Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Х. Шерматов, О точечном взаимодействии двух различных частиц во внешнем поле, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 1, 74–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:41:55

О ТОЧЕЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ РАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Рассматривается модель точечного взаимодействия двух частиц во внешнем поле, аналогичная модели Скорнякова–Тер-Мартirosяна и трактуемая с помощью теории самосопряженных расширений симметрических операторов. Показано, что соответствующий оператор энергии имеет бесконечный набор связанных состояний со значениями энергии, уходящими на $-\infty$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было впервые предложено строгое математическое описание точечного взаимодействия в квантовой механике. Предложенный подход был проиллюстрирован на примере взаимодействия двух нерелятивистских скалярных частиц, и гамильтониан системы трактовался с помощью теории самосопряженных расширений симметрических операторов (см., например, [2]). В работах [3, 4] этот подход был применен к системе трех одинаковых квантовых частиц (бозонов), взаимодействующих точечным образом, и гамильтониан системы вводился как некоторое самосопряженное расширение симметрического оператора кинетической энергии трех частиц

$$H_0 = -\Delta_{x_1} - \Delta_{x_2} - \Delta_{x_3},$$

определенного на области $D(H_0) \subset L_2^s((\mathbb{R}^3)^3)$ функций трех переменных $x_j \in \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2, 3$, обращающихся в нуль при совпадении любых двух аргументов $x_j = x_k$, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, 3$. Эта задача впервые рассматривалась в работе Скорнякова и Тер-Мартirosяна [5], где было указано одно из расширений оператора H_0 (обозначаемое через H_ε , $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$), которое, как позже было показано в работах Данилова [6] и Минлоса, Фаддеева [3, 4], является лишь симметрическим, но не самосопряженным расширением H_0 . В работе [3] показано, что оператор H_ε имеет индексы дефекта $(1, 1)$, и построены все самосопряженные расширения $H_{\varepsilon, \beta}$ оператора H_ε . При этом оказалось, что все эти расширения имеют неограниченный снизу дискретный спектр (возможно “падение на центр”). В работе [7] с использованием результатов работы [3] изучался гамильтониан

* Самаркандское отделение АН Республики Узбекистан, Самарканд, Узбекистан

системы трех частиц (двух фермионов и одной частицы иной природы), взаимодействующих точечным образом. Этот гамильтониан вводился как расширение Скорнякова и Тер-Мартirosяна оператора H_0 в пространстве $L_2^{a(1,2)}((\mathbb{R}^3)^3)$ функций, антисимметричных относительно переменных x_1 и x_2 , и было показано, что эти расширения являются самосопряженными и полуограниченными. В работе [8] обобщены результаты работ [3, 4, 7] на случай трех различных частиц (обладающих даже различными массами).

В настоящей работе, следуя в основном схеме работ [7, 8], мы рассматриваем случай двух различных частиц, взаимодействующих точечным образом во внешнем поле (также с точечным потенциалом). В работе доказано существование бесконечного числа связанных состояний системы со значениями энергии, уходящими на $-\infty$ (эффект Томаса).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Гамильтониан системы двух различных квантовых частиц, взаимодействующих точечным образом во внешнем поле, задается как некоторое самосопряженное расширение симметрического оператора

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2},$$

действующего в пространстве $L_2 \equiv L_2((\mathbb{R}^3)^2)$ волновых функций $\psi(x_1, x_2)$ и определенного на области

$$D(\hat{H}) = \{\psi \in L_2 : \Delta_{x_j}\psi \in L_2, \quad j = 1, 2; \quad \psi(x, x) = \psi(x, 0) = \psi(0, x) = 0\}.$$

Далее удобно перейти к импульсному представлению. В результате преобразования Фурье замыкание оператора $\hat{H}$ перейдет в следующий симметрический оператор:

$$(Hf)(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2m_1}p_1^2 + \frac{1}{2m_2}p_2^2 \right) f(p_1, p_2), \quad (1)$$

область определения $D(H) \subset L_2$ которого состоит из функций $f(p_1, p_2)$, удовлетворяющих условиям

$$Hf \in L_2, \quad \int_{(\mathbb{R}^3)^2} f(p_1, p_2) [u_1(p_1) + u_2(p_2) + u_3(p_1 + p_2)] dp_1 dp_2 = 0, \quad (2)$$

где $u_j(p)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u_j(p)|^2 (p^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dp < \infty, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Поскольку оператор H неотрицателен, естественно воспользоваться теорией расширений полуограниченных симметрических операторов. Используемые нами приемы можно найти в работе Бирмана [9]. С помощью условия (2) нетрудно убедиться, что

дефектное подпространство $\mathfrak{R}_{-1}(H) = [\text{Ran}(H + E)]^\perp$ оператора $H + E$ состоит из элементов вида

$$\Phi_{\vec{u}}(p_1, p_2) = (u_1(p_1) + u_2(p_2) + u_3(p_1 + p_2)) \left(\frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 + 1 \right)^{-1}, \quad (4)$$

где u_1, u_2, u_3 – функции, удовлетворяющие условию (3). Заметим, что функция $\Phi_{\vec{u}}(p_1, p_2)$ вида (4) принадлежит пространству $\mathfrak{R}_{-1}(H)$ тогда и только тогда, когда функции u_1, u_2, u_3 удовлетворяют условию (3). Легко видеть, что пространство $\mathfrak{R}_{-1}(H)$ изоморфно гильбертову пространству $W^{(3)}$ троек функций $\vec{u}(p) = (u_1(p), u_2(p), u_3(p))$, полученному пополнением пространства $L_2^{(3)} \equiv L_2(\mathbb{R}^3) \oplus L_2(\mathbb{R}^3) \oplus L_2(\mathbb{R}^3)$ по скалярному произведению $[\vec{u}, \vec{v}] = (K\vec{u}, \vec{v})$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L_2^{(3)}$, K – положительный ограниченный оператор в $L_2^{(3)}$, действующий по формулам

$$\begin{aligned} (K\vec{u})_k(p) &= \frac{\pi^2 (2m_j)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2m_l)^{-1}p^2 + 1}} u_k(p) + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u_j(q) + u_3(p+q)}{((2m_k)^{-1}p^2 + (2m_j)^{-1}q^2 + 1)^2} dq, \\ &\quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k, \\ (K\vec{u})_3(p) &= \frac{\pi^2 \eta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2M)^{-1}p^2 + 1}} u_3(p) + \int_{\Gamma_p} \frac{u_1(p_1) + u_2(p_2)}{((2m_1)^{-1}p_1^2 + (2m_2)^{-1}p_2^2 + 1)^2} dv_p. \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma_p = \{(p_1, p_2) \in (\mathbb{R}^3)^2 : p_1 + p_2 = p\}$, $p \in \mathbb{R}^3$, – семейство многообразий с естественной лебеговской мерой dv_p , $M = m_1 + m_2$, $\eta = 2m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.

