Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Пин Чэнь, Шунь-Лун Ло, Часы и информация Фишера,
ТМФ, 2010, том 165, номер 2, 370–384

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:40:31

© 2010 г.

Пин Чэнь*, Шунь-Лун Ло†

ЧАСЫ И ИНФОРМАЦИЯ ФИШЕРА

Всякое параметрическое семейство квантовых состояний можно рассматривать в широком смысле как квантовые часы. Время, являющееся параметром, закодировано в соответствующих квантовых состояниях. Качество таких часов зависит от того, насколько точно можно различать состояния или, что эквивалентно, оценивать параметр. В силу квантового неравенства Крамера–Рао качество квантовых часов можно охарактеризовать, используя квантовую информацию Фишера. Рассмотрен вопрос синхронизации квантовых часов в терминах квантовой информации Фишера и продемонстрированы фундаментальные отличия от классической парадигмы. Ключевым моментом является супераддитивность информации Фишера, которая всегда выполняется в классическом случае, но может нарушаться в квантово-механическом. Нарушение может происходить как для чистых, так и для смешанных состояний. Тем не менее установлена супераддитивность квантовой информации Фишера для любого квантово-классического состояния. Кроме того, получен альтернативный вид супераддитивности и предложена слабая форма супераддитивности. Нарушение супераддитивности может быть использовано для усиления синхронизации квантовых часов.

Ключевые слова: информация Фишера, квантовая оценка, супераддитивность, квантово-классическое состояние, синхронизация часов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В абстрактном идеальном сценарии время представляется как число. В реальном мире время всегда закодировано в физических системах, и любое развитие системы с нетривиальной динамикой можно рассматривать в широком смысле как часы [1]. Для того чтобы считывать значения времени, нужно проводить измерения и оценки параметра, кодирующего время. Насколько точно можно оценить параметр, зависит от различимости рассматриваемых состояний, и эта различимость характеризует качество часов.

В классической физике состояние в общем случае описывается распределением вероятности, и параметрическое семейство состояний $\{p_\theta: \theta \in \mathbb{R}^k\}$ (k – натуральное число) можно рассматривать как классические часы, в которых время $t = \hat{t}(\theta)$

*Department of Economics, University of Melbourne, Melbourne, Australia

†Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, P. R. China. E-mail: luosl@amt.ac.cn

закодировано в p_θ . Можно лишь наблюдать некоторые случайные переменные (образцы), распределенные в соответствии с p_θ , причем требуется оценивать параметр θ из образцов, после чего вывод о значении времени делается с помощью некоторой функции $\hat{t}(\theta)$. Таким образом, выделение временной информации является в своей основе задачей оценки параметра. В данном контексте информация Фишера для p_θ играет основную роль в установлении фундаментальных пределов точности оценки в силу ограничений Крамера–Рао [2]–[5]. Напомним, что информационная матрица Фишера параметрической плотности вероятности $p_\theta(x)$, заданной на $\mathbb{R}^n$, с параметром $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k$ определяется как [4], [5]

$$\mathbf{I}_F(p_\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} l_\theta^T(x) l_\theta(x) p_\theta(x) dx$$

при условии, что интегралы существуют. Здесь вектор

$$l_\theta = \left(\frac{\partial \ln p_\theta}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \ln p_\theta}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial \ln p_\theta}{\partial \theta_k} \right)$$

представляет собой логарифмическую производную функции p_θ , а индекс Т обозначает транспонирование. След приведенной выше информационной матрицы Фишера мы будем называть информацией Фишера для p_θ ; она равна

$$I_F(p_\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} l_\theta(x) l_\theta^T(x) p_\theta(x) dx. \quad (1)$$

В частности, если $k = n$, а $p_\theta(x) = p(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta_2, \dots, x_n + \theta_n)$ представляет собой сдвиговое семейство, порожденное $p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то вследствие трансляционной инвариантности интеграла Лебега информация Фишера $I_F(p_\theta)$ не зависит от параметра θ и равна

$$I_F(p) = \int_{\mathbb{R}^n} l(x) l^T(x) p(x) dx, \quad (2)$$

где

$$l(x) = \left(\frac{\partial \ln p(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial \ln p(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \ln p(x)}{\partial x_n} \right).$$

Далее, если мы говорим о часах, определенных с помощью одной плотности вероятности p , то мы всегда имеем в виду, что часы определены с помощью сдвигового семейства плотностей вероятности $p_\theta(x) = p(x_1 + \theta_1, x_2 + \theta_2, \dots, x_n + \theta_n)$, а их качество характеризуется информацией Фишера $I_F(p)$.

Следует заметить, что, хотя физическое время одномерно, мы начинаем наше рассмотрение классической задачи оценивания временного параметра с наиболее общего случая с абстрактным многомерным параметром. Для такого подхода имеются три причины: во-первых, многопараметрический случай представляет интерес сам по себе и при этом тривиально редуцируется к однопараметрическому случаю, когда различные компоненты параметра полагаются равными друг другу. Во-вторых, супераддитивность классической информации Фишера удобнее определять в контексте многопараметрических случаев. В-третьих, если в классическом случае несколько наблюдателей оценивают время одновременно, то они часто используют различные механизмы оценки с различной точностью, и тогда более точная оценка времени

может быть получена путем синтеза различных оценок с помощью статистического метода (т.е. путем построения временной функции $t = \hat{t}(\theta)$ из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$). Поэтому многопараметрический случай необходим и полезен при исследовании наиболее общего сценария синхронизации времени, когда у двух наблюдателей механизмы оценки времени различны, а синхронизация должна в некотором смысле порождать единый и наилучший механизм оценки времени для обоих наблюдателей.

