Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Хсин-Фу Шэнь, Нианн-Черн Ли, Мин-Хсиень Ту, Подход к универсальной иерархии Уизема на основе формулы для ядра, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 2, 257–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 10:25:33

© 2010 г. Хсин-Фу Шэнь*, Нианн-Черн Ли[†], Мин-Хсиень Ту[‡]

ПОДХОД К УНИВЕРСАЛЬНОЙ ИЕРАРХИИ УИЗЕМА НА ОСНОВЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЯДРА

На основе формулы для ядра, предложенной Кэроллом и Кодамой, выведены бездисперсионные уравнения Хироты для универсальной иерархии Уизема. Исходя из бездисперсионных уравнений Хироты проверены уравнения ассоциативности в этой иерархии и дана реализация ассоциативной алгебры со структурными константами, выраженными в терминах формул для вычетов.

Ключевые слова: формула для ядра, формулировка Лакса, бездисперсионные уравнения Хироты, иерархия Уизема, уравнения Виттена–Дийкграфа–Верлинде–Верлинде, формула для вычетов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время бездисперсионные интегрируемые иерархии были темой активных исследований. Бездисперсионная иерархия Кадомцева–Петвиашвили (БКП) [1]–[4] и бездисперсионная иерархия Тоды (бТ) [5], [6] в настоящее время являются прототипами систем в ряде областей физики и математики таких, как топологические теории поля, матричные модели, теория струн, лапласова проблема роста и конформные отображения (см., например, работы [7]–[17] и приведенную в них библиографию). Решение бездисперсионных интегрируемых иерархий можно охарактеризовать с помощью τ -функции, логарифм которой $F = \ln \tau$, называемый свободной энергией, удовлетворяет системе бездисперсионных уравнений Хироты (бХ) и дает решения уравнений ассоциативности или уравнений Виттена–Дийкграфа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ), введенных в контексте топологических теорий поля [18]–[20].

В работе [21] было показано, что уравнения ассоциативности закодированы в уравнениях бХ для иерархий БКП и бТ. Имеются несколько работ, посвященных выводу соответствующих уравнений бХ. Для БКП-иерархии они были выведены в работе [4] путем взятия бездисперсионного предела дифференциального тождества Фэя. Позже они исследовались в работе [22] в подходе, основанном на формуле для ядра. Что касается иерархии бТ, в работе [15] исследовались уравнения бХ

---

*Department of Mechanical Engineering, WuFeng Institute of Technology, Chiayi, Taiwan

[†]General Education Center, National Chinyi University of Technology, Taichung, Taiwan

[‡]Department of Physics, National Chung Cheng University, Chiayi, Taiwan.

E-mail: phymhtu@ccu.edu.tw

на языке конформных отображений. В работе [23] были выведены уравнения бХ как для иерархий бКП, так и для иерархий бТ в рамках комплексного анализа с использованием понятий многочленов Фабера и коэффициентов Грунски.

В настоящей работе мы сконцентрируемся на универсальной иерархии Уизема, которая была введена в работе [13] в качестве универсального подхода как к бездисперсионным интегрируемым системам, так и к модуляционным уравнениям Уизема. В частности, основной целью недавних исследований был случай рода нуль (см., например, работы [24]–[31]), поскольку универсальная иерархия Уизема является мастер-уравнением для многих других бездисперсионных интегрируемых систем. Основываясь на работе [22] (см. также [32]), мы хотим обобщить подход к бКП-иерархии, основанный на формуле для ядра, с тем чтобы вывести уравнения бХ для универсальной иерархии Уизема. Кроме того, черпая мотивировки из работы [21], мы пытаемся провести прямую проверку уравнений ассоциативности в универсальной иерархии Уизема с точки зрения уравнений бХ.

Работа построена следующим образом. В следующем разделе мы кратко напомним формулировку Лакса для универсальной иерархии Уизема в случае рода нуль. В разделе 3 подход на основе формулы для ядра применяется для вывода уравнений бХ универсальной иерархии Уизема. В разделе 4, следуя работе [21], мы доказываем уравнение ассоциативности для универсальной иерархии Уизема исходя из уравнений бХ, и получаем реализацию ассоциативной алгебры. Кроме того, мы кратко рассматриваем конечномерные редукции. Раздел 5 посвящен заключительным замечаниям.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЛАКСА УНИВЕРСАЛЬНОЙ ИЕРАРХИИ УИЗЕМА

Универсальная иерархия Уизема в случае рода нуль с $N + 1$ выделенными отмеченными точками q_α ($\alpha = 1, \dots, N$) и ∞ на сфере Римана определяется функциями Лакса [13]

$$\lambda_0(p) = p + \sum_{j=2} u_j p^{-j+1},$$

$$\lambda_\alpha(p) = \frac{r_\alpha}{p - q_\alpha} + \sum_{j=1} u_{\alpha j} (p - q_\alpha)^{j-1}, \quad \alpha = 1, \dots, N,$$

где u_j и $u_{\alpha j}$ – функции временных переменных t_{0n} ($n = 1, 2, \dots$) и $t_{\alpha n}$ ($\alpha = 1, \dots, N$; $n = 0, 1, \dots$). Можно рассматривать λ_0 как отображение, определенное в области Ω_0 , содержащей $p = \infty$, а λ_α – как отображения, определенные в областях Ω_α , содержащих $p = q_\alpha$. Для λ_0 и λ_α выполняются уравнения Лакса

$$\partial_{\alpha n} \lambda_\beta(p) = \{B_{\alpha n}(p), \lambda_\beta(p)\}, \quad \partial_{\alpha n} = \frac{\partial}{\partial t_{\alpha n}}, \quad (1)$$

где скобка Пуассона определяется как $\{f, g\} = \partial_p f \partial_{01} g - \partial_{01} f \partial_p g$ и

$$B_{0n}(p) = (\lambda_0^n)_{(0, \geq 0)},$$

$$B_{\alpha n}(p) = (\lambda_\alpha^n)_{(\alpha, < 0)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$B_{\alpha 0}(p) = -\ln(p - q_\alpha).$$

Следуя работам [27], [30], введем обозначения $(\cdot)_{(0,\geq 0)}$ и $(\cdot)_{(\alpha,<0)}$ для проекций соответственно на неотрицательные степени p и отрицательные степени $(p - q_\alpha)$. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda_0^n(p) &= B_{0n}(p) + O(p^{-1}), & p \rightarrow \infty, \\ \lambda_\alpha^n(p) &= B_{\alpha n}(p) + O(1), & p \rightarrow q_\alpha.\end{aligned}$$

В частности, $B_{01}(p) = p$ и $B_{\alpha 1}(p) = r_\alpha/(p - q_\alpha)$. Уравнения Лакса можно записать в виде уравнений Захарова–Шабата

$$\partial_{\beta n} B_{\alpha m}(p) - \partial_{\alpha m} B_{\beta n}(p) + \{B_{\alpha m}(p), B_{\beta n}(p)\} = 0,$$

что эквивалентно $\omega \wedge \omega = 0$, где

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} dB_{0n} \wedge dt_{0n} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} dB_{\alpha n} \wedge dt_{\alpha n}.$$

Вводя координаты Дарбу (λ_0, M_0) в Ω_0 и $(\lambda_\alpha, M_\alpha)$ в Ω_α , получаем $\omega = d\lambda_0 \wedge dM_0$ в Ω_0 и $\omega = d\lambda_\alpha \wedge dM_\alpha$ в Ω_α , где функции Орлова–Шульмана M_0 и M_α определяются как [27], [30]

$$\begin{aligned}M_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} nt_{0n} \lambda_0^{n-1} + \frac{t_{00}}{\lambda_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_0^{-n-1} v_{0n}, & t_{00} &= - \sum_{\alpha=1}^N t_{\alpha 0}, \\ M_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} nt_{\alpha n} \lambda_\alpha^{n-1} + \frac{t_{\alpha 0}}{\lambda_\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_\alpha^{-n-1} v_{\alpha n}\end{aligned}$$

и удовлетворяют уравнениям потоков

$$\partial_{\alpha n} M_\beta = \{B_{\alpha n}, M_\beta\}$$

и каноническим соотношениям $\{\lambda_0, M_0\} = \{\lambda_\alpha, M_\alpha\} = 1$.