ЛЕММА 1. Область определения $D(H^*)$ сопряженного оператора H^* состоит из функций вида

$$g(p_1, p_2) = f(p_1, p_2) + \Phi_{\vec{u}}(p_1, p_2) + \left(\frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 + 1 \right)^{-1} \Phi_{\vec{v}}(p_1, p_2), \quad (5)$$

где $f \in D(H)$, $\Phi_{\vec{u}}(p_1, p_2)$ и $\Phi_{\vec{v}}(p_1, p_2)$ – функции вида (4), $\vec{u}, \vec{v} \in W^{(3)}$. Оператор H^* действует на функцию $g(p_1, p_2)$ вида (5) по формуле

$$(H^*g)(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2m_2} p_2^2 \right) g(p_1, p_2) - u_1(p_1) - u_2(p_2) - u_3(p_1 + p_2). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку H – неотрицательный симметрический оператор, воспользуемся теорией расширений полуограниченных симметрических операторов. Видно, что $D(H) = D(H + E)$, $D(H^*) = D(H^* + E)$. Тогда из работы [9] следует, что область $D(H^*)$ разлагается в прямую сумму

$$D(H^*) = D(H) + U + S_1^{-1}U,$$

где U – подпространство решений уравнения $(H^* + E)\Phi = 0$, а S_1 – жесткое самосопряженное расширение оператора $H + E$. Используя разложение (5), получим, что U

состоит из функций $\Phi_{\vec{u}}(p_1, p_2)$ вида (4), где $\vec{u} \in W^{(3)}$. Нетрудно убедиться, что оператор S_1^{-1} действует на функцию $\Phi_{\vec{u}}(p_1, p_2)$ вида (4) из $D(H^*)$ по формуле

$$S_1^{-1}\Phi_{\vec{u}}(p_1, p_2) = \left(\frac{1}{2m_1}p_1^2 + \frac{1}{2m_2}p_2^2 + 1 \right)^{-1} \Phi_{\vec{u}}(p_1, p_2).$$

Итак, для любой функции $g(p_1, p_2) \in D(H^*)$ справедливо разложение (5).

Пусть $g \in D(H^*)$. Тогда

$$g = f + \Phi_{\vec{u}} + S_1^{-1}\Phi_{\vec{v}} \quad (f \in D(H), \quad \Phi_{\vec{u}} \in U, \quad \Phi_{\vec{v}} \in U)$$

и

$$\begin{aligned} H^*g &= Hf + H^*\Phi_{\vec{u}} + H^*S_1^{-1}\Phi_{\vec{v}} = \\ &= Hf + (H^* + E)\Phi_{\vec{u}} + (H^* + E)S_1^{-1}\Phi_{\vec{v}} - \Phi_{\vec{u}} - S_1^{-1}\Phi_{\vec{v}} = \\ &= Hf + (\Phi_{\vec{v}} - S_1^{-1}\Phi_{\vec{v}}) - \Phi_{\vec{u}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} (H^*g)(p_1, p_2) &= \left(\frac{1}{2m_1}p_1^2 + \frac{1}{2m_2}p_2^2 \right) [f(p_1, p_2) + \Phi_{\vec{u}}(p_1, p_2) + S_1^{-1}\Phi_{\vec{v}}(p_1, p_2)] - \\ &\quad - \left(\frac{1}{2m_1}p_1^2 + \frac{1}{2m_2}p_2^2 + 1 \right)^{-1} \Phi_{\vec{u}}(p_1, p_2) = \\ &= \left(\frac{1}{2m_1}p_1^2 + \frac{1}{2m_2}p_2^2 \right) g(p_1, p_2) - u_1(p_1) - u_2(p_2) - u_3(p_1 + p_2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть A — произвольный линейный оператор с плотной в $W^{(3)}$ областью определения $D(A)$, а H_A — сужение оператора H^* на область

$$D(H_A) = \{g \in D(H^*): \quad g = f + \Phi_{\vec{u}} + S_1^{-1}\Phi_{A\vec{u}}, \quad f \in D(H), \quad \vec{u} \in D(A)\},$$

т.е. оператор H_A получается сужением оператора H^* на множество функций $g(p_1, p_2)$, для которых в разложении (5) выполняется условие вида

$$\vec{v} = A\vec{u} \quad (\vec{u} \in D(A)). \quad (7)$$

Возьмем два произвольных элемента $g = f + \Phi_{\vec{u}} + S_1^{-1}\Phi_{A\vec{u}}$ и $g' = f' + \Phi_{\vec{u}'} + S_1^{-1}\Phi_{A\vec{u}'}$ из $D(H_A)$. Для них справедливо следующее соотношение:

$$(H_A g, g') = (g, H_A g') + (\Phi_{A\vec{u}}, \Phi_{\vec{u}'}) - (\Phi_{\vec{u}}, \Phi_{A\vec{u}'}), \quad (8)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в L_2 . Так как пространства $\mathfrak{R}_{-1}(H)$ и $W^{(3)}$ изоморфны, а также выполняются равенства $(\Phi_{A\vec{u}}, \Phi_{\vec{u}'}) = [A\vec{u}, \vec{u}']$ и $(\Phi_{\vec{u}}, \Phi_{A\vec{u}'}) = [\vec{u}, A\vec{u}']$, где $[\cdot, \cdot]$ — скалярное произведение в $W^{(3)}$, то соотношение (8) можно переписать в виде

$$(H_A g, g') = (g, H_A g') + [A\vec{u}, \vec{u}'] - [\vec{u}, A\vec{u}']. \quad (9)$$

Из равенства (9) следует, что оператор H_A является симметрическим оператором в L_2 тогда и только тогда, когда A является симметрическим оператором в $W^{(3)}$.

ЛЕММА 2. *Расширение H_A оператора H , задаваемое с помощью условия (7), является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда A самосопряженный оператор в $W^{(3)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что если A – симметрический оператор в $W^{(3)}$, A^* – сопряженный к A оператор, то $H_A^* = H_{A^*}$, где H_A^* – сопряженный к H_A оператор.

Пусть ψ – произвольный элемент из $D(H_{A^*})$. Тогда существуют элементы $f_\psi \in D(H)$, $\vec{v} \in D(A^*)$ такие, что $\psi = f_\psi + \Phi_{\vec{v}} + S_1^{-1}\Phi_{A^*\vec{v}}$ и для любого $g = f_g + \Phi_{\vec{u}} + S_1^{-1}\Phi_{A\vec{u}}$ из $D(H_A)$ выполняется равенство

$$(H_A g, \psi) = (g, H_{A^*} \psi) + [A\vec{u}, \vec{v}] - [\vec{u}, A^* \vec{v}],$$

или в силу того, что $[A\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, A^* \vec{v}]$, выполняются равенства

$$(H_A g, \psi) = (g, H_{A^*} \psi) = (g, H_A^* \psi).$$

Итак, если $\psi \in D(H_{A^*})$, то $\psi \in D(H_A^*)$ и $H_A^* \psi = H_{A^*} \psi$, т.е. $H_{A^*} \subseteq H_A^*$.

Пусть теперь $\tilde{\psi}$ – произвольный элемент из $D(H_A^*)$. Тогда существуют элементы $f_{\tilde{\psi}} \in D(H)$, $\vec{w}, \vec{w}^* \in W^{(3)}$ такие, что $\tilde{\psi} = f_{\tilde{\psi}} + \Phi_{\vec{w}} + S_1^{-1}\Phi_{\vec{w}^*}$ и для любого $g = f_g + \Phi_{\vec{u}} + S_1^{-1}\Phi_{A\vec{u}}$ из $D(H_A)$ выполняется равенство

$$(H_A g, \tilde{\psi}) = (g, H_A^* \tilde{\psi}) + [A\vec{u}, \vec{w}] - [\vec{u}, \vec{w}^*].$$

Так как $(H_A g, \tilde{\psi}) = (g, H_A^* \tilde{\psi})$, то для любого $\vec{u} \in D(A)$ получаем равенство $[A\vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}^*]$. Это означает, что $\vec{w} \in D(A^*)$ и $\vec{w}^* = A^* \vec{w}$. Отсюда следует, что $\tilde{\psi} = f_{\tilde{\psi}} + \Phi_{\vec{w}} + S_1^{-1}\Phi_{A^* \vec{w}}$. В силу произвольности элемента $\tilde{\psi}$ получим, что $D(H_A^*) \subseteq D(H_{A^*})$ и $H_A^* \tilde{\psi} = H_{A^*} \tilde{\psi}$. Таким образом, доказано равенство $H_A^* = H_{A^*}$. Утверждение леммы легко выводится из последнего равенства.

