Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. У. Браден, В. З. Энольский, Несколько замечаний о
конструкции монополей Эрколани–Синха, *ТМФ*, 2010,
том 165, номер 3, 389–425

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6585>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 05:27:03

© 2010 г.

Г. У. Браден*, В. З. Энольский^{†‡}

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О КОНСТРУКЦИИ МОНОПОЛЕЙ ЭРКОЛАНИ–СИНХА

Для $SU(2)$ -монополей развита конструкция Эрколани–Синха, определяющая калибровочно преобразованные данные Нама.

Ключевые слова: поля Янга–Миллса, неабелевы монополи, тета-функции, вполне интегрируемые уравнения, алгебраические кривые.

1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитные монополи, или решения типа топологических солитонов для калибровочных теорий Янга–Миллса–Хиггса в трех пространственных измерениях, продолжают привлекать внимание исследователей в течение более чем четверти века. В центре многочисленных исследований были, в частности, монополи Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (БПЗ) (см., например, современный обзор [1]). Эти монополи возникают в пределе, когда потенциалом Хиггса можно пренебречь, удовлетворяя при этом уравнению Богомольного первого порядка

$$B_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} F^{jk} = D_i \Phi,$$

дополненному определенными граничными условиями, согласованными с потенциалом Хиггса. Здесь F_{ij} – напряженность поля, ассоциированного с калибровочным полем A , Φ – поле Хиггса. Эти уравнения можно рассматривать как размерностную редукцию четырехмерных уравнений самодуальности, полагая все функции не зависящими от x_4 и отождествляя $\Phi = A_4$. Таким же образом, как твисторное преобразование Уорда связывает между собой инстантонные решения в пространстве $\mathbb{R}^4$ с определенными голоморфными векторными расслоениями над твисторным пространством $\mathbb{CP}^3$, Хитчин показал [2], что размерностная редукция, приводящая к монополям БПЗ, может быть осуществлена также и на уровне

*School of Mathematics, Edinburgh University, Edinburgh, UK. E-mail: hwb@ed.ac.uk

[†]Hanse-Wissenschaftskolleg (Institute for Advanced Study), Delmenhorst, Germany

[‡]Институт магнетизма НАН Украины, Киев, Украина. E-mail: vze@ma.hw.ac.uk

твисторов. Пространство мини-твисторов представляет собой двумерное комплексное многообразие, изоморфное $\mathbb{TP}^1$, а монополи БПЗ можно отождествить с некоторыми расслоениями над этим пространством. В частности, в этой конструкции возникает кривая $C \subset \mathbb{TP}^1$, отождествляемая со спектральной кривой, и при наложении некоторых условий регулярности Хитчину удалось доказать, что все возможные решения типа монополей могут быть получены с помощью этой конструкции [3]. В работе [4] Нам построил преобразование инстантонной конструкции Атьи–Дринфельда–Хитчина–Манина (АДХМ), позволяющее строить монополи БПЗ. Полученные Намом уравнения имеют лаксову форму, а соответствующая спектральная кривая снова оказывается кривой C . К настоящему времени получены разнообразные важные результаты, но, к сожалению, совсем немного известно о явных решениях. Настоящая работа как раз посвящена построению новых решений указанной задачи.

В замечательной работе Эрколани и Синха [5] методы интегрируемых систем были применены к построению решений уравнений Нама для калибровочной группы $SU(2)$. В течение довольно долгого периода структуры интегрируемых теорий ассоциировались с уравнениями самодуальности и монополями БПЗ; Эрколани и Синха показали, как можно решить (калибровочно преобразованные) уравнения Нама в терминах функции Бейкера–Ахиезера для кривой C . Формулы, полученные Эрколани и Синха, напоминают формулы Дубровина [6], полученные при решении уравнений Эйлера для вращения n -мерного твердого тела. Существенное отличие состоит в том, что на возможный вид кривой C в случае теории монополей налагаются определенные трансцендентные ограничения. Хотя сами по себе эти ограничения достаточно просты концептуально, но они приводят к тому, что конструкция Эрколани–Синха оказывается исключительно сложной в применении к конкретным случаям. Сами авторы заметили, что хотя их “процедура может быть в принципе применена в случае произвольного заряда монополя, тем не менее очевидные технические сложности возникают почти на каждом этапе” конструкции. При построении магнитных монополей с помощью методов интегрируемых систем встречаются трудности двух типов: связанные с построением кривой C и возникающие при реконструкции соответствующих решений. Ниже мы объясним подробнее, что на кривую C налагаются два типа трансцендентных условий. Одни из них обеспечивают тривиальность линейного расслоения над C , а условия второго типа должны гарантировать то, что вещественная прямая с базой в этой точке не должна в дальнейшем пересекаться с тета-дивизором. Мы не будем рассматривать эти ограничения в настоящей работе¹⁾; наше внимание здесь будет обращено на данные, необходимые для реконструкции решений уравнения Нама. В работе [10] был рассмотрен вопрос реконструкции данных монополей из соответствующего решения уравнений Нама.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем различные аспекты конструкций Хитчина, Нама, Эрколани и Синха, которые затем развиваются в разделе 3. Здесь мы приводим новые формулы и проясняем возникновение преобразований с постоянной калибровкой в конструкции Эрколани–Синха. Далее сделан

¹⁾ Настоящая работа представляет собой первую часть работы [7]; вышеприведенные ограничения рассматриваются во второй части указанной работы и опубликованы в дополнительной статье [8]. Эти идеи развиваются далее в работе [9].

упор на необходимые составляющие, делающие наше построение эффективным, и показано, как оно сводится к вычислению величин, характеризующих спектральной кривой. В качестве применения общей теории в разделе 4 рассмотрен случай монополя заряда два.

2. МОНОПОЛИ

В этом разделе мы приводим разнообразные свойства спектральной кривой, возникающей в конструкции Нама и Хитчина, а затем даем описание конструкции Эрколани–Синха для данной кривой.

2.1. Данные Хитчина. Применив твисторный подход, Хитчин показал [3], что каждый статический $SU(2)$ -монополь Янга–Миллса–Хиггса с магнитным зарядом n эквивалентен в пределе БПЗ спектральной кривой с наложенными ограничениями. Если ζ – неоднородная координата на римановой сфере, а (ζ, η) – стандартные локальные координаты на $T\mathbb{P}^1$ (определяемые формулами $(\zeta, \eta) \rightarrow \eta d/d\zeta$), то спектральная кривая представляет собой алгебраическую кривую $\mathcal{C} \subset T\mathbb{P}^1$, имеющую вид

$$P(\eta, \zeta) = \eta^n + \eta^{n-1}a_1(\zeta) + \cdots + \eta^r a_{n-r}(\zeta) + \cdots + \eta a_{n-1}(\zeta) + a_n(\zeta) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $a_r(\zeta)$ при $1 \leq r \leq n$ – многочлен порядка не более $2r$ по переменной ζ .

Данные Хитчина налагают ограничения на кривую $\mathcal{C}$ в явном виде в терминах многочлена $P(\eta, \zeta)$ и в неявном виде через требования к поведению различных линейных расслоений над $\mathcal{C}$. Если однородными координатами на $\mathbb{P}^1$ служат $[\zeta_0, \zeta_1]$, то можно рассмотреть стандартное накрытие этой поверхности открытыми множествами $U_0 = \{[\zeta_0, \zeta_1] \mid \zeta_0 \neq 0\}$ и $U_1 = \{[\zeta_0, \zeta_1] \mid \zeta_1 \neq 0\}$, где $\zeta = \zeta_1/\zeta_0$ – обычная координата на U_0 . Обозначим через $\widehat{U}_{0,1}$ прообразы этих множеств относительно отображения проекции $\pi: T\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Обозначим через L^λ голоморфное линейное расслоение над $T\mathbb{P}^1$, задаваемое функцией перехода $g_{01} = e^{-\lambda\eta/\zeta}$ на $\widehat{U}_0 \cap \widehat{U}_1$, и пусть расслоения $L^\lambda(m) \equiv L^\lambda \otimes \pi^* \mathcal{O}(m)$ будут аналогичным образом задаваться в терминах функций перехода $g_{01} = \zeta^m e^{-\lambda\eta/\zeta}$. Голоморфное сечение таких линейных расслоений выражается в терминах голоморфных функций f_α на $\widehat{U}_\alpha$, удовлетворяющих условиям $f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$. Запишем линейные расслоения над кривой $\mathcal{C}$ аналогичным образом с помощью голоморфных функций f_α , определенных на $\mathcal{C} \cap \widehat{U}_\alpha$.

