Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Дубровский, А. В. Топовский, М. Ю. Басалаев,
Новые точные решения с функциональными параметра-
ми уравнения Нижника–Веселова–Новикова с постоян-
ными асимптотическими значениями на бесконечности,
ТМФ, 2010, том 165, номер 2, 272–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 06:12:50

© 2010 г.

В. Г. Дубровский*, А. В. Топовский*,
М. Ю. Басалаев*

НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ УРАВНЕНИЯ НИЖНИКА–ВЕСЕЛОВА–НОВИКОВА С ПОСТОЯННЫМИ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Методом $\bar{\partial}$ -одевания Захарова–Манакова построены новые классы точных решений с функциональными параметрами гиперболической и эллиптической версий уравнения Нижника–Веселова–Новикова с постоянными асимптотическими значениями на бесконечности. Показано, что построенные решения содержат в себе классы многосолитонных решений, являющихся при фиксированном времени точными потенциалами возмущенного телеграфного уравнения (уравнения возмущенной струны) и двумерного стационарного уравнения Шредингера. В соответствии с построенными точными волновыми функциями для двумерного стационарного уравнения Шредингера приведена физическая интерпретация стационарных состояний микрочастицы в потенциальных полях солитонного типа.

Ключевые слова: уравнение Нижника–Веселова–Новикова, решения с функциональными параметрами, солитоны, возмущенное телеграфное уравнение, двумерное стационарное уравнение Шредингера, прозрачные потенциалы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Точные решения линейных и нелинейных уравнений математической физики очень важны для понимания различных физических явлений. За последние тридцать лет метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) был обобщен и успешно применен к решению некоторых двумерных нелинейных эволюционных уравнений, таких как уравнения Кадомцева–Петвиашвили, Девин–Стюардсона, Нижника–Веселова–Новикова (НВН), Ишимори, система Захарова–Манакова, двумерное обобщение уравнения синус-Гордон и др. (см. [1]–[4] и приведенную там литературу). В настоящее время нелокальная проблема Римана–Гильберта [5], $\bar{\partial}$ -проблема [6] и более общий метод

*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия.
E-mail: dubrovsky@academ.org, topovsky.av@gmail.com, mbasalaev@gmail.com

$\bar{\partial}$ -одевания Захарова–Манакова [7]–[10] являются основными инструментами для решения двумерных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений.

В рамках упомянутых выше и других методов, таких как алгебро-геометрический, преобразований Дарбу и Мотарда и т.д., были построены и изучены различные классы точных решений $(2+1)$ -мерного интегрируемого уравнения НВН [11]–[23]

$$u_t + \kappa_1 u_{\xi\xi\xi} + \kappa_2 u_{\eta\eta\eta} + 3\kappa_1(u\partial_\xi^{-1}u_\eta)_\xi + 3\kappa_2(u\partial_\eta^{-1}u_\xi)_\eta = 0, \quad (1.1)$$

где $u(\xi, \eta, t)$ – скалярная функция, κ_1, κ_2 – некоторые константы, $\xi = x + \sigma y$, $\eta = x - \sigma y$ и $\sigma^2 = \pm 1$, $\partial_\xi \equiv \partial/\partial\xi$, $\partial_\eta \equiv \partial/\partial\eta$, а ∂_ξ^{-1} и ∂_η^{-1} – операторы, обратные к ∂_ξ и ∂_η : $\partial_\xi^{-1}\partial_\xi = \partial_\eta^{-1}\partial_\eta = 1$.

Уравнение (1.1) при $\sigma = 1$ и вещественных константах κ_1, κ_2 (гиперболическая версия или уравнение НВН-II) было впервые предложено и изучено Нижником [11] и независимо, при $\sigma = i$, $\kappa_1 = \overline{\kappa_2} = \kappa$ (эллиптическая версия или уравнение НВН-I) Веселовым и Новиковым [12]. Интегрируемость уравнения НВН методом МОЗР связана с представлением его как условия совместности двух линейных вспомогательных задач [11], [12]:

$$L_1\psi = (\partial_{\xi\eta}^2 + u)\psi = 0, \quad (1.2)$$

$$L_2\psi = (\partial_t + \kappa_1\partial_\xi^3 + \kappa_2\partial_\eta^3 + 3\kappa_1(\partial_\eta^{-1}u_\xi) + 3\kappa_2(\partial_\xi^{-1}u_\eta))\psi = 0 \quad (1.3)$$

в форме триады Манакова [24]

$$[L_1, L_2] = BL_1, \quad B = 3(\kappa_1\partial_\eta^{-1}u_{\xi\xi} + \kappa_2\partial_\xi^{-1}u_{\eta\eta}). \quad (1.4)$$

Отметим, что в важной работе Манакова [24], расширившей возможности применения метода обратной задачи рассеяния к $(2+1)$ -мерным уравнениям, в неявной форме уравнение (1.1) уже присутствует.

В настоящей работе метод $\bar{\partial}$ -одевания Захарова–Манакова [7]–[10] применен к построению класса точных решений с функциональными параметрами уравнения НВН с постоянными асимптотическими значениями на бесконечности

$$u(\xi, \eta, t) = \tilde{u}(\xi, \eta, t) + u_\infty = \tilde{u}(\xi, \eta, t) - \epsilon, \quad (1.5)$$

где $\tilde{u}(\xi, \eta, t) \rightarrow 0$ при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$. В этом случае первая линейная вспомогательная задача (1.2) имеет вид

$$(\partial_{\xi\eta}^2 + \tilde{u})\psi = \epsilon\psi. \quad (1.6)$$

При $\sigma = 1$ и вещественных переменных $\xi \Rightarrow t - x$, $\eta \Rightarrow t + x$ уравнение (1.6) может рассматриваться как возмущенное телеграфное уравнение (при $\epsilon = 0$ как возмущенное уравнение струны), а при $\sigma = i$ и комплексных переменных $\xi \Rightarrow x + iy = z$, $\eta \Rightarrow x - iy = \bar{z}$ уравнение (1.6) совпадает с известным двумерным стационарным уравнением Шредингера

$$(-2\partial_{z\bar{z}}^2 + V_{\text{Schr}})\psi = E\psi, \quad (1.7)$$

где $V_{\text{Schr}} = -2\tilde{u}$ и $E = -2\epsilon$. Поэтому конструирование точных решений уравнения НВН с постоянными асимптотическими значениями на бесконечности означает одновременное вычисление точных волновых функций ψ и потенциалов $\tilde{u}$, V_{Schr} для упомянутых выше классических уравнений.

В работе [25] были впервые построены рационально локализованные потенциалы, безотражательные при фиксированной энергии, двумерного стационарного уравнения Шредингера (1.7), являющиеся одновременно рациональными солитонами (лампами – в англоязычной терминологии) эллиптической версии уравнения (1.1) – уравнения Веселова–Новикова.

Впервые задача рассеяния для более общего случая двумерного стационарного уравнения Шредингера с периодическим магнитным полем при одной энергии была рассмотрена в работе [26], где построены периодические решения соответствующих интегрируемых нелинейных уравнений. Отметим также, что впервые схема построения решений с функциональными параметрами для двумерных интегрируемых нелинейных уравнений на примере уравнения Кадомцева–Петвиашвили была предложена в рамках метода одевания Захарова–Шабата в работах [1], [27], [28].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приведены основные формулы метода $\bar{\partial}$ -одевания применительно к уравнению НВН и получены общие детерминантные формулы для решений с функциональными параметрами и их частного случая – класса многосолитонных решений. В разделах 3, 4 построены классы точных решений с функциональными параметрами гиперболической и эллиптической версий уравнения НВН с постоянными асимптотическими значениями на бесконечности; в качестве примера представлены их простейшие частные случаи, в том числе односолитонные решения с соответствующими волновыми функциями линейных вспомогательных задач. При фиксированном времени построенные решения являются точными потенциалами первой линейной вспомогательной задачи (1.2) или возмущенного телеграфного уравнения (возмущенного уравнения струны) (1.6) и двумерного стационарного уравнения Шредингера (1.7). В разделе 5 на основе точных волновых функций двумерного стационарного уравнения Шредингера приводится физическая интерпретация стационарных состояний микрочастицы в поле безотражательных односолитонных потенциалов.

2. ОСНОВНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ МЕТОДА $\bar{\partial}$ -ОДЕВАНИЯ И ОБЩИЕ ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Метод $\bar{\partial}$ -одевания [7]–[11] в применении к уравнению НВН (1.1) для случая ненулевых асимптотических значений $-\epsilon$ решений $u(\xi, \eta, t)$ на бесконечности (1.5) хорошо известен и подробно представлен в книге [4] и работах [21]–[23].