3. ВЫБОР ОПЕРАТОРА A

Для тех элементов $g \in D(H^*)$, которым соответствуют достаточно быстро убывающие функции u_1, u_2, u_3 в разложении (5), определены асимптотики

$$\begin{aligned} \int_{|p'| < N} g(p, p') dp' &= 4\pi \cdot 2m_j u_k(p)N + B_k(p) + o(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \\ \int_{\Gamma_p \cap |\frac{m_1}{M}p_2 - \frac{m_2}{M}p_1| < N} g(p_1, p_2) dv_p &= 4\pi \eta u_3(p)N + B_3(p) + o(1) \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $j, k = 1, 2, j \neq k$,

$$\begin{aligned}
B_k(p) &= -2\pi^2(2m_j)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2m_k}p^2 + 1}u_k(p) + \pi^2(2m_j)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2m_k}p^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}v_k(p) + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u_j(q) + u_3(p+q)}{(2m_k)^{-1}p^2 + (2m_j)^{-1}q^2 + 1} dq + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v_j(q) + v_3(p+q)}{((2m_k)^{-1}p^2 + (2m_j)^{-1}q^2 + 1)^2} dq, \\
B_3(p) &= -2\pi^2\eta^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2M}p^2 + 1}u_3(p) + \pi^2\eta^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2M}p^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}v_3(p) + \\
&+ \int_{\Gamma_p} \frac{u_1(p_1) + u_2(p_2)}{(2m_1)^{-1}p_1^2 + (2m_1)^{-1}p_2^2 + 1} dv_p + \\
&+ \int_{\Gamma_p} \frac{v_1(p_1) + v_2(p_2)}{((2m_1)^{-1}p_1^2 + (2m_2)^{-1}p_2^2 + 1)^2} dv_p.
\end{aligned} \tag{10}$$

Обозначим через H_ε^* , $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}^3$, сужение оператора H^* на область $D(H_\varepsilon^*)$ функций $g(p_1, p_2)$ из $D(H^*)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}
B_k(p) &= 2\pi^2(2m_j)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_k u_k(p), \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k, \\
B_3(p) &= 2\pi^2\eta^{\frac{3}{2}}\varepsilon_3 u_3(p).
\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим семейство операторов $\{T(z)\}$, $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, в $L_2^{(3)}$, действующих по формулам

$$\begin{aligned}
(T(z)\vec{u})_k(p) &= 2\pi^2(2m_j)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2m_j}p^2 - z}u_k(p) - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u_j(q) + u_3(p+q)}{(2m_k)^{-1}p^2 + (2m_j)^{-1}q^2 - z} dq, \\
j, k &= 1, 2, \quad j \neq k, \\
(T(z)\vec{u})_3(p) &= 2\pi^2\eta^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2M}p^2 - z}u_3(p) - \int_{\Gamma_p} \frac{u_1(p_1) + u_2(p_2)}{(2m_1)^{-1}p_1^2 + (2m_2)^{-1}p_2^2 - z} dv_p
\end{aligned}$$

на множестве D троек функций $\vec{u}(p) = \{u_k(p)\} \in L_2^{(3)}$ таких, что

$$|u_k(p)| \leq \frac{\text{const}}{1 + |p|^3}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Введем в рассмотрение семейство операторов в $W^{(3)}$

$$A_\varepsilon = K^{-1}[T(-1) + 2\pi^2 E], \tag{13}$$

которые также определены на множестве D . Здесь

$$\begin{aligned}
(E\vec{u})_1(p) &= (2m_2)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_1 u_1(p), \\
(E\vec{u})_2(p) &= (2m_1)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_2 u_2(p), \\
(E\vec{u})_3(p) &= \eta^{\frac{3}{2}}\varepsilon_3 u_3(p),
\end{aligned}$$

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ — произвольная тройка вещественных чисел.

ЛЕММА 3. Для любой тройки $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}^3$ оператор A_ε^* , сопряженный к оператору A_ε , определяется по формулам

$$A_\varepsilon^* = K^{-1}[T^*(-1) + 2\pi^2 E], \quad D(A_\varepsilon^*) = D^*,$$

где $T^*(-1)$ – оператор, сопряженный к оператору $T(-1)$, $D^* = D(T^*(-1))$ – его область определения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{v}$ – произвольный элемент из $D(A_\varepsilon^*)$. Тогда из (13) следует, что для всех $\vec{u} \in D$ справедливы равенства

$$[A_\varepsilon \vec{u}, \vec{v}] = ([T(-1) + 2\pi^2 E] \vec{u}, \vec{v}), \quad [A_\varepsilon \vec{u}, \vec{v}] = (\vec{u}, K A_\varepsilon^* \vec{v}),$$

откуда в свою очередь следует, что $\vec{v} \in D^*$ и $A_\varepsilon^* \vec{v} = K^{-1}[T^*(-1) + 2\pi^2 E] \vec{v}$. В силу произвольности $\vec{v}$ получим, что $D(A_\varepsilon^*) \subset D^*$.

Пусть теперь $\vec{w}$ – произвольный элемент из D^* . Тогда для всех $\vec{u}$ из D справедливы равенства

$$\begin{aligned} [A_\varepsilon \vec{u}, \vec{w}] &= ([T(-1) + 2\pi^2 E] \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, [T^*(-1) + 2E] \vec{w}) = \\ &= (K \vec{u}, K^{-1}[T^*(-1) + 2\pi^2 E] \vec{w}) = [\vec{u}, K^{-1}(T^*(-1) + 2\pi^2 E) \vec{w}]. \end{aligned}$$

Это означает, что $\vec{w} \in D(A_\varepsilon^*)$ и $A_\varepsilon^* \vec{w} = K^{-1}[T^*(-1) + 2\pi^2 E] \vec{w}$. Таким образом, $A_\varepsilon^* = K^{-1}[T^*(-1) + 2\pi^2 E]$ и $D(A_\varepsilon^*) = D^*$.

Из формул (10) и условий (11) видно, что если в формуле (7) оператор A заменить на оператор A_ε^* , то полученное сужение $H_{A_\varepsilon^*}$ оператора H^* совпадает с оператором H_ε^* , т.е. $H_\varepsilon^* + H_{A_\varepsilon^*}$. Поскольку $H_\varepsilon^* = H_{A_\varepsilon^*} = (H_{A_\varepsilon^*})^*$, то оператор H_ε совпадает с оператором H_{A_ε} . Таким образом, симметрическое расширение H_ε оператора H получается сужением оператора H^* на область $D(H_{A_\varepsilon}) = D(H_\varepsilon)$ с помощью условия $\vec{v} = A_\varepsilon \vec{u}$.

Применим выписанные соотношения для построения резольвенты оператора H_ε . Полагая $g = (H_\varepsilon - zE)^{-1}h$, из уравнения

$$(H_\varepsilon - zE)g = h, \quad \text{Im } z \neq 0,$$

и формулы (6) находим, что для любого $h \in L_2$ функция g имеет вид

$$g(p_1, p_2) = \frac{h(p_1, p_2) + u_1(p_1) + u_2(p_2) + u_3(p_1 + p_2)}{(2m_1)^{-1}p_1^2 + (2m_2)^{-1}p_2^2 - z}, \quad (14)$$

где u_1, u_2, u_3 – неизвестные функции.

