Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Кумар, Г. Д. Сингх, Перенос завихренности в упруго-вязкой жидкости при наличии взвешенных частиц в пористых средах, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 2, 341–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 12:34:21

© 2010 г.

П. Кумар*, Г. Д. Сингх†

ПЕРЕНОС ЗАВИХРЕННОСТИ В УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Рассмотрен перенос завихренности в упруговязкой жидкости Олдройда при наличии взвешенных магнитных частиц в пористых средах. Из уравнений для потока магнитной жидкости получены уравнения, управляющие таким переносом завихренности. Из этих уравнений следует, что перенос завихренности твердого тела связан с переносом завихренности жидкости в пористой среде. Обнаружено, что благодаря термокинетическому процессу завихренность жидкости может существовать при отсутствии завихренности твердого тела в пористой среде; но если завихренность жидкости равна нулю, то завихренность твердого тела непременно равна нулю. Изучен двумерный случай.

Ключевые слова: упруговязкая жидкость Олдройда, взвешенная магнитная частица, завихренность, пористая среда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитные жидкости – это такие жидкости, в которых магнитные частицы находятся во взвешенном состоянии в жидком носителе. Таким образом, это двухфазная система, состоящая из твердой и жидкой фаз. Мы полагаем, что жидкая фаза является немагнитной по своей природе, и магнитная сила действует только на магнитные частицы, изменяя их скорость. Следовательно, тормозящая сила, действующая на несущую жидкость, изменяется, и поток несущей жидкости также подвергается воздействию магнитной силы. Благодаря движению твердых частиц относительно частиц жидкости результирующее воздействие на частицы, находящиеся во взвешенном состоянии в жидкости, заключается в действии на систему дополнительной тормозящей силы.

Исследование магнитных жидкостей вызывает значительный интерес. В работе [1] были представлены уравнения для потока суспензии немагнитных частиц.

*Department of Mathematics, ICDEOL, Himachal Pradesh University, Shimla, India.
E-mail: drpardeep@sancharnet.in, pkdureja@gmail.com

†SCD Government College, Ludhiana, Punjab, India. E-mail: sandhugjs@yahoo.co.in

Впоследствии эти уравнения были модифицированы для описания потока магнитной жидкости с учетом магнитной объемной силы $\mu_0 M \nabla H$ [2]. В работе [3] изучался перенос завихренности в магнитной жидкости. Перенос и осаждение взвешенных частиц в инерциальном потоке, управляемом давлением, рассмотрен в работе [4].

Во всех вышеприведенных работах жидкость считалась ньютоновской, однако ряд промышленно важных жидкостей (например, жидкая пластмасса, полимеры, шлам и пищевые продукты) ведут себя как неньютоновские жидкости. Многие обычные материалы (краски, пластмасса) и более экзотические материалы (кремниевая магла, насыщенная почва и земная литосфера) ведут себя как упруговязкие жидкости. Серьезные попытки изучить потоки неньютоновских жидкостей предпринимались благодаря все возрастающему применению этих материалов в различных производящих и обрабатывающих отраслях промышленности. В работе [5] исследовалась стабильность горизонтального слоя максвелловской упруговязкой жидкости, нагреваемой снизу. Нестабильность и другие факторы воздействуют на упруговязкие жидкости иначе, чем на ньютоновские жидкости. Например, в статье [6] было рассмотрено воздействие равномерного вращения на термическую нестабильность максвелловской упруговязкой жидкости и обнаружено, что вращение оказывает дестабилизирующее воздействие, в отличие от стабилизирующего воздействия на ньютоновскую жидкость. В работе [7] экспериментально показано, что разбавленный раствор метилметакрилата в *n*-бутилацетате хорошо описывается теоретической моделью Олдройда [8]. В работе [9] изучалась термическая нестабильность слоя жидкости Олдройда, которая подвергалась равномерному вращению, и обнаружено, что это вращение при определенных условиях оказывало как дестабилизирующее, так и стабилизирующее воздействие, в отличие от максвелловской (упруговязкой) жидкости, на которую вращение оказывает дестабилизирующее воздействие. Была изучена конвективная нестабильность в быстро вращающейся упруговязкой жидкости Олдройда [10].