Из выражений для симплектической два-формы ω в Ω_0 имеем

$$d\left(M_0 d\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_{0n} dt_{0n} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} B_{\alpha n} dt_{\alpha n}\right) = 0.$$

Поэтому существует такая S -функция S_0 , что

$$dS_0 = M_0 d\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_{0n} dt_{0n} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} B_{\alpha n} dt_{\alpha n}.$$

С другой стороны, в Ω_α имеем

$$dS_\alpha = M_\alpha d\lambda_\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} B_{0n} dt_{0n} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} B_{\alpha n} dt_{\alpha n}.$$

Оказывается, что функции Орлова–Шульмана M_0 и M_α можно выразить как

$$M_0 = \frac{\partial S_0(t)}{\partial \lambda_0}, \quad M_\alpha = \frac{\partial S_\alpha(t)}{\partial \lambda_\alpha}$$

и, таким образом, S -функции допускают разложения вида

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{n=1} t_{0n} \lambda_0^n + t_{00} \ln \lambda_0 - \sum_{n=1} \frac{\lambda_0^{-n}}{n} v_{0n}, \\ S_\alpha &= \sum_{n=1} t_{\alpha n} \lambda_\alpha^n + t_{\alpha 0} \ln \lambda_\alpha + \phi_\alpha - \sum_{n=1} \frac{\lambda_\alpha^{-n}}{n} v_{\alpha n}. \end{aligned}$$

Уравнения Гамильтона–Якоби определяются как $\partial_{\alpha n} S_\beta = B_{\alpha n}(p_\beta) = B_{\alpha n}(\partial_{01} S_\beta)$, так что

$$\begin{aligned} B_{0n} &= \partial_{0n} S_0 = \lambda_0^n - \sum_{m=1} \frac{\lambda_0^{-m}}{m} \partial_{0n} v_{0m} = \\ &= \partial_{0n} S_\alpha = \partial_{0n} \phi_\alpha - \sum_{m=1} \frac{\lambda_\alpha^{-m}}{m} \partial_{0n} v_{\alpha m}, \\ B_{\alpha n} &= \partial_{\alpha n} S_0 = - \sum_{m=1} \frac{\lambda_0^{-m}}{m} \partial_{\alpha n} v_{0m} = \\ &= \partial_{\alpha n} S_\beta = \delta_{\alpha\beta} \lambda_\beta^n + \partial_{\alpha n} \phi_\beta - \sum_{m=1} \frac{\lambda_\beta^{-m}}{m} \partial_{\alpha n} v_{\beta m}, \\ B_{\alpha 0} &= \partial_{\alpha 0} S_0 = - \ln \lambda_0 - \sum_{m=1} \frac{\lambda_0^{-m}}{m} \partial_{\alpha 0} v_{0m} = \\ &= \partial_{\alpha 0} S_\beta = \delta_{\alpha\beta} \ln \lambda_\beta + \partial_{\alpha 0} \phi_\beta - \sum_{m=1} \frac{\lambda_\beta^{-m}}{m} \partial_{\alpha 0} v_{\beta m}. \end{aligned}$$

Приведенные выше уравнения дают некоторые соотношения между коэффициентами $(u_j, u_{j\alpha}, r_\alpha, q_\alpha)$ и $(\phi_\alpha, v_{\alpha n})$. Например, из $B_{01} = p$ имеем

$$\begin{aligned} p &= \partial_{01} S_0(\lambda) = \lambda_0 - \sum_{m=1} \frac{\lambda_0^{-m}}{m} \partial_{01} v_{0m} \quad \text{в } \Omega_0, \\ p &= \partial_{01} S_\alpha(\lambda) = \partial_{01} \phi_\alpha - \sum_{m=1} \frac{\lambda_\alpha^{-m}}{m} \partial_{01} v_{\alpha m} \quad \text{в } \Omega_\alpha, \end{aligned}$$

откуда следует, что $u_2 = \partial_{01} v_{01}$, $q_\alpha = \partial_{01} \phi_\alpha$ и $r_\alpha = -\partial_{01} v_{\alpha 1}$. С другой стороны, $B_{\alpha 0}(p_\alpha) = \partial_{\alpha 0} S_\alpha = -\ln(p_\alpha - q_\alpha)$, что приводит к $r_\alpha = e^{-\partial_{\alpha 0} \phi_\alpha}$. Действительно, существует такая функция F [13], [27], [30], что

$$v_{0n} = F_{0n}, \quad v_{\alpha n} = F_{\alpha n}, \quad \phi_\alpha = -F_{\alpha 0} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} t_{\beta 0} \ln(-1), \quad (2)$$

где $F_{\alpha n} = \partial_{\alpha n} F$. Отсюда видим, что $u_2 = \partial_{01}^2 F$ – бКП-потенциал, а из уравнения $r_\alpha = e^{-\partial_{\alpha 0} \phi_\alpha}$ следует $\partial_{01} \partial_{\alpha 1} F - e^{\partial_{\alpha 0}^2 F} = 0$, что представляет собой в точности полевое уравнение бТ. Заметим, что уравнение Лакса для $t_{\alpha 0}$ -потока принимает вид $\partial_{\alpha 0} \lambda = \{B_{\alpha 0}, \lambda\} = (-1/p)(\partial \lambda / \partial t_{01})$, если положить q_α равным нулю. Скобку Пуассона не

совсем строго можно записать как

$$\{f, g\} = - \left(p \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial t_{\alpha 0}} - p \frac{\partial f}{\partial t_{\alpha 0}} \frac{\partial g}{\partial p} \right).$$

Временная переменная $-t_{\alpha 0}$, по-видимому, играет роль параметра s в обычной скобке Пуассона в иерархии бТ [4]–[6]. Поэтому универсальную иерархию Уизема можно рассматривать как комплекс, состоящий из одной бКП-иерархии и N копий иерархий типа бТ.

3. ПОДХОД КЭРОЛЛА–КОДАМЫ

3.1. Формулы для ядра. В отличие от бКП-иерархии и иерархии бТ, иерархия Уизема содержит $N+1$ функцию Лакса λ_0 и λ_α , которые соответственно определены в областях Ω_0 и Ω_α ($\alpha = 1, \dots, N$). Чтобы вывести формулу для ядра в универсальной иерархии Уизема, обобщим метод работы [22] на области Ω_0 , Ω_α , $\Omega_0 \cap \Omega_\alpha$ и $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ ($\alpha \neq \beta$).