Теперь рассмотрим совместную плотность вероятности $p(x, y)$ на $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^l$ и маргинальные плотности

$$p_a(x) = \int_{\mathbb{R}^l} p(x, y) dy, \quad p_b(y) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x, y) dx.$$

Тогда имеются трое классических часов: совместные часы, определенные с помощью $p(x, y)$, и двое маргинальных часов, определенных с помощью $p_a(x)$ и $p_b(y)$. Возникает естественный вопрос: каковы соотношения между этими тремя часами? Интуитивная догадка состоит в том, что должна иметь место супераддитивность:

$$I_F(p) \geq I_F(p_a) + I_F(p_b).$$

Статистический смысл супераддитивности заключается в том, что, когда составная система разделена на две компоненты, корреляции между ними теряются, и, таким образом, объем информации Фишера убывает. Следствия для синхронизации классических часов очевидны: если классические часы распределены между двумя частями, то общее качество двух маргинальных часов, вообще говоря, уменьшится по сравнению с исходными совместными часами. Мы покажем, что, хотя это интуитивное и наивное свойство выполнено для классических систем, оно не выполняется для квантовых систем общего положения. Цель настоящей работы заключается в исследовании супераддитивности важного варианта квантовой информации Фишера и установлении следствия из нее для синхронизации квантовых часов.

Прежде чем рассматривать квантовые случаи, напомним некоторые фундаментальные свойства информации Фишера, которые понадобятся в нашем исследовании соответствующих квантовых расширений.

1. Информация Фишера является выпуклой [6]:

$$I_F(\alpha p_a + \beta p_b) \leq \alpha I_F(p_a) + \beta I_F(p_b), \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

Здесь p_a и p_b – две плотности вероятности в одном и том же пространстве.

2. Информация Фишера является аддитивной:

$$I_F(p_a \otimes p_b) = I_F(p_a) + I_F(p_b).$$

Здесь p_a и p_b – две плотности вероятности, а $(p_a \otimes p_b)(x, y) = p_a(x)p_b(y)$ – произведение плотностей в случае независимости распределений (тензорное произведение).

3. Информация Фишера $I_F(p)$ является супераддитивной в том смысле, что [7], [8]

$$I_F(p) \geq I_F(p_a) + I_F(p_b). \quad (3)$$

Здесь p – совместная плотность вероятности с маргинальными плотностями p_a и p_b .

Примечательно, что супераддитивность информации Фишера была открыта Карленом лишь в 1991 г. [7], хотя само понятие информации было введено Фишером еще в 1925 г. [2] и активно исследовалось и использовалось в литературе по статистике. Карлен даже подумывал о том, нельзя ли каким-то образом использовать супераддитивность в статистике. Его доказательство является чисто аналитическим и обнаруживает глубокую связь со знаменитым логарифмическим неравенством Соболева [7]. Позже в работе [8] было дано интуитивное информационное доказательство супераддитивности и прояснен его статистический смысл.

Рассмотрим теперь квантовый аналог описанной выше парадигмы. В квантовой механике состояния представляются операторами плотности, а параметрическое семейство операторов плотности $\{\rho_t\}$ можно рассматривать как квантовые часы, где время t закодировано в состоянии ρ_t . Чтобы извлечь информацию о времени, следует оценить t . Это представляет собой не что иное, как задачу оценки параметра в квантовом контексте. Многочисленные варианты квантовой информации Фишера были разработаны с целью установить фундаментальные пределы точности квантовых оценок [9]–[19]. Среди них выделяется квантовая информация Фишера [9], [10]

$$I(\rho_t) = \text{tr } \rho_t L_t^2,$$

где симметричная логарифмическая производная L_t определяется как

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t = \frac{\rho_t L_t + L_t \rho_t}{2}.$$

Симметричная логарифмическая производная L_t появляется по аналогии с классической логарифмической производной l_θ , как легко видеть из выражения

$$\nabla_\theta p_\theta = l_\theta p_\theta = \frac{p_\theta l_\theta + l_\theta p_\theta}{2},$$

где ∇_θ обозначает градиент по θ . Симметризация вводится для учета некоммутативности операторов ρ_t и L_t . Соответственно $I(\rho_t)$ является прямым и формальным квантовым обобщением классической информации Фишера $I_F(p_\theta)$, определяемой равенством (1). В частности, если $\rho_t = e^{-itH} \rho e^{itH}$, что в действительности получается из уравнения Ландау–фон Неймана

$$i \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [H, \rho_t], \quad \rho_0 = \rho,$$

где $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор, то $I(\rho_t)$ не зависит от параметра t и оказывается равной

$$I(\rho, H) = \text{tr } \rho L^2, \quad (4)$$

что представляет собой прямой квантовый аналог равенства (2). Здесь симметричная логарифмическая производная L определяется из соотношения

$$i[\rho, H] = \frac{\rho L + L \rho}{2}. \quad (5)$$

В данном случае мы обозначили квантовые часы $\{\rho_t\}$ как (ρ, H) . Их мы и будем в основном изучать.