Сравнивая (14) с (5) и используя условие $\vec{v} = A_\varepsilon \vec{u}$, мы приходим к системе уравнений для определения функций u_1, u_2, u_3 через $h(p_1, p_2)$:

$$\begin{aligned} 2\pi^2 (2m_j)^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2m_k} p^2 - z + \varepsilon_k} \right) u_k(p) - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u_j(q) + u_3(p+q)}{(2m_k)^{-1}p^2 + (2m_j)^{-1}q^2 - z} dq &= \chi_k(p; z), \\ 2\pi^2 \eta^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2M} p^2 - z + \varepsilon_3} \right) u_3(p) - \int_{\Gamma_p} \frac{u_1(p_1) + u_2(p_2)}{(2m_1)^{-1}p_1^2 + (2m_2)^{-1}p_2^2 - z} dv_p &= \chi_3(p; z), \end{aligned}$$

где $j, k = 1, 2$, $j \neq k$,

$$\begin{aligned}\chi_k(p_k; z) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{h(p_1, p_2)}{(2m_1)^{-1}p_1^2 + (2m_2)^{-1}p_2^2 - z} dp_j, \\ \chi_3(p; z) &\equiv \int_{\Gamma_p} \frac{h(p, q)}{(2m_1)^{-1}p^2 + (2m_2)^{-1}q^2 - z} dv_q.\end{aligned}$$

Заметим, что из лемм 2 и 3 и из соотношений (5), (7) и (13) легко следует, что самосопряженность H_ε (для всех $\varepsilon \in \mathbb{R}^3$) равносильна существенной самосопряженности оператора $T(-1)$, причем индексы дефекта $T(-1)$ совпадают с индексами дефекта оператора H_ε .

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. *Оператор $T(-1)$ имеет ненулевые, равные и конечные индексы дефекта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T – симметрический оператор, определенный на области D (см. (12)) и действующий по формулам

$$\begin{aligned}(T\vec{u})_k(p) &= 4\pi^2 m_j \sqrt{\frac{m_j}{m_k}} |p| u_k(p) - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u_j(q) + u_3(p+q)}{(2m_k)^{-1}p^2 + (2m_j)^{-1}p^2} dq, \\ j, k &= 1, 2, \quad j \neq k, \\ (T\vec{u})_3(p) &= 2\pi^2 \eta \sqrt{\frac{\eta}{2M}} |p| u_3(p) - \int_{\Gamma_p} \frac{u_1(p_1) + u_2(p_2)}{(2m_1)^{-1}p_1^2 + (2m_2)^{-1}p_2^2} dv_p.\end{aligned}\tag{15}$$

Так как прибавление ограниченного самосопряженного оператора не изменяет индексов дефекта и $T(-1) - T$ является компактным самосопряженным оператором, то вместо $T(-1)$ достаточно рассмотреть оператор T .

Заметим, что оператор T коммутирует с операторами представления группы вращений O_3 в $L_2^{(3)}$:

$$(V_g \vec{u})_k(p) = u_k(g^{-1}p), \quad \vec{u} \in L_2^{(3)}, \quad g \in O_3,\tag{16}$$

и приводится каждым подпространством L_l троек вида

$$u_k^l(p) = \sum_{m=-1}^l u_k^{m,l}(|p|) Y_m^l(\theta, \varphi), \quad k = 1, 2, 3,$$

где $|p| = r, \theta, \varphi$ – сферические координаты p , $Y_m^l(\theta, \varphi)$ – сферические функции веса l (см. [10]), $u_k^{m,l}$ – функции, зависящие от $|p|$. Часть оператора T , действующую в L_l , обозначим через T_l . Рассмотрим сначала оператор T_0 , определенный на тройках сферически-симметричных функций $\{u_k(p)\} = \{u_k(|p|)\}$. Выполняя в формулах (15) для сферически-симметричных функций интегрирования по углам, убедимся в том,

что оператор T_0 унитарно-эквивалентен оператору S_0 , действующему в пространстве $L_2^{(3)}(R_+, r^2 dr) \equiv L_2(R_+, r^2 dr) \oplus L_2(R_+, r^2 dr) \oplus L_2(R_+, r^2 dr)$ по формулам

$$\begin{aligned} (S_0 \vec{u})_k(r) &= 4\pi^2 m_j \sqrt{\frac{m_j}{m_k}} r u_k(r) - 4\pi \int_0^{+\infty} \frac{t^2 u_j(t)}{(2m_k)^{-1} r^2 + (2m_j)^{-1} t^2} dt - \\ &\quad - 2\pi m_j \int_0^\infty \frac{t}{r} \ln \left[\frac{\eta^{-1} r^2 + m_j^{-1} r t + (2m_j)^{-1} t^2}{\eta^{-1} r^2 - m_j^{-1} r t + (2m_j)^{-1} t^2} \right] u_3(t) dt, \\ j, k &= 1, 2, \quad j \neq k, \\ (S_0 \vec{u})_3(r) &= 2\pi^2 \sqrt{\frac{\eta^3}{2M}} r u_3(r) - \\ &\quad - 2\pi \sum_{k \neq j} m_j \int_0^{+\infty} \frac{t}{r} \ln \left[\frac{(2m_j)^{-1} r^2 + m_j^{-1} r t + \eta^{-1} t^2}{(2m_j)^{-1} r^2 - m_j^{-1} r t + \eta^{-1} t^2} \right] u_k(t) dt. \end{aligned}$$

Область определения $D(S_0)$ оператора S_0 состоит из троек функций $\{u_k(r)\} \in L_2^{(3)}(R_+, r^2 dr)$ таких, что $u_k(r)$ удовлетворяют условию (12).

После унитарного в $L_2^{(3)}(R_+, r^2 dr)$ преобразования Меллина

$$v_j(s) = \int_0^{+\infty} r^{-is + \frac{1}{2}} u_j(r) dr,$$

где $\vec{u}(r) = \{u_j(r)\} \in D(S_0)$, оператор S_0 перейдет в оператор $\hat{S}_0$:

$$(\hat{S}_0 \vec{v})_j(s) = \left(F \left(s + \frac{i}{2} \right) \vec{v}(s + i) \right)_j$$

$(F(s))$ — некоторая матрица, описанная ниже, $j = 1, 2, 3$, действующий на области $D(\hat{S}_0)$ троек $\{v_j(s)\}$ таких, что функции $v_j(s)$ аналитичны в полосе $0 \leq \text{Im } s \leq 1$ и справедливы неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v_j(x + i\alpha)|^2 dx < \infty, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь матрица $F(s)$ действует на тройку $\vec{v}(s) = \{v_j(s)\}_{1 \leq j \leq 3}$ по формулам

$$\begin{aligned} (F(s) \vec{v})_j(s) &= 4\pi^2 m_k \sqrt{\frac{m_k}{m_j}} v_j(s) - 4\pi^2 m_k \left(\frac{M}{m_j} \right)^{\frac{is}{2}} \frac{\text{sh}(\varphi_j s)}{s \text{ch}(\pi s/2)} v_3(s) - \\ &\quad - 4\pi^2 \sqrt{m_1 m_2} \left(\frac{m_k}{m_j} \right)^{\frac{is}{2}} \frac{v_k(s)}{\text{ch}(\pi s/2)}, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k, \\ (F(s) \vec{v})_3(s) &= 2\pi^2 \sqrt{\frac{\eta^3}{2M}} v_3(s) - 4\pi^2 \sum_{j \neq k} m_k \left(\frac{m_j}{M} \right)^{\frac{is}{2}} \frac{\text{sh}(\varphi_j s)}{s \text{ch}(\pi s/2)} v_j(s), \end{aligned} \quad (17)$$

где углы φ_1 и φ_2 определяются из соотношений

$$\sin \varphi_j = \sqrt{\frac{m_j}{M}}, \quad 0 < \varphi_j < \frac{\pi}{2}, \quad j = 1, 2. \quad (18)$$

Повторяя рассуждения из работы [8], получим, что область определения $D(\widehat{S}_0^*)$ сопряженного оператора $\widehat{S}_0^*$ состоит из троек функций вида $\vec{w}(s) = [F(s - i/2)]^{-1}\vec{v}(s)$, где $\vec{v}(s) \in D(\widehat{S}_0)$ (это легко выводится из теоремы братьев Рисс о мерах на окружности, ортогональных степеням (см. [11])).