Данные Хитчина на кривой удовлетворяют следующим условиям.

A1. Условие вещественности:

$$a_r(\zeta) = (-1)^r \overline{\zeta^{2r} a_r\left(-\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}. \quad (2.2)$$

Это условие утверждает, что кривая $\mathcal{C}$ оказывается вещественной относительно стандартной вещественной структуры на $T\mathbb{P}^1$:

$$\tau: (\zeta, \eta) \mapsto \left(-\frac{1}{\bar{\zeta}}, -\frac{\bar{\eta}}{\bar{\zeta}^2}\right), \quad (2.3)$$

представляющей собой антиголоморфную инволюцию, определяемую обращением ориентаций прямых в $\mathbb{R}^3$. Вследствие выполнения условия вещественности функции $a_r(\zeta)$ параметризуются следующим образом:

$$a_r(\zeta) = \sum_{k=0}^{2r} a_{rk} \zeta^k = \chi_r \left[\prod_{l=1}^r \left(\frac{\bar{\alpha}_{r,l}}{\alpha_{r,l}} \right)^{1/2} \right] \prod_{k=1}^r (\zeta - \alpha_{r,k}) \left(\zeta + \frac{1}{\bar{\alpha}_{r,k}} \right), \quad \alpha_{r,k} \in \mathbb{C}, \quad \chi_r \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

Таким образом, каждая из функций $a_r(\zeta)$ содержит $2r + 1$ (вещественных) параметров.

A2. Расслоение L^2 тривиально на $\mathcal{C}$ и расслоение $L(n-1)$ – вещественное. Тривиальность L^2 над $\mathcal{C}$ означает, что существуют нигде не обращающиеся в нуль голоморфные сечения. В терминах вышеприведенных открытых множеств $\hat{U}_{0,1}$ при этом имеются две нигде не зануляющиеся голоморфные функции: функция f_0 на $\hat{U}_0 \cap \mathcal{C}$ и функция f_1 на $\hat{U}_1 \cap \mathcal{C}$, следовательно, на пересечении множеств $\hat{U}_0 \cap \hat{U}_1 \cap \mathcal{C}$

$$f_0(\eta, \zeta) = e^{-2\eta/\zeta} f_1(\eta, \zeta). \quad (2.5)$$

A3. $H^0(\mathcal{C}, L^\lambda(n-2)) = 0$ для $\lambda \in (0, 2)$.

Для n -монопольного решения общего вида спектральная кривая неприводима и имеет род $g_{\mathcal{C}} = (n-1)^2$. Его можно вычислить следующим способом. При фиксированной переменной ζ n корней многочлена $P(\eta, \zeta) = 0$ задают n -кратное накрытие римановой сферы. Точки ветвления этого накрытия задаются условиями

$$0 = \text{Resultant}_\eta(P(\eta, \zeta), \partial_\eta P(\eta, \zeta)) = \prod_{i=1}^n \partial_\eta P(\eta_i, \zeta),$$

где $P(\eta_i, \zeta) = 0$. Это выражение имеет степень $n \times \deg a_{n-1} = n(2n-2)$ по переменной ζ , и в силу теоремы Римана–Гурвица получим

$$2g_{\mathcal{C}} - 2 = 2n(g_{\mathbb{P}^1} - 1) + n(2n-2) = 2(n-1)^2 - 2,$$

что и дает указанный род.

Кривая для монополя заряда $n = 1$ дается выражением

$$\eta = (x_1 + ix_2) - 2x_3\zeta - (x_1 - ix_2)\zeta^2,$$

в котором $x = (x_1, x_2, x_3)$ – произвольная точка в $\mathbb{R}^3$. В случае общего положения три независимых вещественных коэффициента многочлена $a_1(\zeta)$ можно интерпретировать как координаты центра монополя в пространстве $\mathbb{R}^3$. У сильно центрированных монополей в качестве центра выступает начало координат, а потому $a_1(\zeta) = 0$. $SO(3)$ -группа вращений пространства $\mathbb{R}^3$ индуцирует действие на $\mathbb{TP}^1$ с помощью соответствующих $PSU(2)$ -преобразований. Если

$$\begin{pmatrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix} \in PSU(2), \quad |p|^2 + |q|^2 = 1,$$

то преобразование на $\mathbb{TP}^1$, задаваемое формулами

$$\zeta \rightarrow \frac{\bar{p}\zeta - \bar{q}}{q\zeta + p}, \quad \eta \rightarrow \frac{\eta}{(q\zeta + p)^2},$$

отвечает вращению на угол θ вокруг оси $\mathbf{n} \in S^2$, где $n_1 \sin(\theta/2) = \operatorname{Im} q$, $n_2 \sin(\theta/2) = -\operatorname{Re} q$, $n_3 \sin(\theta/2) = -\operatorname{Im} p$ и $\cos(\theta/2) = \operatorname{Re} p$. (Здесь η -преобразование представляет собой производную от ζ -преобразования.) Действие группы $SO(3)$ коммутирует с вещественной структурой τ . Хотя преобразование Мёбиуса общего вида и не меняет матрицу периодов кривой $\mathcal{C}$, указанные свойства вещественности сохраняются только подгруппой этих преобразований $PSU(2) < PSL(2, \mathbb{C})$. Имеем

$$\begin{aligned}\alpha_{r,k} &\rightarrow \tilde{\alpha}_{r,k} \equiv \frac{p\alpha_{r,k} + \bar{q}}{\bar{p} - \alpha_{r,k}q}, \\ \chi_r &\rightarrow \tilde{\chi}_r \equiv \chi_r \prod_{k=1}^r \left[\frac{(\bar{p} - \alpha_{r,k}q)(p - \bar{\alpha}_{r,k}\bar{q})(\bar{\alpha}_{r,k}\bar{p} + q)(\alpha_{r,k}p + \bar{q})}{\alpha_{r,k}\bar{\alpha}_{r,k}} \right]^{1/2}, \\ a_r &\rightarrow \frac{\tilde{a}_r}{(q\zeta + p)^{2r}} \equiv \frac{\tilde{\chi}_r}{(q\zeta + p)^{2r}} \left[\prod_{l=1}^r \left(\frac{\bar{\alpha}_{r,l}}{\tilde{\alpha}_{r,l}} \right)^{1/2} \right] \prod_{k=1}^r (\zeta - \tilde{\alpha}_{r,k}) \left(\zeta + \frac{1}{\bar{\alpha}_{r,k}} \right).\end{aligned}$$

В частности, вид кривой не меняется, т. е. если $a_r = 0$, то и $\tilde{a}_r = 0$. Возможно, следует отметить, что условия вещественности представляют собой внешнее свойство кривой (отражающее пространственно-временные аспекты задачи), в то время как внутренние свойства кривой должны сохраняться при бирациональных преобразованиях из полной группы Мёбиуса. Такие внешние свойства обычно не встречаются в интегрируемых системах.

2.2. Данные Нама. Приведем конструкцию Нама для $SU(2)$ -монополей заряда n в терминах $(n \times n)$ -матриц (T_1, T_2, T_3) , зависящих от вещественного параметра $s \in [0, 2]$ и удовлетворяющих следующим условиям.

В1. Уравнение Нама

$$\frac{dT_i}{ds} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} [T_j, T_k]. \quad (2.6)$$

В2. Матрица $T_i(s)$ регулярна при $s \in (0, 2)$ и имеет простые полюсы в точках $s = 0$ и $s = 2$, вычеты в которых образуют неприводимое n -мерное представление алгебры $su(2)$.

В3. $T_i(s) = -T_i^\dagger(s)$, $T_i(s) = T_i^t(2 - s)$.

Остановимся на втором из условий пункта В3. Все, что на самом деле нужно, — это потребовать, чтобы матрицы $T_i(s)$ были сопряжены матрицам $T_i^t(2 - s)$. Во многих явных примерах это условие считается само собой разумеющимся. Если интерпретировать уравнения Нама как одномерную калибровочную теорию, то тогда все еще остается некоторая калибровочная свобода, связанная с постоянными калибровочными преобразованиями. Спектральная кривая калибровочно инвариантна, поэтому, если она обладает правильными свойствами вещественности, то из этого с необходимостью следует, что существует калибровка, в которой соотношение $s \rightarrow 2 - s$ будет выполнено явно, даже если это было не так в исходной калибровке²⁾.