Для квантовых часов (ρ, H) время закодировано в эволюционирующих состояниях $\rho_t = e^{-itH}\rho e^{itH}$. Мы хотим получить информацию о времени из квантовых измерений. Пусть M – любая несмещенная оценка параметра t , т.е. M является наблюдаемой, спектральное разрешение которой составляет измерение, удовлетворяющее несмещенному условию $\text{tr } \rho_t M = t$. Пусть $V(\rho_t, M) = \text{tr } \rho_t M^2 - (\text{tr } \rho_t M)^2$ – дисперсия. Тогда квантовое неравенство Крамера–Рао [9], [10] гласит, что

$$V(\rho_t, M) \geq \frac{1}{I(\rho, H)}.$$

Следовательно, точно так же, как и в классическом случае, квантовая информация Фишера действительно описывает внутренне присущее свойство, касающееся качества квантовых часов [1]. Нас будет интересовать соответствующая супераддитивность для квантовой информации Фишера $I(\rho, H)$. Мы покажем, что в отличие от классической парадигмы, где супераддитивность всегда имеет место, квантовая парадигма является более деликатным случаем. Нарушение супераддитивности в квантовых случаях указывает на возможность квантового улучшения синхронизации часов.

Настоящая работа построена следующим образом. В разделе 2 мы устанавливаем супераддитивность для определенного класса квантовых состояний – так называемых квантово-классических состояний. Квантово-классическое состояние есть, грубо говоря, состояние из двух частей, которое является классическим в одной своей части и квантовым в другой. Мы также приводим альтернативный вид супераддитивности. В разделе 3 мы приводим два контрпримера супераддитивности квантовой информации Фишера, один соответствует чистым, а другой – смешанным состояниям. В разделе 4 мы предлагаем слабую форму супераддитивности. В разделе 5 мы кратко иллюстрируем следствия из супераддитивности, важные с точки зрения синхронизации квантовых часов. Завершающий раздел 6 посвящен выводам и обсуждению.

2. СУПЕРАДДИТИВНОСТЬ КВАНТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ ФИШЕРА

В данном разделе мы докажем супераддитивность квантовой информации Фишера для квантово-классических состояний. Сначала приведем некоторые леммы, необходимые для дальнейших рассуждений.

ЛЕММА 1. Если $\rho = \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ – спектральное разложение состояния ρ , то

$$I(\rho, H) = 2 \sum_{j,k} \frac{(\lambda_j - \lambda_k)^2}{\lambda_j + \lambda_k} |\langle\psi_j|H|\psi_k\rangle|^2.$$

Если состояние ρ вырожденно, то добавляем дополнительные нулевые собственные значения, чтобы набор $\{|\psi_j\rangle\}$ был полным и, таким образом, определял ортонормированный базис, при этом мы полагаем $(\lambda_j - \lambda_k)^2/(\lambda_j + \lambda_k) = 0$, если $\lambda_j + \lambda_k = 0$. В частности, если ρ – чистое состояние, то $I(\rho, H) = 4V(\rho, H)$, где $V(\rho, H) = \text{tr } \rho H^2 - (\text{tr } \rho H)^2$ – обычная дисперсия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы хорошо известно [11]. Здесь мы предлагаем простое доказательство для полноты изложения, а также для того, чтобы дать представление об аналогичных последующих вычислениях.

Из (5) имеем

$$\langle \psi_j | i[\rho, H] | \psi_k \rangle = \frac{\langle \psi_j | \rho L + L \rho | \psi_k \rangle}{2},$$

откуда следует, что

$$i(\lambda_j - \lambda_k) \langle \psi_j | H | \psi_k \rangle = \frac{1}{2}(\lambda_j + \lambda_k) \langle \psi_j | L | \psi_k \rangle.$$

Поэтому

$$\langle \psi_j | L | \psi_k \rangle = \frac{2i(\lambda_j - \lambda_k)}{\lambda_j + \lambda_k} \langle \psi_j | H | \psi_k \rangle.$$

Теперь в силу определяющего равенства (4) и с учетом того, что $\sum_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \mathbf{1}$ (здесь $\mathbf{1}$ – единичный оператор), имеем

$$\begin{aligned} I(\rho, H) &= \sum_j \langle \psi_j | \rho L^2 | \psi_j \rangle = \sum_j \lambda_j \langle \psi_j | L^2 | \psi_j \rangle = \sum_{j,k} \lambda_j \langle \psi_j | L | \psi_k \rangle \langle \psi_k | L | \psi_j \rangle = \\ &= 4 \sum_{j,k} \lambda_j \frac{(\lambda_j - \lambda_k)^2}{(\lambda_j + \lambda_k)^2} |\langle \psi_j | H | \psi_k \rangle|^2 = 2 \sum_{j,k} \frac{(\lambda_j - \lambda_k)^2}{\lambda_j + \lambda_k} |\langle \psi_j | H | \psi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

ЛЕММА 2. *Квантовая информация Фишера $I(\rho, H)$ выпукла по ρ , т.е.*

$$I\left(\sum_j \lambda_j \rho_j, H\right) \leq \sum_j \lambda_j I(\rho_j, H),$$

где $\{\lambda_j\}$ – некоторое распределение вероятностей, а ρ_j – операторы плотности.

