Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Талалов, Об одной модели эниона, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 2, 329–340

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6580>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:36:30

© 2010 г.

С. В. Талалов*

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭНИОНА

Построена бесконечномерная гамильтонова динамическая система, которая может быть интерпретирована как некоторая локализованная структура (“квазичастица”) на плоскости E_2 . В основу модели положена теория бесконечной струны в пространстве Минковского $E_{1,3}$, развитая в терминах вторых фундаментальных форм мирового листа. Фазовое пространство $\mathcal{H}$ модели параметризовано координатами, интерпретируемыми как “внутренние” ($E(2)$ -инвариантные) и “внешние” (элементы T^*E_2) степени свободы. Нетривиальность конструкции обусловлена наличием в $\mathcal{H}$ конечного числа связей, перепутывающих указанные группы координат. Получены выражения для энергии и эффективной массы построенной системы, а также соотношение, связывающее собственный момент и энергию. Рассматривается возможная интерпретация предложенной конструкции как модели эниона.

Ключевые слова: энион, бесконечная струна, запутанное состояние.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование коллективных возбуждений с нестандартной статистикой в двумерных системах (см., например, работу [1]) давно вызывает повышенный интерес, в последнее время в связи с реализацией алгоритмов квантовых вычислений [2]. Вместе с этим фундаментальная группа $\pi_1(S^1)$, появление которой в теории и приводит к возникновению нетривиальных топологических эффектов, может, очевидно, возникать также в моделях динамических систем в пространстве E_3 . Примером здесь могут служить протяженные одномерные дефекты в конденсированных средах (вихревые нити и т.п.). Другой пример, исследуемый в настоящей статье, – это свободная бесконечная струна, эволюционирующая в трехмерном пространстве. В отличие от работ, посвященных взаимодействию частиц с подобными одномерными объектами (см., например, статью [3]), мы исследуем динамику самой струны. Построено гамильтоново описание такой динамической системы в терминах стандартных переменных частицы на плоскости (импульс–координата), а также некоторых $(1+1)$ -мерных полей, инвариантных относительно евклидовой группы $E(2)$ и описывающих бесконечное число “внутренних” степеней свободы. Последние оказываются “запутанными” с импульсом и собственным моментом струны, что в итоге

*Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия.
E-mail: svtalalov@tlttsu.ru

приводит к нетривиальной зависимости от указанных полей ее эффективной массы и массы покоя. Построенная гамильтонова система допускает расширение и описывает не только струнные состояния. В заключение обсуждается возможная схема квантования теории.

В отличие от замкнутых и конечных струн, детально исследованных в пространстве-времени произвольного числа измерений, бесконечные струны обсуждаются существенно реже [4], [5]. Это обусловлено, в частности, математическими проблемами (в том числе, сходимостью интегралов), а также проблемами с интерпретацией таких объектов. Пусть $X_\mu(\xi^0, \xi^1)$ – координаты точек мирового листа струны в некотором стационарном базисе $\mathbf{b}^\mu \in E_{1,3}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, где $\mathbf{b}^\mu \mathbf{b}^\nu = \mathbf{g}^{\mu\nu}$. Мы будем исходить из действия S в форме Полякова, в котором введена конформно-плоская параметризация (ξ^0, ξ^1) и исключены вспомогательные переменные – компоненты двумерного гравитационного поля. После стандартных преобразований действие в этом случае записывается в форме

$$S = -\gamma \int_{\Omega} \partial_+ X_\mu(\xi^0, \xi^1) \partial_- X^\mu(\xi^0, \xi^1) d\xi^0 d\xi^1, \quad (1)$$

а соответствующая система связей – в виде $(\partial_\pm X^\mu(\xi_\pm))^2 = 0$. Здесь и далее ∂_j – производные по параметрам ξ^j , а $\partial_\pm$ – производные по конусным параметрам $\xi_\pm = \xi^1 \pm \xi^0$. Граничные условия $\partial_1 X^\mu(\xi^0, \pm L) = 0$, вытекающие из варьирования функционала (1), приводят, как известно, к особенностям на концах струны (соответствующим значениям параметра $\xi^1 = \pm L$; в рассматриваемом случае $L \rightarrow \infty$). От сингулярных граничных условий можно избавиться различными способами. Так, можно добавить к подынтегральному выражению в (1) слагаемое, пропорциональное гауссовой кривизне [4]. Другой способ – поместить на концах струны $\xi^1 = \pm L$ точечные массы m_1 и m_2 [6]. В этом случае, выполнив в соответствии с результатами работы [6] предельный переход $m_1 = m_2 \rightarrow \infty$ при конечных L , находим, что допустимыми являются такие граничные условия:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \partial_0 X^\mu(\xi^0, \pm L) = v^\mu, \quad v^\mu = (\varkappa, \mathbf{v}), \quad (2)$$

где не зависящий от ξ^0 времениподобный вектор v^μ произволен.

Итак, объект дальнейшего исследования – бесконечные струны с граничными условиями (2). Обратим внимание, что компоненты вектора v^μ являются не фиксированными входными параметрами, а динамическими переменными. Простейшие представители такого класса струн – это покоящиеся или движущиеся с постоянной скоростью прямые, возбуждения которых по сути мы и рассматриваем. Предлагаемая модель основана на подходе, предложенном ранее автором [7]–[9].