²⁾ Авторы выражают благодарность П. Сатклиффу за полезное обсуждение данного пункта.

Уравнения Нама допускают лаксову формулировку. Положив

$$\begin{aligned} A_{-1} &= T_1 + iT_2, & A_0 &= -2iT_3, & A_1 &= T_1 - iT_2, \\ A &= A_{-1}\zeta^{-1} + A_0 + A_1\zeta, & M &= \frac{1}{2}A_0 + A_1\zeta, \end{aligned}$$

получим

$$\frac{dA}{ds} = [A, M], \quad (2.7)$$

или, эквивалентно,

$$\left[\frac{d}{ds} + M, A \right] = 0.$$

Уравнение Нама (2.6) описывает линейный поток на комплексном торе, представляющем собой якобиан алгебраической кривой. Эта алгебраическая кривая на самом деле является спектральной кривой монополя $\mathcal{C}$, и ее можно явно получить из уравнения Лакса:

$$P(\eta, \zeta) = \det(\eta 1_n + (T_1 + iT_2) - 2iT_3\zeta + (T_1 - iT_2)\zeta^2) = 0. \quad (2.8)$$

Условие регулярности В2 при $s \in (0, 2)$ есть аналог условия А3 для спектральной кривой в подходе АДХМ–Нама.

2.3. Конструкция Эрколани–Синха. Опишем теперь вкратце конструкцию Эрколани–Синха, которая позволяет выразить калибровочно преобразованные данные Нама в терминах функций Бейкера–Ахиезера на спектральной кривой $\mathcal{C}$. Затем для этих функций будет выписано явное представление. В следующем пункте описываются обобщения этого подхода на теорию Эрколани–Синха.

2.3.1. Обзор. Пусть $z = s - 1$. Тогда $z \in [-1, 1]$ при $s \in [0, 2]$ и³⁾

$$A_0(z) = A_0^\dagger(z), \quad A_1(z) = -A_{-1}^\dagger(z), \quad A_\alpha(z) = A_\alpha^t(-z), \quad \alpha = 0, \pm 1. \quad (2.9)$$

Подход Эрколани и Синха начинается с того, что рассматривается дифференциальный оператор

$$\frac{d}{dz} + M(z) = \frac{d}{dz} + \frac{1}{2}A_0(z) + A_1(z)\zeta,$$

связанный с уравнением Лакса (2.7). Из спектральной теории этого оператора вытекает интегрируемость уравнения Лакса. Зависимость от переменной z в члене $A_1(z)$ означает, что уравнение для собственных значений

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}A_0(z) \right) \varphi = -\zeta A_1(z) \varphi$$

³⁾Матрицы Эрколани–Синха и Нама связаны между собой формулами $T_i^{\text{ES}}(z) = T_i^{\text{Nahm}}(z+1)$, откуда получаем, что

$$T_i^{\text{ES}}(z) = T_i^{\text{Nahm}}(z+1) = T_i^{\text{Nahm}}(2 - [z+1]) = T_i^{\text{Nahm}}(1-z) = T_i^{\text{ES}}(-z).$$

имеет нестандартный вид. Произведя калибровочное преобразование

$$Q_\alpha(z) = C^{-1}(z)A_\alpha(z)C(z), \quad \varphi = C(z)\Phi,$$

можно перейти к стандартной задаче для собственных значений:

$$\left(\frac{d}{dz} + Q_0(z)\right)\Phi = -\zeta Q_1(0)\Phi \quad (2.10)$$

тогда и только тогда, когда матрица $C(z)$ удовлетворяет условию

$$C(z)^{-1}C'(z) = \frac{1}{2}Q_0(z) \quad (2.11)$$

или, эквивалентно,

$$\left(\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}Q_0(z)\right)C^{-1} = 0.$$

Калибровочное преобразование выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие $Q_1(z) = A_1(0) = Q_1(0)$. Из условия (2.9) ясно, что эта матрица симметрична и (применяя глобальное калибровочное преобразование с постоянной матрицей) ее можно привести к диагональному виду:

$$A_1(0) = Q_1(0) = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_n). \quad (2.12)$$

Теперь из уравнения (2.10) видно, что величины ρ_j (которые предполагаются различными) в этом выражении суть корни многочлена $P(\eta, \zeta)/\zeta^{2n}$ вблизи точки $\zeta = \infty$:

$$\frac{P(\eta, \zeta)}{\zeta^{2n}} \sim \prod_{j=1}^n \left(\frac{\eta}{\zeta^2} - \rho_j\right). \quad (2.13)$$

Отсюда следует, что в бесконечности имеет место формула

$$\frac{\eta}{\zeta} \sim \rho_j \zeta, \quad d\left(\frac{\eta}{\zeta}\right) \sim \rho_j d\zeta = \left(-\frac{\rho_j}{t^2} + O(1)\right) dt, \quad (2.14)$$

в которой через $t = 1/\zeta$ обозначена локальная координата. Из условия (2.4) получим, что при $\zeta = 0$ также имеет место условие

$$P(\eta, 0) = \prod_{j=1}^n (\eta + \bar{\rho}_j). \quad (2.15)$$

Спектральные кривые $0 = \det(\eta 1_n - A) = \det(\eta 1_n - Q)$ согласуются между собой, если имеет место калибровочное преобразование $Q = C^{-1}AC$. После этого Эрколани и Синха явно выражают $Q_0(z)$ в терминах функции Бейкера–Ахиезера на кривой $\mathcal{C}$. Функции Бейкера–Ахиезера представляют собой контролируемое расширение класса мероморфных функций, в котором допускаются функции с существенными особенностями в конечном числе точек; их свойства во многом повторяют соответствующие свойства мероморфных функций. В то время как для задания мероморфной функции необходимо фиксировать $g_{\mathcal{C}} + 1$ полюсных особенностей в случае кривой общего вида, нетривиальная функция Бейкера–Ахиезера описывается заданием $g_{\mathcal{C}}$ произвольных полюсов на поверхности рода $g_{\mathcal{C}}$. Главный результат формулируется в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1 (Кричевер, 1977 г.). Пусть $\mathcal{C}$ – гладкая алгебраическая кривая рода $g_{\mathcal{C}}$ с $n \geq 1$ выколотыми точками P_j , $j = 1, \dots, n$. Тогда для произвольного набора из $g_{\mathcal{C}} + n - 1$ точек $\delta_1, \dots, \delta_{g_{\mathcal{C}}+n-1}$, находящихся в общем положении, существует единственная функция $\Psi_j(z, P)$ и локальные координаты $w_j(P)$, в которых $w_j(P_j) = 0$ такие, что:

1) функция Ψ_j от точки кривой $P \in \mathcal{C}$ мероморфна вне выколотых точек и имеет не более чем простые полюсы в точках δ_s (в случае, когда все эти точки различны);

2) в окрестности выколотой точки P_l функция Ψ_j имеет вид

$$\Psi_j(z, P) = e^{zw_l^{-m}} \left(\delta_{jl} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{jl}^k(z) w_l^k \right), \quad w_l = w_l(P), \quad m \in \mathbb{N}^+. \quad (2.16)$$