В области Ω_0 из выражения $B_{01} = p = \partial_{01} S_0$ имеем

$$\lambda_0 - p - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_0^{-m}}{m} F_{01,0m} = 0.$$

Умножая эту формулу на $\lambda_0^{n-1} \partial_p \lambda_0$ и беря проекцию $()_{(0, \geq 0)}$, получаем

$$\partial_p Q_{0,n+1}(\lambda) - p \partial_p Q_{0,n}(\lambda) - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{F_{01,0m}}{m} \partial_p Q_{0,n-m}(\lambda) = 0, \quad n \geq 1, \quad (3)$$

где $Q_{0,n}(\lambda) = B_{0n}(\lambda)/n$. Проводя суммирование $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-n}$ и замечая, что $\partial_p Q_{0,1} = 1$, получаем

$$\left(\mu - p_0(\lambda) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{01,0m}}{m} \mu^{-m} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \partial_p Q_{0,n}(\lambda) \mu^{-n} = 1,$$

или

$$\frac{1}{p_0(\mu) - p_0(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_p Q_{0,n}(\lambda) \mu^{-n}. \quad (4)$$

Интегрируя это выражение по $p_0(\lambda)$ с постоянной интегрирования, фиксированной при $\mu \rightarrow \infty$, находим

$$\ln \frac{\mu}{p_0(\mu) - p_0(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{0,n}(\lambda)}{n} \mu^{-n}. \quad (5)$$

Перепишем выражения $p_0 = \partial_{01} S_0$ и $B_{0n} = \partial_{0n} S_0$ в формуле для ядра (5) как

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= \lambda - D_0(\lambda) F_{01}, \\ B_{0n}(\lambda) &= \lambda^n - D_0(\lambda) F_{0n}, \end{aligned}$$

где мы использовали обозначения $D_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (z^{-n}/n) \partial_{\alpha n}$. Тогда формула (5) принимает вид

$$e^{D_0(\mu) D_0(\lambda) F} = 1 - \frac{\partial_{01} (D_0(\mu) - D_0(\lambda)) F}{\mu - \lambda}. \quad (6)$$

В области Ω_α из формулы $B_{\alpha n} = \partial_{\alpha n} S_\alpha$ получаем

$$B_{\alpha 1} = \frac{r_\alpha}{p - q_\alpha} = \lambda_\alpha + \partial_{\alpha 1} \phi_\alpha - \sum_{m=1} \frac{\lambda_\alpha^{-m}}{m} F_{\alpha 1, \alpha m}.$$

Умножая это выражение на $\lambda_\alpha^{n-1} \partial_p \lambda_\alpha$ и беря проекцию $(\cdot)_{(0, \leq -2)}$, получаем

$$\partial_p Q_{\alpha, n+1}(\lambda) - \left(\frac{r_\alpha}{p - q_\alpha} - \partial_{\alpha 1} \phi_\alpha \right) \partial_p Q_{\alpha, n}(\lambda) - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{F_{\alpha 1, \alpha m}}{m} \partial_p Q_{\alpha, n-m}(\lambda) = 0, \quad (7)$$

где $Q_{\alpha, n}(\lambda) = B_{\alpha n}(\lambda)/n$, $n \geq 1$. Проводя суммирование $\sum_{n=0} \mu^{-n}$ и замечая, что $\partial_p Q_{\alpha, 1} = -(r_\alpha/(p - q_\alpha)^2)$, получаем

$$\left(\mu - \left(\frac{r_\alpha}{p - q_\alpha} - \partial_{\alpha 1} \phi_\alpha \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{\alpha 1, \alpha m}}{m} \mu^{-m} \right) \sum_{n=1} \partial_p Q_{\alpha, n}(\lambda) \mu^{-n} = -\frac{r_\alpha}{(p - q_\alpha)^2},$$

или

$$\frac{p_\alpha(\mu) - q_\alpha}{(p_\alpha(\mu) - p_\alpha(\lambda))(p_\alpha(\lambda) - q_\alpha)} = \sum_{n=1} \partial_p Q_{\alpha, n}(\lambda) \mu^{-n}. \quad (8)$$

Интегрируя это выражение по $p_\alpha(\lambda)$ с постоянной интегрирования, фиксированной при $\mu \rightarrow \infty$, находим

$$\ln \frac{p_\alpha(\lambda) - q_\alpha}{p_\alpha(\lambda) - p_\alpha(\mu)} = \sum_{n=1} \frac{B_{\alpha, n}(\lambda)}{n} \mu^{-n}. \quad (9)$$

Перепишем выражения $p_\alpha - q_\alpha$, p_α и $B_{\alpha n}$ в формуле для ядра (9) как

$$\begin{aligned} p_\alpha - q_\alpha &= e^{-\partial_{\alpha 0} S_\alpha(\lambda)} = -\frac{1}{\lambda} e^{\partial_{\alpha 0}(\partial_{\alpha 0} + D_\alpha(\lambda))F}, \\ p_\alpha(\lambda) &= \partial_{01} S_\alpha(\lambda) = \partial_{01} \phi_\alpha - D_\alpha(\lambda) F_{01}, \\ B_{\alpha n} &= \partial_{\alpha n} S_\alpha(\lambda) = \lambda^n + \partial_{\alpha n} \phi_\alpha - D_\alpha(\lambda) F_{\alpha n}. \end{aligned}$$

Тогда формула (9) принимает вид

$$e^{(\partial_{\alpha 0} + D_\alpha(\mu))(\partial_{\alpha 0} + D_\alpha(\lambda))F} = -\frac{\mu \lambda}{\mu - \lambda} \partial_{01} (D_\alpha(\mu) - D_\alpha(\lambda)) F. \quad (10)$$

В области $\Omega_0 \cap \Omega_\alpha$ перепишем выражение (5) как

$$\frac{\mu}{\partial_{01} S_0(\mu) - \partial_{01} S_0(\lambda)} = e^{\sum_{n=1} (\partial_{0n} S_0(\lambda)/n) \mu^{-n}}.$$

Заменяя $S_0(\lambda)$ на $S_\alpha(\lambda)$ и используя соотношения

$$\begin{aligned} \partial_{01} S_\alpha(\lambda) &= \partial_{01} \phi_\alpha - D_\alpha(\lambda) F_{01}, \\ \partial_{0n} S_\alpha(\lambda) &= \partial_{0n} \phi_\alpha - D_\alpha(\lambda) F_{0n}, \end{aligned}$$

получаем

$$\mu e^{D_0(\mu)(\partial_{\alpha 0} + D_{\alpha}(\lambda))F} = \mu - \partial_{01}(D_0(\mu) - \partial_{\alpha 0} - D_{\alpha}(\lambda))F. \quad (11)$$

С другой стороны, можно вывести формулу (11) из формулы (9), записав ее в виде

$$\frac{e^{-\partial_{\alpha 0} S_{\alpha}(\lambda)}}{\partial_{01} S_{\alpha}(\lambda) - \partial_{01} S_{\alpha}(\mu)} = e^{\sum_{n=1} (\partial_{\alpha n} S_{\alpha}(\lambda)/n) \mu^{-n}}.$$

После замены $S_{\alpha}(\lambda)$ на $S_0(\lambda)$ данное соотношение принимает вид

$$\lambda e^{D_0(\lambda)(\partial_{\alpha 0} + D_{\alpha}(\mu))F} = \lambda - \partial_{01}(D_0(\lambda) - \partial_{\alpha 0} - D_{\alpha}(\mu))F,$$

что после замены $\lambda \leftrightarrow \mu$ совпадает с (11).