Этот результат также хорошо известен, поскольку $I(\rho, H)$ представляет собой пример метрически подправленной косо́й информации (см., например, работу [19]).

Теперь пусть ρ – состояние, состоящее из двух частей, относящихся к системам a и b , с соответствующими маргинальными состояниями $\rho_a = \text{tr}_b \rho$ и $\rho_b = \text{tr}_a \rho$ (частичный след). Пусть H_a и H_b – наблюдаемые для a и b . В данном контексте тогда имеются трое естественных квантовых часов: комбинированные часы $(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b)$, а также часы (ρ_a, H_a) и (ρ_b, H_b) для двух частей в отдельности. Естественно задать вопрос: каковы соотношения между этими тремя часами? Мы имеем свойство аддитивности

$$I(\rho_a \otimes \rho_b, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b) = I(\rho_a, H_a) + I(\rho_b, H_b),$$

что вызывает определенное удовлетворение.

Далее, на основании аналогии с классическим случаем и наивной интуиции естественно задать вопрос, выполнено ли неравенство

$$I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b) \geq I(\rho_a, H_a) + I(\rho_b, H_b), \quad (6)$$

которое представляет собой прямой формальный квантовый аналог классического неравенства супераддитивности (3). Суть неравенства (6) заключается в так называемой супераддитивности квантовой информации Фишера. Правдоподобное объяснение этого неравенства состоит в том, что, когда комбинированная система разделена на две подсистемы, корреляции между ними пропадают и, таким образом, объем квантовой информации Фишера уменьшается. К сожалению, эта супераддитивность, вообще говоря, не выполнена. Мы приведем некоторые контрпримеры в следующем разделе, а здесь определим супераддитивность для широкого класса квантовых состояний, а затем получим альтернативный вид супераддитивности.

Состоящее из двух частей квантовое состояние, разделенное между частями a и b , называется квантово-классическим, если его можно представить как

$$\rho = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j| \otimes \rho_j, \quad (7)$$

где $\{\lambda_j\}$ – распределение вероятностей, $\{|j\rangle\}$ – ортонормированный базис для части a , а ρ_j – операторы плотности для части b .

ТЕОРЕМА 1. *Если ρ – квантово-классическое состояние, то выполнено неравенство супераддитивности (6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что состояние ρ имеет вид (7). Пусть спектральное разложение состояния ρ_j есть

$$\rho_j = \sum_k \lambda_{jk} |\psi_{jk}\rangle\langle\psi_{jk}|,$$

тогда спектральное разложение состояния ρ имеет вид

$$\rho = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_{jk} |j\rangle\langle j| \otimes |\psi_{jk}\rangle\langle\psi_{jk}|.$$

Положим $H = H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b$. Согласно лемме 1 можно разложить $I(\rho, H)$ как

$$I(\rho, H) = 2 \sum_{j,k,j',k'} \frac{(\lambda_j \lambda_{jk} - \lambda_{j'} \lambda_{j'k'})^2}{\lambda_j \lambda_{jk} + \lambda_{j'} \lambda_{j'k'}} |\langle j \otimes \psi_{jk} | H | j' \otimes \psi_{j'k'} \rangle|^2 = A + B + C,$$

где

$$A = 2 \sum_{j,k,j',k'} \frac{(\lambda_j \lambda_{jk} - \lambda_{j'} \lambda_{j'k'})^2}{\lambda_j \lambda_{jk} + \lambda_{j'} \lambda_{j'k'}} |\langle j | H_a | j' \rangle|^2 \cdot |\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2, \quad (8)$$

$$B = 2 \sum_{j,k,j',k'} \frac{(\lambda_j \lambda_{jk} - \lambda_{j'} \lambda_{j'k'})^2}{\lambda_j \lambda_{jk} + \lambda_{j'} \lambda_{j'k'}} |\langle j | j' \rangle|^2 \cdot |\langle \psi_{jk} | H_b | \psi_{j'k'} \rangle|^2, \quad (9)$$

$$C = 4 \sum_{j,k,j',k'} \frac{(\lambda_j \lambda_{jk} - \lambda_{j'} \lambda_{j'k'})^2}{\lambda_j \lambda_{jk} + \lambda_{j'} \lambda_{j'k'}} \times \\ \times \operatorname{Re} (\langle j | H_a | j' \rangle \cdot \langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle \cdot \langle j | j' \rangle \cdot \langle \psi_{jk} | H_b | \psi_{j'k'} \rangle). \quad (10)$$