ЛЕММА 4. *Функция $\det F(s)$, $s \in \mathbb{R}$, обращается в нуль только в двух точках $s = \pm s_0$, причем $\text{rank } F(\pm s_0) = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\det F(s) = 64\pi^6 \frac{(m_1 m_2)^{\frac{5}{2}}}{M^2} [1 - \lambda_1^2(s) - \lambda_2^2(s) - \lambda_3^2(s) - 2\lambda_1(s)\lambda_2(s)\lambda_3(s)],$$

где

$$\lambda_j(s) = \frac{M}{\sqrt{m_1 m_2}} \frac{\text{sh}(\varphi_j s)}{s \text{ch}(\pi s/2)}, \quad j = 1, 2, \quad \lambda_3(s) = \frac{1}{\text{ch}(\pi s/2)}.$$

Поскольку $\lambda_j(s)$ – четные функции, достаточно рассмотреть случай $s \geq 0$. Из условия $0 < \varphi < \pi/2$ (см. (18)) следует, что функции $\lambda_j(s)$, $j = 1, 2, 3$, монотонно убывают и $\lambda_j(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. Следовательно, на отрезке $[0, +\infty)$ функция $\det F(s)$ монотонно возрастает и стремится к $64\pi^6 (m_1 m_2)^{5/2} / M^2$ при $s \rightarrow +\infty$, но

$$\det F(0) = -64\pi^6 (m_1 m_2)^{\frac{3}{2}} (\varphi_1 + \varphi_2)^2 < 0.$$

Таким образом, существует единственная точка $s_0 > 0$ такая, что $\det F(s_0) = 0$.

Из гладкости и строгой монотонности функции $\det F(s)$ на отрезках $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$ следует, что

$$\frac{d}{ds}(\det F(s))|_{s=\pm s_0} \neq 0. \quad (19)$$

Пусть функции $k_j(s)$, $j = 1, 2, 3$, – собственные значения матрицы $F(s)$. Поскольку $\det F(s) = k_1(s) \cdot k_2(s) \cdot k_3(s)$, то функции $k_j(s)$ являются гладкими. Тогда из условия (19) следует, что в точках $s = \pm s_0$ в нуль обращается только какая-то одна из функций $k_j(s)$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Из леммы 4 следует, что $D(\widehat{S}_0^*)$ кроме элементов $\widehat{S}_0$ включает в себя тройки функций $\vec{e}^{(+)}(s - s_0 - i/2)^{(-1)}$, $\vec{e}^{(-)}(s + s_0 - i/2)^{(-1)}$, где $\vec{e}^{(\pm)} = \{\vec{e}_j^{(\pm)}\}$ – решения уравнений

$$F(\pm s_0)\vec{e}^{(\pm)} = 0. \quad (20)$$

Это означает, что область $D(\widehat{S}_0^*)$ состоит из элементов вида $\vec{q}(s) = \{q_j(s)\}$,

$$q_j(s) = \frac{c_1 e_j^-}{s + s_0 - i/2} + \frac{c_2 e_j^+}{s - s_0 - i/2} + g_j(s), \quad j = 1, 2, 3, \quad (21)$$

где $\vec{g}(s) = \{g_j(s)\} \in D(\widehat{S}_0)$. Таким образом, область $D(\widehat{S}_0^*)$ имеет в $D(\widehat{S}_0^*)$ коразмерность 2. Отсюда следует, что индексы дефекта оператора $\widehat{S}_0$ (и оператора S_0) равны либо (2, 0), либо (0, 2), либо (1, 1). Однако в силу вещественности оператора S_0

его индексы дефекта одинаковы и равны $(1, 1)$. Поскольку операторы T_0 и S_0 унитарно-эквивалентны, то их индексы дефекта одинаковые. Следовательно, оператор T_0 имеет индексы дефекта $(1, 1)$.

Теперь рассмотрим случай $l \geq 1$. Как и в случае $l = 0$, можно показать, что индексы дефекта оператора $T_l(-1)$ равны и не превышают $(1, 1)$. Кроме того, для любых m_1 и m_2 существует натуральное число $l_1 = l(m_1, m_2)$ такое, что при $l \geq l_1$ индексы дефекта операторов $T_l(-1)$ равны $(0, 0)$. Отсюда следует, что оператор $T(-1)$ имеет равные и конечные индексы дефекта (n, n) , где $1 \leq n \leq l_1$.

В доказательстве теоремы 1 фактически были описаны дефектные векторы операторов T_0 и $T_0(-1)$. Применяв общую теорию Неймана самосопряженных расширений симметрических операторов (см. [2]), придем к семейству $\{T_{0\beta}(-1)\}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$, самосопряженных расширений оператора $T_0(-1)$. Описанию области определения оператора $T_{0\beta}(-1)$ посвящается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Область определения оператора $T_{0\beta}(-1)$ состоит из элементов вида $\vec{v}(p) = \vec{v}(|p|) = \{v_j(p)\}$, где*

$$v_j(p) = v_j(r) = c \frac{e_j r^{is_0} + \beta \bar{e}_j r^{-is_0}}{r^2 + 1} + u_j(r), \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь $r = |p| \in R_+$, $\vec{u}(p) = \{u_j(p)\} \in D(T_0(-1))$, $\{e_j\}$ – вектор, введенный в доказательстве теоремы 1 (см. (20)), $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$ – параметр самосопряженного расширения $T_{0\beta}(-1)$ оператора $T_0(-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует, что дефектное пространство

$$\mathfrak{R}_z = (\text{Ran}(T_0(-1) - zI))^\perp$$

оператора $T_0(-1)$ одномерно, а из соотношения (21) видно, что дефектный вектор $\vec{\theta}^z(r) = \{\theta_j^z(r)\} \in \mathfrak{R}_z$ оператора $T_0(-1)$ имеет вид

$$\theta_j^z(r) = \frac{e_j r^{is_0} + \zeta \bar{e}_j r^{-is_0}}{r^2 + 1} + w_j(r), \quad j = 1, 2, 3,$$

для некоторого комплексного числа ζ и элемента $\vec{w}(r) = \{w_j(r)\} \in D(T_0(-1))$. Следовательно,

$$\theta_j^{\bar{z}}(r) = \overline{\theta_j^z(r)} \frac{\bar{\zeta} e_j r^{is_0} + \bar{e}_j r^{-is_0}}{r^2 + 1} + \bar{w}_j(r)$$

с точностью до умножения на константу.