Центральным моментом метода является использование скалярной нелокальной $\bar{\partial}$ -проблемы

$$\frac{\partial \chi(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} = (\chi * R)(\lambda, \bar{\lambda}) = \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) d\mu \wedge d\bar{\mu}. \quad (2.1)$$

Решение $\bar{\partial}$ -проблемы с канонической нормировкой $\chi \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$ эквивалентно решению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\chi(\lambda) = 1 + \iint_C \frac{d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'}{2\pi i(\lambda' - \lambda)} \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R(\mu, \bar{\mu}; \lambda', \bar{\lambda}') d\mu \wedge d\bar{\mu}, \quad (2.2)$$

где ядро $\bar{\partial}$ -проблемы дается выражением

$$R(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}, \xi, \eta, t) = R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) e^{F(\mu, \xi, \eta, t) - F(\lambda, \xi, \eta, t)} \quad (2.3)$$

с функцией

$$F(\lambda, \xi, \eta, t) = i \left[\lambda \xi - \frac{\epsilon}{\lambda} \eta + \left(\kappa_1 \lambda^3 - \kappa_2 \frac{\epsilon^3}{\lambda^3} \right) t \right]. \quad (2.4)$$

С помощью метода $\bar{\partial}$ -одевания [4], [21]–[23] строятся вспомогательные линейные задачи для уравнения НВН (1.1), в общем положении эти задачи имеют вид

$$\begin{aligned} L_1 \psi &= (\partial_{\xi\eta}^2 + u_1 \partial_{\xi} + u_2 \partial_{\eta} + u) \psi = 0, \\ L_2 \psi &= (\partial_t + \kappa_1 \partial_{\xi}^3 + \kappa_2 \partial_{\eta} + v_1 \partial_{\xi}^2 + v_2 \partial_{\eta}^2 + v_3 \partial_{\xi} + v_4 \partial_{\eta} + v) \psi = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Волновая функция ψ в (2.5) связана с функцией χ из (2.1), (2.2) известной формулой

$$\psi(\lambda, \xi, \eta, t) := \chi(\lambda) e^{F(\lambda)} = \chi(\lambda) \exp \left\{ i \left[\lambda \xi - \frac{\epsilon}{\lambda} \eta + \left(\kappa_1 \lambda^3 - \kappa_2 \frac{\epsilon^3}{\lambda^3} \right) t \right] \right\}. \quad (2.6)$$

Формулы реконструкции для потенциалов задач (2.5) имеют вид [4], [21]–[23]

$$u_1 = -\frac{\chi_{\infty\eta}}{\chi_{\infty}}, \quad v_1 = -3\kappa_1 \frac{\chi_{\infty\xi}}{\chi_{\infty}}, \quad (2.7)$$

$$u_2 = -\frac{\chi_{0\xi}}{\chi_0}, \quad v_2 = -3\kappa_2 \frac{\chi_{0\eta}}{\chi_0}, \quad (2.8)$$

$$v_3 = 3i\kappa_2 \epsilon \chi_{1\eta}, \quad v_4 = -3i\kappa_1 \chi_{-1\xi}. \quad (2.9)$$

Функции χ_{∞} , χ_0 , χ_{-1} в (2.7)–(2.9) являются коэффициентами разложений в ряды волновой функции χ в окрестности точек $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$:

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 \lambda + \chi_2 \lambda^2 + \dots, \quad \chi = \chi_{\infty} + \frac{\chi_{-1}}{\lambda} + \frac{\chi_{-2}}{\lambda^2} + \dots. \quad (2.10)$$

В хорошо известной из квантовой механики терминологии оператор L_1 в (2.5) называется чисто потенциальным, если в нем отсутствуют члены с первыми производными. При канонической нормировке, налагаемой на волновую функцию $\chi|_{\lambda \rightarrow \infty} \rightarrow 1$ ($\chi_{\infty} = 1$), получаем $u_1 = v_1 = 0$. Для того чтобы член $u_2 \partial_{\eta}$ в L_1 обратился в нуль, необходимо потребовать, чтобы $\chi_0 = \text{const}$, без ограничения общности можно выбрать $\chi_0 = 1$, тогда вследствие (2.8) получим $u_2 = v_2 = 0$. Используя (2.7)–(2.9), находим следующие выражения для v_3 , v_4 и u :

$$v_3 = 3i\kappa_2 \epsilon \chi_{1\eta} = 3\kappa_2 \partial_{\xi}^{-1} u_{\eta}, \quad v_4 = -3i\kappa_1 \chi_{-1\xi} = 3\kappa_1 \partial_{\eta}^{-1} u_{\xi}, \quad (2.11)$$

$$u = -\epsilon - i\chi_{-1\eta} = -\epsilon + i\epsilon \chi_{1\xi}. \quad (2.12)$$

Полевая переменная v во вспомогательной задаче (2.5) произвольная, ее присутствие отражает калибровочную свободу [29], в частности эта переменная может быть положена равной нулю.

Из (2.2) для коэффициента разложения χ_{-1} функции χ (2.10) получаем

$$\chi_{-1} = - \iint_C \frac{d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2\pi i} \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) e^{F(\mu) - F(\lambda)} d\mu \wedge d\bar{\mu}, \quad (2.13)$$

где $F(\lambda)$ дается формулой (2.4). Условия вещественности u и потенциальности оператора L_1 налагают некоторые ограничения на ядро R_0 $\bar{\partial}$ -проблемы (2.1). В случае гиперболической версии ($\sigma = 1$, $\overline{\kappa_1} = \kappa_1$, $\overline{\kappa_2} = \kappa_2$) уравнения НВН-II (1.1) с вещественными пространственными переменными $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ условие вещественности решения u приводит вследствие (2.12) и (2.13) в пределе слабых полей ($\chi = 1$ в (2.13)) к следующему ограничению на ядро R_0 $\bar{\partial}$ -проблемы:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \overline{R_0(-\bar{\mu}, -\mu; -\bar{\lambda}, -\lambda)}. \quad (2.14)$$

Для эллиптической версии ($\sigma = i$, $\kappa_1 = \overline{\kappa_2} = \kappa$) уравнения НВН-I (1.1) с комплексными пространственными переменными $\xi = z = x + iy$, $\eta = \bar{z} = x - iy$ условие вещественности u вследствие (2.12) и (2.13) в пределе слабых полей ($\chi = 1$ в (2.13)) приводит к другому ограничению на ядро R_0 $\bar{\partial}$ -проблемы:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) = \frac{\epsilon^3}{|\mu|^2 |\lambda|^2 \bar{\mu} \bar{\lambda}} \overline{R_0\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\lambda}, -\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, -\frac{\epsilon}{\mu}\right)}. \quad (2.15)$$

Условие потенциальности для оператора L_1 в уравнении (1.2), т. е. $\chi_0 = 1$, с учетом (2.2) принимает следующую форму:

$$\chi_0 - 1 = \iint_C \frac{d\lambda \wedge d\bar{\lambda}}{2\pi i \lambda} \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) R_0(\mu, \bar{\mu}; \lambda, \bar{\lambda}) e^{F(\mu) - F(\lambda)} d\mu \wedge d\bar{\mu} = 0. \quad (2.16)$$

Для вырожденного ядра $\bar{\partial}$ -проблемы (2.1)

$$R_0(\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}) = \pi \sum_{k=1}^N f_k(\mu, \bar{\mu}) g_k(\lambda, \bar{\lambda}), \quad (2.17)$$

выраженного через функциональные параметры f_k , g_k в спектральном представлении, легко можно получить общую детерминантную формулу для нахождения точных решений $u(\xi, \eta, t)$ с функциональными параметрами уравнения НВН (1.1) с постоянным значением $-\epsilon$ на бесконечности. В самом деле, подставляя (2.17) в (2.2) и интегрируя, получаем

$$\chi(\lambda) = 1 + \pi \sum_{k=1}^N h_k(\xi, \eta, t) \iint_C \frac{d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'}{2\pi i (\lambda' - \lambda)} g_k(\lambda', \bar{\lambda}') e^{-F(\lambda')}, \quad (2.18)$$

где

$$h_k(\xi, \eta, t) := \iint_C \chi(\mu, \bar{\mu}) e^{F(\mu)} f_k(\mu, \bar{\mu}) d\mu \wedge d\bar{\mu}. \quad (2.19)$$

Из (2.18), (2.19) следует система линейных алгебраических уравнений на величины h_k :

$$\sum_{k=1}^N A_{lk} h_k = \alpha_l, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (2.20)$$

где

$$\alpha_l(\xi, \eta, t) := \iint_C f_l(\mu, \bar{\mu}) e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu} \quad (2.21)$$

и матрица A дается выражением

$$A_{lk} := \delta_{lk} + \pi \iint_C d\lambda \wedge d\bar{\lambda} \iint_C \frac{d\lambda' \wedge d\bar{\lambda}'}{2\pi i} \frac{e^{F(\lambda) - F(\lambda')}}{\lambda - \lambda'} f_l(\lambda, \bar{\lambda}) g_k(\lambda', \bar{\lambda}'). \quad (2.22)$$

Вводя величины

$$\beta_l(\xi, \eta, t) := \iint_C g_l(\lambda, \bar{\lambda}) e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda}, \quad (2.23)$$

переписываем матрицу A_{lk} (2.22) следующим образом:

$$A_{lk} = \delta_{lk} + \frac{1}{2} \partial_\xi^{-1} \alpha_l \beta_k. \quad (2.24)$$

Функции $\alpha_k(\xi, \eta, t)$, $\beta_k(\xi, \eta, t)$, даваемые выражениями (2.21) и (2.23), являются функциональными параметрами в координатном представлении. Согласно определениям (2.4) и (2.21), (2.23) функциональные параметры α_n и β_n удовлетворяют следующим линейным уравнениям:

$$\alpha_n \xi \eta = \epsilon \alpha_n, \quad \alpha_{nt} + \kappa_1 \alpha_n \xi \xi \xi + \kappa_2 \alpha_n \eta \eta \eta = 0, \quad (2.25)$$

$$\beta_n \xi \eta = \epsilon \beta_n, \quad \beta_{nt} + \kappa_1 \beta_n \xi \xi \xi + \kappa_2 \beta_n \eta \eta \eta = 0. \quad (2.26)$$

Из (2.13) и (2.20)–(2.23) следует компактная формула для коэффициентов χ_{-1} разложения (2.10):

$$\chi_{-1} = -\frac{1}{2i} \sum_{k=1}^N h_k \beta_k = i \sum_{k,l=1}^N A_{kl}^{-1} \frac{\partial A_{lk}}{\partial \xi} = i \partial_\xi (\ln \det A). \quad (2.27)$$

Здесь и ниже используются детерминантные формулы

$$\text{Tr} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} A^{-1} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln(\det A), \quad 1 + \text{tr} B = \det(1 + B). \quad (2.28)$$

Матрица B в последнем равенстве вырожденная и имеет ранг, равный единице.