Приведем определения, которые понадобятся нам далее. Пусть $\mathbf{e}_{\mu\pm}$ – пара ортонормированных базисов в $E_{1,3}$ таких, что

$$\frac{1}{2}(\mathbf{e}_{0\pm} \mp \mathbf{e}_{3\pm}) = \pm \frac{1}{\varkappa} \partial_\pm X_\mu(\xi^0, \xi^1) \mathbf{b}^\mu \equiv \mathbf{e}_\pm, \quad \mathbf{e}_{\mu\pm} \mathbf{e}_{\nu\pm} = \mathbf{g}_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где $\varkappa$ – входящая в граничные условия (2) положительная константа. Очевидно, что такие базисы существуют; трехпараметрический произвол, который возникает

в каждой точке (ξ^0, ξ^1) при построении любого базиса из указанных, будет устранен ниже. Существенную роль в предлагаемом подходе играет заданное на мировом листе поле $K(\xi^0, \xi^1)$, которое принимает значения в группе $SL(2, \mathbb{C})$ и удовлетворяет уравнению

$$\partial_+(K^{-1}\partial_-K) = 0. \quad (4)$$

Поле $K(\xi^0, \xi^1)$ определяется выражением

$$\widehat{\mathbf{E}}_+ = K\widehat{\mathbf{E}}_-K^+, \quad (5)$$

где вектор-матрицы $\widehat{\mathbf{E}}_{\pm}$ построены по базисам $\mathbf{e}_{\mu\pm}$:

$$\widehat{\mathbf{E}}_{\pm} = \mathbf{e}_{0\pm}\mathbf{1}_2 - \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_{i\pm}\sigma_i.$$

Записывая для матрицы $K(\xi^0, \xi^1)$ разложение Гаусса, однозначно определяем комплекснозначные функции $\varphi = \varphi(\xi^0, \xi^1)$ и $\alpha_{\pm} = \alpha_{\pm}(\xi^0, \xi^1)$. Данные функции являются, вообще говоря, сингулярными: указанное разложение не определено там, где главный минор $K_{11} = e^{-\varphi/2}$ матрицы K обращается в нуль. Определим комплекснозначные функции $\rho_{\pm} = (\partial_{\pm}\alpha_{\mp})e^{-\varphi}$; они являются регулярными во всех точках разложения Гаусса. Как следствие (4) получаем систему уравнений ¹⁾

$$\partial_+\partial_-\varphi = 2\rho_+\rho_-e^{\varphi}, \quad (6a)$$

$$\partial_{\pm}\rho_{\mp} = 0, \quad (6b)$$

$$\partial_{\pm}\alpha_{\mp} = \rho_{\pm}e^{\varphi}. \quad (6b')$$

Подробности можно найти, например, в работе [9].

Введенные функции имеют простой дифференциально-геометрический смысл: $\text{Re } \varphi(\xi^0, \xi^1)$ определяет первую квадратичную форму, а функции $\text{Im } \varphi(\xi^0, \xi^1)$, $\rho_{\pm}(\xi_{\pm})$ – пару вторых форм мирового листа. Здесь уместно подчеркнуть отличие используемого подхода от общеизвестного геометрического описания релятивистской струны [4], в котором уравнения (6a) и (6b) выводятся из уравнений Гаусса и Петерсона–Коддаци соответственно. При этом обычно предполагается, что функции $|\rho_{\pm}|$ не обращаются в нуль; при этом уравнение (6a) может быть легко сведено к известному уравнению Лиувилля конформной заменой конусных переменных и сдвигом:

$$\xi_{\pm} \rightarrow \tilde{\xi}_{\pm} = A_{\pm}(\xi_{\pm}), \quad A' \neq 0, \quad \varphi \rightarrow \varphi - i(\arg \rho_+ + \arg \rho_-). \quad (7)$$

Мы не налагаем ограничение $|\rho_{\pm}(\xi)| \neq 0$ на функции $\rho_{\pm}(\xi)$, считая их динамическими переменными. При этом необходимо заметить, что равенства $\rho_{\pm}(\xi) = 0$ могут иметь место не только в точках, но и на множествах ненулевой меры. Система (6)

¹⁾ Данные уравнения (в вещественном случае) были использованы впервые для построения системы взаимодействующих скалярного и спинорного полей в двумерном пространстве-времени в работе [10].

имеет и другие принципиальные отличия [8] от уравнения Лиувилля, что, в частности, делает естественными такие граничные условия на ее допустимые решения:

$$\lim_{\xi^1 \rightarrow \pm\infty} \varphi(\xi^0, \xi^1) = C_{\pm}, \quad \text{Im } C_{\pm} = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \rho(\xi) = 0. \quad (9)$$

Заметим, что сдвиг $\varphi \rightarrow \varphi + \text{const}$ может быть скомпенсирован изменением переменной $\varkappa$, потому далее везде $C_- = 0$. Таким образом, величина $\varkappa$ параметризует вырожденный “вакуум” (т.е. множество трансляционно-инвариантных решений) системы (6). Заметим, что если $\rho_{\pm} \equiv 0$ при $\xi_{\pm} \in [a_{\pm}, b_{\pm}]$, причем в других точках $\rho_{\pm} \neq 0$, то никаким преобразованием вида (7) коэффициенты $|\rho_{\pm}(\xi)|$ нельзя сделать постоянными всюду: данные преобразования могут менять лишь границы отрезков $[a_+, b_+]$ и $[a_-, b_-]$, но не сам факт обращения величин $|\rho_{\pm}(\xi)|$ в нуль. Таким образом, уравнения (6) в указанном классе функций $\rho_{\pm}(\xi)$ позволяют рассматривать с единой точки зрения стандартные ($\rho_{\pm}(\xi) \neq 0$), плоские ($\rho_{\pm}(\xi) \equiv 0$), а также локально-плоские мировые листы.

