Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Шапиро, Три реализации квантовой аффинной алгебры $U_q(A_2^{(2)})$, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 2, 217–232

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:22:18

© 2010 г.

А. М. Шапиро*

ТРИ РЕАЛИЗАЦИИ КВАНТОВОЙ АФФИННОЙ АЛГЕБРЫ $U_q(A_2^{(2)})$

Установлены явные изоморфизмы между тремя реализациями квантовой скрученной аффинной алгебры $U_q(A_2^{(2)})$: токовой реализацией Дринфельда, реализацией Шевалле и так называемой *RLL*-реализацией, предложенной Решетихиным, Тахтаджяном и Фаддеевым.

Ключевые слова: квантовые аффинные алгебры, *RLL*-реализация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существуют лишь две квантовые аффинные алгебры ранга 2: $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ и $U_q(A_2^{(2)})$. Алгебра $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ и ее теория представлений хорошо изучены. Ситуация с алгеброй $U_q(A_2^{(2)})$ несколько иная, несмотря на то что и алгебра сама по себе, и ее теория представлений интересны как с точки зрения математики, так и с точки зрения математической физики.

Впервые алгебра $U_q(A_2^{(2)})$ возникла в физических работах. Так, фундаментальное представление ее $\mathcal{R}$ -матрицы было получено в работе [1] в качестве $\mathcal{R}$ -матрицы квантовой версии модели Шабата–Михайлова, также известной как модель Изергина–Корепина. Позже это же представление было получено в работе [2] вместе с фундаментальными представлениями $\mathcal{R}$ -матриц прочих не исключительных аффинных алгебр. Позднее в работе [3] техника анзаца Бете была распространена на алгебру $U_q(A_2^{(2)})$. Наконец, в работе [4] были развиты идеи термодинамического анзаца Бете для алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ и выписаны некоторые конечномерные представления.

Алгебра $U_q(A_2^{(2)})$ также изучалась и с алгебраической точки зрения. В работе [5] был построен базис Картана–Вейля для алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ и универсальная $\mathcal{R}$ -матрица была выписана через бесконечные произведения элементов этого базиса. Классификация конечномерных представлений алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ была получена в работе [6] в терминах полиномов Дринфельда. Позднее была получена [7] интегральная формула для универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы алгебры $U_q(A_2^{(2)})$, при

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: alexander.m.shapiro@gmail.com

этом $U_q(A_2^{(2)})$ рассматривалась как топологическая алгебра Хопфа с коумножением Дринфельда. В той же работе соотношения Серра были переписаны в терминах нулей и полюсов произведений токов Дринфельда. Наконец, факторизованная $\mathcal{R}$ -матрица алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ была выписана в интегральном виде в статье [8], где $U_q(A_2^{(2)})$ рассматривалась как алгебра со стандартной структурой алгебры Хопфа.

Квантовые аффинные алгебры допускают три различные реализации с разными структурами алгебр Хопфа. Первая из них – *стандартная реализация* – задается при помощи образующих Шевалле и соотношений, определяемых соответствующей матрицей Картана. Стандартная реализация содержит малое число образующих, однако, к сожалению, крайне неудобна для использования в приложениях. Вторая реализация – *новая реализация Дринфельда* – впервые описана в работе [9] при помощи производящих функций (токов Дринфельда) и соотношений на них. Реализация Дринфельда позволяет использовать методы комплексного анализа при изучении алгебры. Более того, она позволяет описать все конечномерные представления квантовой аффинной алгебры. Наконец, третья реализация – *RLL-реализация* – основана на подходе Решетихина, Тахтаджяна, Фаддеева и Семенова-Тянь-Шанского, в котором образующие собраны в L -операторы, удовлетворяющие известному уравнению Янга–Бакстера (см. [10], [11]). Простота коумножения в RLL -реализации позволяет строить новые представления как тензорные произведения уже известных. По этой причине именно RLL -реализация широко используется в физических моделях.

Считается общеизвестным, что описанные реализации квантовых аффинных алгебр изоморфны, несмотря на то что точные доказательства вряд ли существуют для каких-либо алгебр помимо $\mathfrak{sl}_n$ -серии. Для алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ изоморфизм между стандартной реализацией и реализацией Дринфельда был описан в работе [12], а связь между реализацией Дринфельда и RLL -реализацией была установлена в [13].

В случае квантовых скрученных аффинных алгебр RLL -реализация требует дополнительных соотношений. Хотя считается, что три реализации остаются изоморфными и в случае скрученных алгебр, пока что нет полного понимания, как в точности должны выглядеть изоморфизмы. Изоморфизм между стандартной реализацией и реализацией Дринфельда алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ был установлен в работе [8], а в работе [14] был частично установлен изоморфизм между RLL -реализацией и реализацией Дринфельда. Более полную библиографию можно найти в работе [15].

В настоящей работе дается полное описание трех реализаций алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ (без градуирующего элемента и с нулевым центральным зарядом), изоморфизмов между ними и связей между тремя структурами алгебр Хопфа. Особое внимание уделено следующему факту: каждая реализация обладает “минимальным” (или почти минимальным в случае скрученных алгебр) набором образующих и расширенным набором образующих. Для этих наборов, по всей видимости, должен существовать аналог теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта. В стандартной реализации такими наборами являются соответственно образующие Шевалле и базис Картана–Вейля. В реализации Дринфельда эти функции выполняют токи Дринфельда и так называемые “сложные токи” (см. [16]). Наконец, в RLL -реализации гауссовы

координаты, находящиеся непосредственно над или под диагональю, образуют минимальный набор, а все гауссовы координаты дают расширенный набор. Заметим, что эти расширенные наборы играют ключевую роль при вычислении универсальной весовой функции. В настоящей работе устанавливается связь между проекциями сложных токов и гауссовыми координатами для алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ в духе того, как это было проделано для $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ в работе [17].

Статья построена следующим образом: в разделе 2 даются описания трех реализаций, в разделе 3 устанавливаются изоморфизмы между ними и приводятся доказательства этих изоморфизмов, и, наконец, в разделе 4 записываются элементы из расширенного набора гауссовых координат через сложные токи.

2. РЕАЛИЗАЦИИ АЛГЕБРЫ $U_Q(A_2^{(2)})$

Для простоты изложения мы рассматриваем алгебру $U_q(A_2^{(2)})$ без градуирующего элемента и с нулевым центральным зарядом. Все утверждения остаются верными и для алгебры с градуирующим элементом и произвольным центральным зарядом, но формулы становятся более громоздкими.