Целое число $m \geq 1$ в формулировке теоремы произвольно и задается выбором соответствующего потока. Пусть $\tilde{w}_j(P)$ – произвольная локальная координата на кривой $\mathcal{C}$ такая, что $\tilde{w}_j(P_j) = 0$. Поставим в соответствие каждому потоку однозначно определенный мероморфный дифференциал $\Omega^{[m]}$ на кривой $\mathcal{C}$, который голоморфен вне выколотых точек P_j , имеет локальное поведение

$$\Omega^{[m]} = d(\tilde{w}_j^{-m} + o(\tilde{w}_j)) \quad (2.17)$$

вблизи выколотой точки P_j и нормирован на нулевые $\mathbf{a}$ -периоды:

$$\oint_{\mathbf{a}_k} \Omega^{[m]} = 0. \quad (2.18)$$

Можно применить функцию Бейкера–Ахиезера в подходе монополей следующим образом. Пусть $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ – столбцы фундаментального матричного решения $\mathcal{F}$ задачи (2.10) с условиями нормировки

$$e^{\zeta A_1(0)z} \mathcal{F}|_{\zeta=\infty} = 1_n. \quad (2.19)$$

Рассмотрим дифференциал γ_{∞} , представляющий собой сумму дифференциалов второго рода и такой, что

$$\gamma_{\infty}(P) = \left(\frac{\rho_l}{t^2} + O(1) \right) dt, \quad P \rightarrow \infty_l, \quad (2.20)$$

$$\oint_{\mathbf{a}_k} \gamma_{\infty}(P) = 0 \quad (2.21)$$

для всех $k = 1, \dots, g$, и выберем в качестве проколов точки $\{P_l = \infty_l\}$, $l = 1, \dots, n$, т.е. n точек на кривой $\mathcal{C}$, являющихся прообразами точки $\zeta = \infty$ на комплексной плоскости. Тогда имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2 (Эрколани и Синха, 1989 г.). j -я Составляющая Φ_l с нормировкой (2.19) задается разложением (2.16) функции Ψ_j в точке ∞_l . Более того, матрица Q_0 имеет нулевую диагональ и может быть восстановлена из формулы

$$(Q_0)_{jl} = -(\rho_j - \rho_l) \alpha_{jl}^1 = -(\rho_j - \rho_l) \lim_{P \rightarrow \infty_l} \zeta e^{\zeta \rho_l z} \Psi_j(z, P). \quad (2.22)$$

Восстановление данных Нама в конструкции Эрколани–Синха производится поэтапно:

1) применяя асимптотические разложения для кривой, решим систему уравнений относительно ρ_j , $j = 1, \dots, gc$; тогда $A_1(0) = Q_1(0) = \text{diag}(\rho_j)$;

2) определим $Q_0(z)$ из (2.10) в терминах функции Бейкера–Ахиезера (2.22);

3) определим $C(z)$ из (2.11); тогда

$$A_0(z) = C(z)Q_0C^{-1}(z),$$

$$A_1(z) = C(z)A_1(0)C^{-1}(z),$$

$$A_{-1}(z) = -A_1^\dagger(z);$$

4) после построения $A(z)$ восстановим $T_i^{\text{ES}}(z) = T_i^{\text{Nahm}}(z + 1)$.

Связи (B2, B3) или (A2, A3) возникают в конструкции Эрколани–Синха как ограничения, которым удовлетворяют функции Бейкера–Ахиезера на шаге 2; тем самым применение этой конструкции основано на возможности явно представить функции Бейкера–Ахиезера. Они рассматриваются более подробно в следующем пункте сначала в общем виде, а потом в контексте монополей. Перед этим представляется уместным сделать несколько замечаний относительно возможных калибровочных неоднозначностей в решении задачи. Матрицы A , M и C были определены изначально с точностью до постоянных калибровочных преобразований. После фиксации формы (2.12) остаются только постоянные калибровочные преобразования диагонального вида, которые сохраняют условия нормировки (2.19). На этом этапе матрица $Q_0(z)$, задаваемая с помощью функции Бейкера–Ахиезера, определена с точностью до постоянного диагонального калибровочного преобразования $Q_0(z)_{ij} \sim d_i Q_0(z)_{ij} d_j^{-1}$ при $d_i \neq 0$, $i, j = 1, \dots, n$.

2.3.2. Функции Бейкера–Ахиезера. Функции Ψ_j из теоремы 2.1 можно выписать явно через тета-функции и отображение Абеля ϕ . При заданном нормированном дифференциале второго рода $\Omega^{[m]}$ формулы (2.17), (2.18) задают вектор $U^{[m]}$ с координатами

$$U_k^{[m]} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_k} \Omega^{[m]}.$$

Тогда функцию $\Psi_j(z, P)$ можно представить в виде

$$\Psi_j(z, P) = g_j(P) \frac{\theta(\phi(P) - \mathbf{z}_j + zU^{[m]})\theta(\phi(P_j) - \mathbf{z}_j)}{\theta(\phi(P_j) - \mathbf{z}_j + zU^{[m]})\theta(\phi(P) - \mathbf{z}_j)} e^{z \int_{P_0}^P \Omega^{[m]}}. \quad (2.23)$$

Здесь

$$\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_T + \phi(P_j) \equiv \phi(\Delta_j) + \mathbf{K}, \quad \mathbf{z}_T = \sum_{s=1}^{gc+n-1} \phi(\delta_s) - \sum_{l=1}^n \phi(P_l) + \mathbf{K},$$

где $\mathbf{K}$ – вектор римановых констант (с базисной точкой P_0). И использованные в этих формулах термины для тета-функций разъясняются в приложении. В соответствии с теоремой Абеля вектор $\mathbf{z}_j$ эквивалентен эффективному дивизору Δ_j степени g . Функция $g_j(P)$ есть единственная мероморфная функция, у которой $g_j(P_l) = \delta_{jl}$ и

которая при $n \geq 2$ имеет полюсы в точках $\{\delta_1, \dots, \delta_{g_c+n-1}\}$. В случае $n = 1$ имеем $g_j(P) = 1$. Эту функцию можно также построить в явном виде. Положим

$$g_j(P) = \frac{f_j(P)}{f_j(P_j)},$$

где

$$f_j(P) = \theta(\phi(P) - \mathbf{Z}_j) \frac{\prod_{l \neq j} \theta(\phi(P) - \mathbf{R}_l)}{\prod_{k=1}^n \theta(\phi(P) - \mathbf{S}_k)},$$

$$\mathbf{R}_j = \sum_{s=1}^{g_c-1} \phi(\delta_s) + \phi(P_j) + \mathbf{K}, \quad \mathbf{S}_j = \sum_{s=1}^{g_c-1} \phi(\delta_s) + \phi(\delta_{g_c-1+j}) + \mathbf{K}.$$

Заметим, что при $n \geq 2$ сомножители $\theta(\phi(P) - \mathbf{Z}_j)$ в члене, содержащем $g_j(P)$, и в тета-функции в знаменателе выражения (2.23) сокращаются, так что никаких дополнительных полюсов не возникает.

Функция $\Psi_j(z, P)$, зависящая от выбора базисной точки отображения Абеля, теперь удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.1, кроме условия нормировки. Положим

$$\nu_j \equiv \nu_j(P_0) = \lim_{P \rightarrow \infty_j} \left[\int_{P_0}^P \Omega^{[m]} - \frac{1}{\tilde{w}^m(P)} \right]. \quad (2.24)$$

Таким образом, выраженная через локальную координату $\tilde{w}$ функция Бейкера–Ахиезера будет отличаться от нормировки в формуле (2.16) на экспоненциальный множитель $e^{z\nu_j}$. В этой локальной координате разложение функции $e^{-z\nu_j} \Psi_j$ имеет требуемый вид. Другой способ получения нужного результата основан на замене локальных координат

$$w = \frac{\tilde{w}}{1 + \tilde{w}^m \nu(P_0)/m},$$

при которой

$$\frac{1}{w^m} = \frac{(1 + \tilde{w}^m c(P_0)/m)^m}{\tilde{w}^m} = \frac{1}{\tilde{w}^m} + \nu(P_0) + O(\tilde{w}^m),$$

и мы приходим к локальным координатам, в которых разложение функции Бейкера–Ахиезера имеет требуемый вид.