В наших дальнейших рассуждениях важную роль играет группа инвариантности $\mathbf{G}$ системы (6), определяемая следующим образом. Пусть функции $\varphi(\xi_+, \xi_-)$, $\rho_{\pm}(\xi_{\pm})$ и $\alpha_{\pm}(\xi_+, \xi_-)$ удовлетворяют уравнениям (6), дифференцируемые комплексные функции $f_{\pm}(\xi)$ и $g_{\pm}(\xi)$ произвольны, а вещественные функции $A_{\pm}(\xi)$ удовлетворяют условию $A'_- A'_+ \neq 0$. Тогда преобразование

$$(\varphi, \rho_{\pm}, \alpha_{\pm}) \rightarrow (\tilde{\varphi}, \tilde{\rho}_{\pm}, \tilde{\alpha}_{\pm}) \quad (10)$$

вновь дает решение рассматриваемой системы, если

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\xi_+, \xi_-) &= \varphi(A_+(\xi_+), A_-(\xi_-)) + f_+(\xi_+) + f_-(\xi_-), \\ \tilde{\rho}_{\pm}(\xi_{\pm}) &= \rho(A_{\pm}(\xi_{\pm})) A'_{\pm}(\xi_{\pm}) e^{-f_{\pm}(\xi_{\pm})}, \\ \tilde{\alpha}_{\pm}(\xi_+, \xi_-) &= \alpha_{\pm}(A_+(\xi_+), A_-(\xi_-)) e^{f_{\pm}(\xi_{\pm})} + g_{\pm}(\xi_{\pm}). \end{aligned}$$

Пусть $Q_{\pm}$ – токи введенного поля $K(\xi^0, \xi^1)$:

$$Q_-(\xi^0, \xi^1) = K^{-1} \partial_- K, \quad Q_+(\xi^0, \xi^1) = -(\partial_+ K) K^{-1}. \quad (11)$$

Как следствие уравнения (4) для матриц $Q_{\pm}(\xi^0, \xi^1) \in sl(2, \mathbb{C})$ имеем “законы сохранения” $\partial_{\pm} Q_{\mp} = 0$, так что $Q_{\pm} = Q_{\pm}(\xi_{\pm})$. Отметим, что выполнены равенства

$$Q_{12+} = -\rho_+, \quad Q_{21-} = -\rho_-, \quad (12)$$

устанавливающие связь введенных матриц и вторых квадратичных форм мирового листа. Вектор-матрицы $\hat{\mathbf{E}}_{\pm}$ в терминах величин $Q_{\pm}$ задаются выражениями $\hat{\mathbf{E}}_{\pm} = T_{\pm}(\xi_{\pm}) \hat{\mathbf{E}}_0 T_{\pm}^{\pm}(\xi_{\pm})$, где $\hat{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{b}_0 \mathbf{1}_2 - \sum_{i=1}^3 \mathbf{b}_i \boldsymbol{\sigma}_i$ – постоянная матрица, а $T_{\pm}(\xi)$ – матрицы решений вспомогательных линейных задач первого порядка

$$T'_{\pm}(\xi) + Q_{\pm}(\xi) T_{\pm}(\xi) = 0. \quad (13)$$

Отсюда, используя (3), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\pm} = & \frac{1}{2}(|t_{i1\pm}|^2 + |t_{i2\pm}|^2)\mathbf{b}_0 - \operatorname{Re}(t_{i1\pm}\bar{t}_{i2\pm})\mathbf{b}_1 - \\ & - \operatorname{Im}(t_{i1\pm}\bar{t}_{i2\pm})\mathbf{b}_2 - \frac{1}{2}(|t_{i1\pm}|^2 - |t_{i2\pm}|^2)\mathbf{b}_3, \quad i = \frac{3 \mp 1}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $t_{ij\pm}$ суть матричные элементы введенных матриц $T_{\pm}$.

Далее, аналогично работе [9] мы факторизуем множество мировых листов по группе $G_0 \subset G$, выделенной условиями

$$\lim_{\xi^1 \rightarrow -\infty} \operatorname{Re}(f_+(\xi^1 + \xi^0) + f_-(\xi^1 - \xi^0)) = 0, \quad A_{\pm}(\xi) \equiv \xi.$$

Используя развитые в статье [9] методы, можно показать, что в соответствующих смежных классах существуют представители, для которых справедливо равенство

$$Q_{\pm} = -\rho_{\pm}\sigma_{\pm} + \bar{\rho}_{\pm}\sigma_{\mp}. \quad (15)$$

Именно такие представители мы и будем далее рассматривать. Для матриц $T_{\pm}$ имеем включение $T_{\pm} \in SU(2)$, так что