2.1. Реализация Дринфелда. Пусть $\mathcal{A}_D$ – ассоциативная алгебра, порожденная элементами

$$e_n, f_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad a_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \text{и} \quad k^{\pm 1},$$

отвечающими определенным соотношениям. Соотношения заданы на производящих функциях (токах) в виде равенств формальных степенных рядов

$$e(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k z^{-k}, \quad f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k z^{-k}, \quad K^{\pm}(z) = k^{\pm 1} \exp\left(\pm(q - q^{-1}) \sum_{n > 0} a_{\pm n} z^{\mp n}\right)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} (z - q^2 w)(qz + w)e(z)e(w) &= (q^2 z - w)(z + qw)e(w)e(z), \\ (q^2 z - w)(z + qw)f(z)f(w) &= (z - q^2 w)(qz + w)f(w)f(z), \end{aligned}$$

$$K^+(z)e(w)K^+(z)^{-1} = \alpha\left(\frac{w}{z}\right)e(w),$$

$$K^+(z)f(w)K^+(z)^{-1} = \alpha\left(\frac{w}{z}\right)^{-1}f(w),$$

$$K^-(z)e(w)K^-(z)^{-1} = \alpha\left(\frac{z}{w}\right)^{-1}e(w),$$

$$K^-(z)f(w)K^-(z)^{-1} = \alpha\left(\frac{z}{w}\right)f(w),$$

$$K^{\pm}(z)K^{\pm}(w) = K^{\pm}(w)K^{\pm}(z),$$

$$K^-(z)K^+(w) = K^+(w)K^-(z),$$

$$e(z)f(w) - f(w)e(z) = \frac{1}{q - q^{-1}} \left(\delta\left(\frac{z}{w}\right)K^+(w) - \delta\left(\frac{z}{w}\right)K^-(z) \right),$$

где

$$\alpha(x) = \frac{(q^2 - x)(q^{-1} + x)}{(1 - q^2x)(1 + q^{-1}x)},$$

а $\delta(z/w)$ – формальный ряд Лорана, заданный равенством

$$\delta\left(\frac{z}{w}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{z}{w}\right)^n.$$

Производящие функции $e(z)$, $f(z)$ также удовлетворяют кубическим соотношениям Серра (см. [9]):

$$\begin{aligned} \text{Sym}_{z_1, z_2, z_3} (q^{-3}z_1 - (q^{-2} + q^{-1})z_2 + z_3) e(z_1) e(z_2) e(z_3) &= 0, \\ \text{Sym}_{z_1, z_2, z_3} (q^{-3}z_1^{-1} - (q^{-2} + q^{-1})z_2^{-1} + z_3^{-1}) f(z_1) f(z_2) f(z_3) &= 0, \\ \text{Sym}_{z_1, z_2, z_3} (q^3z_1^{-1} - (q^2 + q)z_2^{-1} + z_3^{-1}) e(z_1) e(z_2) e(z_3) &= 0, \\ \text{Sym}_{z_1, z_2, z_3} (q^3z_1 - (q^2 + q)z_2 + z_3) f(z_1) f(z_2) f(z_3) &= 0. \end{aligned}$$

Алгебра Хопфа на $\mathcal{A}_D$ может быть задана так:

$$\begin{aligned} \Delta_D(e(z)) &= e(z) \otimes 1 + K^-(z) \otimes e(z), \\ \Delta_D(f(z)) &= 1 \otimes f(z) + f(z) \otimes K^+(z), \\ \Delta_D(K^\pm(z)) &= K^\pm(z) \otimes K^\pm(z), \\ S_D(e(z)) &= -(K^-(z))^{-1} e(z), \\ S_D(f(z)) &= -f(z) (K^+(z))^{-1}, \\ S_D(K^\pm(z)) &= (K^\pm(z))^{-1}, \\ \varepsilon_D(e(z)) &= 0, \\ \varepsilon_D(f(z)) &= 0, \\ \varepsilon_D(K^\pm(z)) &= 1, \end{aligned}$$

где Δ_D , ε_D и S_D – соответственно коумножение, коединица и антипод. Мы будем называть Δ_D *коумножением Дринфельда*. Здесь мы должны отметить, что $\mathcal{A}_D$ – топологическая биалгебра, и Δ_D является отображением из алгебры $\mathcal{A}_D$ в топологическое расширение ее тензорного квадрата (см. раздел 2 в работе [18]).

2.2. Реализация Шевалле. Другая реализация алгебры $U_q(A_2^{(2)})$ задается при помощи образующих Шевалле. Пусть $\mathcal{A}_{\text{Ch}}$ – ассоциативная алгебра, порожденная элементами $e_{\pm\alpha}$, $e_{\pm(\delta-2\alpha)}$, $k_\alpha^{\pm 1}$, $k_{\delta-2\alpha}^{\pm 1}$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} k_\alpha e_{\pm\alpha} k_\alpha^{-1} &= q^{\pm 1} e_{\pm\alpha}, & k_\alpha e_{\pm(\delta-2\alpha)} k_\alpha^{-1} &= q^{\mp 2} e_{\pm(\delta-2\alpha)}, \\ k_{\delta-2\alpha} e_{\pm\alpha} k_{\delta-2\alpha}^{-1} &= q^{\mp 2} e_{\pm\alpha}, & k_{\delta-2\alpha} e_{\pm(\delta-2\alpha)} k_{\delta-2\alpha}^{-1} &= q^{\pm 4} e_{\pm(\delta-2\alpha)}, \\ k_\alpha^2 k_{\delta-2\alpha} &= 1, & [e_{\pm\alpha}, e_{\mp(\delta-2\alpha)}] &= 0, \\ [e_\alpha, e_{-\alpha}] &= \frac{k_\alpha - k_\alpha^{-1}}{q - q^{-1}}, & [e_{\delta-2\alpha}, e_{-(\delta-2\alpha)}] &= \frac{k_{\delta-2\alpha} - k_{\delta-2\alpha}^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ (\text{ad}_q e_{\pm\alpha})^5 e_{\pm(\delta-2\alpha)} &= 0, & (\text{ad}_q e_{\pm(\delta-2\alpha)})^2 e_{\pm\alpha} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}_q e_{\pm\alpha})(x) &= e_{\pm\alpha}x - k_{\alpha}^{\pm 1}xk_{\alpha}^{\mp 1}e_{\pm\alpha}, \\ (\mathrm{ad}_q e_{\pm(\delta-2\alpha)})(x) &= e_{\pm(\delta-2\alpha)}x - k_{\delta-2\alpha}^{\pm 1}xk_{\delta-2\alpha}^{\mp 1}e_{\pm(\delta-2\alpha)}.\end{aligned}$$