Используя формулу реконструкции (2.12) и выражение (2.27), получаем общую детерминантную формулу для нахождения решений u уравнения НВН (1.1) с постоянными асимптотическими значениями $-\epsilon$ на бесконечности с функциональными параметрами $\alpha_k(\xi, \eta, t)$, $\beta_k(\xi, \eta, t)$, задаваемыми выражениями (2.21), (2.23):

$$u(\xi, \eta, t) = -\epsilon - i \chi_{-1} \eta = -\epsilon + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln \det A. \quad (2.29)$$

Условие потенциальности (2.16) согласно (2.17), (2.19)–(2.23) может быть выражено в терминах функциональных параметров:

$$\chi_0 - 1 = \frac{i\pi}{\epsilon} \sum_{k=1}^N h_k \beta_{k\eta} = \frac{i\pi}{\epsilon} \sum_{k,m=1}^N A_{km}^{-1} B_{mk} = \frac{i\pi}{\epsilon} (\det(BA^{-1} + 1) - 1) = 0, \quad (2.30)$$

где вырожденная матрица B ранга 1 дается формулой

$$B_{mk} = \alpha_m \beta_{k\eta}. \quad (2.31)$$

В (2.30) матрица BA^{-1} вырожденная и имеет ранг, равный единице. При выводе последнего уравнения в (2.30) использовалось второе матричное равенство из (2.28). Таким образом, вследствие (2.30) условие потенциальности можно представить в удобной форме:

$$\det(A + B) = \det A. \quad (2.32)$$

Важный класс многосолитонных решений уравнения НВН (1.1) может быть получен из решений с функциональными параметрами при следующем выборе функций $f_k(\mu, \bar{\mu})$, $g_k(\lambda, \bar{\lambda})$ в ядре R_0 (2.17):

$$f_k(\mu, \bar{\mu}) = \delta(\mu - M_k), \quad g_k(\lambda, \bar{\lambda}) = A_k \delta(\lambda - \Lambda_k). \quad (2.33)$$

Подставляя (2.33) в (2.21), (2.23), (2.24) и (2.31), получим для матриц A и B следующие выражения:

$$A_{lk} = \delta_{lk} + 2i \frac{A_k}{M_l - \Lambda_k} e^{F(M_l) - F(\Lambda_k)}, \quad B_{lk} = -\frac{4i\epsilon}{\Lambda_k} A_k e^{F(M_l) - F(\Lambda_k)}. \quad (2.34)$$

Выражение (2.18) для функции $\chi(\lambda)$ с учетом (2.19) и (2.33) принимает вид

$$\chi(\lambda) = 1 + 2i \sum_k \frac{A_k}{\Lambda_k - \lambda} \chi(M_k) e^{F(M_k) - F(\Lambda_k)}. \quad (2.35)$$

Для волновых функций $\chi(M_k)$ из (2.35) получаем систему уравнений

$$\sum_l \tilde{A}_{kl} \chi(M_l) = 1, \quad \tilde{A}_{lk} := e^{-F(M_l)} A_{lk} e^{F(M_k)}. \quad (2.36)$$

Из (2.6) и (2.36) получаем значения волновых функций χ и ψ при дискретных значениях спектральной переменной $\lambda = M_l$:

$$\chi(M_l) = \sum_k e^{F(M_k) - F(M_l)} A_{lk}^{-1}, \quad \psi(M_l, \xi, \eta, t) = \sum_k e^{F(M_k)} A_{lk}^{-1}. \quad (2.37)$$

Для волновой функции $\psi(\lambda)$ имеем из (2.6) следующее выражение:

$$\psi(\lambda, \xi, \eta, t) = \chi(\lambda) e^{F(\lambda)} = \left[1 + 2i \sum_k \frac{A_k}{\Lambda_k - \lambda} e^{F(M_k) - F(\Lambda_k)} \chi(M_k) \right] e^{F(\lambda)}. \quad (2.38)$$

Основной проблемой при конструировании точных решений уравнения НВН (1.1) является “эффективизация” общей детерминантной формулы (2.29) путем удовлетворения условиям вещественности (2.14), (2.15) и условию потенциальности (2.16) или (2.32) оператора $\tilde{L}_1$ в (2.5). Для того чтобы удовлетворить условию потенциальности (2.16), слагаемые в сумме (2.17) целесообразно сгруппировать в пары. В самом деле, подставляя выражение $R_0 = \pi p_1(\mu, \bar{\mu}) q_1(\lambda, \bar{\lambda}) + \pi p_2(\mu, \bar{\mu}) q_2(\lambda, \bar{\lambda})$ в (2.16) и производя замену переменных $\mu \leftrightarrow -\lambda$ во втором слагаемом, получаем в пределе слабых полей ($\chi = 1$ в равенстве (2.16))

$$\iiint \iiint_C \left[\frac{p_1(\mu, \bar{\mu}) q_1(\lambda, \bar{\lambda})}{\lambda} - \frac{p_2(-\lambda, -\bar{\lambda}) q_2(-\mu, -\bar{\mu})}{\mu} \right] e^{F(\mu) - F(\lambda)} d\mu \wedge d\bar{\mu} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = 0. \quad (2.39)$$

Соотношение (2.39) будет удовлетворено, если

$$\frac{1}{\lambda} p_1(\mu, \bar{\mu}) q_1(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{1}{\mu} p_2(-\lambda, -\bar{\lambda}) q_2(-\mu, -\bar{\mu}),$$

или, после разделения переменных, если

$$p_2(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{-1}{c\lambda} q_1(-\lambda, -\bar{\lambda}), \quad q_2(\mu, \bar{\mu}) = -c\mu p_1(-\mu, -\bar{\mu}), \quad (2.40)$$

где c – некоторая константа. Учитывая (2.40), получаем, что условию потенциальности (2.16) удовлетворяет выбор ядра R_0 $\bar{\partial}$ -проблемы (2.1) в виде N пар связанных друг с другом слагаемых:

$$R_0(\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}) = \pi \sum_{k=1}^N \left(p_k(\mu, \bar{\mu}) q_k(\lambda, \bar{\lambda}) + \frac{q_k(-\mu, -\bar{\mu})}{\mu} \lambda p_k(-\lambda, -\bar{\lambda}) \right). \quad (2.41)$$

Условия вещественности $u = \bar{u}$ (2.14) и (2.15) дают добавочное ограничение на функции p_k и q_k в сумме (2.41). Удобно представить вычисления этих ограничений и точных решений $u(\xi, \eta, t)$ уравнения (1.1) отдельно для уравнения НВН-II с $\sigma^2 = 1$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ и уравнения НВН-II с $\sigma^2 = -1$, $\xi = z = x + iy$, $\eta = \bar{z} = x - iy$.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НВН-II С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим сначала случай $\sigma^2 = 1$ вещественных пространственных переменных $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, т.е. гиперболическую версию уравнения НВН (1.1). Условие вещественности $u = \bar{u}$ (2.14) можно удовлетворить, налагая на каждую пару слагаемых в сумме (2.41) следующее ограничение:

$$\begin{aligned} p_n(\mu, \bar{\mu}) q_n(\lambda, \bar{\lambda}) + \frac{1}{\mu} q_n(-\mu, -\bar{\mu}) \lambda p_n(-\lambda, -\bar{\lambda}) = \\ = \overline{p_n(-\bar{\mu}, -\mu) q_n(-\bar{\lambda}, -\lambda)} + \frac{1}{\mu} \overline{q_n(\bar{\mu}, \mu) \lambda p_n(\bar{\lambda}, \lambda)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда возможны два случая:

$$p_n(\mu, \bar{\mu}) q_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \overline{p_n(-\bar{\mu}, -\mu) q_n(-\bar{\lambda}, -\lambda)}, \quad (3.2)$$

$$p_n(\mu, \bar{\mu}) q_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{1}{\mu} \overline{q_n(\bar{\mu}, \mu) \lambda p_n(\bar{\lambda}, \lambda)}. \quad (3.3)$$

В случае (3.2), разделяя переменные, получаем следующие ограничения на функции $p_n(\mu, \bar{\mu})$ и $q_n(\lambda, \bar{\lambda})$:

$$p_n(\mu, \bar{\mu}) = \overline{c_n p_n(-\bar{\mu}, -\mu)}, \quad q_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{1}{c_n} \overline{q_n(-\bar{\lambda}, -\lambda)}. \quad (3.4)$$

Постоянные c_n в (3.4) без ограничения общности могут быть приняты равными единице.

В случае (3.3), разделяя переменные, получаем другое ограничение на функции $p_n(\mu, \bar{\mu})$ и $q_n(\lambda, \bar{\lambda})$:

$$q_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \lambda c_n \overline{p_n(\bar{\lambda}, \lambda)}, \quad (3.5)$$

где c_n – вещественные постоянные.

Чтобы использовать общую детерминантную формулу (2.29) для нахождения точных решений u , необходимо установить связь между ядрами (2.17) и (2.41). В случае (3.2), принимая во внимание (2.41) и (3.4), имеем

$$\begin{aligned} R_0(\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}) &= \pi \sum_{n=1}^{2N} f_n(\mu, \bar{\mu}) g_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \\ &= \pi \sum_{n=1}^N \left(p_n(\mu, \bar{\mu}) q_n(\lambda, \bar{\lambda}) + \frac{1}{\mu} \overline{q_n(\bar{\mu}, \mu)} \lambda \overline{p_n(\bar{\lambda}, \lambda)} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где удобно выбрать следующие наборы f и g функций f_n, g_n :

$$f := (f_1, \dots, f_{2N}) = \left(p_1(\mu, \bar{\mu}), \dots, p_N(\mu, \bar{\mu}); \frac{1}{\mu} \overline{q_1(\bar{\mu}, \mu)}, \dots, \frac{1}{\mu} \overline{q_N(\bar{\mu}, \mu)} \right), \quad (3.7)$$

$$g := (g_1, \dots, g_{2N}) = (q_1(\lambda, \bar{\lambda}), \dots, q_N(\lambda, \bar{\lambda}); \lambda p_1(\bar{\lambda}, \lambda), \dots, \lambda p_N(\bar{\lambda}, \lambda)). \quad (3.8)$$

Вследствие определений (2.21), (2.23) и (3.7), (3.8) и с учетом (3.4) можно получить следующие соотношения между различными функциональными параметрами:

$$\alpha_n := \iint_C p_n(\mu, \bar{\mu}) e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu} = \overline{\alpha_n}, \quad (3.9)$$

$$\beta_n := \iint_C q_n(\lambda, \bar{\lambda}) e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = \overline{\beta_n},$$

$$\alpha_{N+n} := \iint_C \frac{1}{\mu} \overline{q_n(\bar{\mu}, \mu)} e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu} = \frac{i}{\epsilon} \beta_{n\eta}, \quad (3.10)$$

$$\beta_{N+n} := \iint_C \lambda \overline{p_n(\bar{\lambda}, \lambda)} e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = i\alpha_{n\xi}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.11)$$

Таким образом, в силу (3.9)–(3.11) наборы функциональных параметров α и β имеют следующую структуру:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{2N}) := \left(\alpha_1, \dots, \alpha_N; \frac{i}{\epsilon} \beta_{1\eta}, \dots, \frac{i}{\epsilon} \beta_{N\eta} \right), \quad (3.12)$$

$$(\beta_1, \dots, \beta_{2N}) := (\beta_1, \dots, \beta_N; i\alpha_{1\xi}, \dots, i\alpha_{N\xi}), \quad (3.13)$$

т. е. оба набора выражаются через $2N$ независимых вещественных функциональных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_N)$.

