbf{j}} = \tilde{\mathbf{j}}$ для всех $i \in \mathbb{L}$.
2. Сечение $\tilde{\phi} = (\tilde{\varphi}_l^\alpha(k)) \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; \tilde{\mathbf{V}})$ есть джет некоторого сечения $\varphi = (\varphi^\alpha(k)) \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$, т. е. $\tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{j}}\varphi$, тогда и только тогда, когда $\tilde{T}_i \tilde{\phi} = \tilde{\phi}$ для всех $i \in \mathbb{L}$, т. е. когда $\tilde{\varphi}_l^\alpha(k) = \tilde{\varphi}_l^\alpha$ (не зависит от k), и в этом случае $\varphi^\alpha(k) = \tilde{\varphi}_k^\alpha$.
3. Для каждой точки $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathbf{V}}$ существует одно и только одно сечение $\varphi = (\varphi^\alpha(k)) \in \mathcal{M}(\mathbb{L}; V)$ такое, что $\tilde{\mathbf{j}}\varphi = \tilde{\mathbf{u}}$, именно $\varphi^\alpha(k) = \tilde{u}_k^\alpha$.

По существу, из предложения 9 следует, что координаты $(k, \tilde{\mathbf{u}})$ являются *расслаивающимися* для пространства разностных джетов.

Пусть $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}})$ и $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$ – алгебры функций на пространствах $\tilde{\mathbf{V}}$ и $\tilde{\mathbf{J}}$, соответствующие алгебрам $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{J})$. Фактически алгебра $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}})$ совпадает с алгеброй $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ (отождествление $\tilde{u}_l^\alpha = u_l^\alpha$), тогда как замена переменных $\varkappa: \tilde{\mathbf{J}} \simeq \mathbf{J}$ индуцирует изоморфизм

$$\varkappa^*: \mathcal{A}(\mathbf{J}) \simeq \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}), \quad f \mapsto \tilde{f} = \varkappa^* f = f \circ \varkappa, \quad \tilde{f}(k, \tilde{\mathbf{u}}) = f(k, T_k \tilde{\mathbf{u}}).$$

Группа $\mathbb{L}$ действует на алгебре $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$ по правилу

$$\tilde{T}: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})), \quad i \mapsto \tilde{T}_i = \varkappa^* \circ T_i \circ (\varkappa^*)^{-1}: \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}) \rightarrow \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}),$$

так что $(\tilde{T}_i \tilde{f})(k, \tilde{\mathbf{u}}) = \tilde{f}(k + i, \tilde{\mathbf{u}})$ для всех $i, k \in \mathbb{L}$, $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathbf{J}}$ и $\tilde{f} \in \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$.

Правило полного сдвига (предложение 2) справедливо с очевидными изменениями, алгебра $\mathcal{A}_{\tilde{T}}(\tilde{\mathbf{J}})$ всех функций из $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$, инвариантных относительно сдвигов, имеет представление $\mathcal{A}_{\tilde{T}}(\tilde{\mathbf{J}}) = \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}}) \subset \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$ (см. предложение 3).

$\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}})$ -модуль $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}}))$ имеет базис $\{\partial_{\tilde{u}_l^\alpha} \mid \alpha \in A, l \in \mathbb{L}\}$, так что

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}})) = \left\{ \tilde{X} = \sum_{\alpha, l} \tilde{X}_l^\alpha \cdot \partial_{\tilde{u}_l^\alpha} \mid \tilde{X}_l^\alpha \in \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}}) \right\}.$$

Дуальный модуль имеет дуальный базис $\{d_V \tilde{u}_l^\alpha \mid \alpha \in A, l \in \mathbb{L}\}$, так что

$$\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}})) = \left\{ \tilde{\omega} = \sum_{\alpha, l} \tilde{\omega}_\alpha^l \cdot d_V \tilde{u}_l^\alpha \mid \tilde{\omega}_\alpha^l \in \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}}) \right\},$$

где лишь конечное число компонент $\tilde{\omega}_\alpha^l \neq 0$.

Аналогичные представления имеют $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$ -модуль $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}))$ всех дифференцируемый алгебры $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$ и дуальный $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$ -модуль $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}))$, где компоненты $\tilde{X}_l^\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^l \in \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$.