Во всех упомянутых работах среда считалась непористой. Изучение пористой среды является важной проблемой в гидрологии почвенных и подземных вод и в атмосферных исследованиях. Изучение потоков жидкостей в пористых средах стало важной тематикой благодаря добыче неочищенной нефти из пор породы. Многочисленные применения в геофизике можно найти в книгах [11]–[13]. Если жидкость медленно просачивается сквозь поры макроскопически однородной и изотропной пористой среды, то общий эффект описывается законом Дарси, согласно которому обычное вязкое слагаемое в уравнениях для движения жидкости заменяется членом $-(\mu/k_1)\vec{q}$, описывающим сопротивление; здесь μ – вязкость жидкости, k_1 – проницаемость среды и $\vec{q}$ – скорость Дарси (фильтрования) жидкости.

В работе [14] изучалась стабильность конвективного потока в гидродинамике пористой среды с использованием методики Рэлея. Была рассмотрена рэлеевская нестабильность термического граничного слоя в потоке сквозь пористую среду [15] и нестабильность Рэлея–Тейлора ньютоновской вязкой жидкости, покрывающей упруговязкую жидкость Олдройда и протекающей сквозь пористую среду [16]; при этом было обнаружено, что система стабильна в потенциально стабильном случае

и нестабильна в потенциально нестабильном случае, как и тогда, когда обе жидкости являются ньютоновскими вязкими жидкостями. В другом исследовании [17] изучалась термическая нестабильность упруговязкой жидкости Олдройда в пористой среде. В работе [18] была рассмотрена нестабильность Рэлея–Тейлора ньютоновской вязкой жидкости, покрывающей упруговязкую жидкость Олдройда, содержащую взвешенные частицы в пористой среде, а в работе [19] – нестабильность плоского интерфейса между двумя упруговязкими жидкостями Олдройда, покрывающими одна другую, в пористой среде при наличии равномерного вращения и переменного магнитного поля.

Имея в виду важность неньютоновских жидкостей в современной технологии и промышленности и важность пористых сред в химическом машиностроении и геофизике, в настоящей работе мы изучаем перенос завихренности в магнитных смесях, состоящих из упруговязкой жидкости Олдройда и частиц, в пористой среде, используя уравнения из работы [3].

2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. МАГНИТНАЯ ОБЪЕМНАЯ СИЛА

Размер частиц магнитного материала много больше, чем размер молекул несущей жидкости, поэтому мы рассматриваем предел микроскопического элемента объема, в котором жидкость считается непрерывной средой, а магнитные частицы должны рассматриваться как дискретные объекты. Если рассматривается ячейка магнитной жидкости, содержащая большое количество магнитных частиц, то кроме ее трансляций как точечной массы необходимо учитывать микровращение ячейки. Таким образом, необходимо ввести среднюю скорость $\vec{q}_d$ и среднюю угловую скорость $\vec{\omega}$ ячейки. Однако в настоящей работе мы пренебрегаем эффектом микровращения. Мы также сделаем следующие предположения.

1. Большинство магнитных жидкостей являются относительно плохими проводниками, следовательно, плотность свободного тока $\vec{J}$ пренебрежимо мала, поэтому $\vec{J} \times \vec{B}$ считается незначительной величиной.

2. Ротор магнитного поля равен нулю, $\nabla \times \vec{H} = 0$.

3. Во многих практических случаях сжимаемость жидкости не является важной, следовательно, можно пренебречь вкладом магнитного трения. Мы будем называть оставшуюся силу магнитного поля намагничивающей силой.

4. Все зависящие от времени эффекты намагничивания в жидкости, например гистерезис, считаются пренебрежимо малыми, а намагниченность $\vec{M}$ считается коллинеарной $\vec{H}$.

Согласно электромагнитной теории сила, приходящаяся на единицу объема (в единицах МКС) куска намагниченного материала с намагниченностью $\vec{M}$ (т.е. дипольный момент единицы объема) в поле с магнитной напряженностью $\vec{H}$, записывается как $\mu_0(\vec{M} \cdot \nabla)\vec{H}$, где μ_0 – проницаемость свободного пространства. Используя предположение 4, мы получаем

$$\mu_0(\vec{M} \cdot \nabla)\vec{H} = \frac{\mu_0 M}{H}(\vec{H} \cdot \nabla)\vec{H}, \quad M = |\vec{M}|, \quad H = |\vec{H}|.$$