Структура алгебры Хопфа, ассоциированная с данной реализацией, может быть определена следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta(e_{\alpha}) &= e_{\alpha} \otimes 1 + k_{\alpha} \otimes e_{\alpha}, & \Delta(e_{\delta-2\alpha}) &= e_{\delta-2\alpha} \otimes 1 + k_{\delta-2\alpha} \otimes e_{\delta-2\alpha}, \\ \Delta(e_{-\alpha}) &= 1 \otimes e_{-\alpha} + e_{-\alpha} \otimes k_{\alpha}^{-1}, & \Delta(e_{-(\delta-2\alpha)}) &= 1 \otimes e_{-(\delta-2\alpha)} + e_{-(\delta-2\alpha)} \otimes k_{\delta-2\alpha}^{-1}, \\ \Delta(k_{\alpha}) &= k_{\alpha} \otimes k_{\alpha}, & \Delta(k_{\delta-2\alpha}) &= k_{\delta-2\alpha} \otimes k_{\delta-2\alpha}, \\ \varepsilon(e_{\pm\alpha}) &= 0, & \varepsilon(e_{\pm(\delta-2\alpha)}) &= 0, \\ \varepsilon(k_{\alpha}^{\pm 1}) &= 1, & \varepsilon(k_{\delta-2\alpha}^{\pm 1}) &= 1, \\ S(e_{\alpha}) &= -k_{\alpha}^{-1}e_{\alpha}, & S(e_{\delta-2\alpha}) &= -k_{\delta-2\alpha}^{-1}e_{\delta-2\alpha}, \\ S(e_{-\alpha}) &= -e_{-\alpha}k_{\alpha}, & S(e_{-(\delta-2\alpha)}) &= -e_{-(\delta-2\alpha)}k_{\delta-2\alpha}, \\ S(k_{\alpha}^{\pm 1}) &= k_{\alpha}^{\mp 1}, & S(k_{\delta-2\alpha}^{\pm 1}) &= k_{\delta-2\alpha}^{\mp 1},\end{aligned}$$

где Δ , ε и S – соответственно коумножение, коединица и антипод. Мы будем называть Δ *стандартным коумножением*. Мы также будем рассматривать противоположное коумножение

$$\Delta^{\mathrm{op}} = \sigma \circ \Delta, \quad \sigma(u \otimes v) = v \otimes u.$$

Теперь нам потребуется конструкция базиса Картана–Вейля, построенная для $U_q(A_2^{(2)})$ в работе [5]¹⁾. Скрученная аффинная алгебра $A_2^{(2)}$ обладает системой корней $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$, где

$$\Delta_+ = \alpha \cup \{n\delta, \pm\alpha + n\delta, \pm 2\alpha + (2n-1)\delta \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \Delta_- = -\Delta_+.$$

Корни $\gamma \in \Delta_+$ называются *положительными*, корни $\gamma \in \{n\delta, n \in \mathbb{Z}\}$ – *мнимыми*, а корни $\gamma \in \Delta \setminus \{n\delta, n \in \mathbb{Z}\}$ – *действительными*. Определим скалярное произведение на Δ :

$$(\alpha, \alpha) = 1, \quad (\alpha, \delta) = (\delta, \delta) = 0.$$

Теперь, пусть

$$q_{\gamma} = q^{(\gamma, \gamma)}, \quad (a)_q = \frac{q^a - 1}{q - 1}, \quad (n)_q! = (1)_q \cdots (n)_q$$

и

$$\exp_q(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n)_q!} = 1 + x + \frac{x^2}{(2)_q!} + \cdots.$$

Зафиксируем нормальное упорядочение на Δ :

$$\alpha, 2\alpha + \delta, \alpha + \delta, 2\alpha + 3\delta, \alpha + 2\delta, \dots, \delta, 2\delta, 3\delta, \dots, 2\delta - \alpha, 3\delta - 2\alpha, \delta - \alpha, \delta - 2\alpha.$$

¹⁾В нашей конструкции, в отличие от описанной в [5], в построении базиса Картана–Вейля используются q -коммутаторы вместо q^{-1} -коммутаторов.

В соответствии с конструкцией базиса Картана–Вейля, описанной в работе [5], положим

$$\begin{aligned} e_{\delta-\alpha} &= a[e_{\alpha}, e_{\delta-2\alpha}]_{q^{-1}}, & e'_{\delta} &= b[e_{\alpha}, e_{\delta-\alpha}]_{q^{-1}}, & e_{\alpha+n\delta} &= b[e_{\alpha+(n-1)\delta}, e'_{\delta}]_{q^{-1}}, \\ e_{\delta-\alpha+n\delta} &= b[e'_{\delta}, e_{\delta-\alpha+(n-1)\delta}]_{q^{-1}}, & e'_{n\delta} &= b[e_{\alpha+(n-1)\delta}, e_{\delta-\alpha}]_{q^{-1}}, \\ e_{2\alpha+(2n+1)\delta} &= a[e_{\alpha+n\delta}, e_{\alpha+(n+1)\delta}]_{q^{-1}}, & e_{\delta-2\alpha+2n\delta} &= a[e_{\delta-\alpha+n\delta}, e_{\delta-\alpha+(n-1)\delta}]_{q^{-1}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{q+q^{-1}}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{q+1+q^{-1}}},$$

и для всех $\beta, \gamma \in \Delta$ выполняется

$$[e_{\beta}, e_{\gamma}]_{q^{-1}} = e_{\beta}e_{\gamma} - q^{-(\beta, \gamma)}e_{\gamma}e_{\beta}.$$

Наконец, определим *минимые* корни $e_{n\delta}$ через полиномы Шура:

$$e'_{n\delta} = \sum_{p_1+2p_2+\dots+np_n=n} \frac{((q-q^{-1})b^{-1})^{\sum p_i-1}}{p_1! \dots p_n!} e_{\delta}^{p_1} e_{2\delta}^{p_2} \dots e_{n\delta}^{p_n}. \quad (2)$$

Мономы, являющиеся произведением элементов $e_{n\delta}$, $e_{n\delta \pm \alpha}$ и $k_{\alpha}^{\pm 1}$ образуют линейный базис алгебры $\mathcal{A}_{\text{Ch}}$.