В области $\Omega_{\alpha} \cap \Omega_{\beta}$ при $\alpha \neq \beta$ перепишем формулу (9) в виде

$$\frac{e^{-\partial_{\alpha 0} S_{\alpha}(\lambda)}}{\partial_{01} S_{\alpha}(\lambda) - \partial_{01} S_{\alpha}(\mu)} = e^{\sum_{n=1} (\partial_{\alpha n} S_{\alpha}(\lambda)/n) \mu^{-n}}.$$

После замены $S_{\alpha}(\lambda)$ на $S_{\beta}(\lambda)$ это равенство принимает вид

$$\frac{e^{-\partial_{\alpha 0} S_{\beta}(\lambda)}}{\partial_{01} S_{\beta}(\lambda) - \partial_{01} S_{\alpha}(\mu)} = e^{\sum_{n=1} (\partial_{\alpha n} S_{\beta}(\lambda)/n) \mu^{-n}}. \quad (12)$$

Поскольку

$$e^{-\partial_{\alpha 0} S_{\beta}(\lambda)} = e^{-\partial_{\alpha 0} \phi_{\beta} + \partial_{\alpha 0} D_{\beta}(\lambda)F} = -\epsilon_{\alpha\beta} e^{\partial_{\alpha 0} (\partial_{\beta 0} + D_{\beta}(\lambda))F},$$

имеем

$$\begin{aligned} \partial_{01} S_{\beta}(\lambda) - \partial_{01} S_{\alpha}(\mu) &= \partial_{01}(D_{\alpha}(\mu) + \partial_{\alpha 0} - \partial_{\beta 0} - D_{\beta}(\lambda))F, \\ \partial_{\alpha n} S_{\beta}(\lambda) &= \partial_{\alpha n} \phi_{\beta} - \sum_{m=1} \frac{F_{\alpha n, \beta m}}{m} \lambda^{-m}, \end{aligned}$$

где ϕ_{β} определяется из формулы (2), а

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1, & \alpha \leq \beta \\ -1, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение (12) можно записать как

$$\epsilon_{\alpha\beta} e^{(\partial_{\alpha 0} + D_{\alpha}(\mu))(\partial_{\beta 0} + D_{\beta}(\lambda))F} = -\partial_{01}(D_{\alpha}(\mu) + \partial_{\alpha 0} - \partial_{\beta 0} - D_{\beta}(\lambda))F. \quad (13)$$

Уравнения (6), (10), (11) и (13) составляют бХ-уравнения для универсальной иерархии Уизема в роде нуль. Они описывают алгебраические соотношения между вторыми производными свободной энергии F . Замечательно, что наши результаты совпадают с результатами работы [30], где эти уравнения были выведены из уравнений Гамильтона–Якоби в контексте многочленов Фабера.

3.2. Бездисперсионные уравнения Хироты. Используем параметризацию $\hat{t}_{0n} = nt_{0n}$, $\hat{t}_{\alpha 0} = t_{\alpha 0}$ и $\hat{t}_{\alpha n} = nt_{\alpha n}$ из работы [31], соответствующие временные производные запишем как $\hat{\partial}_{\alpha n} = \partial/\partial \hat{t}_{\alpha n}$. Тогда четыре уравнения бХ можно переписать в виде [30]

$$\begin{aligned}\hat{D}_0(\mu)\hat{D}_0(\lambda)F &= \ln \frac{p_0(\mu) - p_0(\lambda)}{\mu - \lambda}, \\ \hat{D}_\alpha(\mu)\hat{D}_\alpha(\lambda)F &= \ln \frac{\mu\lambda(p_\alpha(\mu) - p_\alpha(\lambda))}{\mu - \lambda}, \\ \hat{D}_0(\mu)\hat{D}_\alpha(\lambda)F &= \ln \frac{p_0(\mu) - p_\alpha(\lambda)}{\mu}, \\ \hat{D}_\alpha(\mu)\hat{D}_\beta(\lambda)F &= \ln \frac{p_\alpha(\mu) - p_\beta(\lambda)}{\varepsilon_{\alpha\beta}},\end{aligned}\tag{14}$$

где введены обозначения $\hat{D}_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (z^{-n}/n)\partial_{0n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\hat{\partial}_{0n}$ и $\hat{D}_\alpha(z) = \partial_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} (z^{-n}/n)\partial_{\alpha n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\hat{\partial}_{\alpha n}$. Эта система уравнений представляет для нас основной интерес в дальнейшем. Заметим, что если применить оператор дифференцирования $\hat{D}_\delta(\nu)$ к этим уравнениям, то их вид не изменится. Результат можно выразить в виде одного уравнения:

$$\hat{D}_\alpha(\mu)\hat{D}_\beta(\lambda)\hat{D}_\delta(\nu)F = -\frac{(\hat{D}_\alpha(\mu) - \hat{D}_\beta(\lambda))\hat{D}_\delta(\nu)\hat{F}_{01}}{p_\alpha(\mu) - p_\beta(\lambda)},\tag{15}$$

где $\alpha, \beta, \delta = 0, 1, 2, \dots, N$. Действительно, можно переписать уравнения (14) в виде системы уравнений, которым удовлетворяют вторые производные функции F . Заменяя $\mu \rightarrow \lambda$ в системе (14), получаем

$$\begin{aligned}k\hat{F}_{0k,01} &= P_{k+1}(X), \quad X_1 = 0, \quad X_{j \geq 2} = \sum_{n+m=j} \hat{F}_{0n,0m}, \\ k\hat{F}_{\alpha k,01} &= e^{\hat{F}_{\alpha 0, \alpha 0}} P_{k-1}(X), \quad X_{j \geq 1} = \sum_{n+m=j} \hat{F}_{\alpha n, \alpha m}, \\ k\hat{F}_{0k,01} &= P_{k+1}(X) - \sum_{l=1}^{k+1} Y_l P_{k+1-l}(X), \quad X_{j \geq 1} = \sum_{n+m=j} \hat{F}_{0n, \alpha m}, \\ Y_j &= \sum_{n+m=j} n\hat{F}_{0n, \alpha m}, \\ k\hat{F}_{\alpha k,01} &= \mp e^{\hat{F}_{\alpha 0, \beta 0}} \sum_{l=1}^k Y_l P_{k-l}(X), \quad X_{j \geq 1} = \sum_{n+m=j} \hat{F}_{\alpha n, \beta m}, \\ Y_j &= \sum_{n+m=j, n \geq 1} n\hat{F}_{\alpha n, \beta m},\end{aligned}$$

где $k \geq 1$ и $P_k(X)$ – многочлены Шура, определяемые из $e^{\sum_{j=1} X_j s^j} = \sum_{k=0} P_k(X) s^k$. Приведем первые нетривиальные уравнения для каждого уравнения бХ:

$$\begin{aligned}\widehat{F}_{03,01} - \widehat{F}_{02,02} - \frac{\widehat{F}_{01,01}^2}{2} &= 0, \\ \widehat{F}_{\alpha 1,01} - e^{\widehat{F}_{\alpha 0,\alpha 0}} &= 0, \\ \widehat{F}_{01,01} + \widehat{F}_{02,\alpha 0} + \frac{\widehat{F}_{01,\alpha 0}^2}{2} &= 0, \\ \widehat{F}_{\alpha 1,01} \pm e^{\widehat{F}_{\alpha 0,\beta 0}} \widehat{F}_{\alpha 1,\beta 0} &= 0.\end{aligned}$$

Заметим, что в терминах $t_{\alpha n}$ первое и второе уравнения суть в точности уравнения БКП и БТ соответственно.