Но в силу предположения 2

$$(\vec{H} \cdot \nabla) \vec{H} = \frac{1}{2} \nabla (\vec{H} \cdot \vec{H}) - \vec{H} \times (\nabla \cdot \vec{H}) = \frac{1}{2} \nabla (\vec{H} \cdot \vec{H}).$$

Отсюда $\mu_0 (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{H} = (\mu_0 M/H)(1/2) \nabla (\vec{H} \cdot \vec{H}) = \mu_0 M \nabla H$. Таким образом, магнитная объемная сила принимает вид [20] $f_m = \mu_0 M \nabla H$.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЮЩИХ ПЕРЕНОСОМ ЗАВИХРЕННОСТИ В МАГНИТНОЙ УПРУГОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ОЛДРОЙДА

Пусть Γ_{ij} , τ_{ij} , e_{ij} , μ , λ , λ_0 ($\lambda_0 < \lambda$), p , q_i , x_i , δ_{ij} и d/dt обозначают соответственно компоненты суммарного тензора напряжения, тензора сдвига, тензора скорости деформации, вязкость, время релаксации напряжения, время задержки деформации, изотропное давление, компоненты вектора скорости, компоненты вектора координат, символ Кронекера и конвективную производную. Тогда упруговязкая жидкость Олдройда описывается следующими основными соотношениями:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ \left(1 + \lambda \frac{d}{dt}\right) \tau_{ij} &= 2\mu \left(1 + \lambda_0 \frac{d}{dt}\right) e_{ij}, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения подобного типа впервые были получены в работе [8], где также показано, что многие реологические уравнения состояния в общем случае сводятся к уравнениям (1) после линеаризации. Случай $\lambda_0 = 0$ отвечает максвелловской жидкости, случай $\lambda = \lambda_0 = 0$ – ньютоновской вязкой жидкости.

Чтобы описать поток магнитной жидкости с учетом объемной силы $\mu_0 M \nabla H$, действующей на взвешенные магнитные частицы, были модифицированы уравнения Сафмана для потока суспензии [2]. Таким образом, уравнения для потока взвешенных магнитных частиц и потока упруговязкой жидкости Олдройда, в которой магнитные частицы находятся во взвешенном состоянии в пористой среде, записываются как

$$\begin{aligned} \frac{mN}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \vec{q}_d}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} (\vec{q}_d \cdot \nabla) \vec{q}_d \right] &= mN \vec{g} + \mu_0 M \nabla H + \frac{KN}{\varepsilon} (\vec{q} - \vec{q}_d), \\ \frac{\rho}{\varepsilon} \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} (\vec{q} \cdot \nabla) \vec{q} \right] &= \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[-\nabla P + \rho \vec{g} + \frac{KN}{\varepsilon} (\vec{q}_d - \vec{q}) \right] - \\ &\quad - \frac{\mu}{k_1} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{q}, \end{aligned} \quad (2)$$

где P , ρ , $\vec{q} = (u, v, w)$, $\vec{g} = (0, 0, -g)$, $\vec{q}_d = (l, r, s)$, m , $N(\vec{x}, t)$ соответственно обозначают давление без гидростатического давления, плотность, скорость движения чистой жидкости, силу тяжести, скорость, массу одной частицы, число частиц в единице

объема; кроме того, $\vec{x} = (x, y, z)$, $K = 6\pi\mu\eta$, η – радиус частицы; K – коэффициент торможения Стокса и mN – масса частиц в единице объема. Здесь ε – пористость среды, определяемая как отношение объема пустот к общему объему ($0 < \varepsilon < 1$). Для очень воздушных и пенистых материалов $\varepsilon \approx 1$, в случае слоя упакованных сфер $\varepsilon \approx 0.25 \div 0.50$.

Если предположить, что частицы имеют сферическую форму и скорость движения частиц относительно жидкости является небольшой, то в уравнениях движения жидкости благодаря наличию взвешенных частиц появляется дополнительное слагаемое, пропорциональное разности скоростей взвешенных частиц и жидкости. Сила воздействия жидкости на взвешенные частицы равна и противоположна силе воздействия частиц на жидкость, поэтому в уравнениях движения взвешенных частиц появляется дополнительное слагаемое – сила, равная по абсолютной величине, но противоположная по знаку. Мы пренебрегаем подъемной силой, действующей на частицы. Эта сила пропорциональна отношению ρ к плотности частиц, и, как показал анализ для случая нулевых граничных условий, ее небольшое стабилизирующее воздействие является пренебрежимо малым. Расстояния между частицами предполагаются большими по сравнению с их диаметром, поэтому мы можем также пренебречь взаимодействием между частицами.