Общая детерминантная формула (2.29) с матрицей A (2.24), соответствующей ядру R_0 (3.6) $\bar{\partial}$ -проблемы (2.1), дает класс точных решений u с постоянным асимптотическим значением $-\epsilon$ на бесконечности для гиперболической версии уравнения

НВН-II (1.1). Структура этих решений согласно (3.12), (3.13) определяется $2N$ вещественными функциональными параметрами $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $(\beta_1, \dots, \beta_N)$. В простейшем случае $N = 1$ имеем $(\alpha_1, \alpha_2) := (\alpha_1, \frac{i}{\epsilon}\beta_{1\eta})$, $(\beta_1, \beta_2) := (\beta_1, i\alpha_{1\xi})$, детерминант A в силу (2.24) дается выражением

$$\det A = \left(1 + \frac{1}{2} \partial_\xi^{-1} \alpha_1 \beta_1 - \frac{\alpha_1 \beta_{1\eta}}{4\epsilon}\right)^2 = \Delta^2. \quad (3.14)$$

Соответствующее решение u вследствие (2.29) и (3.14) имеет вид

$$u(\xi, \eta, t) = -\epsilon + \frac{1}{2\Delta} \left[\alpha_{1\eta} \beta_1 - \frac{1}{\epsilon} \alpha_{1\xi} \beta_{1\eta\eta} - \frac{1}{4\Delta\epsilon} \left(\alpha_1 \beta_1 - \frac{1}{\epsilon} \alpha_{1\xi} \beta_{1\eta} \right) (\alpha_{1\eta} \beta_{1\eta} - \alpha_1 \beta_{1\eta\eta}) \right]. \quad (3.15)$$

Для дельта-функционального ядра R_0 (2.41) вида (3.6) с $p_n(\mu, \bar{\mu}) = \delta(\mu - i\mu_{n0})$, $q_n(\lambda, \bar{\lambda}) = a_n \lambda_{n0} \delta(\lambda - i\lambda_{n0})$, $n = 1, \dots, N$, общая детерминантная формула (2.29) приводит к соответствующим многосолитонным решениям. В простейшем случае $N = 1$ из (3.9) получаем функциональные параметры

$$\alpha_1 = -2ie^{F(i\mu_{10})}, \quad \beta_1 = -2ia_1\lambda_{10}e^{-F(i\lambda_{10})},$$

а из (3.15) при условии $a_1(\lambda_{10} + \mu_{10})/(\lambda_{10} - \mu_{10}) = -e^{\varphi_0} < 0$ – точное несингулярное солитонное решение гиперболического уравнения НВН

$$u(\xi, \eta, t) = -\epsilon - \frac{\epsilon(\lambda_{10} - \mu_{10})^2}{2\lambda_{10}\mu_{10}} \frac{1}{\text{ch}^2[(\varphi(\xi, \eta, t) + \varphi_0)/2]}, \quad (3.16)$$

где фаза φ имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta, t) := F(i\mu_{10}) - F(i\lambda_{10}) &= (\lambda_{10} - \mu_{10})\xi + \left(\frac{\epsilon}{\lambda_{10}} - \frac{\epsilon}{\mu_{10}} \right) \eta - \\ &- \kappa_1(\lambda_{10}^3 - \mu_{10}^3)t - \kappa_2 \left(\frac{\epsilon^3}{\lambda_{10}^3} - \frac{\epsilon^3}{\mu_{10}^3} \right) t. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Используя (2.18) и (2.6), вычисляем волновые функции $\psi(\lambda)$, $\psi(\mu_1)$, $\psi(-\lambda_1)$, соответствующие солитонному решению (3.16):

$$\psi(\lambda) = e^{F(\lambda)} - \left(\frac{i\lambda_{10}}{\lambda - i\lambda_{10}} + \frac{i\mu_{10}}{\lambda + i\mu_{10}} \right) \frac{2a_1 e^{\varphi(\xi, \eta, t) + F(\lambda)}}{1 + e^{\varphi(\xi, \eta, t) + \varphi_0}}; \quad (3.18)$$

$$\psi(i\mu_{10}) = \frac{e^{F(i\mu_{10})}}{1 + e^{\varphi(\xi, \eta, t) + \varphi_0}}, \quad \psi(-i\lambda_{10}) = \frac{e^{-F(i\lambda_{10})}}{1 + e^{\varphi(\xi, \eta, t) + \varphi_0}}. \quad (3.19)$$

Потенциал $\tilde{u}$, соответствующий односолитонному решению (3.16), и квадрат модуля волновой функции $\psi(i\mu_{10})$ (3.19) показаны на рис. 1. Квадрат модуля волновой функции $\psi(-i\lambda_{10})$ имеет подобный вид, но принимает ненулевые значения вдоль другой половины потенциальной долины. Квадраты модулей волновых функций

Рис. 1. Солитонное решение $\tilde{u}(x, y, t = 0) = u(x, y, t = 0) + \epsilon$ (3.16) (серый цвет) и квадрат модуля соответствующей волновой функции $|\psi(i\mu_{10})|^2$ (3.19) (светлый оттенок) с параметрами $a_1 = -1$, $\epsilon = 1$, $\lambda_{10} = 1$, $\mu_{10} = 4$.

принимают бесконечные значения (на рисунке обрезаны и показаны в виде светлого плато) в некоторой области плоскости (x, y) .

Для случая (3.3), принимая во внимание (3.5) и идентифицируя выражения для R_0 (2.17) и (2.41), получаем

$$\begin{aligned} R_0(\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}) &= \pi \sum_{n=1}^{2N} f_n(\mu, \bar{\mu}) g_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \\ &= \pi \sum_{n=1}^N (c_n p_n(\mu, \bar{\mu}) \overline{\lambda p_n(\bar{\lambda}, \lambda)} - \overline{c_n p_n(-\bar{\mu}, -\mu)} \lambda p_n(-\lambda, -\bar{\lambda})). \end{aligned} \quad (3.20)$$

В (3.20) удобно выбрать следующие наборы f, g функций f_n, g_n :

$$f := (f_1, \dots, f_{2N}) = (p_1(\mu, \bar{\mu}), \dots, p_N(\mu, \bar{\mu}); \overline{p_1(-\bar{\mu}, -\mu)}, \dots, \overline{p_N(-\bar{\mu}, -\mu)}), \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} g &:= (g_1, \dots, g_{2N}) = \\ &= (c_1 \overline{\lambda p_1(\bar{\lambda}, \lambda)}, \dots, c_N \overline{\lambda p_N(\bar{\lambda}, \lambda)}; -c_1 \lambda p_1(-\lambda, -\bar{\lambda}), \dots, -c_N \lambda p_N(-\lambda, -\bar{\lambda})). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Вследствие определений (2.21), (2.23) и (3.21), (3.22) получаем соотношения между различными функциональными параметрами:

$$\alpha_n := \iint_C p_n(\mu, \bar{\mu}) e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu}, \quad (3.23)$$

$$\beta_n := \iint_C c_n \overline{\lambda p_n(\bar{\lambda}, \lambda)} e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = i c_n \bar{\alpha}_n \xi,$$

$$\alpha_{N+n} := \iint_C \overline{p_n(-\bar{\mu}, -\mu)} e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu} = \bar{\alpha}_n, \quad (3.24)$$

$$\beta_{N+n} := - \iint_C c_n \lambda p_n(-\lambda, -\bar{\lambda}) e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = \bar{\beta}_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.25)$$

Таким образом, в силу (3.23) и (3.24), (3.25) наборы α, β функциональных параметров

$$\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2N}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_N; \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_N), \quad (3.26)$$

$$\beta := (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2N}) = (ic_1 \bar{\alpha}_{1\xi}, \dots, ic_N \bar{\alpha}_{N\xi}; -ic_1 \alpha_{1\xi}, \dots, ic_N \alpha_{N\xi}) \quad (3.27)$$

выражаются через N независимых комплексных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$.