4. УРАВНЕНИЯ АССОЦИАТИВНОСТИ ДЛЯ ИЕРАРХИИ УИЗЕМА

4.1. Уравнения ВДВВ. Пусть F – функция временных переменных $\hat{t}_J$ с индексами $J \in \{(0, n), (\alpha, m)\}$, $\alpha = 1, \dots, N$, $n \geq 1$, $m \geq 0$. Обозначим $\widehat{F}_J = \hat{\partial}_J F$, $\widehat{F}_{JK} = \hat{\partial}_J \hat{\partial}_K F$ и т.д. Определим $\hat{t}_I = \hat{t}_{01}$ и введем невырожденную метрику $\hat{\eta}_{JK} = \widehat{F}_{JKI}$, которая задает преобразование между $\{\hat{t}_J\}$ и $\{\widehat{F}_{KI}\}$. Тогда

$$\widehat{F}_{JKL} = \sum_A \frac{\partial \widehat{F}_{JK}}{\partial \widehat{F}_{AI}} \frac{\partial \widehat{F}_{AI}}{\partial \hat{t}_L} = \sum_A \widehat{C}_{JK}^A \hat{\eta}_{AL}, \quad (16)$$

где определенные выше коэффициенты $\widehat{C}_{JK}^A$ связывают $\widehat{F}_{JKL}$ и $\hat{\eta}_{AL}$. Заметим, что, полагая $J = I$, получаем $\hat{\eta}_{KL} = \sum_A \widehat{C}_{IK}^A \hat{\eta}_{AL}$, поэтому $\widehat{C}_{IK}^A = \delta_K^A$. Если $\widehat{C}_{JK}^L$ являются структурными постоянными ассоциативной алгебры, порожденной $\{\hat{\phi}_J\}$, т.е. $\hat{\phi}_J \cdot \hat{\phi}_K = \sum_L \widehat{C}_{JK}^L \hat{\phi}_L$, то условие ассоциативности $(\hat{\phi}_J \cdot \hat{\phi}_K) \cdot \hat{\phi}_L = \hat{\phi}_J \cdot (\hat{\phi}_K \cdot \hat{\phi}_L)$ принимает вид $\widehat{C}_{JK}^M \widehat{C}_{ML}^N = \widehat{C}_{JM}^N \widehat{C}_{KL}^M$ или, эквивалентно,

$$\sum_M \widehat{C}_{JK}^M \widehat{F}_{MLN} = \sum_M \widehat{C}_{KL}^M \widehat{F}_{JMN}.$$

Приведенные выше уравнения известны как уравнения ВДВВ, появляющиеся в контексте топологической теории поля [18]–[20]. Определим величину с четырьмя индексами $\widehat{X}_{JKLMN} = \sum_L \widehat{C}_{JK}^L \widehat{F}_{LMN}$. Тогда уравнения ВДВВ можно заменить на условие, что $\widehat{X}_{JKLMN}$ симметричны по отношению к перестановкам любых индексов. Используя оператор $\widehat{D}_\alpha(z)$, введенный в предыдущем разделе, удобно определить производящие функции для $\widehat{F}_{JK}$, $\widehat{F}_{JKL}$, $\widehat{C}_{JK}^L$ и $\widehat{X}_{JKLM}$ следующим образом:

$$\widehat{D}_\alpha(u) \widehat{D}_\beta(v) F = \sum_{n,m=0} u^{-n} v^{-m} \widehat{F}_{\alpha n, \beta m}, \quad (17)$$

$$\widehat{D}_\alpha(u) \widehat{D}_\beta(v) \widehat{D}_\gamma(w) F = \sum_{n,m,l=0} u^{-n} v^{-m} w^{-l} \widehat{F}_{\alpha n, \beta m, \gamma l}, \quad (18)$$

$$\widehat{C}^J(u_\alpha, v_\beta) = \sum_{n,m=0} u^{-n} v^{-m} \widehat{C}_{\alpha n, \beta m}^J, \quad (19)$$

$$\widehat{X}(u_\alpha, v_\beta, w_\gamma, z_\delta) = \sum_{n,m,k,l=0} u^{-n} v^{-m} w^{-k} z^{-l} \widehat{X}_{\alpha n, \beta m, \gamma k, \delta l}. \quad (20)$$

Тогда уравнения ВДВВ можно выразить в терминах производящей функции как

$$\widehat{X}(u_\alpha, v_\beta, w_\gamma, z_\delta) = \widehat{X}(u_\alpha, w_\gamma, v_\beta, z_\delta).$$

4.2. От бХ к ВДВВ. Применяя $\hat{\partial}_{\alpha l}$ к уравнению бХ (первому из уравнений (14)), получаем

$$\widehat{D}_0(u)\widehat{D}_0(v)\hat{\partial}_{\alpha l}F = -\frac{(\widehat{D}_0(u) - \widehat{D}_0(v))\hat{\partial}_{\alpha l}\widehat{F}_{01}}{p_0(u) - p_0(v)}.$$

Левая часть равна

$$\begin{aligned}\widehat{D}_0(u)\widehat{D}_0(v)\hat{\partial}_{\alpha l}F &= \sum_{n,m=1} u^{-n}v^{-m}\widehat{F}_{0n,0m,\alpha l} = \\ &= \sum_J \sum_{n,m=1} u^{-n}v^{-m}\widehat{C}_{0n,0m}^J \widehat{F}_{J,\alpha l,I} = \sum_J \widehat{C}^J(u_0, v_0)\widehat{F}_{J,\alpha l,I},\end{aligned}$$

а правая часть

$$-\frac{(\widehat{D}_0(u) - \widehat{D}_0(v))\hat{\partial}_{\alpha l}\widehat{F}_{01}}{p_0(u) - p_0(v)} = -\sum_{k=1} \frac{u^{-k} - v^{-k}}{p_0(u) - p_0(v)}\widehat{F}_{0k,\alpha l,I}.$$

Таким образом, имеем

$$\widehat{C}^J(u_0, v_0) = \begin{cases} -\frac{u^{-n} - v^{-n}}{p_0(u) - p_0(v)}, & J = (0, n), \\ 0, & J = \{(\alpha, n); \alpha \neq 0\}. \end{cases} \quad (21)$$