Завершим этот пункт обсуждением дивизора $\delta \equiv \sum_{s=1}^{g_c+n-1} \delta_s$, с тем чтобы прояснить смысл термина “случай общего положения”. Мероморфные функции $g_j(P)$ допускают следующую интерпретацию. Обозначим через L_δ линейное расслоение над $\mathcal{C}$, задаваемое дивизором δ , а через s_δ – (ненулевое) мероморфное сечение этого линейного расслоения. (В дальнейшем расслоение L_δ появится в подходе монополей.) Тогда дивизор $g_j(P)$ имеет вид

$$\text{Div } g_j(P) = \Delta_j + P_1 + \dots + \hat{P}_j + \dots + P_n - \delta. \quad (2.25)$$

Тем самым сечение $g_j(P)s_\delta$ оказывается голоморфным сечением расслоения L_δ . По теореме Римана–Роха теперь имеем

$$\text{Dim } H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_\delta)) = \deg L_\delta + 1 - g_c + \text{Dim } H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_\delta)) = n + \text{Dim } H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_\delta)) \geq n,$$

так что L_δ имеет ровно n голоморфных сечений в случае, когда $\dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_\delta)) = 0$. Появившееся ограничение означает, что δ – неспециальный дивизор, оно налагается собственно на дивизор. Рассмотрим теперь короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(L) \xrightarrow{s_p} \mathcal{O}(LL_p) \rightarrow \mathcal{O}_p(LL_p) \rightarrow 0$$

и соответствующую длинную точную последовательность

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L)) \rightarrow H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(LL_p)) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L)) \rightarrow H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(LL_p)) \rightarrow 0,$$

получим, что должна реализовываться одна из двух возможных ситуаций:

- (а) $\dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(LL_p)) = \dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L)) + 1$,
 $\dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L)) = \dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(LL_p));$
- (б) $\dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(LL_p)) = \dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L)),$
 $\dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L)) = \dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(LL_p)) + 1.$

В частности, если $\dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L)) = 0$, то $\dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(LL_p)) = \dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L)) + 1$. (В случае, когда дивизор LL_p эффе́ктивен, в ситуации общего положения реализуется случай (а), и это справедливо также и для случая общего p .) Применяя эти результаты вместе с теоремой Римана–Роха, получим, что (при каждом $j = 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\delta - \sum_{k=1}^n P_k})) &= \dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\Delta_j - P_j})) = 0 \iff \\ &\iff \dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\delta - \sum_{k=1}^n P_k})) = \dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\Delta_j - P_j})) = 0 \implies \\ &\implies \begin{cases} \dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\delta + P_j - \sum_{k=1}^n P_k})) = \dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\Delta_j})) = 1, \\ \dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\delta + P_j - \sum_{k=1}^n P_k})) = \dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\Delta_j})) = 0 \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} \dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_\delta)) = n, \\ \dim H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_\delta)) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Условие $\dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\Delta_j})) = 1$ утверждает, что дивизоры Δ_j не являются специальными, и это было использовано в нашем построении для того, чтобы обеспечить однозначную определенность функций $g_j(P)$ и, следовательно, функций Бейкера–Ахизера. На самом деле условие того, что $g_j(P_j) = 1$, дает возможность произвести дальнейший анализ. Исследование длинной точной последовательности показывает, что размерность $\dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\Delta_j - P_j})) = 0$ или 1. В последнем случае дивизор $\Delta_j - P_j$ будет эквивалентен эффе́ктивному дивизору, $\Delta_j - P_j \sim_l \sum_{k=1}^{g_c-1} Q_k$, откуда получим, что $\Delta_j \sim_l P_j + \sum_{k=1}^{g_c-1} Q_k$. Но тогда $g_j(P_j) = 0$, что приводит к противоречию. Таким образом, $\dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\Delta_j - P_j})) = 0$, что обеспечивает необходимые и достаточные условия построения функции Бейкера–Ахизера (для всех $j = 1, \dots, n$):

$$\dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\delta - \sum_{k=1}^n P_k})) = 0 \iff \dim H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\delta + P_j - \sum_{k=1}^n P_k})) = 1. \quad (2.26)$$

Из этого условия следует, что дивизор $\delta - \sum_{k=1}^n P_k$, имеющий степень $g_c - 1$, оказывается неэффе́ктивным. В частности, это означает, что $\delta - \sum_{k=1}^n P_k \in \text{Jac}^{g_c-1}(\mathcal{C}) \setminus \Theta$.

Здесь тета-дивизор Θ представляет собой образ (с точностью до сдвига на вектор констант Римана) относительно отображения Абеля степени $g_C - 1$ эффективных дивизоров в якобиане $\text{Jac}^{g_C-1}(\mathcal{C})$. Теперь дивизор Θ имеет в якобиане коразмерность один, и поэтому условие (2.26) будет выполнено для дивизоров общего положения. Именно это мы подразумеваем, когда говорим, что δ находится “в ситуации общего положения”. Отметим в заключение, что точно таким же образом, как функции $g_j(P) = \Psi_j(0, P)$ задают сечения линейного расслоения L_δ , функции $\Psi_j(z, P)$ задают сечения линейного расслоения, которое будет обозначаться L_δ^z , но функция перехода в окрестности выколотой точки P_l будет содержать экспоненциальный множитель $e^{zw_l^{-m}}$.

2.3.3. Условия связи Эрколани–Синха. Результаты последнего подпункта свидетельствуют о том, что, положив

$$\nu_j = \lim_{P \rightarrow \infty_j} \left[\int_{P_0}^P \gamma_\infty(P) + \frac{\eta}{\zeta} \right], \quad (2.27)$$

можно записать функцию Бейкера–Ахиезера из теоремы 2.2 как

$$\Psi_j(z, P) = g_j(P) \frac{\theta(\phi(P) - \mathbf{z}_j + z\mathbf{U})\theta(\phi(P_j) - \mathbf{z}_j)}{\theta(\phi(P_j) - \mathbf{z}_j + z\mathbf{U})\theta(\phi(P) - \mathbf{z}_j)} e^{z \int_{P_0}^P \gamma_\infty - z\nu_j} \quad (2.28)$$

для дивизора $\delta = \sum_{s=1}^{n(n-1)} \delta_s$ достаточно общего вида. Тогда из формулы (2.22) получим матрицу Q_0 из уравнения (2.10) в виде

$$(Q_0)_{jl} = -(\rho_j - \rho_l) c_{jl} e^{z[\nu_l - \nu_j]} \frac{\theta(\phi(P_l) - \mathbf{z}_j + z\mathbf{U})\theta(\phi(P_j) - \mathbf{z}_j)}{\theta(\phi(P_j) - \mathbf{z}_j + z\mathbf{U})\theta(\phi(P_l) - \mathbf{z}_j)}, \quad (2.29)$$

где

$$c_{jl} = \lim_{P \rightarrow \infty_l} \zeta g_j(P), \quad P = (\zeta, \eta) \in \mathcal{C}. \quad (2.30)$$

Заметим, что постоянные c_{ij} , присутствующие в этом решении, зависят от дивизора δ через функции $g_j(P)$. Остается прояснить физический смысл такой зависимости. Ниже мы покажем, что она отвечает выбору калибровки, и найдем простые выражения для указанных постоянных.

На данном этапе мы еще не налагаем условия Хитчина A2, A3 на кривую $\mathcal{C}$. Сначала следует понять, какова роль линейных расслоений L_δ^z в нашем построении. Из уравнений (2.27), (2.28) получаем асимптотическое условие $\Psi_j \sim e^{-z\eta/\zeta}|_{\infty_j}$, задающее функции переклеек данного вида в окрестности точки $\zeta = \infty$. Теперь из формулы (2.25) получим, что линейному расслоению $L_\delta^{z=0} = L_\delta$ (при каждом j) отвечает дивизор

$$\delta \sim_l \Delta_j + \infty_1 + \cdots + \widehat{\infty_j} + \cdots + \infty_n$$

и, следовательно, расслоение имеет нуль порядка $n-1$ в бесконечности. В локальной координате $\tilde{\zeta} = 1/\zeta$ это отвечает сечению $s_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \tilde{\zeta}^k$ с функцией переклейки $g_{01} = \zeta^{n-1}$. (Здесь $s_0(P) = \Psi_j(z, P)$ на $\widehat{U}_0 \cap \mathcal{C} \setminus \{\delta\}$ и $s_1(P) = 1$ на $\widehat{U}_1 \cap \mathcal{C}$, в то время как в областях $V_{j+1} \subset \widehat{U}_0 \cap \widehat{U}_1 \cap \mathcal{C}$ таких, что $\delta_j \in V_{j+1}$, а $V_j \cap V_k = \emptyset$, $j \neq k$, получим, что для точек кривой $P \in V_{j+1}$ имеет место соотношение $s_{j+1}(P) = w_j$.)

Тем самым можно отождествить линейное расслоение L_δ^z с линейным расслоением Хитчина $L^{z+1}(n-1)$. Далее, расслоение $L_{\delta-\sum_{k=1}^n P_k} = L_\delta \otimes \pi^* \mathcal{O}(-1) \equiv L_\delta(-1)$ можно отождествить с расслоением Хитчина $L^1(n-2)$. Условие А3 при $\lambda = 1$ тогда превращается в условие связи (2.26):

$$L_\delta(-1) \in \text{Jac}^{gc-1}(\mathcal{C}) \setminus \Theta.$$

Отсюда следует, что векторное расслоение $E = \pi_* L_\delta$ ранга n , поднятое на $\mathbb{P}^1$, оказывается голоморфно тривиальным. Обсудим теперь условия А2 и А3.