Фактически алгебра Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}}))$ совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{V}))$, а $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}})$ -модуль $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}}))$ совпадает с $\mathcal{A}(\mathbf{V})$ -модулем $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{V}))$ (отождествление $\tilde{u}_l^\alpha = u_l^\alpha$, $\partial_{\tilde{u}_l^\alpha} = \partial_{u_l^\alpha}$, $d_V \tilde{u}_l^\alpha = d_V u_l^\alpha$), тогда как замена переменных $\varkappa: \tilde{\mathbf{J}} \simeq \mathbf{J}$ индуцирует изоморфизмы

$$\varkappa_*: \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})) \simeq \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J})), \quad \varkappa^*: \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J})) \simeq \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}))$$

согласно правилам

$$\tilde{X} \mapsto X = \varkappa_* \tilde{X} = (\varkappa^*)^{-1} \circ \tilde{X} \circ \varkappa^*, \quad \omega \mapsto \tilde{\omega} = \varkappa^* \omega = \varkappa^* \circ \omega \circ \varkappa_*.$$

В частности,

- 1) $\partial_{\tilde{u}_l^\alpha} \mapsto \partial_\alpha^l = \partial_{u_{l-k}^\alpha}$, $\partial_{u_l^\alpha} \mapsto \tilde{\partial}_\alpha^l = \partial_{\tilde{u}_{l+k}^\alpha}$;
- 2) $\tilde{X} = \sum_{\alpha, l} \tilde{X}_l^\alpha \cdot \partial_{\tilde{u}_l^\alpha} \mapsto X = \sum_{\alpha, l} X_l^\alpha \cdot \partial_{u_l^\alpha}$, $X_l^\alpha(k, \mathbf{u}) = \tilde{X}_{l+k}^\alpha(k, T_{-k} \mathbf{u})$;
- 3) $d_V u_l^\alpha \mapsto \tilde{\vartheta}_l^\alpha = d_V \tilde{u}_{l+k}^\alpha$, $d_V \tilde{u}_l^\alpha \mapsto \vartheta_l^\alpha = d_V u_{l-k}^\alpha$;

$$4) \omega = \sum_{\alpha, l} \tilde{\omega}_\alpha^l \cdot d_V u_l^\alpha \mapsto \tilde{\omega} = \sum_{\alpha, l} \tilde{\omega}_\alpha^l \cdot d_V \tilde{u}_l^\alpha, \quad \tilde{\omega}_\alpha^l(k, \tilde{\mathbf{u}}) = \omega_\alpha^{l-k}(k, T_k \tilde{\mathbf{u}});$$

$$5) \langle \tilde{\omega}, \tilde{X} \rangle = \varkappa^* \langle \omega, X \rangle \text{ для всех } \omega \in \mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J})), X \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J})).$$

Поясним, что, например, $(\partial_\alpha^l f)(k, \mathbf{u}) = \partial_{u_{l-k}^\alpha} f(k, \mathbf{u})$, $f \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$.

Группа $\mathbb{L}$ действует на $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$ -модулях $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}))$ и $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}))$:

$$\tilde{T}: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}))), \quad i \mapsto \tilde{T}_i, \quad \tilde{T}: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}))), \quad i \mapsto \tilde{T}_i,$$

согласно правилам

$$\tilde{X} \mapsto \tilde{T}_i \tilde{X} = \tilde{T}_i \circ \tilde{X} \circ \tilde{T}_{-i}, \quad \tilde{\omega} \mapsto \tilde{T}_i \tilde{\omega} = \tilde{T}_i \circ \tilde{\omega} \circ \tilde{T}_{-i},$$