Рассмотрим произвольное самосопряженное расширение $\widehat{T}_0(-1)$ оператора $T_0(-1)$. Поскольку $\|\theta^{\bar{z}}\| = \|\theta^z\|$, из формул Неймана (см. [2]) следует, что область определения $D(\widehat{T}_0(-1))$ оператора $\widehat{T}_0(-1)$ состоит из элементов вида $\vec{v}(p) = \vec{v}(|p|) = \{v_j(p)\}$, $v_j(p) = \theta_j^z(p) + \beta \bar{\theta}_j^{\bar{z}}(p) + u_j(p)$, где $\{u_j(p)\} \in D(T_0(-1))$, $\{\theta_j^z(p)\} \in \mathfrak{R}_z$, $j = 1, 2, 3$, для

некоторой константы $\widehat{\beta} \in \mathbb{C}$, $|\widehat{\beta}| = 1$, характеризующей расширение $\widehat{T}_0(-1)$. Таким образом, с точностью до умножения на константу элемент из $D(\widehat{T}_0(-1))$ будет иметь вид $\vec{v}(p) = \{v_j(p)\}$,

$$v_j(r) = \frac{e_j r^{is_0} + \frac{\zeta + \widehat{\beta}}{1 + \zeta \widehat{\beta}} \bar{e}_j r^{-is_0}}{r^2 + 1} + u_j(r), \quad j = 1, 2, 3,$$

$\{u_j(r)\} = \{u_j(|p|)\} = \{u_j(p)\} \in D(T_0(-1))$. Легко заметить, что если обозначить $\beta = (\zeta + \widehat{\beta})/(1 + \zeta \widehat{\beta})$, то $|\beta| = 1$ для $\zeta \in C^1$, $\widehat{\beta} \in C^1$, $|\widehat{\beta}| = 1$. Но это влечет утверждение теоремы (если принять обозначение $\widehat{T}_0(-1) = T_{0\beta}(-1)$).

Видно, что оператор H_ε коммутирует с операторами группы вращений O_3 в $L_2 \equiv L_2((\mathbb{R})^3)^2$:

$$(V_g^{(2)}\psi)(p_1, p_2) = \psi(g^{-1}p_1, g^{-1}p_2), \quad \psi \in L_2, \quad g \in O_3, \quad (22)$$

и, следовательно, он приводится каждым подпространством $\aleph_l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) функций вида

$$\psi_l(p_1, p_2) = \sum_{k, m=-l}^l \psi_l^{k, m}(|p_1|, |p_2|) Y_k^l(\theta_1, \varphi_1) Y_m^l(\theta_2, \varphi_2), \quad (23)$$

где $\psi_l^{k, m}$ — функция из $L_2((R_+)^2, r^2 t^2 dr dt) \equiv L_2(R_+, r^2 dr) \otimes L_2(R_+, t^2 dt)$, Y_k^l и Y_m^l — сферические функции с угловым моментом l , $|p_j|$, θ_j , φ_j — сферические координаты вектора p_j , $j = 1, 2$, и представление группы вращения (22) неприводимо.

Часть оператора H_ε , действующую в $\aleph_l$, обозначим через $H_\varepsilon^{(l)}$. Подпространство $\aleph_0$ состоит из функций $\psi(p_1, p_2)$, не меняющихся при вращениях (22). Часть оператора H^* , действующую в $\aleph_l$, обозначим через H_l^* .

Пусть $W_l^{(3)}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) — пространство троек функций $\vec{u}(p) = \{u_j(p)\}$, полученное пополнением подпространства L_l по скалярному произведению $[\vec{u}, \vec{v}] = (K\vec{u}, \vec{v})$. Часть оператора A_ε , действующую в $W_l^{(3)}$, обозначим через $A_\varepsilon(l)$, а часть оператора K , действующую в L_l , — через K_l . Тогда оператор $A_\varepsilon(l)$ можно определить следующим образом:

$$A_\varepsilon(l) = K_l^{-1}[T_l(-1) + 2\pi^2 E], \quad D(A_\varepsilon(l)) = D(T_l(-1)) \subset W_l^{(3)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что область определения $D(H_l^*)$ оператора H_l^* состоит из таких функций $g(p_1, p_2)$ вида (5), для которых $f \in D(H) \cap \aleph_l$, $\vec{u}, \vec{v} \in W_l^{(3)}$. Аналогично область определения $D(H_\varepsilon^{(l)})$ оператора $H_\varepsilon^{(l)}$ состоит из таких функций $g(p_1, p_2)$ вида (5), для которых $f \in D(H) \cap \aleph_l$, $\vec{u}, \vec{v} \in W_l^{(3)}$ и $\vec{v} = A_\varepsilon(l)\vec{u}$.

ЛЕММА 5. Пусть A_ε — симметрический оператор, его индексы дефекта равны и совпадают с индексами дефекта оператора $T(-1)$. В частности, $A_\varepsilon(0)$ — симметрический оператор с индексами дефекта $(1, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из того факта, что квадратичная форма оператора A_ε в $W^{(3)}$ совпадает с квадратичной формой оператора $T(-1) + 2\pi^2 E$ в $L_2^{(3)}$. Действительно,

$$[A_\varepsilon \vec{u}, \vec{v}] = (KK^{-1}[T(-1) + 2\pi^2 E]\vec{u}, \vec{v}) = ([T(-1) + 2\pi^2 E]\vec{u}, \vec{v}),$$

где $\vec{u}, \vec{v} \in D(T(-1))$.

Рассмотрим семейство $\{A_{\varepsilon\beta}(0)\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^3$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$, операторов

$$A_{\varepsilon\beta}(0) = K_0^{-1}[T_{0\beta}(-1) + 2\pi^2 E], \quad D(A_{\varepsilon\beta}(0)) = D(T_{0\beta}(-1)),$$

действующих в подпространстве $W_0^{(3)}$. Поскольку квадратичная форма $[A_{\varepsilon\beta}(0)\vec{u}, \vec{v}]$ в $W_0^{(3)}$ совпадает с квадратичной формой $([T_{0\beta}(-1) + 2\pi^2 E]\vec{u}, \vec{v})$ в $L_0 \subset L_2^{(3)}$, то из самосопряженности оператора $T_{0\beta}(-1)$ вытекает самосопряженность оператора $A_{\varepsilon\beta}(0)$. Обозначим через $H_{\varepsilon\beta}^{(0)}$ сужение оператора H_0^* на область $D(H_{\varepsilon\beta}^{(0)})$, состоящую из таких функций $g(p_1, p_2)$ вида (5), для которых $f \in D(H) \cap \aleph_0$, $\vec{u}, \vec{v} \in W_0^{(0)}$ и $\vec{v} = A_{\varepsilon\beta}(0)\vec{u}$. С помощью леммы 3 можно установить, что для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ и $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$, оператор $H_{\varepsilon\beta}^{(0)}$ является самосопряженным.

ЛЕММА 6. Оператор $H_\varepsilon^{(0)}$ имеет индексы дефекта $(1, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из общей теории самосопряженных расширений симметрических операторов легко следует (см. [2])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Коразмерность области определения $D(A)$ симметрического оператора A с конечными и равными индексами дефекта (n, n) в области $D(\hat{A})$ любого его самосопряженного расширения равна n . Если индексы дефекта оператора A бесконечны и у него существуют самосопряженные расширения, то найдется такое самосопряженное расширение $\hat{A}$, что $D(A)$ имеет в $D(\hat{A})$ бесконечную коразмерность.

Вернемся к схеме расширения операторов H_ε и $H_\varepsilon^{(0)}$. Все самосопряженные расширения оператора $H_\varepsilon^{(0)}$ получаются с помощью самосопряженных расширений оператора $A_\varepsilon(0)$, поэтому они описываются введенным выше классом операторов $H_{\varepsilon\beta}^{(0)}$. В силу предложения коразмерность $D(A_\varepsilon(0))$ в $D(A_{\varepsilon\beta}(0))$ ($D(T_0(-1))$ в $D(T_{0\beta}(-1))$) равна единице. Отсюда и из схем расширения оператора $H_\varepsilon^{(0)}$ следует, что коразмерность области определения $D(H_\varepsilon^{(0)})$ оператора $H_\varepsilon^{(0)}$ в области определения $D(H_{\varepsilon\beta}^{(0)})$ оператора $H_{\varepsilon\beta}^{(0)}$ равна единице. Теперь утверждение леммы следует из предложения. Лемма доказана.