Общая детерминантная формула (2.29) с матрицей A (2.24), соответствующей ядру R_0 (3.20) $\bar{\partial}$ -проблемы (2.1), дает другой класс точных решений $u(\xi, \eta, t)$ с постоянным асимптотическим значением $-\epsilon$ на бесконечности для гиперболической версии уравнения НВН (1.1). Структура этих решений согласно (3.26), (3.27) зависит от N независимых комплексных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. В простейшем случае $N = 1$ имеем $(\alpha_1, \alpha_2) := (\alpha_1, \bar{\alpha}_1)$, $(\beta_1, \beta_2) := (ic_1 \bar{\alpha}_{1\xi}, -ic_1 \alpha_{1\xi})$, детерминант A согласно (2.24) дается выражением

$$\det A = \left(1 + \frac{ic_1}{2} \partial_\xi^{-1} (\alpha_1 \bar{\alpha}_{1\xi} - \alpha_{1\xi} \bar{\alpha}_1) \right)^2 = \Delta^2. \quad (3.28)$$

Соответствующие решения u в силу (2.29) и (3.28) имеют вид

$$u(\xi, \eta, t) = -\epsilon + \frac{ic_1}{2\Delta} \left[\alpha_{1\eta} \bar{\alpha}_{1\xi} - \bar{\alpha}_{1\eta} \alpha_{1\xi} - \frac{ic_1}{4\Delta} (\alpha_1 \bar{\alpha}_{1\xi} - \bar{\alpha}_1 \alpha_{1\xi}) (\alpha_{1\eta} \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_{1\eta} \alpha_1) \right]. \quad (3.29)$$

Для дельта-функциональных ядер типа (3.20) с $p_n(\mu, \bar{\mu}) = \delta(\mu - \bar{\lambda}_n)$, $n = 1, \dots, N$, общая детерминантная формула (2.29) с учетом (3.21)–(3.27) приводит к соответствующим точным многосолитонным решениям. В простейшем случае $N = 1$ получаем из (3.23) функциональный параметр $\alpha_1 = -2ie^{F(\lambda_1)}$. Из (3.29) находим соответствующее точное решение u , которое при условии $c_1 \lambda_R / \lambda_I = e^{\varphi_0} > 0$ есть линейный несингулярный солитон:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, t) &= -\epsilon + \frac{8\epsilon c_1 \lambda_R \lambda_I e^{\varphi(\xi, \eta, t)}}{|\lambda|^2 (1 + (c_1 \lambda_R / \lambda_I) e^{\varphi(\xi, \eta, t)})^2} = \\ &= -\epsilon + \frac{2\epsilon \lambda_I^2}{|\lambda|^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2[(\varphi(\xi, \eta, t) + \varphi_0)/2]}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где фаза φ имеет вид

$$\varphi(\xi, \eta, t) = i \left[(\bar{\lambda} - \lambda) \xi - \left(\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}} - \frac{\epsilon}{\lambda} \right) \eta + \kappa_1 (\bar{\lambda}^3 - \lambda^3) t - \kappa_2 \left(\frac{\epsilon^3}{\bar{\lambda}^3} - \frac{\epsilon^3}{\lambda^3} \right) t \right]. \quad (3.31)$$

Волновые функции $\psi(\lambda)$, $\psi(\bar{\lambda}_1)$, $\psi(-\lambda_1)$, соответствующие (3.30), вследствие (2.18) и (2.6) даются выражениями

$$\psi(\lambda) = e^{F(\lambda)} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda + \bar{\lambda}_1} \right) \frac{2ic_1 e^{\varphi(\xi, \eta, t) + F(\lambda)}}{1 + e^{\varphi(\xi, \eta, t) + \varphi_0}}; \quad (3.32)$$

$$\psi(\bar{\lambda}_1) = \frac{e^{F(\bar{\lambda}_1)}}{1 + e^{\varphi(\xi, \eta, t) + \varphi_0}}, \quad \psi(-\lambda_1) = \frac{e^{-F(\lambda_1)}}{1 + e^{\varphi(\xi, \eta, t) + \varphi_0}}. \quad (3.33)$$

Рис. 2. Солитонное решение $\tilde{u}(x, y, t = 0) = u(x, y, t = 0) + \epsilon$ (3.30) (серый цвет) и квадраты модулей соответствующих волновых функций $|\psi(\bar{\lambda}_1)|^2 = |\psi(-\lambda_1)|^2$ (3.33) (светлый оттенок) с параметрами $c_1 = -1$, $\lambda_{1R} = 0.2$, $\lambda_{1I} = 2$, $\epsilon = -1$.

Потенциал $\tilde{u}$, соответствующий односолитонному решению (3.30), и квадраты модулей волновых функций (3.33) построены на рис. 2. Квадраты модулей волновых функции ограничены и локализованы вдоль потенциала (3.30).

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ УРАВНЕНИЯ НВН-I

Рассмотрим случай $\sigma^2 = -1$ комплексных переменных $\xi = z = x + iy$, $\eta = \bar{z} = x - iy$, т.е. эллиптическую версию уравнения НВН (1.1). Условию вещественности $u = \bar{u}$ (2.15) можно удовлетворить, налагая на каждую пару слагаемых суммы (2.41) в силу (2.15) следующее ограничение:

$$\begin{aligned} p_n(\mu, \bar{\mu})q_n(\lambda, \bar{\lambda}) + \frac{1}{\mu} q_n(-\mu, -\bar{\mu})\lambda p_n(-\lambda, -\bar{\lambda}) = \\ = \frac{\epsilon^3}{|\lambda|^2|\mu|^2\bar{\lambda}\bar{\mu}} \overline{p_n\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}\right)} \overline{q_n\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, -\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}\right)} + \\ + \frac{\epsilon^3}{|\lambda|^2|\mu|^2\bar{\lambda}\bar{\mu}} \lambda q_n\left(\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, \frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}\right) \frac{1}{\mu} p_n\left(\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, \frac{\epsilon}{\bar{\mu}}\right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из (4.1) имеем два возможных случая:

$$p_n(\mu, \bar{\mu})q_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{\epsilon^3}{|\lambda|^2|\mu|^2\bar{\lambda}\bar{\mu}} \overline{p_n\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}\right)} \overline{q_n\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, -\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}\right)}, \quad (4.2)$$

$$p_n(\mu, \bar{\mu})q_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{\epsilon^3\lambda}{|\lambda|^2|\mu|^4\bar{\lambda}} \overline{q_n\left(\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, \frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}\right)} \overline{p_n\left(\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, \frac{\epsilon}{\bar{\mu}}\right)}. \quad (4.3)$$

В случае (4.2), разделяя переменные, получаем следующие ограничения на функции q_n и p_n :

$$p_n(\mu, \bar{\mu}) = \frac{1}{c_n|\mu|^2\bar{\mu}} \overline{q_n\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, -\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}\right)}, \quad q_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{\epsilon^3 c_n}{|\lambda|^2\bar{\lambda}} \overline{p_n\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}\right)}. \quad (4.4)$$

Из соотношений (4.4) следует, что константы c_n чисто мнимые: $c_n = ia_n$. Тогда, принимая во внимание (4.4), для ядра R_0 (2.17), (2.41) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} R_0(\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}) &= \pi \sum_{n=1}^{2N} f_n(\mu, \bar{\mu}) g_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \\ &= \pi \sum_{n=1}^N \left(p_n(\mu, \bar{\mu}) \frac{ia_n \epsilon^3}{|\lambda|^2 \bar{\lambda}} \overline{p_n\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\lambda}\right)} - \frac{ia_n \epsilon^3}{|\mu|^4} \overline{p_n\left(\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, \frac{\epsilon}{\mu}\right)} \lambda p_n(-\lambda, -\bar{\lambda}) \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Согласно (4.5) определим наборы f, g функций f_n, g_n :

$$\begin{aligned} f := (f_1, \dots, f_{2N}) &= \left(p_1(\mu, \bar{\mu}), \dots, p_N(\mu, \bar{\mu}); \frac{\epsilon^3}{|\mu|^4} \overline{p_1\left(\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, \frac{\epsilon}{\mu}\right)}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \frac{\epsilon^3}{|\mu|^4} \overline{p_N\left(\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, \frac{\epsilon}{\mu}\right)} \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} g := (g_1, \dots, g_{2N}) &= \left(i \frac{\epsilon^3 a_1}{|\lambda|^2 \bar{\lambda}} \overline{p_1\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\lambda}\right)}, \dots, i \frac{\epsilon^3 a_N}{|\lambda|^2 \bar{\lambda}} \overline{p_N\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\lambda}\right)} \right); \\ &\quad -ia_1 \lambda p_1(-\lambda, -\bar{\lambda}), \dots, -ia_N \lambda p_N(-\lambda, -\bar{\lambda}) \Big). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из определений (2.21), (2.23) и (4.6), (4.7), принимая во внимание (4.4), получаем соотношения между различными функциональными параметрами:

$$\alpha_n := \iint_C p_n(\mu, \bar{\mu}) e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu}, \quad (4.8)$$

$$\beta_n := ia_n \epsilon^3 \iint_C \frac{1}{|\lambda|^2 \bar{\lambda}} \overline{p_n\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\lambda}\right)} e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = -\epsilon a_n \bar{\alpha}_{nz}, \quad (4.9)$$

$$\alpha_{N+n} := \iint_C \frac{\epsilon^3}{|\mu|^4} \overline{p_n\left(\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, \frac{\epsilon}{\mu}\right)} e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu} = \epsilon \bar{\alpha}_n, \quad (4.10)$$

$$\beta_{N+n} := -i \iint_C \lambda a_n p_n(-\lambda, -\bar{\lambda}) e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = a_n \alpha_{nz}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.11)$$

Тогда наборы функциональных параметров α и β

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{2N}) := (\alpha_1, \dots, \alpha_N; \epsilon \bar{\alpha}_1, \dots, \epsilon \bar{\alpha}_N), \quad (4.12)$$

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2N}) := (-\epsilon a_1 \bar{\alpha}_{1z}, \dots, -\epsilon a_N \bar{\alpha}_{Nz}; a_1 \alpha_{1z}, \dots, a_N \alpha_{Nz}) \quad (4.13)$$

выражаются через N независимых комплексных функциональных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. Общая детерминантная формула (2.29) с матрицей A (2.24), соответствующей ядру R_0 (4.5) $\bar{\partial}$ -проблемы, позволяет построить класс точных решений u с функциональными параметрами эллиптической версии уравнения НВН (1.1) с постоянным асимптотическим значением $-\epsilon$ на бесконечности. По построению эти решения зависят от N комплексных функциональных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$.