Если применить векторные тождества Лагранжа

$$(\vec{q}_d \cdot \nabla) \vec{q}_d = \frac{1}{2} \nabla q_d^2 - \vec{q}_d \times \vec{\Omega}, \quad (\vec{q} \cdot \nabla) \vec{q} = \frac{1}{2} \nabla q^2 - \vec{q} \times \vec{\Omega}_1,$$

то уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{mN}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \vec{q}_d}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} (\vec{q}_d \times \vec{\Omega}) \right] &= -mNgz - \frac{1}{2\varepsilon^2} mN \nabla q_d^2 + \mu_0 M \nabla H + \frac{KN}{\varepsilon} (\vec{q} - \vec{q}_d), \\ \frac{\rho}{\varepsilon} \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} (\vec{q} \times \vec{\Omega}_1) \right] &= \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[-\nabla P - \nabla \rho gz - \frac{1}{2\varepsilon^2} \rho \nabla q^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{KN}{\varepsilon} (\vec{q}_d - \vec{q}) \right] - \frac{\mu}{k_1} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{q}, \end{aligned}$$

где $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{q}_d$ и $\vec{\Omega}_1 = \nabla \times \vec{q}$ – завихренность твердого тела и завихренность жидкости соответственно. Взяв ротор этих уравнений и учитывая, что ротор градиента тождественно равен нулю, мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{mN}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \vec{q}_d \times \vec{\Omega}) \right] &= \mu_0 \nabla \times M \nabla H + \frac{KN}{\varepsilon} (\vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}), \\ \frac{\rho}{\varepsilon} \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial \vec{\Omega}_1}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \vec{q} \times \vec{\Omega}_1) \right] &= -\frac{\mu}{k_1} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{\Omega}_1 + \\ &\quad + \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{KN}{\varepsilon} (\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Если использовать векторные тождества

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{q}_d \times \vec{\Omega}) &= (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{q}_d - (\vec{q}_d \cdot \nabla) \vec{\Omega} + \vec{q}_d \nabla \cdot \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \nabla \cdot \vec{q}_d = (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{q}_d - (\vec{q}_d \cdot \nabla) \vec{\Omega}, \\ \nabla \times (\vec{q} \times \vec{\Omega}_1) &= (\vec{\Omega}_1 \cdot \nabla) \vec{q} - (\vec{q} \cdot \nabla) \vec{\Omega}_1 + \vec{q} \nabla \cdot \vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}_1 \nabla \cdot \vec{q} = (\vec{\Omega}_1 \cdot \nabla) \vec{q} - (\vec{q} \cdot \nabla) \vec{\Omega}_1, \end{aligned}$$

то уравнения (3) принимают вид

$$\frac{mN}{\varepsilon} \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = \mu_0 \nabla \times M \nabla H + \frac{mN}{\varepsilon^2} (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{q}_d + \frac{KN}{\varepsilon} (\vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{D\vec{\Omega}_1}{Dt} = & -\frac{\varepsilon\nu}{k_1} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \vec{\Omega}_1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) (\vec{\Omega}_1 \cdot \nabla) \vec{q} + \\ & + \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{KN}{\rho} (\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_1), \end{aligned} \quad (5)$$

где ν – кинематическая вязкость и $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} (\vec{q}_d \cdot \nabla)$ – конвективная производная. В уравнении (4)

$$\nabla \times (M \nabla H) = (\nabla M \times \nabla H) + (M \nabla \times \nabla H). \quad (6)$$

Так как ротор градиента равен нулю, последнее слагаемое в этом соотношении равно нулю. Кроме того, поскольку $M = M(H, T)$, мы имеем

$$\nabla M = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right) \nabla H + \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right) \nabla T,$$

поэтому тождество (6) принимает вид

$$\nabla \times (M \nabla H) = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right) \nabla H \times \nabla H + \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right) \nabla T \times \nabla H.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства равно нулю. Отсюда

$$\nabla \times (M \nabla H) = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right) \nabla T \times \nabla H.$$