Аналогично из остальных уравнений (14) можно получить другие производящие функции для структурных констант. Приведем полученные формулы:

$$\begin{aligned}\widehat{C}^J(u_\alpha, v_\alpha) &= \begin{cases} -\frac{u^{-n} - v^{-n}}{p_\alpha(u) - p_\alpha(v)}, & J = \{(\alpha, n); \alpha \neq 0\}, \\ 0, & J = (0, n), \end{cases} \\ \widehat{C}^J(u_0, v_\alpha) &= \begin{cases} \frac{-u^{-n}}{p_0(u) - p_\alpha(v)}, & J = (0, n), \\ \frac{v^{-n}}{p_0(u) - p_\alpha(v)}, & J = \{(\alpha, n); \alpha \neq 0\}, \end{cases} \\ \widehat{C}^J(u_\alpha, v_\beta) &= \begin{cases} \frac{-u^{-n}}{p_\alpha(u) - p_\beta(v)}, & J = \{(\alpha, n); \alpha \neq 0\}, \\ \frac{v^{-n}}{p_\alpha(u) - p_\beta(v)}, & J = \{(\beta, n); \beta \neq 0\}. \end{cases}\end{aligned}$$

Сравнивая эти выражения с выражением (19), легко показать, что

$$\begin{aligned}\widehat{C}_{0n,0m}^{0k} &= 0, & k > n + m - 1; & \quad \widehat{C}_{\alpha n, \alpha m}^{\alpha k} = 0, & k > n + m + 1; \\ \widehat{C}_{0n, \alpha m}^{0k} &= 0, & k > n - 1; & \quad \widehat{C}_{0n, \alpha m}^{\alpha k} = 0, & k > m; \\ \widehat{C}_{\alpha n, \beta m}^{\alpha k} &= 0, & k > n; & \quad \widehat{C}_{\alpha n, \beta m}^{\beta k} = 0, & k > m;\end{aligned}$$

поэтому бесконечная сумма в формуле (16) становится конечной.

Теперь можно показать, что любое решение F универсальной иерархии Уизе-ма подчиняется уравнению ассоциативности с этими структурными константами. Чтобы показать, что производящая функция (20) полностью симметрична

по отношению к перестановкам $u_\alpha, v_\beta, w_\gamma, z_\delta$, достаточно доказать, что она симметрична по отношению к перестановкам v_β и w_γ в выражении (20), т.е. что $\hat{X}(u_\alpha, v_\beta, w_\gamma, z_\delta) = \hat{X}(u_\alpha, w_\gamma, v_\beta, z_\delta)$.

В случае $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ нужно доказать, что

$$\begin{aligned} (p_\alpha(u) - p_\gamma(w))(\hat{D}_\alpha(u) - \hat{D}_\beta(v))\hat{D}_\gamma(w)\hat{D}_\delta(z)F = \\ = (p_\alpha(u) - p_\beta(v))(\hat{D}_\alpha(u) - \hat{D}_\gamma(w))\hat{D}_\beta(v)\hat{D}_\delta(z)F. \end{aligned} \quad (22)$$

Пользуясь уравнением (15), легко проверить, что это тождество. В другом случае, когда $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, нужно доказать, что

$$\begin{aligned} (p_0(u) - p_0(w))(\hat{D}_0(u) - \hat{D}_0(v))\hat{D}_0(w)\hat{D}_0(z)F = \\ = (p_0(u) - p_0(v))(\hat{D}_0(u) - \hat{D}_0(w))\hat{D}_0(v)\hat{D}_0(z)F. \end{aligned}$$

Используя уравнение (15), можно видеть, что это действительно выполняется. В случае $\alpha \neq \gamma \neq \delta, \beta = 0$ нужно доказать, что

$$\begin{aligned} (p_\alpha(u) - p_\gamma(w))(\hat{D}_0(v) - \hat{D}_\alpha(u))\hat{D}_\gamma(w)\hat{D}_\delta(z)F = \\ = (p_0(v) - p_\alpha(u))(\hat{D}_\alpha(u) - \hat{D}_\gamma(w))\hat{D}_0(v)\hat{D}_\delta(z)F. \end{aligned}$$

Можно также проверить, что это выполняется в силу уравнения (15). В остальных случаях вычисления аналогичны приведенным выше, и мы их опускаем.

4.3. Реализация ассоциативной алгебры. Для построения генераторов $\{\hat{\phi}_J\}$, реализующих ассоциативную алгебру со структурными константами $\hat{C}_{JK}^L$, полученными в предыдущем пункте, определим

$$\hat{\phi}_{\alpha n}(p) = \begin{cases} \frac{dQ_{\alpha n}(p)}{dp}, & \alpha = 0, 1, \dots, N, \quad n \geq 1, \\ \frac{dB_{\alpha 0}(p)}{dp}, & \alpha = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (23)$$

Тем самым $\hat{\phi}_{0n}(p)$ являются многочленами по p , а $\hat{\phi}_{\alpha n}(p)$ при $\alpha \neq 0$ – многочленами по $(p - q_\alpha)^{-1}$. В частности, $\hat{\phi}_{01}(p) = 1$ – единичный элемент алгебры. Уравнения (3) и (7) дают рекуррентные соотношения для $\hat{\phi}_{0n}(p)$ и $\hat{\phi}_{\alpha n}(p)$ соответственно. Имеется четыре класса, которые мы рассмотрим.

В области Ω_0 из формулы для ядра (4) имеем

$$\frac{1}{p_0(z) - p} = \sum_{n=1} z^{-n} \hat{\phi}_{0n}(p). \quad (24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p_0(z) - p)(p_0(w) - p)} &= \sum_{n,m=1} z^{-n} w^{-m} \hat{\phi}_{0n}(p) \cdot \hat{\phi}_{0m}(p) = \\ &= -\frac{1}{p_0(z) - p_0(w)} \left(\frac{1}{p_0(z) - p} - \frac{1}{p_0(w) - p} \right) = \\ &= -\frac{1}{p_0(z) - p_0(w)} \left(\sum_{l=1} (z^{-l} - w^{-l}) \hat{\phi}_{0l}(p) \right) = \\ &= \sum_{l=1} \hat{C}^{0l}(z_0, w_0) \hat{\phi}_{0l}(p), \end{aligned}$$

откуда с учетом (19) следует

$$\hat{\phi}_{0n} \cdot \hat{\phi}_{0m} = \sum_{l=1} \hat{C}_{0n,0m}^{0l} \hat{\phi}_{0l}(p). \quad (25)$$

Заметим, что в области Ω_α формулу для ядра (8) можно переписать в виде

$$\frac{1}{p_\alpha(w) - p} = \sum_{m=0} w^{-m} \hat{\phi}_{\alpha m}(p). \quad (26)$$

Аналогично имеем

$$\hat{\phi}_{\alpha n} \cdot \hat{\phi}_{\alpha m} = \sum_{l=0} \hat{C}_{\alpha n, \alpha m}^{\alpha l} \hat{\phi}_{\alpha l}(p).$$