Относительно условия А2 Эрколани и Синха показали, что функции $g_j(P)$ образуют базис голоморфных сечений расслоения $L(n-1)$, и вследствие этого $L(n-1)$ оказывается вещественным расслоением. Затем они рассмотрели логарифмическую производную от условия (2.5), утверждающего тривиальность расслоения L^2 на $\mathcal{C}$,

$$d \log f_0 = d \left(-2 \frac{\eta}{\zeta} \right) + d \log f_1 \quad (2.31)$$

(Хуртибиз рассматривал похожую конструкцию в случае $n = 2$ [11]). Теперь во избежание появления существенных особенностей в $f_{0,1}$ получим из (2.13), (2.15) условие

$$d \log f_1(P) = \left(-\frac{2\eta_j(0)}{\zeta^2} + O(1) \right) d\zeta = \left(\frac{2\bar{\rho}_j(0)}{\zeta^2} + O(1) \right) d\zeta, \quad P \rightarrow 0_j, \quad (2.32)$$

$$d \log f_0(P) = \left(\frac{2\rho_j}{t^2} + O(1) \right) dt, \quad P \rightarrow \infty_j. \quad (2.33)$$

Поскольку f_0 является функцией на $U_0 = \mathcal{C} \setminus \{P_j\}_{j=1}^n$, то соотношение

$$e^{\oint_\lambda d \log f_0} = 1 \quad (2.34)$$

выполнено для всех циклов λ из $H_1(\mathbb{Z}, \mathcal{C})$. Для f_1 получим аналогичный результат, и с помощью формулы (2.31) можно определить

$$m_j = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{a_j} d \log f_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{a_j} d \log f_1, \quad (2.35)$$

$$n_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_j} d \log f_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_j} d \log f_1. \quad (2.36)$$

Далее, в силу (2.20), (2.33), можно записать

$$\gamma_\infty(P) = \frac{1}{2} d \log f_0(P) + i\pi \sum_{j=1}^g m_j v_j(P), \quad (2.37)$$

где v_j – канонически $\mathbf{a}$ -нормированные голоморфные дифференциалы. Интегрируя γ_∞ вдоль $\mathbf{b}$ -циклов, получим условия связи Эрколани–Синха

$$\oint_{b_k} \gamma_\infty = i\pi n_k + i\pi \sum_{l=1}^g \tau_{kl} m_l,$$

представляющие собой необходимые и достаточные условия тривиальности для L^2 при ограничении на $\mathcal{C}$. Таким образом, вектор кручения U , появляющийся в функции Бейкера–Ахиезера (2.28), принимает вид

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{n} + \frac{1}{2}\tau\mathbf{m}. \quad (2.38)$$

Таким образом, вектор $2U$ лежит в Λ – решетке периодов для кривой $\mathcal{C}$, а “вектор кручения” оказывается полупериодом. Заметим, что $U \neq 0$, поскольку в противном случае γ_∞ была бы голоморфной, что противоречит нашему выбору.

Применяя билинейные соотношения (равно как и то, что $\oint_{a_l} \gamma_\infty(P) = 0$), получим

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k} \gamma_\infty(P) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^g \left(\oint_{a_l} v_k(P) \oint_{b_l} \gamma_\infty(P') - \oint_{b_l} v_k(P) \oint_{a_l} \gamma_\infty(P') \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Gamma} \gamma_\infty(P) \int_{P_0}^P v_k(P') = \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Res}_{P \rightarrow \infty_i} \gamma_\infty(P) \int_{P_0}^P v_k(P') = \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_j V_k^{(j)}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь “векторы кручений” $\mathbf{T}^{(i)}$, $\mathbf{V}^{(i)}$, $\mathbf{W}^{(i)}$ задаются как коэффициенты при разложении в окрестности бесконечности ∞_i выражения

$$\int_{P_0}^P \mathbf{v} \Big|_{P \rightarrow \infty_i} = \mathbf{T}^{(i)} + t\mathbf{V}^{(i)} + \frac{t^2}{2}\mathbf{W}^{(i)} + \dots, \quad (2.40)$$

и поэтому $\mathbf{T}^{(i)} = \int_{P_0}^{\infty_i} \mathbf{v}$.

Более общее утверждение можно сформулировать следующим образом. Для произвольного голоморфного дифференциала Ω

$$\sum_{l=1}^g U_l \oint_{a_l} \Omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^g \left(\oint_{a_l} \Omega \oint_{b_l} \gamma_\infty(P) - \oint_{b_l} \Omega \oint_{a_l} \gamma_\infty(P) \right) = \sum_{i=1}^n \text{Res}_{P \rightarrow \infty_i} \gamma_\infty(P) \int_{P_0}^P \Omega.$$

Хоугтон, Мантон и Рамео применили это выражение для представления условий связи Эрколани–Синха в дуальном виде (2.38). Задав 1-цикл

$$\mathbf{c} = \sum_{l=1}^g (n_l \mathbf{a}_l + m_l \mathbf{b}_l) \quad (2.41)$$

(напомним, что $\tau_{lk} \oint_{a_k} \Omega = \oint_{b_l} \Omega$, где τ – матрица периодов), можно выписать эквивалентное условие связи:

$$\oint_{\mathbf{c}} \Omega = 2 \sum_{i=1}^n \text{Res}_{P \rightarrow \infty_i} \gamma_\infty(P) \int_{P_0}^P \Omega. \quad (2.42)$$

Правую часть этого уравнения можно вычислить явно. Произвольный голоморфный дифференциал Ω представим в виде

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\beta_0 \eta^{n-2} + \beta_1(\zeta) \eta^{n-3} + \cdots + \beta_{n-2}(\zeta)}{\partial P / \partial \eta} d\zeta = \\ &= \frac{\beta_0 (\eta/\zeta^2)^{n-2} + \tilde{\beta}_1(1/\zeta) (\eta/\zeta^2)^{n-3} + \cdots + \tilde{\beta}_{n-2}(1/\zeta)}{\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i}^n (\eta/\zeta^2 - \mu_j(1/\zeta))} \frac{d\zeta}{\zeta^2},\end{aligned}\quad (2.43)$$

где $\beta_j(\zeta) \equiv \zeta^{2j} \tilde{\beta}_j(1/\zeta)$ – многочлен степени не более $2j$ по переменной ζ . Используя формулу (2.13) и интерполяционную формулу Лагранжа, получим

$$\sum_{i=1}^n \text{Res}_{P \rightarrow \infty_i} \gamma_\infty(P) \int_{P_0}^P \Omega = - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_0 \rho_i^{n-1} + \tilde{\beta}_1(0) \rho_i^{n-2} + \cdots + \tilde{\beta}_{n-2}(0) \rho_i}{\prod_{j \neq i}^n (\rho_i - \rho_j)} = -\beta_0.$$

На этом этапе из условия A2 вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 2.1 (условия Эрколани–Синха). *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) расслоение L^2 тривиально на $\mathcal{C}$;
- 2) существует 1-цикл $\mathbf{c} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{b}$ такой, что для каждого голоморфного дифференциала Ω (2.43) имеет место формула

$$\oint_{\mathbf{c}} \Omega = -2\beta_0, \quad (2.44)$$

$$3) \quad 2\mathbf{U} \in \Lambda \iff \mathbf{U} = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\mathbf{b}_1} \gamma_\infty, \dots, \oint_{\mathbf{b}_g} \gamma_\infty \right)^T = \frac{1}{2} \mathbf{n} + \frac{1}{2} \tau \mathbf{m}. \quad (2.45)$$

В этой лемме второе условие есть дуальная форма записи условий связи Эрколани–Синха, предложенная Хоугтоном, Мантоном и Рамео. Введенный ими 1-цикл обобщает похожее условие связи, возникшее в работе Корригана и Годдарда [12]. Единственное отличие между третьим условием леммы и условием теоремы 2.2 Эрколани и Синха состоит в выборе явного вида для вектора $\mathbf{U}$, который различен в этих двух выражениях. Нам также известно, что $\mathbf{U} \neq 0$.