Поставляя это выражение в уравнение (4), мы получаем

$$\frac{mN}{\varepsilon} \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right) \nabla T \times \nabla H + \frac{mN}{\varepsilon^2} (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{q}_d + \frac{KN}{\varepsilon} (\vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}). \quad (7)$$

Уравнения (5) и (7) являются уравнениями, управляющими переносом завихренности в магнитных смесях, состоящих из упруговязкой жидкости Олдройда и частиц в пористой среде. В уравнении (7) первое слагаемое в правой части описывает возникновение завихренности вследствие термокинетических процессов. Последнее слагаемое вносит изменение в завихренность твердого тела за счет обмена завихренностями между жидкостью и твердыми телами в пористой среде. Из уравнений (5) и (7) следует, что перенос завихренности твердого тела $\vec{\Omega}$ связан с переносом завихренности жидкости $\vec{\Omega}_1$ в пористой среде. Из уравнения (7) получаем, что если завихренность твердого тела $\vec{\Omega} = 0$, то завихренность жидкости $\vec{\Omega}_1$ отлична от нуля и дается выражением

$$\vec{\Omega}_1 = -\frac{\varepsilon\mu_0}{KN} \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right) \nabla T \times \nabla H. \quad (8)$$

Отсюда следует важный вывод: *благодаря термокинетическим процессам завихренность жидкости может существовать при отсутствии завихренности твердого тела в пористой среде.*

Формула (8) также показывает, что завихренность жидкости уменьшается при наличии пористости. При отсутствии пористой среды ($\varepsilon = 1$)

$$\vec{\Omega}_1 = -\frac{\mu_0}{KN} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right) \nabla T \times \nabla H.$$

Этот результат согласуется с результатом работы [3].

Из уравнения (4) мы находим, что если $\vec{\Omega}_1 = 0$, то $\vec{\Omega} = 0$. Отсюда следует еще один вывод: *если завихренность жидкости равна нулю, то завихренность твердого тела тоже непременно равна нулю.*

При отсутствии взвешенных магнитных частиц $N = 0$, и намагниченность тоже равна нулю; таким образом, уравнение (7) превращается в тождество, а уравнение (5) сводится к

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{D\vec{\Omega}_1}{Dt} = -\frac{\varepsilon\nu}{k_1} \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{\Omega}_1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) (\vec{\Omega}_1 \cdot \nabla) \vec{q}.$$

Это уравнение является уравнением переноса завихренности в пористой среде. Последнее слагаемое в правой части данного уравнения представляет собой скорость, с которой изменяется завихренность $\vec{\Omega}_1$ для данной частицы, если вихревые линии движутся вместе с жидкостью (при этом интенсивности вихрей остаются постоянными), и скорость изменения завихренности для данной частицы, обусловленного временем релаксации напряжения. Первое слагаемое в правой части определяет скорость диссипации завихренности вследствие трения (сопротивления) и скорость изменения завихренности, обусловленного временем запаздывания деформации.

4. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Здесь мы рассмотрим двумерный случай. Пусть $\vec{q}_d = q_{dx}(x, y, t)\vec{i} + q_{dy}(x, y, t)\vec{j}$, $\vec{q} = q_x(x, y, t)\vec{i} + q_y(x, y, t)\vec{j}$, тогда $\vec{\Omega} = \Omega_z \hat{k}$, $\vec{\Omega}_1 = \Omega_{1z} \hat{k}$.

В двумерном случае уравнение (8) принимает вид

$$\frac{D\Omega_z}{Dt} = \frac{\mu_0\varepsilon}{mN} \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{K}{m} (\Omega_{1z} - \Omega_z), \quad (9)$$

аналогично уравнение (6) – вид

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{D\Omega_{1z}}{Dt} = -\frac{\varepsilon\nu}{k_1} \Omega_{1z} - \frac{\varepsilon\nu\lambda_0}{k_1} \frac{\partial}{\partial t} \Omega_{1z} + \frac{KN}{\rho} (\Omega_z - \Omega_{1z}) + \frac{KN\lambda}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} (\Omega_z - \Omega_{1z}), \quad (10)$$

поскольку, как легко проверить, $(\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{q}_d = 0$ и $(\vec{\Omega}_1 \cdot \nabla) \vec{q} = 0$.