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{2}\mathbf{b}_0 \mp \operatorname{Re}(t_{11\pm}\bar{t}_{12\pm})\mathbf{b}_1 \mp \operatorname{Im}(t_{11\pm}\bar{t}_{12\pm})\mathbf{b}_2 \mp \frac{1}{2}(|t_{11\pm}|^2 - |t_{12\pm}|^2)\mathbf{b}_3 \quad (16)$$

и, следовательно,

$$X_0(\xi^0, \xi^1) = \varkappa\xi^0 + Z_0. \quad (17)$$

Далее без ограничения общности мы считаем $Z_0 = 0$. Подчеркнем, что величина $\varkappa$ является динамической переменной, поэтому калибровка (17) отличается от известной калибровки $X_0(\xi^0, \xi^1) \equiv \xi^0$. Поскольку справедливо разложение $K = T_+(\xi_+)T_-^{-1}(\xi_-)$, поле $K(\xi^0, \xi^1)$ на представителях принимает значения в компактной группе; таким образом, уравнение (4) есть частный случай известного уравнения ВЗНВ. Обратим внимание, что выполненная факторизация устраняет произвол при построении введенных выше базисов $\mathbf{e}_{\mu\pm}$. Системы (13) мы рассматриваем как частный случай спектральных задач

$$T'_{\pm}(\xi; \lambda) + Q_{\pm}(\xi)T_{\pm}(\xi; \lambda) = i\lambda\sigma_3 T_{\pm}(\xi; \lambda) \quad (18)$$

при $\lambda = 0$. Линейные системы такого вида подробно исследованы в монографии [11] в связи с теорией нелинейного уравнения Шредингера. В настоящей работе такие спектральные задачи позволяют говорить, в частности, об N -солитонных струнах [9].

2. РЕДУКЦИЯ НА ПЛОСКОСТЬ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

После выполненной факторизации решения $T_{\pm}(\xi)$ системы (13) могут быть представлены в виде $T_{\pm}(\xi) = T_{0\pm}(\xi)U_{\pm}(\beta, \mathbf{n})$, где постоянные матрицы $U_{\pm}(\beta, \mathbf{n}) \in SU(2)$ параметризованы единичным вектором $\mathbf{n}$ и углом поворота β вокруг данного вектора. Матрицы решений $T_{0\pm}(\xi) \in SU(2)$ фиксированы условием $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} T_{0\pm}(\xi) = \mathbf{1}_2$.

Рассмотрим вопросы, связанные с существованием энергии P_0 , импульса P_j и момента M_{ij} . Мы полагаем, что покоящиеся (хотя и бесконечные) массы на концах струны вклада в данные величины не дают, и рассматриваем нётеровские выражения для действия (1) без граничных слагаемых. Как отмечалось в работе [5], для бесконечной струны осмысленными, вообще говоря, являются лишь локальные величины ΔP_j и ΔM_{ij} , отнесенные к конечному интервалу $\Delta \xi^1$. Соответствующие выражения для глобальных инвариантов

$$P_\mu = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \partial_0 X_\mu d\xi^1, \quad M_{ij} = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_0 X_i X_j - \partial_0 X_j X_i) d\xi^1$$

являются формальными до тех пор, пока не будет исследована сходимость интегралов. Из формулы (17), очевидно, следует расходимость величины P_0 для любой струнной конфигурации, в том числе для покоящейся прямолинейной струны. В этой связи вопрос о том, что является энергией системы, требует отдельного обсуждения.

Сначала рассмотрим вопрос о существовании импульса $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^3 P_j \mathbf{b}_j$. Для этого необходимо фиксировать класс дифференцируемых функций $\rho_\pm(\xi)$ более точно. Сформулированные ранее требования (9) мы дополним, считая, что функции $\rho_\pm(\xi)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho_\pm(\xi)| (1 + |\xi|) d\xi < \infty. \quad (19)$$

Для элементов матриц $T_{0\pm}(\xi)$ в этом случае имеем

$$\xi \rightarrow -\infty: \quad t_{11\pm}(\xi) \rightarrow 1 + O(1/\xi^{2+\sigma}), \quad t_{12\pm}(\xi) \rightarrow O(1/\xi^{1+\epsilon}), \quad (20)$$

$$\xi \rightarrow +\infty: \quad t_{11\pm}(\xi) \rightarrow \bar{\mathbf{a}}_\pm + O(1/\xi^{1+\kappa}), \quad t_{12\pm}(\xi) \rightarrow \mathbf{b}_\pm + O(1/\xi^{1+\kappa}), \quad (21)$$

где $\sigma, \epsilon, \kappa > 0$ и величины $\mathbf{a}_\pm$ и $\mathbf{b}_\pm$ суть элементы матриц монодромии $\mathfrak{M}_\pm$ систем (18) при нулевом значении спектрального параметра. Используя формулу $\partial_0 X = \varkappa(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-)$, асимптотики (20), (21) и формулы (16), убеждаемся в том, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть функции $\rho_\pm$ удовлетворяют условиям (19). Тогда для существования импульса $\mathbf{P}$ достаточно выполнения равенств

$$U_+ = U_-, \quad \mathfrak{M}_\pm = \varepsilon_\pm I, \quad (22)$$

где множители ε_+ и ε_- могут независимо принимать значения ± 1 .

Заметим, что при выполнении равенств (22) асимптотики вида (20) будут справедливы как при $\xi \rightarrow \infty$, так и при $\xi \rightarrow +\infty$.