или подробнее

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \sum_{\alpha, l} \tilde{X}_l^\alpha \cdot \partial_{\tilde{u}_l^\alpha} \mapsto \tilde{T}_i \tilde{X} = \sum_{\alpha, l} \tilde{T}_i \tilde{X}_l^\alpha \cdot \partial_{\tilde{u}_l^\alpha}, & \tilde{T}_i \tilde{X}_l^\alpha(k, \tilde{\mathbf{u}}) &= \tilde{X}_l^\alpha(k+i, \tilde{\mathbf{u}}), \\ \tilde{\omega} &= \sum_{\alpha, l} \tilde{\omega}_\alpha^l \cdot d_V \tilde{u}_l^\alpha \mapsto \tilde{T}_i \tilde{\omega} = \sum_{\alpha, l} \tilde{T}_i \tilde{\omega}_\alpha^l \cdot d_V \tilde{u}_l^\alpha, & \tilde{T}_i \tilde{\omega}_\alpha^l(k, \tilde{\mathbf{u}}) &= \tilde{\omega}_\alpha^l(k+i, \tilde{\mathbf{u}}). \end{aligned}$$

В частности, справедливы следующие утверждения:

1) базис $\{\partial_{\tilde{u}_l^\alpha}^l \mid \alpha \in \mathbf{A}, l \in \mathbb{L}\}$ в $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$ -модуле $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}))$ инвариантен относительно сдвигов, т.е. $\tilde{T}_i \partial_{\tilde{u}_l^\alpha}^l = \partial_{\tilde{u}_l^\alpha}^l$ для всех $\alpha \in \mathbf{A}, l \in \mathbb{L}$;

2) множество $\{\partial_\alpha^l \mid \alpha \in \mathbf{A}, l \in \mathbb{L}\}$ есть базис в $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ -модуле $\mathfrak{D}(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$, инвариантный относительно сдвигов, т.е. $T_i \partial_\alpha^l = \partial_\alpha^l$ для всех $\alpha \in \mathbf{A}, l \in \mathbb{L}$;

3) базис $\{d_V \tilde{u}_l^\alpha \mid \alpha \in \mathbf{A}, l \in \mathbb{L}\}$ в $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$ -модуле $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}}))$ инвариантен относительно сдвигов, т.е. $\tilde{T}_i d_V \tilde{u}_l^\alpha = d_V \tilde{u}_l^\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbf{A}, l \in \mathbb{L}$;

4) множество $\{\vartheta_l^\alpha \mid \alpha \in \mathbf{A}, l \in \mathbb{L}\}$ есть базис в $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ -модуле $\mathfrak{D}^*(\mathcal{A}(\mathbf{J}))$, инвариантный относительно сдвигов, т.е. $T_i \vartheta_l^\alpha = \vartheta_l^\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbf{A}, l \in \mathbb{L}$;

5) алгебра Ли дифференцирований, инвариантных относительно сдвигов (см. предложение 4), алгебры $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$ имеет представление

$$\mathfrak{D}_T(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})) = \left\{ \tilde{X} = \sum_{\alpha, l} \tilde{f}_l^\alpha \cdot \partial_{\tilde{u}_l^\alpha} \mid \tilde{f}_l^\alpha \in \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}}) \right\} = \mathfrak{D}(\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}})).$$

Определена внешняя алгебра $\Omega(\tilde{\mathbf{V}})$, совпадающая с алгеброй $\Omega(\mathbf{V})$, причем однозначно определен вертикальный дифференциал $\tilde{d}_V: \Omega(\tilde{\mathbf{V}}) \rightarrow \Omega(\tilde{\mathbf{V}})$, совпадающий с вертикальным дифференциалом $d_V: \Omega(\mathbf{V}) \rightarrow \Omega(\mathbf{V})$, так что комплекс $\{\Omega(\tilde{\mathbf{V}}); \tilde{d}_V\}$ совпадает с комплексом $\{\Omega(\mathbf{V}); d_V\}$, и в силу теоремы 1 пополненный комплекс

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0(\tilde{\mathbf{V}}) \xrightarrow{\tilde{d}_V} \Omega^1(\tilde{\mathbf{V}}) \xrightarrow{\tilde{d}_V} \Omega^2(\tilde{\mathbf{V}}) \xrightarrow{\tilde{d}_V} \Omega^3(\tilde{\mathbf{V}}) \xrightarrow{\tilde{d}_V} \dots$$

точный, т.е. все его пространства когомологий тривиальные.