Первое слагаемое в правой части уравнения (10) описывает изменение завихренности жидкости вследствие внутреннего трения (сопротивления), второе слагаемое

является скоростью изменения завихренности жидкости, обусловленного временем запаздывания деформации, третье слагаемое описывает изменение завихренности жидкости за счет обмена завихренностями между твердым телом и жидкостью, и, наконец, четвертое слагаемое является скоростью изменения завихренности жидкости за счет обмена завихренностями между твердым телом и жидкостью; это изменение обусловлено временем релаксации напряжения. Уравнение (10) не содержит явно член, представляющий изменение завихренности вследствие наличия градиента магнитного поля и/или градиента температуры, хотя уравнение (9) показывает, что завихренность твердого тела Ω_z зависит от этих факторов. Отсюда следует, что *градиенты температуры и магнитного поля оказывают косвенное влияние на завихренность жидкости.*

При отсутствии магнитных частиц $N = 0$ и намагниченность M тоже равна нулю; таким образом, уравнение (9) превращается в тождество, а уравнение (10) сводится к классическому уравнению переноса завихренности для жидкостей в пористой среде. Если вместо магнитной жидкости мы рассмотрим суспензию немагнитных частиц, то можно получить соответствующее уравнение для переноса завихренности, положив $M = 0$ в уравнениях, управляющих переносом завихренности в магнитных жидкостях. Если намагниченность M магнитных частиц не зависит от температуры, то первые слагаемые в уравнениях (7) и (9) исчезают, и тогда уравнения, управляющие переносом завихренности в магнитной жидкости в пористой среде, будут такими же, как уравнения, управляющие переносом завихренности в немагнитных суспензиях в пористой среде.

Если температурный градиент $\nabla T = 0$, или если градиент магнитного поля $\nabla H = 0$, или если ∇T параллельно ∇H , то первые члены уравнений (7) и (9) также исчезают. Таким образом, мы видим, что в этом случае перенос завихренности в магнитной жидкости в пористой среде является таким же, как перенос завихренности в немагнитной суспензии в пористой среде.

Благодарности. Авторы благодарны рецензенту за его полезные замечания и ценные предложения, которые привели к значительному улучшению этой статьи.

Список литературы

- [1] P. G. Saffman, *J. Fluid Mech.*, **13** (1962), 120–128.
- [2] D. K. Wagh, “A Mathematical model of magnetic fluid considered as two-phase system”, *Proc. Int. Symp. on Magnetic Fluids* (REC Kurukshetra, India, September 21–23, 1991), 182.
- [3] D. K. Wagh, A. Jawandhia, *Indian J. Pure Appl. Phys.*, **34**:5 (1996), 338–340.
- [4] Y. Yan, J. Koplik, *Phys. Fluids*, **21**:1 (2009), 013301, 9 pp.
- [5] C. M. Vest, V. S. Arpaci, *J. Fluid Mech.*, **36** (1969), 613–623.
- [6] P. K. Bhatia, J. M. Steiner, *Z. Angew. Math. Mech.*, **52**:6 (1972), 321–327.
- [7] B. A. Toms, D. J. Strawbridge, *Trans. Faraday Soc.*, **49** (1953), 1225–1232.
- [8] J. G. Oldroyd, *Proc. Roy. Soc. A*, **245**:1241 (1958), 278–297.
- [9] R. C. Sharma, *Acta Physica Hung.*, **40**:1 (1976), 11–17.
- [10] I. A. Eltayeb, *Z. Angew. Math. Mech.*, **55**:10 (1975), 599–604.

- [11] O. M. Phillips, *Flow and Reactions in Permeable Rocks*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [12] D. B. Ingham, I. Pop (eds.), *Transport Phenomena in Porous Media*, Pergamon Press, Oxford, 1998.
- [13] D. A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Medium*, Springer, New York, 1999.
- [14] E. R. Lapwood, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **44**:4 (1948), 508–521.
- [15] R. A. Wooding, *J. Fluid Mech.*, **9** (1960), 183–192.
- [16] R. C. Sharma, P. Kumar, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **24**:9 (1993), 563–569.
- [17] R. C. Sharma, P. Kumar, *Engrg. Trans.*, **44**:1 (1996), 99–111.
- [18] P. Kumar, *Z. Naturforsch.*, **51a** (1996), 17–22.
- [19] P. Kumar, H. Mohan, G. J. Singh, *Transp. Porous Media*, **56**:2 (2004), 199–208.
- [20] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, Dover, New York, 1997.

Поступила в редакцию 30.03.2010