Как и в случае $l = 0$, можно показать, что индексы дефекта операторов $H_\varepsilon^{(l)}$ ($l \geq 1$) равны и не превышают $(1, 1)$. Начиная с некоторого l_1 (или при $l \geq l_1$) все операторы $H_\varepsilon^{(l)}$ самосопряжены.

Таким образом, для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ оператор H_ε является симметрическим оператором с ненулевыми, равными и конечными индексами дефекта.

Из леммы 6 следует, что для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^1$ существует единственное с точностью до умножения на константу решение уравнения

$$(H_\varepsilon^{(0)})^* g = zg. \quad (24)$$

Но решение уравнения (24) имеет вид (5) с дополнительными условиями $f \in D(H) \cap \mathbb{N}_0$, $\vec{u}, \vec{v} \in W_0^{(3)}$, $\vec{v} = A_\varepsilon^*(0)\vec{u}$. Подставим теперь в уравнение (24) функцию g в форме (5) и воспользуемся видом $\vec{v} = A_\varepsilon^*(0)\vec{u}$, учитывая определение $A_\varepsilon(0)$. Уравнение (24) с учетом сферической симметричности функций $u_j(p) = u_j(|p|) = u_j(r)$ ($j = 1, 2, 3$) примет вид

$$\begin{aligned} \pi(2m_j)^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2m_k} r^2 - z + \varepsilon_k} \right) u_k(r) &= 2 \int_0^\infty \frac{t^2 u_j(t) dt}{(2m_k)^{-1} r^2 + (2m_j)^{-1} t^2 - z} + \\ &+ m_j \int_0^\infty \frac{t}{r} \ln \left[\frac{\eta^{-1} r^2 + m_j^{-1} r t + (2m_j)^{-1} t^2 - z}{\eta^{-1} r^2 - m_j^{-1} r t + (2m_j)^{-1} t^2 - z} \right] u_3(t) dt, \\ j, k &= 1, 2, \quad j \neq k, \\ \pi \eta^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{r^2}{2M} - z + \varepsilon_3} \right) u_3(r) &= \\ &= \sum_{k \neq j} m_j \int_0^\infty \frac{t}{r} \ln \left[\frac{(2m_j)^{-1} r^2 + m_j^{-1} r t + \eta^{-1} t^2 - z}{(2m_j)^{-1} r^2 - m_j^{-1} r t + \eta^{-1} t^2 - z} \right] u_k(t) dt. \end{aligned} \quad (25)$$

ТЕОРЕМА 3. Если $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_0 > 2 \max_{1 \leq j \leq 3} \varepsilon_j$, то при $z = -\lambda_0^2$ система (25) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $z = -\lambda_0^2 + i\delta$, $\delta > 0$, δ мало. При таких z решение системы (25) существует, и из представления

$$\begin{aligned} u_j(r) &= \pi^{-1} (2m_k)^{-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2m_j} r^2 + \lambda_0^2 - i\delta + \varepsilon_j} \right)^{-1} \times \\ &\times \left\{ 2 \int_0^\infty \frac{t^2 u_2(t) dt}{(2m_j)^{-1} r^2 + (2m_k)^{-1} t^2 + \lambda_0^2 - i\delta} + \right. \\ &\left. + m_k \int_0^\infty \frac{t}{r} \ln \left[\frac{\eta^{-1} r^2 + m_k^{-1} r t + (2m_k)^{-1} t^2 + \lambda_0^2 - i\delta}{\eta^{-1} r^2 - m_k^{-1} r t + (2m_k)^{-1} t^2 + \lambda_0^2 - i\delta} \right] u_3(t) dt \right\}, \\ j, k &= 1, 2, \quad j \neq k, \\ u_3(r) &= \pi^{-1} \eta^{-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2M} r^2 + \lambda_0^2 - i\delta + \varepsilon_3} \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{j \neq k} m_k \int_0^\infty \frac{t}{r} \ln \left[\frac{(2m_k)^{-1} r^2 + m_k^{-1} r t + \eta^{-1} t^2 + \lambda_0^2 - i\delta}{(2m_k)^{-1} r^2 - m_k^{-1} r t + \eta^{-1} t^2 + \lambda_0^2 - i\delta} \right] u_j(t) dt \end{aligned} \quad (26)$$

следует, что его компоненты $u_j(r)$ аналитичны в максимальной угловой окрестности положительной вещественной полуоси, ограниченной лучами, проходящими через начало координат и точки $z_0^{(j)}$ и $\bar{z}_0^{(j)}$, где

$$z_0^{(j)} = 2m_j(\varepsilon_j^2 - \lambda_0^2 + i\delta), \quad j = 1, 2, \quad z_0^{(3)} = 2M(\varepsilon_3^2 - \lambda_0^2 + i\delta)$$

(это область, в которой суммы, стоящие в знаменателях в правых частях (26), не обращаются в нуль).

Сделаем в (26) замену $r = \lambda\zeta$, $t = \lambda\xi$, $\lambda = \sqrt{-z}$, получим уравнения

$$u_j(\lambda\zeta) = \pi^{-1}(2m_k)^{-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2m_j}\zeta^2 + 1} + \frac{\varepsilon_j}{\lambda} \right)^{-1} \times \\ \times \left\{ 2 \int_{\gamma_\xi} \frac{\xi^2 u_k(\lambda\xi) d\xi}{(2m_j)^{-1}\zeta^2 + (2m_k)^{-1}\xi^2 + 1} + \right. \\ \left. + m_k \int_{\gamma_\xi} \frac{\xi}{\zeta} \ln \left[\frac{\eta^{-1}\zeta^2 + m_k^{-1}\zeta\xi + (2m_k)^{-1}\xi^2 + 1}{\eta^{-1}\zeta^2 - m_k^{-1}\zeta\xi + (2m_k)^{-1}\xi^2 + 1} \right] u_3(\lambda\xi) d\xi \right\}, \quad (27) \\ j, k = 1, 2, \quad j \neq k,$$

$$u_3(\lambda\zeta) = \pi^{-1}\eta^{-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2M}\zeta^2 + 1} + \frac{\varepsilon_3}{\lambda} \right)^{-1} \times \\ \times \sum_{j \neq k} m_k \int_{\gamma_\xi} \frac{\xi}{\zeta} \ln \left[\frac{(2m_k)^{-1}\zeta^2 + m_k^{-1}\zeta\xi + \eta^{-1}\xi^2 + 1}{(2m_k)^{-1}\zeta^2 - m_k^{-1}\zeta\xi + \eta^{-1}\xi^2 + 1} \right] u_j(\lambda\xi) d\xi$$