С учетом данного предложения для выбранных представителей в граничных условиях (2) выполняется условие $\mathbf{v} = 0$. Чтобы получить мировой лист с $\mathbf{v} \neq 0$, необходимо сделать внутри соответствующего смежного класса преобразование группы G_0 , например, такое, что $\pm f_\pm(\xi) = \text{const}$, $g_\pm \equiv 0$. Таким образом, выбранный представитель всякой орбиты группы G_0 на множестве мировых листов однозначно

восстанавливается по паре комплекснозначных функций $\rho_{\pm}(\xi)$, трем константам, параметризующим постоянную матрицу $U(\beta, \mathbf{n}) = U_+ = U_-$, переменной $\varkappa$ и трем константам интегрирования Z_j , необходимым для восстановления функций $X_j(\xi^0, \xi^1)$ по производным $\partial_{\pm} X_j(\xi_{\pm})$.

Вернемся к вопросу об энергии рассматриваемой струны. Сделанное выше разбиение множества мировых листов на смежные классы не является лоренц-инвариантной процедурой: это наглядно демонстрирует равенство (17). Поэтому алгеброй пространственно-временной симметрии теории является алгебра Галилея $\mathcal{G}_3$. Рассмотрим ее одномерное центральное расширение $\tilde{\mathcal{G}}_3$, которое позволит нам ввести дополнительный вещественный параметр m_0 и в последующем построить квантовую версию модели. В этом случае, как известно (см., например, книгу [12]), алгебра $\tilde{\mathcal{G}}_3$ имеет три функции Казимира:

$$\hat{C}_1 = m_0 \hat{I}, \quad \hat{C}_2 = \sum_{i,j,k=1}^3 (\epsilon_{ijk} (\hat{M}_{jk} - \hat{P}_j \hat{B}_k))^2, \quad \hat{C}_3 = \hat{H} - \frac{1}{2m_0} \sum_{i=1}^3 \hat{P}_i^2,$$

где $\hat{I}$ – единичный оператор, $\hat{M}_{ij}$, $\hat{H}$, $\hat{P}_i$ и $\hat{B}_i$ – генераторы поворотов, временных и пространственных сдвигов, а также галилеевских бустов соответственно. Функция Казимира $\hat{C}_3$ интерпретируется как внутренняя энергия частицы. С учетом этого представляется естественным в качестве энергии струны принять выражение

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2m_0} \sum_{i=1}^3 P_i^2 + h[\rho_+, \rho_-], \quad (23)$$

где функционал $h[\rho_+, \rho_-]$ – гамильтониан, обеспечивающий динамику (66) внутренних степеней свободы $\rho_{\pm}$. Его явный вид зависит от пуассоновой структуры теории и будет указан ниже. Отметим, что изучение энионов групповыми методами недавно проводилось, например, в работе [13].

Исследуем теперь вопрос о существовании компонент момента M_{ij} . Для этого рассмотрим подмножество всех струнных конфигураций, выделенное условием, что единичный вектор $\mathbf{n}$ во введенной выше матрице $U(\beta, \mathbf{n})$ фиксирован. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathbf{n} = \mathbf{b}_3$, так что $U(\beta, \mathbf{n}) = \text{diag}(e^{i\beta}, e^{-i\beta})$. С учетом соотношений (22) в этом случае находим, что при любом конечном значении параметра ξ^0 и при $|\xi^1| \rightarrow \infty$ имеют место следующие утверждения: функции $X_1(\xi^1)$ и $X_2(\xi^1)$ ограничены, $X_3(\xi^1) = O(\xi^1)$, причем для функций $X_1(\xi^1)$ и $X_2(\xi^1)$ имеет место полезное в дальнейшем представление

$$X_i(\xi) = Z_i + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\xi - \eta) \partial_1 X_i(\eta) d\eta, \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Введем необходимые обозначения. Представление (24) позволяет записать компоненту M_{12} полного момента в виде $M_{12} = P_1 Z_2 - P_2 Z_1 + S_{12}$, где “собственный момент” S_{ij} не зависит от констант интегрирования Z_i . Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть функции $\rho_{\pm}$ удовлетворяют условиям (19) и (22). Тогда для соответствующей струнной конфигурации существует динамический инвариант S_{12} .

Доказательство этого предложения заключается в проверке сходимости соответствующего несобственного интеграла в классе функций $\rho_{\pm}$, фиксированном указанными условиями. Существование конечной компоненты полного момента M_{12} и расходимость (в общем случае для указанного класса) компонент M_{13} и M_{32} соответствует контракции $SO(3) \rightarrow E(2)$ в группе инвариантности теории (см., например, монографию [14]), и это означает такую редукцию пространственно-временной симметрии, что

$$\tilde{\mathcal{G}}_3 \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_2 \times \tilde{\mathcal{G}}_1. \quad (25)$$

Далее мы считаем выделенное направление $\mathbf{b}_3$ фиксированным и редукцию (25) выполненной. Пусть $s = S_{12}$; используя формулы (3), (1) и (24), находим, что

$$s = \gamma \varkappa^2 F_s[\rho_+, \rho_-], \quad (26)$$

где

$$F_s[\rho_+, \rho_-] = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\xi - \eta) \times \\ \times [(\bar{t}_{11+}(\xi)t_{12+}(\xi) - \bar{t}_{11-}(\xi)t_{12-}(\xi))(t_{11+}(\eta)\bar{t}_{12+}(\eta) + t_{11-}(\eta)\bar{t}_{12-}(\eta))] d\xi d\eta.$$