Разностные операторы $\tilde{\Delta}_\mu = \tilde{T}_{e_\mu} - \tilde{T}_0$, $\mu \in \mathbb{D}$, действуют во всех пространствах, где определено действие группы сдвигов $\mathbb{L}$, причем $\tilde{\Delta}_\mu = \Delta_\mu$ на алгебре $\mathcal{A}(\mathbb{L})$, но $\tilde{\Delta}_\mu \neq \Delta_\mu$ на алгебрах $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}})$ и $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{J}})$. В частности, $\mathcal{A}(\mathbb{L})$ -модули $\mathfrak{D}(\mathbb{L})$ и $\mathfrak{D}(\mathbb{L})$ сохраняют свой вид и действие $\tilde{T} = T$ на них.

По-прежнему определены градуированная внешняя алгебра $\Omega(\mathbb{L})$, горизонтальный дифференциал $d_H: \Omega(\mathbb{L}) \rightarrow \Omega(\mathbb{L})$ и горизонтальный комплекс $\{\Omega(\mathbb{L}); d_H\}$, причем теорема 2 остается в силе.

Биградуированная внешняя алгебра дифференциально-разностных форм на пространстве $\tilde{\mathbf{J}}$ имеет вид

$$\Omega(\tilde{\mathbf{J}}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq q \leq D} \Omega^{pq}(\tilde{\mathbf{J}}), \quad \Omega^{pq}(\tilde{\mathbf{J}}) = \Omega^p(\tilde{\mathbf{V}}) \wedge_{\mathbb{R}} \Omega^q(\mathbb{L}).$$

По построению имеем изоморфизм биградуированных внешних алгебр

$$\varkappa^*: \Omega(\mathbf{J}) \simeq \Omega(\tilde{\mathbf{J}}),$$

определяемый правилами: $f \mapsto \tilde{f}$, $d_V u_l^\alpha \mapsto \tilde{v}_l^\alpha$, $d_H i^\mu \mapsto d_H i^\mu$. Более того, однозначно определены вертикальный и горизонтальный дифференциалы $\tilde{d}_V$ и $\tilde{d}_H$ такие, что имеет место изоморфизм бикомплексов

$$\varkappa^*: \{\Omega(\mathbf{J}); d_V, d_H\} \simeq \{\Omega(\tilde{\mathbf{J}}); \tilde{d}_V, \tilde{d}_H\}.$$

Именно, по-прежнему вертикальный дифференциал

$$\tilde{d}_V = \tilde{d}_V^{pq} = \tilde{d}_V^p \wedge \text{id}_{\Omega^q(\mathbb{L})}: \Omega^{pq}(\tilde{\mathbf{J}}) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(\tilde{\mathbf{J}}),$$

так что $\tilde{d}_V(\chi \wedge \varrho) = (\tilde{d}_V \chi) \wedge \varrho$ для всех $\chi \in \Omega^p(\tilde{\mathbf{V}})$, $\varrho \in \Omega^q(\mathbb{L})$. Но теперь и *горизонтальный дифференциал факторизуется*:

$$\tilde{d}_H = \tilde{d}_H^{pq} = \text{id}_{\Omega^p(\tilde{\mathbf{V}})} \wedge d_H^q: \Omega^{pq}(\tilde{\mathbf{J}}) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(\tilde{\mathbf{J}}),$$

так что $\tilde{d}_H(\chi \wedge \varrho) = (-1)^p \chi \wedge d_H(\varrho)$ для всех $\chi \in \Omega^p(\tilde{\mathbf{V}})$, $\varrho \in \Omega^q(\mathbb{L})$. Именно с этой целью и были введены расслаивающие координаты.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае вариационного исчисления на евклидовом пространстве (см., например, [3], [4]) такие координаты отсутствуют, чем и объясняется существенная разница свойств вариационного бикомплекса и дифференциально-разностного бикомплекса.