Условия Эрколани–Синха накладывают g условий на матрицу периодов кривой. Мы показали, что каждый из коэффициентов $a_r(\zeta)$ содержит $2r + 1$ (вещественных) параметров, так что пространство модулей центрированных $SU(2)$ -монополей заряда n имеет (вещественную) размерность

$$\sum_{r=2}^n (2r + 1) - g = (n + 3)(n - 1) - (n - 1)^2 = 4(n - 1).$$

1-Цикл, появившийся в работе Хоугтона, Мантона и Рамео, удовлетворяет также следующему условию.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 (Хоугтон, Мanton и Рамео, 2000 г.).

$$\tau_* \mathbf{c} = -\mathbf{c}.$$

Этот результат дуален замечанию Хитчина [3] о том, что тривиальность L^2 вместе с наличием антиголоморфного изоморфизма $L \cong L^*$ задает точку мнимой решетки относительно $H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}) \subset H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O})$.

Группу Пикара линейных расслоений степени 0 на $\mathcal{C}$ можно отождествить посредством отображения Абеля с (главно-поляризованным) якобианом кривой $\mathcal{C}$. Начало координат отождествляется с тривиальным расслоением. Степень тривиального расслоения $L^2 = L_\delta^{z=1} \otimes \mathcal{O}(-n+1)$ равна нулю. Тогда

$$0 = \phi(\operatorname{Div}(L^2)) = \phi(\operatorname{Div}(L_\delta^{z=1} \otimes \mathcal{O}(-n+1))) = \phi\left(\operatorname{Div}(L_\delta^{z=1}) - (n-1) \sum_{k=1}^n \infty_k\right).$$

Рассмотрев далее сечения $\Psi_j(1, P)$, отвечающие $L_\delta^{z=1}$, получим

$$\phi(\operatorname{Div}(L_\delta^{z=1})) = \phi(\delta) - U.$$

Вместе с формулой (2.25) это приводит к тому, что вектор кручения U можно выразить в терминах дивизора нулевой степени (при каждом $j = 1, \dots, n$):

$$U = \phi\left(\Delta_j - \infty_j - (n-2) \sum_{k=1}^n \infty_k\right). \quad (2.46)$$

Обсудим теперь условие АЗ. Полное условие АЗ утверждает, что $L_\delta^z(-1) \in \operatorname{Jac}^{gc-1}(\mathcal{C}) \setminus \Theta$ при $z \in (-1, 1)$, что можно проверить с помощью имеющихся сведений относительно Θ -дивизора. Точная последовательность $\mathcal{O}(L^s) \hookrightarrow \mathcal{O}(L^s(n-2))$, порождаемая умножением на сечение расслоения $\pi^*\mathcal{O}(n-2)|_{\mathcal{C}}$, действительно задает необходимое условие:

$$H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L^s(n-2))) = 0 \implies H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L^s)) = 0, \quad s \in (0, 2). \quad (2.47)$$

Если бы расслоение L^s было тривиальным, то существовало бы сечение, противоречащее результату об исчезновении. С помощью тех же рассуждений, что и при обсуждении тривиальности L^2 , можно заключить, что если бы расслоение L^s было тривиальным, то выполнялось бы $sU \in \Lambda$. Поэтому из уравнения (2.47) следует, что $sU \notin \Lambda$ при $s \in (0, 2)$. Тем самым $2U$ есть простой вектор решетки Λ , и мы приходим к заключительной части условий связи Эрколани–Синха:

$$2U - \text{простой вектор решетки } \Lambda \iff \mathfrak{c} - \text{простой вектор решетки } H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}). \quad (2.48)$$

Условия Эрколани–Синха (2.45) или (2.44) налагают g трансцендентных условий на спектральную кривую $\mathcal{C}$, и основная трудность в применении этой конструкции состоит в разрешении этих условий, пусть даже и в простейших примерах. Кроме этих условий в конструкции (2.28) для функции Бейкера–Ахиезера возникал и ряд других. Для эффективного применения конструкции Эрколани–Синха необходимо научиться разрешать эти условия, и мы теперь перейдем к этому вопросу.

3. ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ ЭРКОЛАНИ–СИНХА

В этом разделе мы одновременно упростим и обобщим формулы Эрколани–Синха. В частности, до сих пор зависимость конструкции от дивизора δ осуществлялась через постоянные c_{ij} из формулы (2.29). Здесь будет показано, что этот дивизор задает выбор калибровки, а постоянные c_{ij} можно выбрать в простом виде, не зависящем от δ . Матрицу $Q_0(z)$ при этом можно представить как зависящую только от величин, определяемых собственно спектральной кривой (см. формулу (3.8) ниже). Мы обсудим составляющие, необходимые для вычисления Q_0 , и в заключение продемонстрируем возможности применения фундаментального бидифференциала в нашей конструкции.

3.1. Нулевые значения и симметрии. В дополнение к вектору Эрколани–Синха, который с помощью выражения (2.46) можно записать в виде

$$U = \phi \left(\Delta_j - \infty_j - (n-2) \sum_{k=1}^n \infty_k \right),$$

еще один вектор оказывается выделенным в конструкции монополей. Положим

$$\widetilde{K} = K + \phi \left((n-2) \sum_{k=1}^n \infty_k \right),$$

где K – вектор римановых констант; выражения для него приведены в приложении. Отметим несколько свойств данного вектора. Во-первых, $\widetilde{K}$ не зависит от выбора базисной точки отображения Абеля, так как

$$\widetilde{K}_P = K_P + \phi_P \left((n-2) \sum_{k=1}^n \infty_k \right) = K_Q + (g-1)\phi_Q(P) + \phi_P \left((n-2) \sum_{k=1}^n \infty_k \right) = \widetilde{K}_Q,$$

где было использовано то, что $g-1 = (n-1)^2 - 1 = n(n-2)$. Из того же самого равенства вытекает, что $\widetilde{K} \in K + \phi(\mathcal{C}^{g-1})$, так что, во-вторых,

$$\theta(\widetilde{K}) = 0. \quad (3.1)$$

Мы уже получили формулу $\text{Div } \pi^* \mathcal{O}(1) = \sum_{k=1}^n \infty_k$, откуда $\text{Div } \pi^* \mathcal{O}(2n-4) = 2(n-2) \sum_{k=1}^n \infty_k$. После этого Хитчин, используя формулы сопряжения, установил, что

$$K_C = \pi^* \mathcal{O}(2n-4).$$

Тем самым, применяя формулу (П.7) (см. приложение), получим

$$2\widetilde{K} = 2K + \phi \left(2(n-2) \sum_{k=1}^n \infty_k \right) = 2K + \phi(\text{Div}(K_C)) = 0.$$

Поэтому, в третьих, имеет место вложение в решетку:

$$2\widetilde{K} \in \Lambda. \quad (3.2)$$

Наконец, из теоремы Римана об обращении в нуль линейного расслоения степени $g - 1$,

$$\text{multiplicity}_L \theta = \text{Dim } H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L)),$$

и того обстоятельства, что каждое из $n - 1$ сечений расслоения $\mathcal{O}(n - 2)$ над $\mathbb{P}^1$ задает сечения его поднятия, получим

$$\text{multiplicity}_{\widetilde{K}} \theta = \text{Dim } H^0(\mathcal{C}, \pi^* \mathcal{O}(n - 2)) \geq n - 1.$$

Поэтому, в четвертых, при $n \geq 3$ имеем вложение

$$\widetilde{K} \in \Theta_{\text{singular}}. \quad (3.3)$$

В самом деле, из работы [3] (см. там свойство 4.5) получим, что индекс специально-сти величины $(n - 2) \sum_{k=1}^n \infty_k$ равен

$$s \equiv i \left((n - 2) \sum_{k=1}^n \infty_k \right) = \text{Dim } H^0(\mathcal{C}, \pi^* \mathcal{O}(n - 2)) = \begin{cases} \frac{1}{4} n^2, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \frac{1}{4} (n^2 - 1), & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Отсюда можно заключить, что все частные производные дивизора θ обращаются в нуль вплоть до порядка $s - 1$ в точке $\widetilde{K}$. Тем самым $\widetilde{K}$ оказывается выделенной точкой, которую Хитчин использовал при отождествлении линейных расслоений степени $g - 1$ с собственным якобианом $\text{Jac}(\mathcal{C})$. Наконец, отметим, что $(n - 2) \sum_{k=1}^n \infty_k$ и $\Delta_j - \infty_j$ (при каждом j) суть тета-характеристики (см. приложение).