2.3. RLL-реализация. Пусть

$$R(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & e & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & c & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & g & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{q(x-1)}{q^2x-1}, & b &= \frac{q^2(qx+1)(x-1)}{(q^2x-1)(q^3x+1)}, & c &= \frac{q(x-1)}{q^2x-1} + \frac{(q^2-1)(q^3+1)x}{(q^2x-1)(q^3x+1)}, \\ d &= \frac{q^2-1}{q^2x-1}, & e &= \frac{(q^2-1)(x-1)q^{1/2}}{(q^2x-1)(q^3x+1)}, & p &= \frac{(q^2-1)(q^3x+qx-q+1)}{(q^2x-1)(q^3x+1)}, \\ f &= \frac{(q^2-1)x}{q^2x-1}, & g &= \frac{(1-q^2)x(x-1)q^{5/2}}{(q^2x-1)(q^3x+1)}, & q &= \frac{(q^2-1)x(q^3x-q^2x+q^2+1)}{(q^2x-1)(q^3x+1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим производящие функции

$$\begin{aligned} l_{ij}^{\pm}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} l_{ij}^{\pm}[\pm n] z^{\mp n}, & 1 \leq i, j \leq 3, \\ l_{ij}^{+}[0] &= l_{ji}^{-}[0] = 0, & 1 \leq i < j \leq 3, \end{aligned}$$

и сдвинутые производящие функции

$$\tilde{l}_{ij}^{\pm}(z) = q^{(i-j)/2} l_{4-j, 4-i}^{\pm}(-q^{-3}z).$$

Определим L -операторы $L^{\pm}(z)$ и их сдвиги $\tilde{L}^{\pm}(z)$ следующим образом:

$$L^{\pm}(z) = (l_{ij}^{\pm}(z))_{i,j=1}^3, \quad \tilde{L}^{\pm}(z) = (\tilde{l}_{ij}^{\pm}(z))_{i,j=1}^3.$$

Наконец, напомним определение q -детерминанта:

$$\det_q(L^{\pm}(z)) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_3} (-q)^{\text{sgn } \tau} l_{1\tau(i)}^{\pm}(z) l_{2\tau(2)}^{\pm}(q^2 z) l_{3\tau(3)}^{\pm}(q^4 z),$$

где $\mathfrak{S}_n$ – группа перестановок множества из n элементов.

Определим ассоциативную алгебру $\mathcal{A}_R$ с образующими $l_{ij}^{\pm}[\pm n]$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq 3$, и $l_{ij}^+ [0]$, $l_{ji}^- [0]$ при $1 \leq j \leq i \leq 3$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\det_q(L^{\pm}(z)) = 1, \quad (4)$$

$$L^{\pm}(z) \tilde{L}^{\pm}(z) = I_3, \quad (5)$$

$$l_{ii}^+ [0] l_{ii}^- [0] = l_{ii}^- [0] l_{ii}^+ [0] = 1, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} R\left(\frac{z}{w}\right) L_1^{\pm}(z) L_2^{\pm}(w) &= L_2^{\pm}(w) L_1^{\pm}(z) R\left(\frac{z}{w}\right), \\ R\left(\frac{z}{w}\right) L_1^+(z) L_2^-(w) &= L_2^-(w) L_1^+(z) R\left(\frac{z}{w}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $L_1(z) = L(z) \otimes I_3$, $L_2(z) = I_3 \otimes L(z)$, а I_n обозначает единичную $(n \times n)$ -матрицу.

Структура алгебры Хопфа может быть задана на $\mathcal{A}_R$ таким образом:

$$\Delta_R(l_{ij}^{\pm}) = \sum_{k=1}^3 l_{ik}^{\pm} \otimes l_{kj}^{\pm}, \quad S_R(L^{\pm}) = (L^{\pm})^{-1}, \quad \varepsilon_R(L^{\pm}) = I_3,$$

где Δ_R , ε_R и S_R – соответственно коумножение, коединица и антипод.

L -операторы допускают гауссово разложение

$$L^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} 1 & f_1^{\pm}(z) & f_{13}^{\pm}(z) \\ 0 & 1 & f_2^{\pm}(z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1^{\pm}(z) & 0 & 0 \\ 0 & k_2^{\pm}(z) & 0 \\ 0 & 0 & k_3^{\pm}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e_1^{\pm}(z) & 1 & 0 \\ e_{31}^{\pm}(z) & e_2^{\pm}(z) & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} e_i^{\pm}(z) &= \sum_{n \geq 0} e_i^{\pm}[n] z^{\mp n}, \quad i = 1, 2, & e_{31}^{\pm}(z) &= \sum_{n \geq 0} e_{31}^{\pm}[n] z^{\mp n}, \\ f_i^{\pm}(z) &= \sum_{n \geq 0} f_i^{\pm}[n] z^{\mp n}, \quad i = 1, 2, & f_{13}^{\pm}(z) &= \sum_{n \geq 0} f_{13}^{\pm}[n] z^{\mp n}, \\ k_i^{\pm}(z) &= \sum_{n \geq 0} k_i^{\pm}[n] z^{\mp n}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

и

$$e_1^-[0] = e_2^-[0] = e_{31}^-[0] = 0, \quad f_1^+[0] = f_2^+[0] = f_{13}^+[0] = 0.$$

Таким образом, мы определили гауссовы образующие

$$f_1^\pm[n], f_2^\pm[n], f_{13}^\pm[n], \quad e_1^\pm[n], e_2^\pm[n], e_{31}^\pm[n], \quad k_1^\pm[n], k_2^\pm[n], k_3^\pm[n], \quad n \geq 0,$$

удовлетворяющие соотношениям (4)–(7). Здесь $f_1^\pm[n], f_2^\pm[n], e_1^\pm[n], e_2^\pm[n]$ принадлежат “минимальному” набору образующих, а $f_{13}^\pm[n]$ и $e_{31}^\pm[n]$ – расширенному.

3. СВЯЗИ МЕЖДУ РЕАЛИЗАЦИЯМИ

3.1. Универсальная $\mathcal{R}$ -матрица. Напомним, что универсальной $\mathcal{R}$ -матрицей квазитреугольной алгебры Хопфа $\mathcal{A}$ называется элемент $\mathcal{R} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, удовлетворяющий соотношениям

$$\Delta^{\text{op}}(x) = \mathcal{R} \Delta(x) \mathcal{R}^{-1} \quad (9)$$

для любого $x \in \mathcal{A}$, и

$$(\Delta \otimes \text{id})\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \quad (10)$$

где

$$\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R} \otimes 1, \quad \mathcal{R}_{23} = 1 \otimes \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}_{13} = (\sigma \otimes \text{id})(\mathcal{R}_{23})$$

являются элементами тензорного куба алгебры $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Теперь зафиксируем представление алгебры π_z , определяемое на образующих Шевалле следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi_z(e_\alpha) &= \begin{pmatrix} 0 & q^{1/4} & 0 \\ 0 & 0 & -q^{-1/4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \pi_z(e_{\delta-2\alpha}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{q+q^{-1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} z, \\ \pi_z(e_{-\alpha}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q^{-1/4} & 0 & 0 \\ 0 & -q^{1/4} & 0 \end{pmatrix}, & \pi_z(e_{-\delta+2\alpha}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{q+q^{-1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} z^{-1}, \\ \pi_z(k_\alpha) &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, & \pi_z(k_{\delta-2\alpha}) &= \begin{pmatrix} q^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

После того как представление выбрано, мы получаем R -матрицу²⁾

$$R\left(\frac{z}{w}\right) = (\pi_z \otimes \pi_w)\mathcal{R}$$

непосредственно из определения $\mathcal{R}$, применяя $\pi_z \otimes \pi_w$ к соотношению (9) и подставляя образующие Шевалле вместо x . Условие (9) определяет $R(x)$ с точностью до мультипликативной константы.