В свою очередь, действие $\tilde{T}: \mathbb{L} \rightarrow \text{Aut}(\Omega(\tilde{\mathbf{J}}))$ также факторизуется. Именно, $\tilde{T}_i(\chi \wedge \varrho) = \chi \wedge \tilde{T}_i \varrho$ для всех $\chi \in \Omega(\tilde{\mathbf{V}})$ и $\varrho \in \Omega(\mathbb{L})$. Разностная форма $\varrho = \frac{1}{q!} \sum_{|\mu|=q} \varrho_\mu \cdot d_H i^\mu$ инвариантна относительно сдвигов тогда и только тогда, когда $\varrho_\mu \in \mathbb{R} \subset \mathcal{A}(\mathbb{L})$. Следовательно, $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{V}})$ -модули инвариантных форм суть

$$\Omega_T^{pq}(\tilde{\mathbf{J}}) = \left\{ \omega = \frac{1}{q!} \sum_{|\mu|=q} \chi_\mu \wedge d_H i^\mu \mid \chi_\mu \in \Omega^p(\tilde{\mathbf{V}}) \right\}.$$

Изоморфизм $\varkappa^*: \Omega_T(\mathbf{J}) \simeq \Omega_{\tilde{T}}(\tilde{\mathbf{J}})$ позволяет дать явное описание $\mathcal{A}_T(\mathbf{J})$ -модулей $\Omega_T^{pq}(\mathbf{J})$. Именно, справедливо следующее предложение.

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& \uparrow \tilde{d}_V & & \uparrow \tilde{d}_V & & \uparrow \tilde{d}_V & & \uparrow \tilde{d}_V \\
0 & \longrightarrow & \Omega_T^{20}(\tilde{\mathbf{J}}) & \longrightarrow & \Omega^{20}(\tilde{\mathbf{J}}) & \xrightarrow{d_H} & \Omega^{21}(\tilde{\mathbf{J}}) & \xrightarrow{d_H} \dots \xrightarrow{d_H} \Omega^{2D}(\tilde{\mathbf{J}}) \longrightarrow 0 \\
& \uparrow \tilde{d}_V & & \uparrow \tilde{d}_V & & \uparrow \tilde{d}_V & & \uparrow \tilde{d}_V \\
0 & \longrightarrow & \Omega_T^{10}(\tilde{\mathbf{J}}) & \longrightarrow & \Omega^{10}(\tilde{\mathbf{J}}) & \xrightarrow{d_H} & \Omega^{11}(\tilde{\mathbf{J}}) & \xrightarrow{d_H} \dots \xrightarrow{d_H} \Omega^{1D}(\tilde{\mathbf{J}}) \longrightarrow 0 \\
& \uparrow \tilde{d}_V & & \uparrow \tilde{d}_V & & \uparrow \tilde{d}_V & & \uparrow \tilde{d}_V \\
0 & \longrightarrow & \Omega_T^{00}(\tilde{\mathbf{J}}) & \longrightarrow & \Omega^{00}(\tilde{\mathbf{J}}) & \xrightarrow{d_H} & \Omega^{01}(\tilde{\mathbf{J}}) & \xrightarrow{d_H} \dots \xrightarrow{d_H} \Omega^{0D}(\tilde{\mathbf{J}}) \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0(\mathbb{L}) & \xrightarrow{d_H} & \Omega^1(\mathbb{L}) & \xrightarrow{d_H} \dots \xrightarrow{d_H} \Omega^D(\mathbb{L}) \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Рис. 2. Пополненный бикомплекс на пространстве $\tilde{\mathbf{J}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для всех $p \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq q \leq D$ имеет место представление

$$\Omega_T^{pq}(\mathbf{J}) = \left\{ \omega = \frac{1}{q!} \sum_{|\mu|=q} \chi_\mu \wedge d_H i^\mu \mid \chi_\mu \in \Omega_T^{p0}(\mathbf{J}) \right\},$$

где

$$\Omega_T^{p0}(\mathbf{J}) = \left\{ \frac{1}{p!} \sum_{|\alpha|, |\mathbf{i}|=p} \chi_\alpha^{\mathbf{i}} \cdot \vartheta_{\mathbf{i}}^\alpha \mid \chi_\alpha^{\mathbf{i}} \in \mathcal{A}_T(\mathbf{J}) \right\}.$$

Из формулы $\tilde{d}_V = \sum_{\alpha, \mathbf{i}} \tilde{\varepsilon}_i^\alpha \circ \partial_{\mathbf{u}_i^\alpha}$ следует, что определено сужение вертикального дифференциала на инвариантные формы,

$$\tilde{d}_V : \Omega_T^{pq}(\tilde{\mathbf{J}}) \rightarrow \Omega_T^{p+1, q}(\tilde{\mathbf{J}}) \quad \text{для всех} \quad p \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq q \leq D.$$

Итак, определен пополненный бикомплекс, изображенный на рис. 2, изоморфный бикомплексу, изображенному на рис. 1.