Аналогично для компонент импульса P_i имеем

$$P_i = \gamma \varkappa F_i[\rho_+, \rho_-], \quad i = 1, 2, 3, \quad (27)$$

где

$$F_1 + iF_2 \equiv F = \int_{-\infty}^{\infty} (-t_{11+}(\eta)\bar{t}_{12+}(\eta) + t_{11-}(\eta)\bar{t}_{12-}(\eta)) d\eta, \\ F_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (-|t_{11+}(\eta)|^2 + |t_{12+}(\eta)|^2 + |t_{11-}(\eta)|^2 - |t_{12-}(\eta)|^2) d\eta.$$

Из формул (26) и (27) вытекает, что величины s , P_1 , P_2 и функции $\rho_{\pm}(\xi)$ удовлетворяют соотношению

$$\gamma s |F[\rho_+, \rho_-]|^2 = \mathcal{P}^2 F_s[\rho_+, \rho_-], \quad (28)$$

где $\mathcal{P} = P_1 \mathbf{b}_1 + P_2 \mathbf{b}_2$. Заметим, что величины F_s и $|F|$ не зависят от угла β и тем самым однозначно определяются по функциям $\rho_{\pm}(\xi)$. Необходимые для восстановления мирового листа угол β и величина $\varkappa$ могут быть выражены при заданных функциях $\rho_{\pm}(\xi)$ через величины P_1 и P_2 :

$$\varkappa = \frac{|\mathcal{P}|}{\gamma |F|}, \quad \beta = \frac{1}{2} (\arg(P_1 + iP_2) - \arg F_0),$$

где F_0 – функционал F , построенный по элементам матриц $T_{0\pm}$. Этот факт позволяет считать в дальнейшем величины P_1 и P_2 независимыми переменными. В число независимых переменных мы включим также константу s : поскольку для восстановления функций $X_j(\xi^0, \xi^1)$ она является лишней, соотношение (28) в этом случае необходимо рассматривать как связь. Функция $X_3(\xi^1)$ является неограниченной

(сверху и снизу), так что, сохранив общность, считаем далее $Z_3 = 0$. Таким образом, мы объявляем независимыми динамическими переменными функции $\rho_{\pm}(\xi)$, $\bar{\rho}_{\pm}(\xi)$, а также константы Z_1 , Z_2 , P_1 , P_2 и s . Взаимно однозначное соответствие

$$X_{\mu}(\xi^0, \xi^1) \longleftrightarrow (\rho_{\pm}(\xi^1 \pm \xi^0), \bar{\rho}_{\pm}(\xi^1 \pm \xi^0); P_1, P_2; Z_1, Z_2; s) \quad (29)$$

установлено с учетом редукции (25) и связей (22) и (28). Далее вместо переменных Z_i мы будем использовать переменные

$$B_i = m_0 \left(Z_i - \frac{\xi^0}{\gamma} P_i \right), \quad i = 1, 2.$$

3. ЭФФЕКТИВНАЯ МАССА И МОМЕНТ

Произвольная гамильтонова динамическая система (ГДС) определена, если указано фазовое пространство $\mathcal{H}$, пуассонова структура (возможно, вырожденная), гамильтониан H и система первичных связей. Пусть указанные базовые объекты ГДС заданы следующим образом:

1) переменные $(\rho_{\pm}(\xi), \bar{\rho}_{\pm}(\xi); B_1, B_2; P_1, P_2; s)$ параметризуют фазовое пространство $\mathcal{H}$;

2) скобки Пуассона определены как

$$\{\bar{\rho}_{\pm}(\xi), \rho_{\pm}(\eta)\} = \frac{\gamma}{m_0^2 c^2} (\mp \delta'(\xi - \eta) - \bar{\rho}_{\pm}(\xi) \rho_{\pm}(\eta) \varepsilon(\xi - \eta)), \quad (30)$$

$$\{\rho_{\pm}(\xi), \rho_{\pm}(\eta)\} = \frac{\gamma}{m_0^2 c^2} \rho_{\pm}(\xi) \rho_{\pm}(\eta) \varepsilon(\xi - \eta), \quad (31)$$

$$\{P_i, B_j\} = m_0 \delta_{ij} \quad (32)$$

(остальные скобки обращаются в нуль);

3) связь задается равенством $\Phi \equiv \mathcal{P}^2 F_s - \gamma s |F|^2 \approx 0$ (см. (28));

4) гамильтониан есть

$$H = h[\rho_+, \rho_-] + \frac{\mathcal{P}^2}{2m_0} + l(\xi^0) \Phi,$$

где

$$h[\rho_+, \rho_-] = m_0 c^2 \left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} (|\rho_+(\xi)|^2 + |\rho_-(\xi)|^2) d\xi \right]$$

и функция l – соответствующий множитель Лагранжа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Заданную указанным способом ГДС будем называть ГДС *квази-частица на плоскости*.

Прокомментируем сделанное определение.

1. Теория содержит две размерные константы: “голую” массу m_0 и константу γ , входящую в действие (1). Роль времени в теории играет параметр $\tau = (m_0/\gamma)\xi^0$, так что для любого функционала $D = D[\rho, \bar{\rho}; P, B, s]$ в силу сделанных определений имеем $\partial D / \partial \tau = \{D, H\}$.