²⁾Нормировка базиса представления выбрана таким образом, что R -матрица $R(x)$ симметрична относительно побочной диагонали. R -матрица в этом базисе совпадает с полученной в работе [2].

3.2. Реализации Шевалле и Дринфельда. Следуя [5], мы представляем универсальную $\mathcal{R}$ -матрицу алгебры $\mathcal{A}_{\text{Ch}}$ в следующей форме³⁾:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \mathcal{R}_- \mathcal{K} q^{-h \otimes h} \mathcal{R}_+, & \mathcal{R}_- &= \left(\prod_{\gamma < \delta}^{\rightarrow} \exp_{q_\gamma}((q^{-1} - q)e_\gamma \otimes e_{-\gamma}) \right), \\ \mathcal{K} &= \exp\left(-\sum_{n>0} S_n\right), & \mathcal{R}_+ &= \left(\prod_{\gamma > \delta}^{\leftarrow} \exp_{q_\gamma}((q^{-1} - q)e_\gamma k_\alpha^{(\alpha, \gamma)} \otimes k_\alpha^{(\alpha, \gamma)} e_{-\gamma}) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где γ пробегает по всем положительным корням, h определяется через $q^{\pm h} = k^{\pm 1}$, а S_n задается формулой

$$S_n = \frac{n(q - q^{-1})^2(q + 1 + q^{-1})(e_{n\delta} \otimes e_{-n\delta})}{(q^n - q^{-n})(q^n + (-1)^{n+1} + q^{-n})}.$$

Теперь, наконец, мы можем найти скалярный множитель для $R(x)$. Применяя $\pi_z \otimes \pi_w$ к $\mathcal{K} \cdot q^{-h \otimes h}$, мы получаем скаляр

$$q^{-1} \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{(q^n - q^{-n})x^n}{(q^n + (-1)^{n+1} + q^{-n})n}\right). \quad (12)$$

Таким образом, $R(x)$ совпадает с матрицей (3), умноженной на скаляр (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Скаляр (12) разлагается в произведение

$$q^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1 + q^{3k+2}x)(1 - q^{3k+3}x)}{(1 + q^{3k}x)(1 - q^{3k+1}x)} \right)^{(-1)^k}$$

в области $|q| < 1$ и в произведение

$$q^{-1} \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(1 + q^{-3k}x)(1 - q^{-(3k+1)}x)}{(1 + q^{-(3k+2)}x)(1 - q^{-(3k+3)}x)} \right)^{(-1)^k}$$

в области $|q| > 1$.

ТЕОРЕМА 1. *Изоморфизм ассоциативных алгебр $\mathcal{A}_{\text{Ch}}$ и $\mathcal{A}_{\text{D}}$ может быть задан формулами*

$$\begin{aligned} k_{\delta-2\alpha} &\mapsto k^{-2}, & k_\alpha &\mapsto k, \\ e_{\delta-2\alpha} &\mapsto a(qf_1f_0 - f_0f_1)k^{-2}, & e_\alpha &\mapsto e_0, \\ e_{-\delta+2\alpha} &\mapsto ak^2(q^{-1}e_0e_{-1} - e_{-1}e_0), & e_{-\alpha} &\mapsto f_0, \end{aligned} \quad (13)$$

где a определено после (1).

³⁾Формула для $\mathcal{R}$ -матрицы отличается от приведенной в работе [5], поскольку в построении базиса Картана-Вейля q -коммутаторы заменены на q^{-1} -коммутаторы. Более того, формула, приведенная здесь, отличается и от приведенной в [8]. $\mathcal{R}$ -матрица в [8] является обратной к той, что выписана здесь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственная проверка и индуктивное построение базиса Картана–Вейля показывают, что отображение (13) является сюръективным гомоморфизмом. Более точно, любая образующая Дринфельда может быть получена следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{\alpha+n\delta} &\mapsto e_n, & n \geq 0, & & -k_\alpha^{-1}e_{\alpha-n\delta} &\mapsto e_{-n}, & n > 0, \\ e_{-\alpha-n\delta} &\mapsto f_{-n}, & n \geq 0, & & -e_{-\alpha+n\delta}k_\alpha &\mapsto f_n, & n > 0, \\ k_\alpha &\mapsto k, & & & -b^{-1}e_{n\delta} &\mapsto a_n, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (14)$$

Обращая направления всех стрелок в отображении (14), мы получаем отображение, обратное к (13). Наконец, отображение (14) с обращенными стрелками также является эпиморфизмом, откуда и следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отображение, описанное выше, является изоморфизмом ассоциативных алгебр. Оно сохраняет коединицу, но не сохраняет коумножения Δ и Δ_D .

Следующее предложение связывает стандартное коумножение и коумножение Дринфельда.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Тензор $\mathcal{R}_-$ является коциклом по отношению к Δ_D , так что для любого $x \in \mathcal{A}_{\text{Ch}}$

$$\Delta(x) = (\mathcal{R}_-)^{-1} \Delta_D(x) \mathcal{R}_-.$$

Доказательство дано в работе [8]. Также там можно найти выражение для тензора $\mathcal{R}_-$ в терминах образующих Дринфельда.

3.3. От реализации Шевалле к RLL -реализации. Универсальная R -матрица любой квазитреугольной алгебры Хопфа удовлетворяет квантовому уравнению Янга–Бакстера (см. [9])

$$\mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 2. Изоморфизм ассоциативных алгебр $\mathcal{A}_R$ и $\mathcal{A}_{\text{Ch}}$ может быть задан следующими отображениями:

$$L^-(z) \mapsto (\pi_z \otimes \text{id}) \mathcal{R}, \quad L^+(z) \mapsto (\pi_z \otimes \text{id}) \mathcal{R}_{21}^{-1}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя $\pi_z \otimes \pi_w \otimes \text{id}$, $\pi_z \otimes \text{id} \otimes \pi_w$ и $\text{id} \otimes \pi_z \otimes \pi_w$ к соотношению (15), мы выводим коммутационные соотношения (6) и (7). Используя формулы (11) и (16), мы получаем гауссово разложение (8).