В то же время в области $\Omega_0 \cap \Omega_\alpha$ нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0(z) - p} \frac{1}{p_\alpha(w) - p} &= \sum_{n=1, m=0} z^{-n} w^{-m} \hat{\phi}_{0n}(p) \cdot \hat{\phi}_{\alpha m}(p) = \\ &= -\frac{1}{p_0(z) - p_\alpha(w)} \left(\frac{1}{p_0(z) - p} - \frac{1}{p_\alpha(w) - p} \right) = \\ &= -\frac{1}{p_0(z) - p_\alpha(w)} \left(\sum_{n=1} z^{-n} \hat{\phi}_{0n} - \sum_{n=0} w^{-n} \hat{\phi}_{\alpha n} \right) = \\ &= \sum_{n=1} \hat{C}^{0n}(z_0, w_\alpha) \hat{\phi}_{0n} + \sum_{n=0} \hat{C}^{\alpha n}(z_0, w_\alpha) \hat{\phi}_{\alpha n}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\hat{\phi}_{0n} \cdot \hat{\phi}_{\alpha m} = \sum_{l=1} \hat{C}_{0n, \alpha m}^{0l} \hat{\phi}_{0l}(p) + \sum_{l=0} \hat{C}_{0n, \alpha m}^{\alpha l} \hat{\phi}_{\alpha l}(p).$$

Наконец, в области $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$

$$\hat{\phi}_{\alpha n} \cdot \hat{\phi}_{\beta m} = \sum_{l=0} \hat{C}_{\alpha n, \beta m}^{\alpha l} \hat{\phi}_{\alpha l}(p) + \sum_{l=0} \hat{C}_{\alpha n, \beta m}^{\beta l} \hat{\phi}_{\beta l}(p).$$

Поэтому генераторы $\{\hat{\phi}_J\}$ действительно удовлетворяют алгебре $\hat{\phi}_J \cdot \hat{\phi}_K = \sum_L \hat{C}_{JK}^L \hat{\phi}_L$ со структурными константами, определенными в предыдущем разделе.

Теперь выведем формулы вычетов для третьих производных функции F непосредственно из уравнений бХ. Применяя $\hat{\partial}_{01}$ к первому уравнению бХ (14), видим, что

$$\hat{D}_0(u) \hat{D}_0(v) \hat{F}_{01} = -\frac{1}{p_0(u) - p_0(v)} (\hat{D}_0(u) - \hat{D}_0(v)) \hat{F}_{01,01}$$

и, таким образом,

$$\hat{D}_0(u) \hat{D}_0(v) \hat{D}_0(w) F = \sum_{i=1}^3 \operatorname{res}_{p_i} \frac{\hat{D}_0(\lambda(p)) \hat{F}_{01,01}}{(p - p_0(u))(p - p_0(v))(p - p_0(w))} dp. \quad (27)$$

Разлагая обе части уравнения (27) по степеням u, v, w , получаем

$$\hat{F}_{0i,0j,0k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} \frac{\hat{\partial}_{01} \lambda(p)}{\lambda'(p)} \hat{\phi}_{0i} \hat{\phi}_{0j} \hat{\phi}_{0k} dp,$$

где, пользуясь равенством $0 = \hat{\partial}_{01}\lambda(p) = \hat{\partial}_{01}p(\lambda) + \partial_\lambda p(\lambda)\hat{\partial}_{01}\lambda$, мы произвели замену $\hat{D}_0(\lambda)\hat{F}_{01,01} = -\hat{\partial}_{01}p(\lambda) = \hat{\partial}_{01}\lambda/\lambda'(p)$ в числителе выражения (27). В тех случаях, когда имеются индексы из различных областей, можно вывести эти формулы путем прямых вычислений. На самом деле их можно выразить в виде единого уравнения

$$\hat{D}_\alpha(u)\hat{D}_\beta(v)\hat{D}_\gamma(w)F = \sum_{i=1}^3 \text{res}_{p_i} \left(\frac{\hat{D}(\lambda)\hat{F}_{01,01}}{(p-p_\alpha(u))(p-p_\beta(v))(p-p_\gamma(w))} dp \right),$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, N$, а $\hat{D}(\lambda)$ определено как $\hat{D}(\lambda(p_\alpha)) = \hat{D}_\alpha(\lambda)$.

4.4. Конечномерные редукции. Рассмотрим конечномерные редукции иерархии Уизема. Предположим, что $\phi_\alpha(\lambda)$ – не зависящие от времени функции такие, что $E(p) = \phi_\alpha(\lambda(p))$ – мероморфная функция p в Ω_α ($\alpha = 0, \dots, N$), причем число полюсов не меняется под действием потоков $\hat{t}_{\alpha n}$. Тогда суммирование вычетов для третьей производной функции F ведется по нулям $E'(p)$:

$$\hat{F}_{JKL} = \sum_{E'(p_s)=0} \text{res}_{p_s} \left(\frac{-\hat{\partial}_{01}E(p)}{E'(p)} \hat{\phi}_J(p)\hat{\phi}_K(p)\hat{\phi}_L(p) dp \right). \quad (28)$$

Подобная конечномерная редукция налагает набор дополнительных связей на систему, и алгебра становится конечномерной. Поскольку неизвестными в системе являются функции вторых производных свободной энергии F , в качестве независимых переменных можно выбрать так называемые примарные поля $\hat{F}_{01,P} \equiv \hat{F}_{IP}$, где временные параметры $\{\hat{t}_P\}$ порождают конечномерное малое фазовое пространство. Все остальные $\hat{F}_{ID}$ можно выразить в терминах этих примарных полей через функциональное соотношение $Q_D(F_{IP})$, где D обозначает эти временные индексы вне множества P . С учетом такого разделения перепишем выражение для $\hat{F}_{KLM}$ в виде

$$\hat{F}_{KLM} = \sum_{J \in P} \left(\hat{C}_{KL}^J + \sum_D \hat{C}_{KL}^D \frac{\partial Q_D}{\partial F_{IJ}} \right) \hat{F}_{JMI} = \sum_{J \in P} \tilde{C}_{KL}^J \hat{F}_{JMI}. \quad (29)$$

Объект $\tilde{C}_{KL}^J = \hat{C}_{KL}^J + \sum_D \hat{C}_{KL}^D (\partial Q_D / \partial F_{IJ})$ определяет структурные константы конечномерной алгебры, порожденной примарными полями. Соответственно конечномерное уравнение ВДВВ теперь определено как $\tilde{\hat{X}}_{JKLM} \equiv \sum_{A \in P} \tilde{C}_{JK}^A \hat{F}_{ALM}$, $J, K, L, M \in P$. Следуя работе [21], можно показать, что $\tilde{\hat{X}}_{JKLM}$ полностью симметричны по всем индексам из множества P , так как $\tilde{\hat{X}}_{JKLM} = \hat{X}_{JKLM}$ при $J, K, L, M \in P$. Этим завершается проверка уравнений ассоциативности, соответствующих конечномерным редукциям уравнения бХ.