(здесь выбрана ветвь $\text{Im} \sqrt{-z} > 0$). Заметим, что согласно выбору z контур γ_ξ есть луч, лежащий в области аналитичности функций $u_j(\xi)$. Ввиду того что интегралы в правых частях (27) по дуге окружности, соединяющей контур γ_ξ и вещественную положительную полуось, стремятся к нулю с ростом радиуса, интегрирование можно проводить по вещественной полуоси. Кроме того, из представления (27) следует существование предела $u_j(\lambda\zeta)$ при $\zeta \in \mathbb{R}$. Переходя теперь к случаю $\delta = 0$ (что возможно в силу аналитичности правых частей (27) по z), мы приходим к выводу о существовании решения системы уравнений

$$u_j(\lambda_0\zeta) = \pi^{-1}(2m_k)^{-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2m_j}\zeta^2 + 1} + \frac{\varepsilon_j}{\lambda_0} \right)^{-1} \times \\ \times \left\{ 2 \int_0^\infty \frac{\xi^2 u_k(\lambda_0\xi) d\xi}{(2m_j)^{-1}\zeta^2 + (2m_k)^{-1}\xi^2 + 1} + \right. \\ \left. + m_k \int_0^\infty \frac{\xi}{\zeta} \ln \left[\frac{\eta^{-1}\zeta^2 + m_k^{-1}\zeta\xi + (2m_k)^{-1}\xi^2 + 1}{\eta^{-1}\zeta^2 - m_k^{-1}\zeta\xi + (2m_k)^{-1}\xi^2 + 1} \right] u_3(\lambda_0\xi) d\xi \right\}, \quad (28) \\ j, k = 1, 2, \quad j \neq k,$$

$$u_3(\lambda_0\zeta) = \pi^{-1}\eta^{-\frac{3}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{2M}\zeta^2 + 1} + \frac{\varepsilon_3}{\lambda_0} \right)^{-1} \times \\ \times \sum_{j \neq k} m_k \int_0^\infty \frac{\xi}{\zeta} \ln \left[\frac{(2m_k)^{-1}\zeta^2 + m_k^{-1}\zeta\xi + \eta^{-1}\xi^2 + 1}{(2m_k)^{-1}\zeta^2 - m_k^{-1}\zeta\xi + \eta^{-1}\xi^2 + 1} \right] u_j(\lambda_0\xi) d\xi.$$

Сделаем в (28) замену $r = \lambda_0\zeta$, $t = \lambda_0\xi$, получим утверждение теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Система (25) при $z = -\lambda_0^2$, $\lambda > \lambda_0$ имеет решение, которое можно получить из решения системы при $z = -\lambda_0^2$, $\varepsilon'_j = (\lambda_0/\lambda)\varepsilon_j$ заменой переменных $r \rightarrow (\lambda/\lambda_0)r$, $t \rightarrow (\lambda/\lambda_0)t$.

Заметим, что решения системы (25) лежат в области определения $D(T_0(-1)^*)$ оператора $T_0(-1)^*$. Вернувшись к описанию (21) этой области и выполнив обратное преобразование Меллина, получим, что имеет место представление (с точностью до умножения на константу) решения системы (25) в виде

$$u_j(r) = \frac{e_j r^{is_0}}{r^2 + 1} + \frac{c(\varepsilon) \bar{e}_j r^{-is_0}}{r^2 + 1} + \tilde{u}_j(r), \quad (29)$$

где $\vec{e} = \{e_j\}$ – вектор, введенный в доказательстве теоремы 1 (см. (20)), а $\{\tilde{u}_j\} \in D(T_0(-1))$, $c(\varepsilon)$ – константа ($|c(\varepsilon)| = 1$ в силу вещественности решений), $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3$.

ЛЕММА 7. Функция $c(\varepsilon)$ непрерывна в нуле по ε_j , $j = 1, 2, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (26) следует, что функции $u_j(r)$ непрерывны по ε_j , следовательно, их преобразования Меллина непрерывны по ε_j . Но они имеют вид (21), и функция $c(\varepsilon)$ есть вычет в точке $s_0 + i/2$ фиксированной линейной комбинации преобразований Меллина $g_j(s)$ функций $u_j(r)$ и, следовательно, непрерывна по ε_j . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Самосопряженное расширение $H_{\varepsilon, \beta}^{(0)}$ оператора $H_\varepsilon^{(0)}$ имеет бесконечный набор отрицательных собственных значений, уходящих на $-\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 область определения $D(T_{0, \beta}(-1))$ оператора $T_{0, \beta}(-1)$ состоит из троек вида $\vec{u}(r) = \{u_j(r)\}_{1 \leq j \leq 3}$,

$$u_j(r) = \frac{e_j r^{is_0} + \beta \bar{e}_j r^{-is_0}}{r^2 + 1} + \tilde{u}_j(r), \quad \{\tilde{u}_j(r)\} \in D(T_0(-1)). \quad (30)$$

Найдем собственную функцию оператора $H_{\varepsilon, \beta}^{(0)}$, отвечающую собственному значению $-\lambda^2$. Нетрудно видеть, что ее можно получить в виде (5) с учетом условия $\vec{v} = A_{\varepsilon, \beta}(0)\vec{u}$ из решения $\{u_j(r)\}$ системы (25) при $z = -\lambda^2$ с дополнительным условием $\{u_j(r)\} \in D(T_{0, \beta}(-1))$. Это значит, что функции $u_j(r)$ должны удовлетворять представлению (30).

В силу следствия теоремы 3 и леммы 6 при достаточно больших λ условие (30) равносильно условию

$$c(0) \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{2is_0} = \beta, \quad (31)$$

где $c(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon)$, λ_0 – некоторое фиксированное число, при котором система (25) при $z = -\lambda_0^2$ имеет решение. Но условию (31) удовлетворяет бесконечный набор значений

$$\lambda_n = \lambda_0 \exp \left(\frac{\arg(\beta/c(0))}{2s_0} + \frac{\pi n}{s_0} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

Таким образом, мы получили бесконечный набор собственных значений $z_0 = -\lambda_n^2$, уходящих на $-\infty$. Теорема доказана.

Поскольку для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^3$ симметрический оператор H_ε имеет ненулевые, равные и конечные индексы дефекта, он обладает самосопряженными расширениями. Предположим, что $\hat{H}_\varepsilon$ – некоторое самосопряженное расширение оператора H_ε . Тогда $\hat{H}_\varepsilon^{(0)}$ – часть оператора $\hat{H}_\varepsilon$, действующая в $\mathbb{N}_0$, – является самосопряженным расширением оператора $H_\varepsilon^{(0)}$. Так как самосопряженные расширения оператора $H_\varepsilon^{(0)}$ исчерпываются семейством операторов $\{H_{\varepsilon,\beta}^{(0)}\}$, то найдется некоторое значение $\beta \in \mathbb{C}$ ($|\beta| = 1$) такое, что $\hat{H}_\varepsilon^{(0)} \equiv H_{\varepsilon,\beta}^{(0)}$. Следовательно, самосопряженный оператор $\hat{H}_\varepsilon$ имеет бесконечный набор отрицательных собственных значений вида (32), уходящих на $-\infty$.

ТЕОРЕМА 5. *Любое самосопряженное расширение $\hat{H}_\varepsilon$ оператора H_ε имеет бесконечный набор отрицательных собственных значений, уходящих на $-\infty$.*

Благодарности. Автор выражает особую признательность Р. А. Минлосу за постоянное внимание и ценные советы. Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований АН РУз.

Список литературы

- [1] Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев. ДАН СССР. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
- [2] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
- [3] Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев. ДАН СССР. 1961. Т. 141. № 6. С. 1335–1338.
- [4] Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев. ЖЭТФ. 1961. Т. 41. № 12. С. 1850–1851.
- [5] Г. В. Скорняков, К. А. Тер-Мартirosян. ЖЭТФ. 1956. Т. 31. № 5. С. 775–790.
- [6] Г. С. Данилов. ЖЭТФ. 1961. Т. 40. № 2. С. 498–507.
- [7] Р. А. Минлос, М. Х. Шерматов. Вестн. МГУ. Сер. 1. 1989. № 6. С. 7–14.
- [8] А. М. Mel'nikov, R. A. Minlos. Adv. Sov. Math. 1991. V. 5. P. 99–112.
- [9] М. Ш. Бирман. Матем. сб. 1956. Т. 38. № 4. С. 431–450.
- [10] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. Представление группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматгиз, 1958.
- [11] К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. М.–Л.: ИЛ, 1963.

Поступила в редакцию 20.III.2000 г.