В простейшем случае $N = 1$ имеем $(\alpha_1, \alpha_2) := (\alpha_1, \epsilon \bar{\alpha}_1)$, $(\beta_1, \beta_2) := (-\epsilon a_1 \bar{\alpha}_{1z}, a_1 \alpha_{1z})$, из (2.24) следует, что детерминант матрицы A дается выражением

$$\det A = \left(1 - \frac{a_1 \epsilon}{2} \partial_z^{-1} (\alpha_1 \bar{\alpha}_{1z}) + \frac{a_1 \epsilon}{4} |\alpha_1|^2\right)^2 = \Delta^2. \quad (4.14)$$

Соответствующее решение u вследствие (2.29) и (4.14) имеет вид

$$u(z, \bar{z}, t) = -\epsilon + \frac{a_1 \epsilon}{2\Delta} (|\alpha_{1z}|^2 - |\alpha_{1\bar{z}}|^2) - \frac{a_1^2 \epsilon^2}{8\Delta^2} |\alpha_1 \bar{\alpha}_{1\bar{z}} - \bar{\alpha}_1 \alpha_{1\bar{z}}|^2. \quad (4.15)$$

Для дельта-функционального ядра типа (4.5) с $p_n(\mu, \bar{\mu}) = \delta(\mu - \mu_n)$, $n = 1, \dots, N$, и $\lambda_n \bar{\mu}_n = \mu_n \bar{\lambda}_n = -\epsilon$ общая детерминантная формула (2.29) с учетом (4.6)–(4.13) приводит к соответствующим многосолитонным решениям. В простейшем случае $N = 1$ из (4.8) получаем $\alpha_1 = -2ie^{F(\mu_1)}$, а из (4.15) – соответствующее точное решение u , которое при условии $\epsilon a_1(\mu_1 + \lambda_1)/(\lambda_1 - \mu_1) = -e^{\varphi_0} < 0$ представляет собой несингулярный линейный солитон:

$$u(z, \bar{z}, t) = -\epsilon + \frac{|\lambda_1 - \mu_1|^2}{2} \frac{1}{\text{ch}^2[(\varphi(z, \bar{z}, t) + \varphi_0)/2]}, \quad (4.16)$$

где фаза φ имеет вид

$$\varphi(z, \bar{z}, t) = i[(\mu_1 - \lambda_1)z - (\bar{\mu}_1 - \bar{\lambda}_1)\bar{z} + \kappa(\mu_1^3 - \lambda_1^3)t - \bar{\kappa}(\bar{\mu}_1^3 - \bar{\lambda}_1^3)t]. \quad (4.17)$$

Используя (2.18) и (2.6) и принимая во внимание равенство $\lambda_1 \bar{\mu}_1 = \mu_1 \bar{\lambda}_1 = -\epsilon$, вычисляем волновые функции $\psi(\lambda)$, $\psi(\mu_1)$, $\psi(-\lambda_1)$, соответствующие солитонному решению (4.16):

$$\psi(\lambda) = e^{F(\lambda)} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1}\right) \frac{2a_1 e^{\varphi(z, \bar{z}, t) + F(\lambda)}}{1 + e^{\varphi(z, \bar{z}, t) + \varphi_0}}; \quad (4.18)$$

$$\psi(\mu_1) = \frac{e^{F(\mu_1)}}{1 + e^{\varphi(z, \bar{z}, t) + \varphi_0}}, \quad \psi(-\lambda_1) = \frac{e^{-F(\lambda_1)}}{1 + e^{\varphi(z, \bar{z}, t) + \varphi_0}}. \quad (4.19)$$

Точный односолитонный потенциал (4.16) двумерного стационарного уравнения Шредингера (1.7) $V_{\text{Schr}} = -2\tilde{u}$ имеет вид

$$V_{\text{Schr}} = \frac{-|\lambda_1 - \mu_1|^2}{\text{ch}^2[(\varphi(z, \bar{z}) + \varphi_0)/2]}, \quad E = -2\epsilon = 2\lambda_1 \bar{\mu}_1. \quad (4.20)$$

Вещественная фаза $\varphi(z, \bar{z}) = F(\mu_1) - F(\lambda_1)$ в рассматриваемом случае дается выражением

$$\varphi_1(z, \bar{z}) = i[(\mu_1 - \lambda_1)z - (\bar{\mu}_1 - \bar{\lambda}_1)\bar{z}] = -2|\Delta_1| \left(\frac{\Delta_{1I}}{|\Delta_1|} x + \frac{\Delta_{1R}}{|\Delta_1|} y \right), \quad (4.21)$$

где $\Delta_1 = \Delta_{1R} + i\Delta_{1I} := \mu_1 - \lambda_1$.

Потенциал V_{Schr} (4.20) и квадраты модулей волновых функций (4.19) стационарных состояний с энергиями $E < 0$, $E > 0$ и $E = 0$ построены на рис. 3а, 3б и 3в соответственно. В рассматриваемом случае квадраты модулей волновых функций (4.19)

Рис. 3. Потенциал V_{Schr} (4.20) (серый цвет) с уровнем энергии E (темная плоскость) и квадраты модулей соответствующих волновых функций $|\psi(\mu_1)|^2 = |\psi(-\lambda_1)|^2$ (4.19) (светлый оттенок) со следующими значениями параметров: (а) $a_1 = -0.1$, $\lambda_1 = e^{i\pi/6}$, $\mu_1 = 4e^{i7\pi/6}$, $E = -2\epsilon = -8$; (б) $a_1 = -0.1$, $\lambda_1 = e^{i\pi/6}$, $\mu_1 = 4e^{i\pi/6}$, $E = -2\epsilon = 8$; (в) $a_1 = 0.1$, $\lambda_1 = e^{i\pi/6}$, $\mu_1 = 0$, $E = -2\epsilon = 0$.

ограничены и описывают состояния локализованной вдоль солитонной потенциальной ямы (4.20) квантовой микрочастицы.

В случае (4.3), разделяя переменные, получаем следующие соотношения для функций $q_n(\lambda, \bar{\lambda})$ и $p_n(\mu, \bar{\mu})$:

$$p_n(\mu, \bar{\mu}) = c_n \frac{\epsilon^2}{|\mu|^4} \overline{p_n\left(\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, \frac{\epsilon}{\mu}\right)}, \quad q_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{\epsilon}{c_n \bar{\lambda}^2} \overline{q_n\left(\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, \frac{\epsilon}{\lambda}\right)}. \quad (4.22)$$

Константы c_n в (4.22) без потери общности могут быть выбраны равными единице. Для ядра R_0 $\bar{\partial}$ -проблемы (2.1) вследствие (4.22) получаем

$$\begin{aligned} R_0(\mu, \bar{\mu}, \lambda, \bar{\lambda}) &= \pi \sum_{n=1}^{2N} f_n(\mu, \bar{\mu}) g_n(\lambda, \bar{\lambda}) = \\ &= \pi \sum_{n=1}^N \left(p_n(\mu, \bar{\mu}) q_n(\lambda, \bar{\lambda}) + \frac{\epsilon}{\mu \bar{\mu}^2} \overline{q_n\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, -\frac{\epsilon}{\mu}\right)} \lambda \frac{\epsilon^2}{|\lambda|^4} \overline{p_n\left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\lambda}\right)} \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Согласно (4.23) определим наборы f , g функций f_n , g_n :

$$\begin{aligned} f &:= (f_1, \dots, f_{2N}) = \\ &= \left(p_1(\mu, \bar{\mu}), \dots, p_N(\mu, \bar{\mu}); \frac{\epsilon}{\mu \bar{\mu}^2} q_1 \left(-\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, -\frac{\epsilon}{\mu} \right), \dots, \frac{\epsilon}{\mu \bar{\mu}^2} q_N \left(-\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, -\frac{\epsilon}{\mu} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} g &:= (g_1, \dots, g_{2N}) = \\ &= \left(q_1(\lambda, \bar{\lambda}), \dots, q_N(\lambda, \bar{\lambda}); \frac{\epsilon^2}{\lambda^2 \bar{\lambda}} p_1 \left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\lambda} \right), \dots, \frac{\epsilon^2}{\lambda^2 \bar{\lambda}} p_N \left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\lambda} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Из определений (2.21), (2.23) и (4.24), (4.25), принимая во внимание (4.22), получаем соотношения между различными функциональными параметрами:

$$\alpha_n := \iint_C \frac{\epsilon^2}{|\mu|^4} \overline{p_n \left(\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, \frac{\epsilon}{\mu} \right)} e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu} = \bar{\alpha}_n, \quad (4.26)$$

$$\beta_n := \iint_C \frac{\epsilon}{\lambda^2} \overline{q_n \left(\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, \frac{\epsilon}{\lambda} \right)} e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = -\frac{1}{\epsilon} \bar{\beta}_{nzz}, \quad (4.27)$$

$$\alpha_{N+n} := \iint_C \frac{\epsilon}{\mu \bar{\mu}^2} \overline{q_n \left(-\frac{\epsilon}{\bar{\mu}}, -\frac{\epsilon}{\mu} \right)} e^{F(\mu)} d\mu \wedge d\bar{\mu} = -\frac{i}{\epsilon} \bar{\beta}_{nz}, \quad (4.28)$$

$$\beta_{N+n} := \iint_C \frac{\epsilon^2}{\lambda^2 \bar{\lambda}} \overline{p_n \left(-\frac{\epsilon}{\bar{\lambda}}, -\frac{\epsilon}{\lambda} \right)} e^{-F(\lambda)} d\lambda \wedge d\bar{\lambda} = i \bar{\alpha}_{nz}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.29)$$

Из (4.27) следует

$$\beta_{n\bar{z}} = -\bar{\beta}_{nz} = -\overline{\beta_{n\bar{z}}}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.30)$$

Таким образом, из (4.26)–(4.30) следует, что наборы функциональных параметров α и β

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{2N}) := \left(\alpha_1, \dots, \alpha_N; \frac{i}{\epsilon} \beta_{1\bar{z}}, \dots, \frac{i}{\epsilon} \beta_{N\bar{z}} \right), \quad (4.31)$$

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2N}) := (\beta_1, \dots, \beta_N; i\alpha_{1z}, \dots, i\alpha_{Nz}) \quad (4.32)$$

выражаются через $2N$ независимых функциональных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ и $(\beta_1, \dots, \beta_N)$, которые даются соотношениями (4.26)–(4.29).