ТЕОРЕМА 4. Пополненный бикомплекс, изображенный на рис. 2, ациклический, т.е. все его строки и столбцы точные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, все строки рассматриваемого бикомплекса точные в силу теоремы 2, поскольку горизонтальный дифференциал факторизован. Аналогично все столбцы бикомплекса, кроме, быть может, крайнего левого, точные в силу теоремы 1, поскольку вертикальный дифференциал тоже факторизован. Для

доказательства точности крайнего левого столбца следует выписать явные формулы для гомотопического оператора h_V (см. доказательство теоремы 1) и убедиться, что определено его сужение на инвариантные формы. ■

СЛЕДСТВИЕ 2. *Справедлива теорема 3.*

Для доказательства достаточно воспользоваться изоморфизмом пополненных би-комплексов.

2.5. Обсуждение. Основные вопросы, возникающие при осмыслении теоремы 3: где разностные функциональные формы и вариационные производные и где разностное вариационное исчисление? Ответ простой: сделанный здесь выбор в качестве класса функций на пространстве разностных джетов алгебры $\mathcal{A}(\mathbf{J})$, а не ее подалгебры $\mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$ допускает лишь тривиальные нулевые функциональные формы и как следствие вырождение вариационного исчисления. Поясним сказанное на примерах (для простоты полагаем $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$ и $V = \mathbb{R}$).

ПРИМЕР 1. В алгебре $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ каждая функция имеет разностную первообразную. Действительно, для данной функции $f(k, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$ положим

$$F(k, \mathbf{u}) = \begin{cases} \sum_{0 \leq i < k} f(i, T_{i-k} \mathbf{u}), & k > 0, \\ 0, & k = 0, \\ - \sum_{k \leq i < 0} f(i, T_{i-k} \mathbf{u}), & k < 0. \end{cases}$$

Тогда $F(k, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$ и $\Delta F = f$ (точнее, $F(k+1, T_1 \mathbf{u}) - F(k, \mathbf{u}) = f(k, \mathbf{u})$). Заметим, что построенная первообразная $F \notin \mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$.

ПРИМЕР 2. Разностная вариационная производная $\delta f / \delta u$ функции $f(k, \mathbf{u})$ определяется формулой (см., например, [7], [8])

$$\frac{\delta f}{\delta u}(k, \mathbf{u}) = \sum_{i \in \mathbb{L}} T_{-i} \frac{\partial}{\partial u_i} f(k, \mathbf{u}) = \sum_{i \in \mathbb{L}} \frac{\partial}{\partial u_0} T_{-i} f(k, \mathbf{u}).$$

По построению сумма по i конечная, если $f \in \mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$, так что разностная вариационная производная определена на алгебре $\mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$. С другой стороны, для некоторых $f \in \mathcal{A}(\mathbf{J})$ эта сумма может оказаться бесконечной. Например, пусть $f \in \mathcal{A}_T(\mathbf{J})$, так что $T_i f = f$ для всех $i \in \mathbb{L}$, тогда

$$\frac{\delta f}{\delta u}(k, \mathbf{u}) = \sum_{i \in \mathbb{L}} \frac{\partial f(k, \mathbf{u})}{\partial u_0} = \begin{cases} \infty, & \text{если } \frac{\partial f(k, \mathbf{u})}{\partial u_0} \neq 0, \\ 0, & \text{если } \frac{\partial f(k, \mathbf{u})}{\partial u_0} = 0, \end{cases}$$

т. е. разностная вариационная производная не определена для любой функции из $\mathcal{A}_T(\mathbf{J})$.