Матрица $R(-q^3)$ имеет одномерное ядро, порожденное вектором

$$v = q^{-1/2} v_1 \otimes v_3 + v_2 \otimes v_2 + q^{1/2} v_3 \otimes v_1,$$

где $\{v_1, v_2, v_3\}$ – базис представления π_z . Вектор v является собственным вектором оператора $L_1(z)L_2(-q^{-3}z)$. Пусть $\lambda(z)$ – собственное значение, отвечающее вектору v . Оператор $(\pi_z \otimes \pi_{-q^{-3}z})\Delta(x)$ обращается в нуль на v для любого $x \in \mathcal{A}_{\text{Ch}}$ (последнее достаточно проверить только для образующих Шевалле). Применяя

$\pi_z \otimes \pi_{-q^{-3}z} \otimes \text{id}$ к первому уравнению в (10), мы получаем $\lambda(z) = 1$. Таким образом, оператор $L_1(z)L_2(-q^{-3}z)$ сохраняет v , что эквивалентно соотношению (5):

$$\begin{pmatrix} l_{11}(z) & l_{12}(z) & l_{13}(z) \\ l_{21}(z) & l_{22}(z) & l_{23}(z) \\ l_{31}(z) & l_{32}(z) & l_{33}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{33}(-q^{-3}z) & q^{-1/2}l_{23}(-q^{-3}z) & q^{-1}l_{13}(-q^{-3}z) \\ q^{1/2}l_{32}(-q^{-3}z) & l_{22}(-q^{-3}z) & q^{-1/2}l_{12}(-q^{-3}z) \\ ql_{31}(-q^{-3}z) & q^{1/2}l_{21}(-q^{-3}z) & l_{11}(-q^{-3}z) \end{pmatrix} = I_3.$$

Далее можно проверить, что

$$\det_q(L^\pm(z)) = k_1^\pm(z)k_2^\pm(q^{-2}z)k_3^\pm(q^{-4}z).$$

Следуя построению базиса Картана–Вейля, мы получаем

$$\pi_z(e_{\pm n\delta}) = b \frac{q^n - q^{-n}}{n(q - q^{-1})} \begin{pmatrix} -z^{\pm n} & 0 & 0 \\ 0 & (q^2z)^{\pm n} - (-qz)^{\pm n} & 0 \\ 0 & 0 & (-q^3z)^{\pm n} \end{pmatrix}, \quad n > 0.$$

Применяя π_z к первому или второму тензорному сомножителю $\mathcal{K}$, имеем

$$\begin{aligned} k_1^\pm(z) &= k_3^\pm(-q^{-3}z)^{-1}, \\ k_2^\pm(z) &= k_3^\pm(-q^{-1}z)k_3^\pm(q^{-2}z)^{-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

откуда и следует искомое соотношение (4).

Так как все образующие Шевалле лежат в образе отображения (16), мы получили эпиморфизм из $\mathcal{A}_R$ на $\mathcal{A}_{\text{Ch}}$ (и, как следствие, на $\mathcal{A}_D$). Ниже в теореме 3 будет установлен эпиморфизм из $\mathcal{A}_D$ на $\mathcal{A}_R$, обратный к (16). Таким образом, утверждение теоремы доказано по модулю результата теоремы 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\phi(x) \in \mathcal{A}_{\text{Ch}}$ является образом $x \in \mathcal{A}_R$ под действием изоморфизма (16), тогда

$$\phi(\Delta_R(x)) = \sigma \circ \Delta(\phi(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое утверждение может быть получено, применением $\pi_z \otimes \text{id} \otimes \text{id}$ к соотношению

$$(\text{id} \otimes \Delta^{\text{op}})\mathcal{R} = \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13},$$

которое эквивалентно второму равенству из (10).

3.4. От RLL -реализации к реализации Дринфельда. Сначала выразим все гауссовы образующие через $e_1^\pm(z)$, $f_1^\pm(z)$, $k_1^\pm(z)$. Выражения

$$\begin{aligned} k_2^\pm(z) &= k_1^\pm(-qz)k_1^\pm(q^2z)^{-1}, \\ k_3^\pm(z) &= k_1^\pm(-q^3z)^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

немедленно следуют из (17). Соотношение (7) влечет

$$\begin{aligned} (q^2 - 1)z(q^3z + w)L_{23}^\pm(z)L_{33}^\pm(w) + q(z - w)(q^3z + w)L_{33}^\pm(z)L_{23}^\pm(w) = \\ = (q^2z - w)(q^3z + w)L_{23}^\pm(w)L_{33}^\pm(z), \end{aligned}$$

откуда

$$q(z-w)k_3^\pm(z)f_2^\pm(w) = (q^2z-w)f_2^\pm(w)k_3^\pm(z) - (q^2-1)zf_2^\pm(z)k_3^\pm(z).$$

Полагая $w = q^2z$, имеем

$$f_2^\pm(q^2z) = q^{-1}k_3^\pm(z)^{-1}f_2^\pm(z)k_3^\pm(z).$$

С другой стороны, соотношение (5) влечет

$$f_1^\pm(z) = -q^{-1/2}k_3^\pm(-q^{-3}z)^{-1}f_2^\pm(-q^{-3}z)k_3^\pm(-q^{-3}z).$$

Итак, мы получаем

$$\begin{aligned} f_2^\pm(z) &= -q^{-1/2}f_1^\pm(-qz), \\ e_2^\pm(z) &= -q^{1/2}e_1^\pm(-qz), \end{aligned} \tag{19}$$

где выражение для $e_2^\pm(z)$ выводится аналогичным образом. Выражения для $e_{31}^\pm(z)$ и $f_{13}^\pm(z)$ будут получены в разделе 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Соотношения (19) можно также вывести непосредственно из явной формулы для $L^\pm(z)$ аналогично тому, как мы проделали это для соотношений (17).

Теперь пусть

$$\begin{aligned} E_i(z) &= e_i^+(z) - e_i^-(z), \\ F_i(z) &= f_i^+(z) - f_i^-(z), \end{aligned}$$

тогда верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} E_2(z) &= -q^{1/2}E_1(-qz), \\ F_2(z) &= -q^{-1/2}F_1(-qz). \end{aligned} \tag{20}$$

Более того, из соотношений (4)–(7) следует

$$\begin{aligned} k_1^\pm(z)k_1^\pm(w) &= k_1^\pm(w)k_1^\pm(z), \\ k_1^-(z)k_1^+(w) &= k_1^+(w)k_1^-(z); \\ k_1^\pm(z)E_1(w)k_1^\pm(z)^{-1} &= \frac{q(z-w)}{q^2z-w}E_1(w), \\ k_1^\pm(z)^{-1}F_1(w)k_1^\pm(z) &= \frac{z-q^2w}{q(z-w)}F_1(w); \\ (qz+w)(z-q^2w)E_1(z)E_1(w) &= (z+qw)(q^2z-w)E_1(w)E_1(z), \\ (z+qw)(q^2z-w)F_1(z)F_1(w) &= (qz+w)(z-q^2w)F_1(w)F_1(z); \\ [E_1(z), F_1(w)] &= (q-q^{-1})\delta\left(\frac{z}{w}\right)(k_1^+(w)k_2^+(w)^{-1} - k_1^-(z)k_2^-(z)^{-1}). \end{aligned} \tag{21}$$

ТЕОРЕМА 3. *Изоморфизм⁴⁾ алгебр $\mathcal{A}_D$ и $\mathcal{A}_R$ может быть установлен посредством следующих отображений:*

$$\begin{aligned} q^{-1/4}(q - q^{-1})e(qz) &\mapsto E_1(z), \\ q^{1/4}(q - q^{-1})f(qz) &\mapsto F_1(z), \\ K^\pm(qz) &\mapsto k_1^\pm(z)k_2^\pm(z)^{-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (21) следует, что отображение (22) является гомоморфизмом. Для любого $n \geq 0$ гауссовы координаты $k_1^\pm[n]$ можно шаг за шагом выразить из произведения $k_1^\pm(z)k_2^\pm(z)^{-1}$, откуда, учитывая соотношения (18), (20), получаем, что отображение (22) является эпиморфизмом. Наконец, можно проверить, что композиция отображений (16), (13) и (22) является тождественным отображением.