Сначала заметим, что $C = 0$, поскольку $\langle j|j' \rangle = 0$ при $j \neq j'$, тогда как при $j = j'$ имеем $\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle = 0$ для $k \neq k'$. При $j = j'$, $k = k'$ имеем $\lambda_j \lambda_{jk} - \lambda_{j'} \lambda_{j'k'} = 0$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$A \geq I(\rho_a, H_a), \quad B \geq I(\rho_b, H_b).$$

Поскольку для любого фиксированного j набор $\{|\psi_{jk}\rangle\}$ есть ортонормированный базис, согласно равенству Парсеваля для любых j, j' и k'

$$\sum_k |\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2 = \langle \psi_{j'k'} | \psi_{j'k'} \rangle = 1 \quad (11)$$

и аналогично для любых фиксированных j, j' и k

$$\sum_{k'} |\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2 = \langle \psi_{jk} | \psi_{jk} \rangle = 1. \quad (12)$$

Следовательно, для любых фиксированных j, j'

$$\sum_{k,k'} |\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2 = d,$$

где d – размерность гильбертова пространства системы для части b . Тем самым для любых фиксированных j и j' набор $d^{-1} |\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2$ образует распределение вероятностей (по индексам k, k').

Согласно лемме 1 имеем

$$I(\rho_a, H_a) = 2 \sum_{j,j'} \frac{(\lambda_j - \lambda_{j'})^2}{\lambda_j + \lambda_{j'}} |\langle j | H_a | j' \rangle|^2.$$

С учетом определения (8) для доказательства неравенства $A \geq I(\rho_a, H_a)$ достаточно доказать, что

$$\sum_{k,k'} \frac{(\lambda_j \lambda_{jk} - \lambda_{j'} \lambda_{j'k'})^2}{\lambda_j \lambda_{jk} + \lambda_{j'} \lambda_{j'k'}} |\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2 \geq \frac{(\lambda_j - \lambda_{j'})^2}{\lambda_j + \lambda_{j'}}. \quad (13)$$

Согласно неравенству Коши–Шварца

$$\begin{aligned} & \sum_{k,k'} \frac{(\lambda_j \lambda_{jk} - \lambda_{j'} \lambda_{j'k'})^2}{\lambda_j \lambda_{jk} + \lambda_{j'} \lambda_{j'k'}} \frac{|\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2}{d} \cdot \sum_{k,k'} (\lambda_j \lambda_{jk} + \lambda_{j'} \lambda_{j'k'}) \frac{|\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2}{d} \geq \\ & \geq \left(\sum_{k,k'} (\lambda_j \lambda_{jk} - \lambda_{j'} \lambda_{j'k'}) \frac{|\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2}{d} \right)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

С другой стороны, с учетом соотношений (11) и (12) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k,k'} (\lambda_j \lambda_{jk} \pm \lambda_{j'} \lambda_{j'k'}) \frac{|\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2}{d} = \\ & = \frac{1}{d} \left(\lambda_j \sum_k \lambda_{jk} \sum_{k'} |\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2 \pm \lambda_{j'} \sum_{k'} \lambda_{j'k'} \sum_k |\langle \psi_{jk} | \psi_{j'k'} \rangle|^2 \right) = \\ & = \frac{1}{d} \left(\lambda_j \sum_k \lambda_{jk} \pm \lambda_{j'} \sum_{k'} \lambda_{j'k'} \right) = \frac{\lambda_j \pm \lambda_{j'}}{d}. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в неравенство (14), получаем неравенство (13). Таким образом, мы доказали, что $A \geq I(\rho_a, H_a)$.

Теперь перейдем к доказательству неравенства $B \geq I(\rho_b, H_b)$. Согласно уравнению (9) с учетом $\langle j|j' \rangle = \delta_{jj'}$ имеем

$$\begin{aligned} B &= 2 \sum_{j;k,k'} \frac{\lambda_j^2 (\lambda_{jk} - \lambda_{jk'})^2}{\lambda_j (\lambda_{jk} + \lambda_{jk'})} |\langle \psi_{jk} | H_b | \psi_{jk'} \rangle|^2 = \\ &= 2 \sum_j \lambda_j \sum_{k,k'} \frac{(\lambda_{jk} - \lambda_{jk'})^2}{\lambda_{jk} + \lambda_{jk'}} |\langle \psi_{jk} | H_b | \psi_{jk'} \rangle|^2 = \\ &= \sum_j \lambda_j I(\rho_j, H_b) \geq I\left(\sum_j \lambda_j \rho_j, H_b\right) = I(\rho_b, H_b), \end{aligned}$$

где неравенство имеет место в силу леммы 2. Доказательство завершено.