2. Скобки дискретных переменных P_i, B_i , а также s (аннулятора) мотивированы структурой алгебры $\widehat{\mathcal{G}}_2$ с учетом вида оператора Казимира $\widehat{C}_2$ (см. выше). Обратим внимание на работу [15], в которой для описания энионов использовалось двухпараметрическое расширение группы Галилея, причем один параметр, как обычно, связывался с массой m_0 , а второй – с внутренним моментом s . В рамках предлагаемой модели такой подход требует модификации пуассоновой структуры и в настоящей работе не рассматривается.

3. Формулы (30), (31) для функций $\rho_{\pm}(\xi)$ определяют пуассонову структуру $\{\cdot, \cdot\}_1$ в иерархии пуассоновых структур $\{\cdot, \cdot\}_n$ нелинейного уравнения Шредингера [11]. Как отмечалось в работе [9], введение указанной иерархии в рассматриваемой теории означает появление иерархии динамик кривых $\mathbf{r}(\xi) = \sum_{i=1}^3 X^i(\xi) \mathbf{b}^i$; только одна из таких динамик является струнной²⁾. Обратим внимание, что скобки (30) и (31) могут быть записаны локально в координатах $j_{a\pm}(\xi) \equiv \text{tr}[Q_{\pm}(\xi) \sigma_a]$ для матриц $Q_{\pm} \in su(2)$ общего вида (т.е. до наложения калибровки $j_{3\pm}(\xi) \equiv 0$).

4. Условием, отбирающим функционалы D , допустимые для постулированных скобок, является требование $\{D, \text{tr} \mathfrak{M}_{\pm}\}_1 = 0$ [11]. Это означает, что равенство (22) фактически представляет собой не связь, а условие отбора симплектических листов в фазовом пространстве. Мы не будем детально рассматривать эти вопросы.

5. Соответствие (29) дает основание интерпретировать построенную систему как бесконечную эволюционирующую кривую в пространстве E_3 . Однако оно построено только для случая $0 < \varkappa < \infty$. В силу формул (26) и (27) это означает, что тождества $\rho_{\pm} \equiv 0$ взаимно однозначно ведут к равенствам $\mathcal{P} = 0$ и $s = 0$. Мы не будем вводить таких ограничений на координаты фазового пространства $\mathcal{H}$: неравенства $\mathcal{P} \neq 0$ и/или $s \neq 0$ допустимы в случае выполнения тождеств $\rho_{\pm} \equiv 0$, так же как равенства $\mathcal{P} = 0$ и $s = 0$ возможны для функций $\rho_{\pm} \neq 0$. Сказанное означает, что построенная ГДС квазичастица на плоскости содержит как “струнные” состояния (т.е. те, для которых справедливо соответствие (29)), так и другие. Например, конфигурация $\rho_{\pm} \equiv 0$ описывает бесструктурную частицу на плоскости с произвольными импульсом $\mathcal{P}$ и собственным моментом s .

Как показано выше, импульс струны определен и задан вектором $\mathbf{P} \in E_3$, а энергия определена выражением (23). После сделанной редукции естественно считать, что смысл пространственных трансляций имеют лишь трансляции вдоль направлений $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$. Это дает основание считать импульсом для ГДС квазичастица на плоскости вектор $\mathcal{P} \in E_2$, а не вектор $\mathbf{P}$.

В силу установленного соответствия (29) энергией рассматриваемой динамической системы естественно считать энергию струны. Последняя складывается из значения гамильтониана H на поверхности связей (которые, как обычно, можно учесть явно после вычисления всех скобок Пуассона) и слагаемого $P_3^2/2m_0$, учитывающего возможные движения точек струны в направлении $\mathbf{b}_3$. Заметим, что при $F \neq 0$ на поверхности связи (28) выполняется равенство $P_3^2 = \mathcal{P}^2 F_3^2 / |F|^2$, так что

²⁾В этой связи интересно заметить, что факт появления нелинейного уравнения Шредингера при описании динамики вихревых нитей известен давно (см., например, работу [16]).

для энергии находим

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \left(H + \frac{P_3^2}{2m_0} \right) \Big|_{\Phi=0} = \\ &= \frac{\mathcal{P}^2}{2m_0} \left[1 + \frac{F_3^2}{|F|^2} \right] + m_0 c^2 \left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} (|\rho_+(\xi)|^2 + |\rho_-(\xi)|^2) d\xi \right].\end{aligned}\quad (33)$$

Полученная формула дает выражение для эффективной массы через внутренние степени свободы $\rho_{\pm}(\xi)$, $\bar{\rho}_{\pm}(\xi)$,

$$m_{\text{eff}} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \mathcal{P}^2} \right)^{-1} = \frac{m_0 |F|^2}{|F|^2 + F_3^2},$$

а также для массы покоя,

$$m = m_0 \left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} [|\rho_+(\xi)|^2 + |\rho_-(\xi)|^2] d\xi \right].$$

Очевидно, что при $F \neq 0$ связь (28) может быть записана в виде $s = A\mathcal{P}^2$, где $A[\rho_+, \rho_-] = F_s/(\gamma|F|^2)$. Далее, с помощью формулы (33) получаем $s = \alpha'\mathcal{E} - \alpha(0)$, где

$$\alpha' = \frac{2m_0 F_s}{\gamma(|F|^2 + F_3^2)}, \quad \alpha(0) = \alpha' h.$$