Таким образом, для развития разностного вариационного исчисления алгебра $\mathcal{A}(\mathbf{J})$ не подходит, более перспективной выглядит ее подалгебра $\mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$. Отметим, что в работах на эту тему (см., например, [7]–[14]) негласно используются алгебра $\mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$ и ее подалгебра $\mathcal{A}(\mathbf{V})$. Также отметим, что ситуация с разностным вариационным комплексом, а тем более с бикомплексом, далеко не ясна, несмотря на общее мнение о схожести разностного вариационного комплекса на целочисленной решетке с вариационным комплексом на евклидовом пространстве. Например, в работе [11] объявлено о доказательстве точности (ацикличности) разностного вариационного комплекса, однако доказательство главной теоремы 4.2.31 отсутствует, а построенный в ней гомотопический оператор является калькой аналогичного оператора для вариационного комплекса на евклидовом пространстве (см., например, [1]) и не отражает принципиальной разницы между разностными операторами на целочисленной решетке и полными производными на евклидовом пространстве (ср. с замечанием 1). Во всяком случае задача построения разностного вариационного бикомплекса к классу $\mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$ и доказательства его ацикличности еще впереди.

Другой важный вопрос, какой класс функций лучше подходит для приложений. Здесь также ответ простой: как и в евклидовом случае, где нет лучшего класса, для различных задач математической физики используется широкий спектр функциональных пространств, выбор класса функций на пространстве разностных джетов диктуется конкретной поставленной задачей. Например, в конкретной прикладной задаче вполне может возникнуть разностное уравнение вида $F(k, \mathbf{u}) = 0$, где функция $F \in \mathcal{A}(\mathbf{J}) \setminus \mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$, так что при исследовании такого уравнения придется работать в алгебре $\mathcal{A}(\mathbf{J})$. С другой стороны, согласно современным воззрениям каждая фундаментальная модель, в частности на решетке, должна быть лагранжевой, т. е. задаваться вариационными уравнениями $\delta L / \delta u^\alpha = 0$, $\alpha \in \mathbf{A}$, где лагранжиан $L = L(\mathbf{u}) \in \mathcal{A}(\mathbf{V}) \subset \mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$, так что в этом случае достаточно алгебры $\mathcal{A}_{\text{fin}}(\mathbf{J})$ или ее подалгебры $\mathcal{A}(\mathbf{V})$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 10-01-00178, 09-026-12161-офи-м) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-7675.2010.1).

Список литературы

- [1] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [2] Т. Tsujishita, *Osaka J. Math.*, **19**:2 (1982), 311–363.
- [3] I. M. Anderson, “Introduction to the variational bicomplex”, *Mathematical Aspects of Classical Field Theory*, Contemp. Math., **132**, eds. M. J. Gotay, J. E. Marsden, V. Moncrief, AMS, Providence, RI, 1992, 51–73.
- [4] I. M. Anderson, *The Variational Bicomplex*, Dept. Math., Utah State University, Logan, Utah, 2004, 318 pp.
- [5] А. Карган, *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы*, Мир, М., 1971.
- [6] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **144**:3 (2005), 435–452.
- [7] B. Kupersmidt, *Discrete Lax equations and differential-difference calculus*, *Astérisque*, **123**, SMF, Paris, 1985.
- [8] P. E. Hydon, E. L. Mansfield, *Found. Comput. Math.*, **4**:2 (2004), 187–217.
- [9] Ü. Göktaş, W. Hereman, *Physica D*, **123**:1–4 (1998), 425–436, arXiv: solv-int/9801023.

- [10] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *ТМФ*, **125**:3 (2000), 355–424.
- [11] E. L. Mansfield, P. E. Hydon, “On a variational complex for difference equations”, *The Geometrical Study of Differential Equations*, Contemp. Math., **285**, eds. J. A. Leslie, T. P. Roberts, AMS, Providence, RI, 2002, 121–129.
- [12] M. S. Hickman, W. A. Hereman, *Proc. Roy. Soc. A*, **459** (2003), 2705–2729.
- [13] W. Hereman, M. Colagrosso, R. Sayers, A. Ringler, B. Deconinck, M. Nivala, M. Hickman, “Continuous and discrete homotopy operators and the computation of conservation laws”, *Differential Equations With Symbolic Computation*, Trends Math., eds. D. Wang, Z. Zheng, Birkhäuser, Basel, 2005, 255–290.
- [14] В. В. Жаринов, *ТМФ*, **157**:3 (2008), 391–405.

Поступила в редакцию 10.08.2010