Заметим, что правая часть неравенства супераддитивности (6) инвариантна относительно замены H_b на $-H_b$. При такой смене знака неравенство (6) перейдет в неравенство

$$I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes H_b) \geq I(\rho_a, H_a) + I(\rho_b, H_b).$$

Хотя ни это неравенство, ни неравенство (6) в общем случае не выполняются, при фиксированных ρ, H_a и H_b выполняется по крайней мере одно из них, как это следует из приведенного ниже утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливо неравенство*

$$I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b) + I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes H_b) \geq 2(I(\rho_a, H_a) + I(\rho_b, H_b)). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H_{\pm} = H_a \otimes \mathbf{1} \pm \mathbf{1} \otimes H_b$ и запишем равенство $I(\rho, H_{\pm}) = \text{tr } \rho L_{\pm}^2$, где $L_{\pm}$ определены формулой

$$i[\rho, H_{\pm}] = \frac{\rho L_{\pm} + L_{\pm} \rho}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} i[\rho, H_a \otimes \mathbf{1}] &= \frac{1}{2} \left(\rho \frac{L_+ + L_-}{2} + \frac{L_+ + L_-}{2} \rho \right), \\ i[\rho, \mathbf{1} \otimes H_b] &= \frac{1}{2} \left(\rho \frac{L_+ - L_-}{2} + \frac{L_+ - L_-}{2} \rho \right), \end{aligned}$$

откуда

$$I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1}) = \text{tr } \rho \left(\frac{L_+ + L_-}{2} \right)^2, \quad I(\rho, \mathbf{1} \otimes H_b) = \text{tr } \rho \left(\frac{L_+ - L_-}{2} \right)^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1}) + I(\rho, \mathbf{1} \otimes H_b) &= \frac{1}{2} (\text{tr } \rho L_+^2 + \text{tr } \rho L_-^2) = \\ &= \frac{1}{2} (I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b) + I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes H_b)). \end{aligned} \quad (16)$$

С другой стороны, пользуясь тем же приемом, что и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что

$$I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1}) \geq I(\rho_a, H_a), \quad I(\rho, \mathbf{1} \otimes H_b) \geq I(\rho_b, H_b). \quad (17)$$

Наконец, искомое неравенство (15) следует из неравенств (16) и (17).

3. НАРУШЕНИЕ СУПЕРАДДИТИВНОСТИ

В данном разделе мы покажем на двух примерах, что супераддитивность (6) может нарушаться для некоторых чистых, а также некоторых смешанных состояний. На нарушение супераддитивности впервые было неявно указано в работе [1] (см. неравенство $F(\rho_1, H_1) + F(\rho_2, H_2) > F(\rho, H)$ в этой работе), однако, насколько нам известно, явных контрпримеров этого в литературе нет.

ПРИМЕР 1. Пусть $n \geq 2$ и

$$\rho = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда спектральное разложение состояния ρ можно записать как

$$\rho = \sum_j \lambda_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|,$$

где $\lambda_1 = (n-2)/n$, $\lambda_2 = 2/n$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ и

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_4\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно получить, что

$$H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | H | \psi_2 \rangle &= \sqrt{2}, & \langle \psi_1 | H | \psi_3 \rangle &= 0, & \langle \psi_1 | H | \psi_4 \rangle &= 0, \\ \langle \psi_2 | H | \psi_3 \rangle &= 0, & \langle \psi_2 | H | \psi_4 \rangle &= \sqrt{2}, & \langle \psi_3 | H | \psi_4 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому согласно лемме 1

$$I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b) = 8 \left(\left(\frac{n-4}{n} \right)^2 + \frac{2}{n} \right).$$

С другой стороны, имеем

$$\rho_a = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_b = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя лемму 2, нетрудно вычислить, что

$$I(\rho_a, H_a) = I(\rho_b, H_b) = 4 \left(\frac{n-2}{n} \right)^2.$$

Теперь несложно видеть, что при $n > 6$

$$I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b) < I(\rho_a, H_a) + I(\rho_b, H_b).$$

Таким образом, супераддитивность (6) может нарушаться для некоторых смешанных состояний.

ПРИМЕР 2. Пусть $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ – состоящее из двух частей чистое состояние с разложением Шмидта

$$|\psi\rangle = \sum_j \sqrt{\lambda_j} |a_j\rangle \otimes |b_j\rangle,$$

где $\{\lambda_j\}$ – распределение вероятностей, $\{|a_j\rangle\}$, $\{|b_j\rangle\}$ – ортонормированные базисы для частей a и b , из которых состоит система. Тогда

$$\rho_a = \sum_j \lambda_j |a_j\rangle\langle a_j|, \quad \rho_b = \sum_j \lambda_j |b_j\rangle\langle b_j|.$$

Пусть

$$H_a = \sum_{j \neq k} |a_j\rangle\langle a_k|, \quad H_b = - \sum_{j \neq k} |b_j\rangle\langle b_k|.$$

Положим $H = H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b$. Тогда с учетом леммы 1 непосредственное вычисление дает

$$I(\rho_a, H_a) = 2 \sum_{j,k} \frac{(\lambda_j - \lambda_k)^2}{\lambda_j + \lambda_k}, \quad I(\rho_b, H_b) = 2 \sum_{j,k} \frac{(\lambda_j - \lambda_k)^2}{\lambda_j + \lambda_k},$$

$$I(\rho, H) = 4V(\rho, H) = 4 \sum_{j,k} (\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_k})^2.$$

Следовательно,

$$I(\rho, H) - I(\rho_a, H_a) - I(\rho_b, H_b) = -8 \sum_{j,k} \frac{\sqrt{\lambda_j \lambda_k} (\sqrt{\lambda_j} - \sqrt{\lambda_k})^2}{\lambda_j + \lambda_k} < 0,$$

если существуют два различных ненулевых λ_j . Поэтому супераддитивность (6) нарушается также для некоторых чистых состояний.