Общая детерминантная формула (2.29) с матрицей A (2.24), соответствующей ядру R_0 (4.5) $\bar{\partial}$ -проблемы, позволяет построить класс точных решений u с функциональными параметрами эллиптической версии уравнения НВН (1.1) с постоянным асимптотическим значением $-\epsilon$ на бесконечности. По построению согласно (4.30) эти решения зависят от N комплексных функциональных параметров $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ и N вещественных функциональных параметров $(i\beta_{1\bar{z}}, \dots, i\beta_{N\bar{z}})$. В простейшем случае $N = 1$ имеем $(\alpha_1, \alpha_2) := (\alpha_1, \frac{i}{\epsilon} \beta_{1\bar{z}})$, $(\beta_1, \beta_2) := (\beta_1, i\alpha_{1z})$, а с учетом (2.24), (4.31), (4.32) и тождества $\partial_z^{-1}(\alpha_1 \beta_1) - \partial_{\bar{z}}^{-1}(\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1) = \frac{i}{\epsilon} \alpha_1 \beta_{1\bar{z}}$ (верного при выполнении соотношений (4.26)–(4.30)) детерминант матрицы A дается явно вещественным выражением:

$$\det A = \left(1 + \frac{1}{4} \partial_z^{-1}(\alpha_1 \beta_1) + \frac{1}{4} \partial_{\bar{z}}^{-1}(\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1) \right)^2 = \Delta^2. \quad (4.33)$$

Рис. 4. Потенциал V_{Schr} , соответствующий решению (4.35) (серый цвет) с уровнем энергии E (темная плоскость), и квадрат модуля соответствующей волновой функции $|\psi(\mu_1)|^2$ (4.38) (светлый оттенок) со следующими значениями параметров: (а) $a_1 = -1$, $\lambda_1 = 2 - i$, $\delta = 10\pi/9$, $E = -2\epsilon = -10$; (б) $a_1 = -1$, $\lambda_1 = 2 - i$, $\delta = \pi/3$, $E = -2\epsilon = -10$.

Используя (4.33), вычисляем с помощью (2.29) соответствующее точное решение:

$$u = -\epsilon + \frac{1}{2\Delta} \left[(\alpha_1 \beta_1)_{\bar{z}} + (\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1)_z - \frac{1}{4\Delta} \left(\alpha_1 \beta_1 + \frac{1}{\epsilon} \bar{\alpha}_{1z} \bar{\beta}_{1z} \right) \left(\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 + \frac{1}{\epsilon} \alpha_{1\bar{z}} \beta_{1\bar{z}} \right) \right]. \quad (4.34)$$

Для дельта-функционального ядра типа (4.23) с $p_n(\mu, \bar{\mu}) = i\delta(\mu - \mu_n)$, $q_n(\lambda, \bar{\lambda}) = -ia_n \lambda_n \delta(\lambda - \lambda_n)$, $n = 1, \dots, N$, при $|\mu_n|^2 = |\lambda_n|^2 = \epsilon$ и вещественных констант $a_n = \bar{a}_n$ общая детерминантная формула (2.29) с учетом (4.24)–(4.32) приводит к соответствующим многосолитонным решениям. В простейшем случае $N = 1$ из (4.26), (4.27) получаем функциональные параметры $\alpha_1 = 2e^{F(\mu_1)}$, $\beta_1 = -2a_1 \lambda_1 e^{-F(\lambda_1)}$, а из (4.34) – соответствующее точное решение u , которое при условии $ia(\mu_1 + \lambda_1)/(\mu_1 - \lambda_1) = -e^{\varphi_0} < 0$ представляет собой несингулярный линейный солитон:

$$u(z, \bar{z}, t) = -\epsilon + \epsilon \frac{2 \sin^2(\delta/2)}{\text{ch}^2[(\varphi(z, \bar{z}, t) + \varphi_0)/2]}, \quad (4.35)$$

где $\delta = \arg \mu_1 - \arg \lambda_1$, и фаза φ имеет вид

$$\varphi(z, \bar{z}, t) = i[(\mu_1 - \lambda_1)z - (\bar{\mu}_1 - \bar{\lambda}_1)\bar{z} + \kappa(\mu_1^3 - \lambda_1^3)t - \bar{\kappa}(\bar{\mu}_1^3 - \bar{\lambda}_1^3)t]. \quad (4.36)$$

Используя (2.18) и (2.6) и принимая во внимание равенство $|\mu_1|^2 = |\lambda_1|^2 = \epsilon$, вычисляем волновые функции $\psi(\lambda)$, $\psi(\mu_1)$, $\psi(-\lambda_1)$, соответствующие солитонному решению (4.35):

$$\psi(\lambda) = e^{F(\lambda)} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1} \right) \frac{2ia_1 e^{\varphi(z, \bar{z}, t) + F(\lambda)}}{1 + e^{\varphi(z, \bar{z}, t) + \varphi_0}}; \quad (4.37)$$

$$\psi(\mu_1) = \frac{e^{F(\mu_1)}}{1 + e^{\varphi(z, \bar{z}, t) + \varphi_0}}, \quad \psi(-\lambda_1) = \frac{e^{-F(\lambda_1)}}{1 + e^{\varphi(z, \bar{z}, t) + \varphi_0}}. \quad (4.38)$$

Потенциал V_{Schr} , соответствующий односолитонному решению (4.35), и квадрат модуля соответствующей волновой функции $\psi(\mu_1)$ (4.38) для случаев $(V_{\text{Schr}})_{\min} < E < 0$, $(V_{\text{Schr}})_{\min} = E < 0$ построены на рис. 4а, 4б. Квадрат модуля волновой функции $\psi(-\lambda_1)$ имеет подобный вид, но принимает ненулевые значения вдоль другой половины потенциальной долины. В рассматриваемом случае квадраты модулей волновых функций неограниченны (бесконечные значения обрезаны и показаны в виде светлых плато) и не могут использоваться для описания физических состояний квантовой микрочастицы.

5. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ МИКРОЧАСТИЦЫ В СОЛИТОННЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ РЕЛЬЕФАХ

Обсудим физические свойства локализованных стационарных состояний квантовой микрочастицы с единичной массой $m = 1$, находящейся в поле точного солитонного потенциала (4.20), вычисленного в предыдущем разделе. В силу (4.21) единичный вектор $\vec{l}$ вдоль линии минимума точного односолитонного потенциала (4.20) и проекция оператора импульса микрочастицы на указанное направление даются следующими выражениями:

$$\vec{l} = \left(-\frac{\Delta_{1R}}{|\Delta_1|}, \frac{\Delta_{1I}}{|\Delta_1|} \right), \quad \hat{p}_l := -i\vec{l} \cdot \vec{\nabla} = \frac{i}{|\Delta_1|} (\bar{\Delta}_1 \partial_z + \Delta_1 \partial_{\bar{z}}), \quad (5.1)$$

здесь и ниже мы используем систему единиц с постоянной Планка $\hbar = 1$; все пространственные производные для удобства выражены в терминах производных по комплексным координатам $\partial_z := (\partial_x - i\partial_y)/2$, $\partial_{\bar{z}} := (\partial_x + i\partial_y)/2$.

Волновые функции $\psi(\mu_1)$ и $\psi(-\lambda_1)$ односолитонного потенциала в силу (4.19) и (5.1), очевидно, являются собственными волновыми функциями оператора импульса $\hat{p}_l$ частицы:

$$\hat{p}_l \psi(\mu_1) = \frac{|\lambda_1|^2 - |\mu_1|^2}{|\Delta_1|} \psi(\mu_1), \quad \hat{p}_l \psi(-\lambda_1) = -\frac{|\lambda_1|^2 - |\mu_1|^2}{|\Delta_1|} \psi(-\lambda_1), \quad (5.2)$$

с проекциями импульса p_l частицы на направление $\vec{l}$, имеющими значения $p_l = \pm(|\lambda_1|^2 - |\mu_1|^2)/|\Delta_1|$. Энергия частицы, соответствующая ее движению вдоль линии минимума потенциальной энергии частицы (минимума потенциала) (4.20), в силу соотношения $\epsilon = -\mu_1 \bar{\lambda}_1 = -\bar{\mu}_1 \lambda_1$ и (5.2) имеет следующее значение:

$$E_l = E_{\parallel} = \frac{p_l^2}{2m} = \frac{p_l^2}{2} = \frac{(|\lambda_1|^2 - |\mu_1|^2)^2}{2|\mu_1 - \lambda_1|^2} = \frac{|\mu_1 + \lambda_1|^2}{2}. \quad (5.3)$$

Энергия движения частицы в поперечном к долине потенциала (4.20) направлении дается разностью полной энергии $E = -2\epsilon = \mu_1 \bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1 \lambda_1$ и энергии E_l продольного ее движения вдоль минимума долины:

$$E_{\text{tr}} = E_{\perp} = E - E_l = \mu_1 \bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1 \lambda_1 - \frac{|\mu_1 + \lambda_1|^2}{2} = -\frac{|\mu_1 - \lambda_1|^2}{2}. \quad (5.4)$$

Рис. 5. Потенциал V_{Schr} , соответствующий решению (4.20) (серый цвет), и квадрат модуля соответствующей волновой функции $|\psi(\lambda)|^2$ (4.18) (светлый оттенок) с параметрами: $a_1 = -0.1$, $\lambda_1 = e^{i\pi/6}$, $\mu_1 = 4e^{i\pi/6}$, $E = -2\epsilon = 8$.

Интересно отметить, что в прямоугольной системе координат

$$x' := \frac{\Delta_{1\text{I}}}{|\Delta_1|}x + \frac{\Delta_{1\text{R}}}{|\Delta_1|}y, \quad y' := -\frac{\Delta_{1\text{R}}}{|\Delta_1|}x + \frac{\Delta_{1\text{I}}}{|\Delta_1|}y \quad (5.5)$$

с осями x' и y' , выбранными в поперечном и продольном долине потенциала (4.20) направлениях, соответствующие волновые функции $\psi(\mu_1)$ или $\psi(-\lambda_1)$ в силу (4.19), (4.20) и (5.5) удовлетворяют двумерному стационарному уравнению Шредингера:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2}(\partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2) - \frac{|\Delta_1|^2}{\text{ch}^2(|\Delta_1|x' - \phi_{01}/2)} \right) \frac{\exp[\pm i \frac{|\lambda_1|^2 - |\mu_1|^2}{|\Delta_1|} y']}{\text{ch}(|\Delta_1|x' - \phi_{01}/2)} = \\ & = E \frac{\exp[\pm i \frac{|\lambda_1|^2 - |\mu_1|^2}{|\Delta_1|} y']}{\text{ch}(|\Delta_1|x' - \phi_{01}/2)}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Последнее уравнение с помощью разделения переменных сводится к двум одномерным стационарным уравнениям Шредингера

$$\left(-\frac{1}{2}\partial_{x'}^2 - \frac{|\Delta_1|^2}{\text{ch}^2(|\Delta_1|x' - \phi_{01}/2)} \right) \frac{1}{\text{ch}(|\Delta_1|x' - \phi_{01}/2)} = \frac{E_{\perp}}{\text{ch}(|\Delta_1|x' - \phi_{01}/2)}, \quad (5.7)$$

$$\left(-\frac{1}{2}\partial_{y'}^2 \right) \exp\left[\pm i \frac{|\lambda_1|^2 - |\mu_1|^2}{|\Delta_1|} y'\right] = E_{\parallel} \exp\left[\pm i \frac{|\lambda_1|^2 - |\mu_1|^2}{|\Delta_1|} y'\right] \quad (5.8)$$

с соответствующими энергиями поперечного $E_{\perp}$ и продольного $E_{\parallel}$ движений частицы.