Таким образом, “траектория Редже” $s = \alpha(\mathcal{E})$ рассматриваемой ГДС оказывается линейной; при этом наклон α' и интерсепт $\alpha(0)$ определяются ее внутренним состоянием – парой комплекснозначных функций $\rho_{\pm}(\xi)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена бесконечномерная ГДС, интерпретируемая как локализованная структура (“квазичастица”) на плоскости. Фазовое пространство $\mathcal{H}$ такой системы имеет струнный сектор – всюду плотное³⁾ подмножество, для которого справедливо соответствие (29). Что касается физической интерпретации модели, то она может быть связана, например, с теорией эволюционирующей кривой (“дефекта среды”), соединяющей противоположные грани квазидвумерной структуры толщины L ; в простейшем случае $L \rightarrow \infty$. Та или иная интерпретация модели в терминах космических струн также представляла бы, на наш взгляд, определенный интерес.

Обсудим кратко возможную схему квантования модели. Структура пространства $\mathcal{H}$ позволяет выбрать гильбертово пространство состояний теории в виде

$$\mathbf{H} = \int_s \mathbf{H}_s, \quad \mathbf{H}_s = \mathbf{H}_{\rho} \otimes \mathbf{H}_2.$$

Здесь $\mathbf{H}_2$ – пространство квантовых состояний свободной нерелятивистской частицы на плоскости (т.е. пространство $L^2(\mathbb{R}_2)$ с необходимым оснащением), $\mathbf{H}_{\rho}$ – пространство квантовых состояний внутренних степеней свободы $\rho_{\pm}(\xi)$. Связь (28) становится уравнением, определяющим допустимые состояния в каждом пространстве $\mathbf{H}_s$:

$$(s\hat{I} - \hat{A}\hat{\mathcal{P}}^2)|\psi_s\rangle = 0, \quad |\psi_s\rangle \in \mathbf{H}_s, \quad (34)$$

³⁾Например, в слабой топологии, порожденной функционалом $\mathcal{H}$.

где $\hat{\mathcal{P}}^2 = \Delta_2$ и $\hat{\mathbf{A}}$ – симметрический оператор в пространстве $\mathbf{H}_\rho$, полученный квантованием введенного выше классического выражения $\mathbf{A}(\bar{\rho}, \rho)$.

Пусть $\hat{\mathbf{A}}|\alpha_n\rangle = \alpha_n|\alpha_n\rangle$ – спектральная задача в пространстве $\mathbf{H}_\rho$. Тогда решением уравнения (34) является “запутанное” состояние

$$|\psi_s\rangle = \sum_n a_n |f_{s,n}\rangle |\alpha_n\rangle,$$

где векторы $|f_{s,n}\rangle \in \mathbf{H}_2$ в координатном представлении суть

$$\langle \mathbf{z} | f_{s,n} \rangle = J_{l-s}(k_{s,n}r) e^{i(l-s)\phi}, \quad \mathbf{z} = (r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Здесь l – полный момент системы, $k_{s,n} = \sqrt{s/\alpha_n}$ и J_ν – соответствующая функция Бесселя. Состояния вида $|\psi_s\rangle$ описывают некоторый энион – частицу с произвольно заданным собственным моментом s . Конечно, строгая реализация данной схемы требует отдельных исследований.

Список литературы

- [1] А. П. Протогенов, *УФН*, **162**:7 (1992), 1–80.
- [2] А. Yu. Kitaev, *Ann. Phys.*, **303**:1 (2003), 2–30, arXiv: [quant-ph/9707021](#).
- [3] M. G. Alford, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **62**:10 (1989), 1071–1074.
- [4] Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко, *Модель релятивистской струны в физике адронов*, Энергоатомиздат, М., 1987.
- [5] M. R. Anderson, *The Mathematical Theory of Cosmic Strings. Cosmic Strings in the Wire Approximation*, Ser. High Energy Phys. Cosmol. Gravit., IOP, Bristol, 2003.
- [6] Б. М. Барбашов, Г. С. Шаров, *ТМФ*, **101**:2 (1994), 253–271.
- [7] S. V. Talalov, *J. Phys. A*, **22**:13 (1989), 2275–2284.
- [8] С. В. Талалов, *ТМФ*, **123**:1 (2000), 38–43.
- [9] С. В. Талалов, *ТМФ*, **152**:3 (2007), 430–439.
- [10] А. К. Погребков, С. В. Талалов, *ТМФ*, **70**:3 (1987), 342–247.
- [11] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [12] В. И. Фущич, А. Г. Никитин, *Симметрия уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1990.
- [13] J. Negro, M. A. del Olmo, J. Tosiek, *J. Math. Phys.*, **47**:3 (2006), 033508, 19 pp., arXiv: [math-ph/0512007](#).
- [14] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1965.
- [15] R. Jackiw, V. P. Nair, *Phys. Lett. B*, **480**:1–2 (2000), 237–238, arXiv: [hep-th/0003130](#).
- [16] Ф. Дж. Сэффмэн, *Динамика вихрей*, Научный мир, М., 2000.

Поступила в редакцию 13.05.2010