Определим скалярное произведение

$$\langle f \cdot g \rangle = \sum_{E'(p_s)=0} \text{res}_{p_s} \left(\frac{-\hat{\partial}_{01}E(p)}{E'(p)} f(p)g(p) dp \right). \quad (30)$$

Получим, что $\eta_{JK} = \hat{F}_{JKI} = \langle \hat{\phi}_J \cdot \hat{\phi}_K \rangle$, поскольку $\hat{\phi}_I = 1$. Поэтому

$$\hat{F}_{JKL} = \langle \hat{\phi}_J \hat{\phi}_K \cdot \hat{\phi}_L \rangle = \sum_{A \in P} \tilde{C}_{JK}^A \langle \hat{\phi}_A \cdot \hat{\phi}_L \rangle = \sum_{A \in P} \tilde{C}_{JK}^A \hat{F}_{ALI}. \quad (31)$$

Это дает еще одно доказательство уравнения ВДВВ, поскольку теперь оно принимает вид $\widehat{\widehat{X}}_{JKLM} = \langle \hat{\phi}_J \hat{\phi}_K \cdot \hat{\phi}_L \hat{\phi}_M \rangle$ и симметрия по отношению к перестановкам является очевидной. Отметим хорошо известную конечномерную редукцию, построенную Кричевером [13], в которой $\phi_\alpha(\lambda) = \lambda^{n_\alpha}$, а $E(p)$ – рациональная функция вида

$$E(p) = p^{n_0} + u_{n_0-2}p^{n_0-2} + \cdots + u_0 + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{s=1}^{n_\alpha} \frac{v_{\alpha s}}{(p - q_\alpha)^s}, \quad (32)$$

которая приводит к алгебраическим орбитам (или функциям Лакса) иерархии Уизема в роде нуль. Заметим, что число нулей p_s в формуле (28) равно числу неизвестных $\{u_{n_0}, \dots, u_{n_0-2}, v_{\alpha s}, q_\alpha\}$, а малое фазовое пространство характеризуется временными параметрами t_P , где P – множество $\{(0, i), i = 1, \dots, n_0 - 1; (\alpha, m), \alpha = 1, \dots, N; m = 0, \dots, n_\alpha\}$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Было показано, что подход на основе формулы для ядра, развитый Кэроллом и Кодамой для иерархии бКП, можно обобщить на универсальную иерархию Уизема. Полученные уравнения бХ являются точно такими же, как и уравнения, выведенные Такасаки и Такебе с использованием понятия многочленов Фабера. Мы извлекли структурные константы ассоциативной алгебры из уравнений бХ и проверили уравнения ассоциативности в алгебре. Наконец, мы получили реализацию ассоциативной алгебры со структурными константами, выражающимися в терминах формулы вычетов, и проверили уравнения ассоциативности для конечномерных редукций. Подчеркнем, что подход, основанный на формуле для ядра, действительно дает эффективный способ вывода уравнений бХ иерархии Уизема в роде нуль. Было бы интересно обобщить и/или переформулировать подход, основанный на формуле для ядра, на высшие роды [13]. Мы надеемся вернуться к этому в наших дальнейших исследованиях.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при поддержке National Science Council of Taiwan (грант NSC97-2112-M-194-002-MY3).

Список литературы

- [1] Y. Kodama, *Phys. Lett. A*, **129**:4 (1988), 223–226.
- [2] Y. Kodama, J. Gibbons, *Phys. Lett. A*, **135**:3 (1989), 167–170.
- [3] K. Takasaki, T. Takebe, *Internat. J. Modern Phys. A*, **7**, Suppl. 1B (1992), 889–922, arXiv: [hep-th/9112046](#).
- [4] K. Takasaki, T. Takebe, *Rev. Math. Phys.*, **7**:5 (1995), 743–808, arXiv: [hep-th/9405096](#).
- [5] K. Takasaki, T. Takebe, *Lett. Math. Phys.*, **23**:3 (1991), 205–214, arXiv: [hep-th/9112042](#).
- [6] K. Takasaki, T. Takebe, *Lett. Math. Phys.*, **28**:3 (1993), 165–176, arXiv: [hep-th/9301070](#).
- [7] B. A. Dubrovin, *Comm. Math. Phys.*, **145**:1 (1992), 195–207.
- [8] S. Aoyama, Y. Kodama, *Comm. Math. Phys.*, **182**:1 (1996), 185–219, arXiv: [hep-th/9505122](#).
- [9] H. W. Braden, I. M. Krichever (eds.), *Integrability: the Seiberg–Witten and Whitham Equations*, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000.
- [10] A. Boyarsky, O. Ruchayskiy, *JHEP*, **03** (2003), 027, 20 pp., arXiv: [hep-th/0211010](#).

- [11] L. Bonora, A. S. Sorin, *Phys. Lett. B*, **533**:3–4 (2003), 317–324, arXiv:hep-th/0211283.
- [12] I. Krichever, *Comm. Math. Phys.*, **143**:2 (1992), 415–429.
- [13] I. Krichever, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475.
- [14] M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin, *Phys. Rev. Lett.*, **84**:22 (2005), 5106–5109, arXiv:nlin/0001007.
- [15] P. B. Wiegmann, A. Zabrodin, *Comm. Math. Phys.*, **213**:3 (2000), 523–538, arXiv:hep-th/9909147.
- [16] A. Забродин, *ТМФ*, **129**:2 (2001), 239–257, arXiv:math/0104169.
- [17] A. Zabrodin, *Physica D*, **235**:1–2 (2007), 101–108, arXiv:math-ph/0609023.
- [18] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 281–332.
- [19] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **352**:1 (1991), 59–86.
- [20] B. A. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable Systems and Quantum Groups*, Lecture Notes in Math., **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [21] A. Boyarsky, A. Marshakov, O. Ruchayskiy, P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Phys. Lett. B*, **515**:3–4 (2001), 483–492, arXiv:hep-th/0105260.
- [22] R. Carroll, Y. Kodama, *J. Phys. A*, **28**:22 (1995), 6373–6387, arXiv:hep-th/9506007.
- [23] L.-P. Teo, *Lett. Math. Phys.*, **64**:1 (2003), 75–92.
- [24] B. Konopelchenko, L. Martínez Alonso, *J. Math. Phys.*, **43**:7 (2002), 3807–3823, arXiv:nlin/0105071.
- [25] F. Guil, M. Mañas, L. Martínez Alonso, *J. Phys. A*, **36**:14 (2003), 4047–4062, arXiv:nlin/0209051.
- [26] I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin, *Physica D*, **198**:1–2 (2004), 1–28, arXiv:nlin/0311005.
- [27] L. Martínez Alonso, E. Medina, M. Mañas, *J. Math. Phys.*, **47**:8 (2006), 083512, 22 pp., arXiv:nlin/0510001.
- [28] L. Martínez-Alonso, E. Medina, *Phys. Lett. B*, **641**:6 (2006), 466–473, arXiv:nlin/0609037.
- [29] M. Mañas, E. Medina, L. Martínez Alonso, *J. Phys. A*, **39**:10 (2006), 2349–2381, arXiv:nlin/0509017.
- [30] K. Takasaki, T. Takebe, *Physica D*, **235**:1–2 (2007), 109–125, arXiv:nlin/0608068.
- [31] K. Takasaki, T. Takebe, *J. Phys. A*, **41**:47 (2008), Article ID 475206, 27 pp., arXiv:0808.1444.
- [32] Y.-T. Chen, M.-H. Tu, *J. Math. Phys.*, **47**:10 (2006), 102702, 19 pp., arXiv:nlin/0605042.

Поступила в редакцию 20.03.2010