4. СВЯЗЬ СО СЛОЖНЫМИ ТОКАМИ

В этом разделе мы напомним несколько определений, данных в работе [8], а затем выразим производящие функции $f_{13}^\pm(z)$ и $e_{31}^\pm(z)$ через токи Дринфелда.

Любая квантовая аффинная алгебра допускает два различных борелевских разложения. Борелевские подалгебры первого типа получаются из реализации Дринфелда. Пусть U_F – подалгебра $U_q(A_2^{(2)})$, порожденная $k^{\pm 1}$, f_n , $n \in \mathbb{Z}$; a_n , $n > 0$, а U_E – подалгебра $U_q(A_2^{(2)})$, порожденная $k^{\pm 1}$, e_n , $n \in \mathbb{Z}$; a_n , $n < 0$. “Токовая” борелевская подалгебра U_F содержит подалгебру U_f , порожденную f_n , $n \in \mathbb{Z}$, а “токовая” борелевская подалгебра U_E содержит подалгебру U_e , порожденную e_n , $n \in \mathbb{Z}$.

Борелевские подалгебры второго типа возникают из реализации Шевалле. Пусть $U_q(\mathfrak{b}_+)$ и $U_q(\mathfrak{b}_-)$ – подалгебры $U_q(A_2^{(2)})$, порожденные соответственно e_α , $e_{\delta-2\alpha}$, $k_\alpha^{\pm 1}$ и $e_{-\alpha}$, $e_{-(\delta-2\alpha)}$, $k_\alpha^{\pm 1}$. В образующих Дринфелда эти подалгебры порождены соответственно $k^{\pm 1}$, e_0 , $qf_1f_0 - f_0f_1$ и $k^{\pm 1}$, f_0 , $q^{-1}e_0e_{-1} - e_{-1}e_0$.

Пусть U_f^- , U_F^+ , U_e^+ и U_E^- обозначают следующие пересечения борелевских подалгебр:

$$\begin{aligned} U_f^- &= U_F \cap U_q(\mathfrak{b}_-), & U_F^+ &= U_F \cap U_q(\mathfrak{b}_+), \\ U_e^+ &= U_E \cap U_q(\mathfrak{b}_+), & U_E^- &= U_E \cap U_q(\mathfrak{b}_-). \end{aligned}$$

Верхний индекс отвечает той из борелевских подалгебр $U_q(\mathfrak{b}_\pm)$, которая содержит рассматриваемую алгебру, а нижний индекс отвечает той “токовой” борелевской подалгебре U_F или U_E , с которой берется пересечение. Эта буква прописная, если подалгебра содержит образующие, соответствующие мнимым корням, и строчная в противном случае.

Пусть P^+ и P^- являются проекторами, определенными так, чтобы для любых $f_+ \in U_F^+$ и $f_- \in U_f^-$

$$P^+(f_-f_+) = \varepsilon(f_-)f_+, \quad P^-(f_-f_+) = f_- \varepsilon(f_+). \quad (23)$$

⁴⁾Как и в замечании 2, описанное отображение является изоморфизмом ассоциативных алгебр. Оно сохраняет коединицу, но не сохраняет коумножения Δ и Δ_D .

Пусть P^{*+} и P^{*-} также являются проекторами, определенными так, чтобы для любых $e_+ \in U_e^+$ и $e_- \in U_E^-$

$$P^{*+}(e_+e_-) = e_+\varepsilon(e_-), \quad P^{*-}(e_+e_-) = \varepsilon(e_+)e_-. \quad (24)$$

Наконец, определим сложные токи $s(z)$ и $r(z)$ следующим образом:

$$s(z) = \operatorname{res} \big|_{w=-q^{-1}z} f(z)f(w) \frac{dw}{w},$$

$$r(z) = \operatorname{res} \big|_{w=-qz} e(w)e(z) \frac{dw}{w}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [8] определялись токи $s(z)$ и $\tilde{s}(z)$. Определение $s(z)$ дословно совпадает с приведенным здесь, тогда как $\tilde{s}(z) = -s(-qz)$, или, что эквивалентно,

$$\tilde{s}(z) = \operatorname{res} \big|_{w=-qz} f(w)f(z) \frac{dw}{w}.$$

В работе [8] также дано определение инволюции ι алгебры $U_q(A_2^{(2)})$:

$$\iota(e_n) = f_{-n}, \quad \iota(f_n) = e_{-n}, \quad \iota(a_n) = a_{-n}, \quad \iota(K_0) = K_0^{-1}.$$

Таким образом, ток $r(z)$ удовлетворяет равенству

$$r(z) = \iota(-\tilde{s}(z^{-1})).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При изоморфизме (22) гауссовы координаты $e_{31}^\pm(z)$ и $f_{13}^\pm(z)$ переходят в следующие выражения:

$$\begin{aligned} e_{31}^\pm(z) &\mapsto \mp(1-q)(q^{-1}[P^{\pm\pm}(e(-q^2z)), e_0]_{q^{-1}} + [-q^2ze_{-1}, P^{\pm\pm}(e(-q^2z)) \mp e_0]_{q^{-1}}), \\ f_{13}^\pm(z) &\mapsto \pm(1-q)(q[P^\pm(f(-q^2z)), f_0]_{q^{-1}} + [(-q^2z)^{-1}f_1, P^\pm(f(-q^2z)) \pm f_0]_{q^{-1}}). \end{aligned} \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассматриваем лишь ток $f_{13}^+(z)$, так как для остальных токов рассуждения аналогичны. Соотношения (7) влекут

$$\begin{aligned} (q^2 - 1)z(q^3z + w)l_{13}^+(z)l_{22}^-(w) + q(z - w)(q^3z + w)l_{23}^+(z)l_{12}^-(w) = \\ = (q^2 - 1)w(q^3z + w)l_{13}^-(w)l_{22}^+(z) + q(z - w)(q^3z + w)l_{12}^-(w)l_{23}^+(z). \end{aligned}$$