4. СЛАБАЯ СУПЕРАДДИТИВНОСТЬ

Хотя неравенство супераддитивности (6) в общем случае не выполняется, вследствие монотонности квантовой информации Фишера [12], [19], [20] мы имеем

$$I(\rho, H) \geq I(\rho_a, H_a), \quad I(\rho, H) \geq I(\rho_b, H_b), \quad (18)$$

откуда получаем следующую слабую форму супераддитивности:

$$I(\rho, H) \geq \frac{1}{2}(I(\rho_a, H_a) + I(\rho_b, H_b)), \quad H = H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b.$$

Сравнивая неравенства (17) и (18), мы можем задаться естественным вопросом, выполнено ли неравенство

$$I(\rho, H) \geq I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1}). \quad (19)$$

В следующем примере мы покажем, что данное неравенство в общем случае не выполняется.

ПРИМЕР 3. Пусть ρ и H_a те же, что в примере 1, а $H_b = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$H = H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b = \begin{pmatrix} 0 & x & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & x & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | H | \psi_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x+1), & \langle \psi_1 | H | \psi_3 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1), & \langle \psi_1 | H | \psi_4 \rangle &= 0, \\ \langle \psi_2 | H | \psi_3 \rangle &= 0, & \langle \psi_2 | H | \psi_4 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x+1), & \langle \psi_3 | H | \psi_4 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-x). \end{aligned}$$

Поэтому согласно лемме 1 получаем

$$I(\rho, H) = 2 \left(\left(\frac{n-4}{n} \right)^2 (x+1)^2 + \frac{n-2}{n} (x-1)^2 + \frac{2}{n} (x+1)^2 \right).$$

Полагая $x = 0$, нетрудно вывести равенство

$$I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1}) = 2 \left(\left(\frac{n-4}{n} \right)^2 + 1 \right).$$

Следовательно,

$$I(\rho, H) - I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1}) = 4x \frac{(n-2)^2 + 4}{n^2} \left(x - \frac{4(n-4)}{(n-2)^2 + 4} \right),$$

и мы можем заметить следующее:

если $2 < n < 4$, то

$$I(\rho, H) \geq I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1}) \quad \text{для любого } x \leq \frac{4(n-4)}{(n-2)^2+4} \quad \text{или } x \geq 0,$$

$$I(\rho, H) < I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1}) \quad \text{при } \frac{4(n-4)}{(n-2)^2+4} < x < 0;$$

если $n > 4$, то

$$I(\rho, H) \geq I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1}) \quad \text{для любого } x \leq 0 \quad \text{или } x \geq \frac{4(n-4)}{(n-2)^2+4},$$

$$I(\rho, H) < I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1}) \quad \text{при } 0 < x < \frac{4(n-4)}{(n-2)^2+4}.$$

Таким образом, мы видим, что контрпримеры неравенства (19) имеются в изобилии.

5. СЛЕДСТВИЯ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К СИНХРОНИЗАЦИИ ЧАСОВ

Следуя работе [1], предположим, что мы имеем исходные часы (σ, K) и используем их для того, чтобы создать часы $(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b)$, разделенные между двумя частями a и b так, что $I(\sigma, K) \geq I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b)$. Спрашивается, возможно ли, чтобы качество часов (ρ_a, H_a) и (ρ_b, H_b) , являющихся компонентами, было более высоким (имело бóльшую квантовую информацию Фишера), т.е. может ли так случиться, чтобы выполнялось неравенство

$$I(\rho_a, H_a) + I(\rho_b, H_b) > I(\rho, H).$$

Из наших предыдущих доказательств следует, что, в то время как это невозможно в классической области, это возможно в квантовом мире! Такой сценарий распределения информации и времени между двумя частями является ключевой проблемой при синхронизации часов, а супераддитивность квантовой информации Фишера имеет, по-видимому, фундаментальное значение для этой проблемы. В частности, в работе [1] было введено квазиупорядочение для квантовых часов и доказано, что при конечной энергии в нетривиальных случаях никогда не может иметь место равенство

$$I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b) = I(\rho_a, H_a) = I(\rho_b, H_b),$$

которое означает копирование информации о времени. Этот результат естественным образом подсказывает, что в нетривиальном случае скорее всего никогда не может случиться так, что

$$2I(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b) = I(\rho_a, H_a) + I(\rho_b, H_b),$$

что согласуется со слабой формой супераддитивности.