Согласно проведенному анализу можно утверждать, что волновые функции $\psi(\mu_1)$ и $\psi(-\lambda_1)$ соответствуют стационарным состояниям частицы с полной энергией $E = E_{\parallel} + E_{\perp}$ и продольным импульсом $p_{\parallel} = \pm(|\lambda_1|^2 - |\mu_1|^2)/|\Delta_1|$, направленным вдоль линии минимума потенциальной энергии. Частица связана солитонным потенциалом (4.20) в поперечном долине потенциала направлении и свободно движется в продольном направлении. Все отмеченные особенности иллюстрируются графиками, изображенными на рис. 5. Полная энергия частицы может быть выбрана положительной и сколь угодно большой, но частица в описанных стационарных состояниях

остается локализованной в поперечном долине потенциала направлении, так как с возрастанием продольной энергии частицы $E_{\parallel} = |\mu_1 + \lambda_1|^2/2$ одновременно понижается энергия $E_{\perp} = -|\mu_1 - \lambda_1|^2/2$ ее поперечного движения. Спектральные параметры μ_1, λ_1 связаны с энергией частицы соотношением $E = -2\epsilon = \mu_1 \bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1 \lambda_1$ и могут рассматриваться как регулирующие поведение частицы параметры потенциала.

Среди построенных в предыдущем разделе волновых функций двумерного стационарного уравнения Шредингера имеются функции (4.18) с непрерывным произвольным спектральным параметром $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$. Экспоненциальный множитель $e^{F(\lambda)} = e^{i(\lambda z - (\epsilon/\lambda)\bar{z})}$ в этой функции может быть переписан следующим образом:

$$e^{F(\lambda)} = \exp \left[i\lambda_R \left(1 - \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \right) x - i\lambda_I \left(1 - \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \right) y - \lambda_R \left(1 + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \right) y - \lambda_I \left(1 + \frac{\epsilon}{|\lambda|^2} \right) x \right]. \quad (5.9)$$

Эта экспонента ограничена, если вещественная часть ее показателя равна нулю. В силу (5.9) последнее достигается при условии $E = -2\epsilon = 2|\lambda|^2 > 0$, т. е. при положительной энергии микрочастицы.

Стационарные состояния частицы со спектральным параметром λ , удовлетворяющим условию $E = -2\epsilon = 2|\lambda|^2 > 0$, и волновой функцией (4.18) соответствуют безотражательному движению частицы в поле соответствующих солитонных потенциалов. В самом деле, плотность потока вероятности $\vec{j}$ для частицы в состоянии с волновой функцией $\psi(\lambda)$, как известно, определяется следующей формулой (в нашем случае используется система единиц с $\hbar = 1$ и $m = 1$):

$$\vec{j} := \text{Im}(\bar{\psi}(\lambda) \vec{\nabla} \psi(\lambda)), \quad (5.10)$$

где $\bar{\psi}(\lambda)$ комплексно сопряжена к $\psi(\lambda)$, $\vec{\nabla}$ – оператор градиента. Волновая функция $\psi(\lambda)$ дается выражением (4.18), где $F(\lambda)$ согласно (5.9) и выбору $\epsilon = -|\lambda|^2$ принимает вид

$$F(\lambda) = 2i(\lambda_R x + \lambda_I y) = i\vec{k} \cdot \vec{r}. \quad (5.11)$$

Здесь векторы местоположения и импульса частицы даются формулами $\vec{r} = (x, y)$ и $\vec{k} = (2\lambda_R, 2\lambda_I)$. Подставляя (4.18) в (5.10), после несложных преобразований с учетом (5.11) получаем для плотности потока вероятности следующее выражение:

$$\vec{j} := |\psi(\lambda)|^2 \vec{k} + \frac{2a_1 e^{\varphi(z, \bar{z}, t)}}{(1 + e^{\varphi(z, \bar{z}, t) + \varphi_0})^2} \vec{\nabla} \varphi(z, \bar{z}, t) \text{Im} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1} \right), \quad (5.12)$$

где в силу (4.21) $\vec{\nabla} \varphi(z, \bar{z}, t) = 2(\lambda_{1I} - \mu_{1I}, \lambda_{1R} - \mu_{1R})$. Аналогичное выражение получается и для волновой функции $\hat{p}\psi(\lambda)$:

$$\hat{p}\psi(\lambda) = \vec{k}\psi(\lambda) - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda + \mu_1} \right) \frac{2a_1 e^{\varphi(z, \bar{z}, t)}}{(1 + e^{\varphi(z, \bar{z}, t) + \varphi_0})^2} \vec{\nabla} \varphi(z, \bar{z}, t) e^{F(\lambda)}. \quad (5.13)$$

Вторые слагаемые в формулах (5.12) и (5.13) вне потенциальной долины, где $\varphi(z, \bar{z}, t) \rightarrow \pm\infty$, очевидно, исчезают. При этом вне потенциальной ямы волновая

функция $\psi(\lambda)$ описывает состояние частицы с импульсом $\vec{k}$ (5.13); плотность потока вероятности (5.12), в свою очередь, определяется первым слагаемым, т.е. при движении частицы поперек солитонной потенциальной ямы (или при рассеянии ее на яме) плотности потоков вероятности и импульсы для частицы до ямы и после ямы одинаковы, а отраженного потока вероятности нет. Этот факт отсутствия отраженной волны при рассеянии означает, что рассматриваемый солитонный потенциал (4.20) является безотражательным потенциалом. Аналогичное рассмотрение справедливо и в случае многосолитонных потенциалов, которые также являются безотражательными.

Благодарности. Работа поддержана научным грантом по фундаментальным исследованиям (2009–2010 гг.) Новосибирского государственного технического университета, грантом АВИЦП (регистрационный номер 2.1.1/1958) Министерства науки и образования Российской Федерации “Развитие потенциала Высшей школы (2009–2010 гг.)”, а также международным научно-исследовательским грантом РФФИ № 09-01-92442-КЕа (2009–2010 гг.).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [2] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [3] B. G. Konopelchenko, *Introduction to Multidimensional Integrable Equations: The Inverse Spectral Transform in 2 + 1 Dimensions*, Plenum Press, New York, 1992.
- [4] B. G. Konopelchenko, *Solitons in Multidimensions: Inverse Spectral Transform Method*, World Sci., Singapore, 1993.
- [5] S. V. Manakov, *Physica D*, **3**:1–2 (1981), 420–427.
- [6] R. Beals, R. R. Coifman, *Physica D*, **18**:1–3 (1986), 242–249.
- [7] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:2 (1985), 11–25.
- [8] V. E. Zakharov, “Commutating operators and nonlocal problem”, *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, Proc. III Int. Workshop. v. 1, Naukova Dumka, Kiev, 1988, 152–154.
- [9] L. V. Bogdanov, S. V. Manakov, *J. Phys. A*, **21**:10 (1988), L537–L544.
- [10] A. S. Fokas, V. E. Zakharov, *J. Nonlinear Sci.*, **2**:1 (1992), 109–134.
- [11] Л. П. Нижник, *Докл. АН СССР*, **254**:2 (1980), 332–335.
- [12] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. РАН*, **279**:1 (1984), 20–24.
- [13] П. Г. Гриневич, С. В. Манаков, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:2 (1986), 14–24.
- [14] P. G. Grinevich, S. P. Novikov, “Inverse scattering problem for the two-dimensional Schrodinger operator at a fixed negative energy and generalized analytic functions”, *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics*, Proceedings of International Workshop “Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics”. v. 1, eds. V. G. Bar'yakhtar, V. M. Chernousenko, N. S. Erokhin, A. G. Sitenko, V. E. Zakharov, World Sci., Singapore, 1988, 58–85.
- [15] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:1 (1988), 23–33.
- [16] M. Boiti, J. Jp. Leon, M. Manna, F. Pempinelli, *Inverse Problems*, **3**:1 (1987), 25–36.
- [17] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin, 1991.

- [18] П. Г. Гриневич, *Преобразование рассеяния для двумерного оператора Шредингера при одной энергии и связанные с ним интегрируемые уравнения математической физики*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Ин-т теорет. физ. им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, 1999.
- [19] П. Г. Гриневич, *УМН*, **55**:6(336) (2000), 3–70.
- [20] C. Athorne, J. J. C. Nimmo, *Inverse Problems*, **7**:6 (1991), 809–826.
- [21] V. G. Dubrovsky, B. G. Konopelchenko, *Inverse Problems*, **9**:3 (1993), 391–416.
- [22] V. G. Dubrovsky, I. B. Formusatik, *J. Phys. A*, **34**:9 (2001), 1837–1851.
- [23] V. G. Dubrovsky, I. B. Formusatik, *Phys. Lett. A*, **313**:1–2 (2003), 68–76.
- [24] С. В. Манаков, *УМН*, **31**:5(191) (1976), 245–246.
- [25] П. Г. Гриневич, *ТМФ*, **69**:2 (1986), 307–310.
- [26] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *ДАН СССР*, **229**:1 (1976), 15–18.
- [27] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функци. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [28] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, *Функци. анализ и его прил.*, **13**:3 (1979), 13–22.
- [29] V. G. Dubrovsky, A. V. Gramolin, *J. Phys. A*, **41**:27 (2008), 275208, 14 pp., arXiv: 0802.2334.

Поступила в редакцию 26.02.2010