Полагая $w = 0$, имеем

$$(q - q^{-1})l_{13}^+(z) = [l_{12}^-(0), l_{23}^+(z)],$$

или, что эквивалентно,

$$(q - q^{-1})f_{13}^+(z)k_3^+(z) = f_1^-[0]f_2^+(z)k_3^+(z) - f_2^+(z)k_3^+(z)f_1^-[0].$$

Еще раз используя (7), мы получаем

$$k_3^+(z)f_1^-[0] = qf_1^-[0]k_3^+(z) + (q - q^{-1})q^{1/2}f_2^+(z)k_3^+(z),$$

откуда выводим

$$f_{13}^+(z) = \frac{1}{q - q^{-1}} (q^{1/2} f_1^+(-qz) f_1^-[0] - q^{-1/2} f_1^-[0] f_1^+(-qz)) - q^{-1/2} f_1^+(-qz)^2.$$

Теперь напомним один результат из работы [8]: с одной стороны, мы имеем

$$\begin{aligned} P(f(z_1)f(z_2)) &= f^+(z_1) \left(f^+(z_2) - \frac{q^2 - 1}{q^2 - z_2/z_1} f^+(z_1) \right) - \\ &\quad - \frac{(1 + q^3)(1 - z_2/z_1)}{(1 + q)(q^2 - z_2/z_1)(1 + qz_2/z_1)} P(s(z_1)), \end{aligned}$$

а с другой –

$$P(f(z_1)f(z_2)) = \frac{(q^2 - z_1/z_2)(q^{-1} + z_1/z_2)}{(1 - q^2 z_1/z_2)(1 + q^{-1} z_1/z_2)} P(f(z_2)f(z_1)).$$

Приравнявая правые части обоих соотношений, умножая равенство на z_2 и устремляя z_2 к бесконечности, мы получаем

$$\begin{aligned} (q - q^{-1})P(f(z))^2 &= (f_1 P(f(z)) - q^{-1} P(f(z)) f_1) z^{-1} + \frac{1 + q^3}{q(1 + q)} P(s(z)) + \\ &\quad + (f_1 f_0 - q^{-1} f_0 f_1) z^{-1}. \end{aligned}$$

Наконец, так как изоморфизм (22) отображает $f_1^\pm(-qz)$ в $\pm q^{1/4}(q - q^{-1})P^\pm(f(-q^2 z))$, мы выводим искомую формулу (25).

ТЕОРЕМА 4. *Изоморфизм (22) связывает гауссовы координаты $f_{13}^+(z)$, $e_{31}^+(z)$ и сложные токи $s(z)$, $r(z)$ при помощи следующих соотношений:*

$$\begin{aligned} P^+(s(-q^2 z)) &= \frac{1}{(q - q^{-1})(q - 1 + q^{-1})} f_{13}^+(z), \\ P^-(s(-q^2 z)) &= \frac{1}{(q - q^{-1})(q - 1 + q^{-1})} (f_1^-(z) f_2^-(z) - f_{13}^-(z)), \\ P^{*+}(r(-q^2 z)) &= \frac{1}{(q - q^{-1})(q - 1 + q^{-1})} e_{31}^+(z), \\ P^{*-}(r(-q^2 z)) &= \frac{1}{(q - q^{-1})(q - 1 + q^{-1})} (e_2^-(z) e_1^-(z) - e_{31}^-(z)). \end{aligned} \tag{26}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для тока $s(z)$ утверждение немедленно следует из предложения 3 и теоремы 1 работы [8]. Для тока $r(z)$ придется также воспользоваться инволюцией ι .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Так как $f_1^-(z) f_2^-(z) - f_{13}^-(z)$ и $e_2^-(z) e_1^-(z) - e_{31}^-(z)$ являются в точности угловыми элементами гауссова разложения обратного L -оператора $(L^-(z))^{-1}$, возможно, имеет смысл использовать элементы разложения именно обратного L -оператора $(L^-(z))^{-1}$ в качестве гауссовых координат вместо элементов разложения обычного L -оператора $L^-(z)$.

Благодарности. Автор благодарит С. М. Хорошкина за неоценимую помощь, многочисленные идеи и советы. Автор также благодарит С. З. Пакуляка за плодотворные обсуждения этой работы. Работа поддержана РФФИ (грант № 08-01-00667) и CNRS-РФФИ (грант № 09-01-93106-NCNIL) и Министерством образования и науки РФ (контракт 14.740.11.0081).

Список литературы

- [1] A. Izergin, V. Korepin, *Comm. Math. Phys.*, **79**:3 (1981), 303–316.
- [2] M. Jimbo, *Comm. Math. Phys.*, **102**:4 (1986), 537–547.
- [3] В. О. Тарасов, *ТМФ*, **76**:2 (1988), 184–198.
- [4] D. Fioravanti, F. Ravanini, M. Stanishkov, *Phys. Lett. B*, **367**:1–4 (1996), 113–120, arXiv: [hep-th/9510047](#).
- [5] S. M. Khoroshkin, V. N. Tolstoy, *Lett. Math. Phys.*, **24**:3 (1992), 231–244.
- [6] V. Chari, A. Pressley, *Comm. Math. Phys.*, **196**:2 (1998), 461–476.
- [7] J. Ding, S. M. Khoroshkin, *Adv. Math.*, **189**:2 (2004), 413–438.
- [8] S. Khoroshkin, A. Shapiro, *J. Geom. and Phys.*, **60**:11 (2010), 1833–1851.
- [9] В. Г. Дринфельд, *Докл. АН СССР*, **296**:1 (1987), 13–17.
- [10] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206.
- [11] N. Yu. Reshetikhin, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Lett. Math. Phys.*, **19**:2 (1990), 133–142.
- [12] J. T. Ding, I. B. Frenkel, *Comm. Math. Phys.*, **156**:2 (1993), 277–300.
- [13] J. Ding, S. Khoroshkin, *Lett. Math. Phys.*, **45**:4 (1998), 331–352.
- [14] W.-L. Yang, Y.-Z. Zhang, *J. Phys. A*, **34**:13 (2001), L205–L211.
- [15] D. Hernandez, *Int. Math. Res. Not.*, **2010**:1 (2010), 149–193, arXiv: 0704.2838.
- [16] J. Ding, S. Khoroshkin, *Transform. Groups*, **5**:1 (2000), 35–59.
- [17] S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *J. Math. Kyoto Univ.*, **48**:2 (2008), 277–321.
- [18] B. Enriquez, S. Khoroshkin, S. Pakuliak, *Comm. Math. Phys.*, **276**:3 (2007), 691–725.

Поступила в редакцию 18.07.2010