Нарушение супераддитивности приводит к интересному свойству синхронизации квантовых часов: имеются часы $(\rho, H_a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_b)$, разделенные между двумя частями, качество которых ниже, чем суммарное качество двух часов-компонент, чего никогда не может случиться в классическом сценарии. Следовательно, неприятные математические усложнения, связанные с нарушением супераддитивности, могут оказаться ценным квантовым источником для усиления синхронизации квантовых часов.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Используя квантовую информацию Фишера, мы исследовали квантовые часы с информационной точки зрения. В частности, мы проанализировали свойство супераддитивности квантовой информации Фишера, определенной через симметричную логарифмическую производную, и получили как положительные, так и отрицательные результаты. Положительным результатом является то, что мы доказали супераддитивность для любого квантово-классического состояния и установили альтернативный вид супераддитивности. Отрицательный результат заключается в том, что мы проиллюстрировали нарушение супераддитивности в случае двух семейств квантовых состояний – чистых и смешанных. Мы также предложили слабую форму супераддитивности и кратко обсудили ее роль в синхронизации часов. Имеет смысл продолжить изучение этой связи и относящихся к ней вопросов, что может оказаться полезным для квантовой теории информации.

Мы рассмотрели лишь один конкретный вариант квантовой информации Фишера. Однако в отличие от классического сценария, в котором информация Фишера единственна, имеется бесконечное многообразие квантовых информационных Фишера [12], [18]. В основном это связано со свойством некоммутативности наблюдаемых и состояний в квантовой теории. Например, еще одним вариантом квантовой информации Фишера является косая информация или в более общем виде информация Вигнера–Януса–Дайсона

$$J_{\alpha}(\rho, H) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}[\rho^{\alpha}, H][\rho^{1-\alpha}, H], \quad \alpha \in (0, 1),$$

впервые введенная в работе [13] и подробно изучавшаяся в связи с разнообразными и интересными приложениями в квантовой теории информации [13]–[25]. В частности, супераддитивность для $J_{\alpha}(\rho, H)$ в течение продолжительного времени оставалась гипотезой, лишь недавно опровергнутой в работе [26]. Тем не менее в работе [27] отождествляются некоторые частные состояния, удовлетворяющие условию супераддитивности, а в работе [20] установлены некоторые слабые формы супераддитивности. Интересное различие между $J_{\alpha}(\rho, H)$ и $I(\rho, H)$ состоит в том, что первая всегда супераддитивна для чистых состояний [27], тогда как для второй это не так (см. пример 2 из раздела 3 настоящей статьи). Таким образом, эти два вида квантовой информации Фишера различны не только количественно, но и качественно. Желательно также исследовать супераддитивность и ее слабую форму для общих случаев квантовой информации Фишера.

Благодарности. Настоящая работа выполнена при поддержке NSFC (грант № 10771208), Science Fund for Creative Research Groups (грант № 10721101), а также Key Lab of Random Complex Structures and Data Science, CAS (грант № 2008DP173182).

Список литературы

- [1] D. Janzing, T. Beth, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **49**:1 (2003), 230–240, arXiv: quant-ph/0112138.
- [2] R. A. Fisher, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **22** (1925), 700–725.
- [3] C. R. Rao, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **37** (1945), 81–91.

- [4] H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton Math. Ser., **9**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.
- [5] T. M. Cover, J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley Ser. Telecommun., John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [6] P. J. Huber, *Robust Statistics*, Wiley Ser. Probab. Math. Stat., John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [7] E. A. Carlen, *J. Funct. Anal.*, **101**:1 (1991), 194–211.
- [8] A. Kagan, Z. Landsman, *Statist. Probab. Lett.*, **32**:2 (1997), 175–179.
- [9] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York, 1976.
- [10] А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, Наука, М., 1980.
- [11] S. L. Braunstein, C. M. Caves, *Phys. Rev. Lett.*, **72**:22 (1994), 3439–3443.
- [12] D. Petz, *Linear Algebra Appl.*, **244** (1996), 81–96.
- [13] E. P. Wigner, M. M. Yanase, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **49**:6 (1963), 910–918.
- [14] P. Gibilisco, T. Isola, *J. Math. Phys.*, **44**:9 (2003), 3752–3762, arXiv:math/0304170.
- [15] S. Luo, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132** (2004), 885–890.
- [16] S. Luo, Q. Zhang, *Phys. Rev. A*, **69**:3 (2004), 032106, 8 pp.
- [17] S. Luo, Q. Zhang, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **50**:8 (2004), 1778–1782; **51** (2005), 4432.
- [18] P. Chen, S. Luo, *Front. Math. China*, **2**:3 (2007), 359–381.
- [19] F. Hansen, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **105**:29 (2008), 9909–9916, arXiv:math-ph/0607049.
- [20] L. Cai, N. Li, S. Luo, *J. Phys. A*, **41**:13 (2008), 135301, 9 pp.
- [21] E. H. Lieb, *Adv. Math.*, **11**:3 (1973), 267–288.
- [22] E. H. Lieb, M. B. Ruskai, *Phys. Rev. Lett.*, **30**:10 (1973), 434–436.
- [23] A. Uhlmann, *Comm. Math. Phys.*, **54**:1 (1977), 21–32.
- [24] H. Kosaki, *Comm. Math. Phys.*, **87**:3 (1982), 315–329.
- [25] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [26] F. Hansen, *J. Stat. Phys.*, **126**:3 (2007), 643–648, arXiv:math-ph/0609019.
- [27] S. Luo, *J. Stat. Phys.*, **128**:5 (2007), 1177–1188.

Поступила в редакцию 3.02.2010,
после доработки 1.03.2010