С помощью точки $\widetilde{K}$ функции (2.28) и (2.29) можно представить в виде

$$\Psi_j(z, P) = g_j(P) \frac{\theta_{m/2, n/2}(\phi(P) - \phi(\infty_j) + zU - \widetilde{K}) \theta_{m/2, n/2}(-\widetilde{K})}{\theta_{m/2, n/2}(\phi(P) - \phi(\infty_j) - \widetilde{K}) \theta_{m/2, n/2}(zU - \widetilde{K})} e^{z \int_{P_0}^P \gamma_\infty - z\nu_j}, \quad (3.5)$$

$$(Q_0(z))_{jl} = -(\rho_j - \rho_l) c_{jl} e^{z[\nu_l - \nu_j]} \frac{\theta_{m/2, n/2}(\phi(\infty_l) - \phi(\infty_j) + zU - \widetilde{K}) \theta_{m/2, n/2}(-\widetilde{K})}{\theta_{m/2, n/2}(\phi(\infty_l) - \phi(\infty_j) - \widetilde{K}) \theta_{m/2, n/2}(zU - \widetilde{K})}, \quad (3.6)$$

где параметры c_{jl} определяются формулами (2.30).

Матрица Q_0 должна удовлетворять условию $Q_0(z) = Q_0(-z)^T$. Найдем, что

$$Q_0(0) = Q_0(0)^T \iff c_{jl} = -c_{lj}.$$

Отсюда с учетом (3.2) получаем, что $Q_0(z) = Q_0(-z)^T$. Поэтому необходимо потребовать выполнения условий антисимметрии $c_{jl} = -c_{lj}$.

Прежде чем продолжить исследование, рассмотрим поведение функции (3.6). Согласно наложенному условию $z = 0$ должна быть регулярной точкой. Это эквивалентно наложению условия $\text{Dim } H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(L_{\Delta_j - \infty_j})) = 0$, откуда

$$0 \neq \theta(\phi(\Delta_j - \infty_j) + K) = \theta \left(U + \phi \left((n - 2) \sum_{k=1}^n \infty_k \right) + K \right) = \theta(U + \widetilde{K}), \quad (3.7)$$

и, соответственно, $U \pm \widetilde{K}$ – несингулярная четная тета-характеристика. Тем самым получается условие, налагаемое на вектор Эрколани–Синха.

ЛЕММА 3.1. $U \pm \widetilde{K}$ – несингулярная четная тета-характеристика.

Далее из конструкции Нама вытекает условие, что функция (3.6) должна иметь полюсы при $z = \pm 1$. Поскольку $2\widetilde{K} \in \Lambda$ и $2U \in \Lambda$, можно заключить, что порядок нуля $\theta(\widetilde{K})$ в направлении вектора U должен быть на единицу выше порядка нуля $\theta(\phi(\infty_l) - \phi(\infty_j) + \widetilde{K})$ в том же направлении (для каждого $j \neq l$). В принципе порядок нуля может превосходить порядок, предсказываемый индексом специальности и теоремой Римана о нулях, поскольку оба эти утверждения устанавливают только минимальный порядок, до которого все производные равны нулю, и могут существовать направления, в которых порядок нуля окажется выше. Искомое свойство обращения в нуль (3.6) можно вывести из следующего равенства для тета-функций:

$$\frac{\theta(\phi(Q) - \phi(P) + e)\theta(\phi(Q) - \phi(P) - e)}{\theta^2(e)E(P, Q)^2} = \Omega_B(P, Q) + \sum_{i,k=1}^g \frac{\partial^2 \ln \theta(e)}{\partial z_i \partial z_k} v_i(P) v_k(Q),$$

которое справедливо при всех $P, Q \in \mathcal{C}$ и $e \in \mathbb{C}^g$ (см. монографию [13]). Здесь $E(P, Q) = \mathcal{E}(P, Q)/\sqrt{dx(P)dx(Q)}$ – прим-форма, а $\Omega_B(P, Q)$ – симметрический нормированный дифференциал на $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ с полюсами только на диагонали. Поскольку $\widetilde{K}$ – полупериод, $2\widetilde{K} = p + \tau q$ для $p, q \in \mathbb{Z}^g$, и можно применить это тождество для получения выражения вида

$$F(s)F(-s) = G(s)e(s),$$

где

$$F(s) = \frac{\theta(\phi(\infty_l) - \phi(\infty_j) + sU - \widetilde{K})}{E(\infty_j, \infty_l)},$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \theta^2(sU - \widetilde{K})\Omega_B(\infty_j, \infty_l) + \\ &+ \sum_{i,k=1}^g \left(\frac{\partial^2 \theta(sU - \widetilde{K})}{\partial z_i \partial z_k} \theta(sU - \widetilde{K}) - \frac{\partial \theta(sU - \widetilde{K})}{\partial z_i} \frac{\partial \theta(sU - \widetilde{K})}{\partial z_k} \right) v_i(\infty_j) v_k(\infty_l), \\ e(s) &= e^{i\pi[q \cdot \tau \cdot q + 2q \cdot (\phi(\infty_l) - \phi(\infty_j) + sU - \widetilde{K})]}. \end{aligned}$$

Сравнивая ряды Тейлора по переменной s , получим, что если порядок нуля $\theta(sU - \widetilde{K})$ равен m , а порядок нуля $\theta(\phi(\infty_l) - \phi(\infty_j) + sU - \widetilde{K})$ равен k , то $2k = 2m - 2$. Таким образом, порядок нуля знаменателя в выражении (3.6) на единицу больше порядка нуля числителя и, соответственно, в точках $z = \pm 1$ появляются простые полюсы. При $n \geq 3$ дивизор $\infty_j - \infty_l + (n - 2) \sum_{k=1}^n \infty_k$ оказывается специальным.

3.2. Матрица $Q_0(z)$. Осталось обсудить задачу определения параметров c_{jl} . До сих пор в описываемом построении они содержали зависимость от дивизора δ . В этом пункте доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. Матрицу $Q_0(z)$, имеющую полюсы первого порядка в точках $z = \pm 1$, можно записать в виде

$$Q_0(z)_{jl} = \epsilon_{jl} \frac{\rho_j - \rho_l}{\mathcal{E}(\infty_j, \infty_l)} e^{i\pi \tilde{q} \cdot (\phi(\infty_l) - \phi(\infty_j))} \frac{\theta(\phi(\infty_l) - \phi(\infty_j) + [z + 1]U - \widetilde{K})}{\theta([z + 1]U - \widetilde{K})} e^{z(\nu_l - \nu_j)}. \quad (3.8)$$

Здесь $E(P, Q) = \mathcal{E}(P, Q) / \sqrt{dx(P)dx(Q)}$ – прим-форма Шоттки–Клейна, $U - \widetilde{K} = \tilde{p}/2 + \tau\tilde{q}/2$, $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{Z}^g$, – несингулярная четная тета-характеристика, а $\epsilon_{jl} = \epsilon_{lj} = \pm 1$ – символ, определяемый (при $j < l$) формулами $\epsilon_{jl} = \epsilon_{jj+1}\epsilon_{j+1j+2} \dots \epsilon_{l-1l}$. Выбор $n-1$ членов $\epsilon_{jj+1} = \pm 1$ произволен.

Отметим, что прим-форму можно определить в терминах тета-функций с нечетной несингулярной характеристикой, при этом сама прим-форма от выбора этой характеристики не зависит. Построение (3.8) зависит от этого выбора посредством величины $\mathcal{E}(\infty_j, \infty_l)$, но два произвольных выбора приводят к функциям $Q_0(z)$, отличающимся на постоянное диагональное преобразование, т. е. к произволу, отмеченному выше. Отметим также, что выбор контуров, который неявно предполагается в определении $\phi(\infty_l)$, один и тот же в каждом члене формулы (3.8), включая и тот, который неявно возникает в пределе (2.27). Итогом перехода к этому контуру оказывается постоянное калибровочное преобразование с диагональной матрицей с элементами ± 1 , что и объясняет произвол в выборе знаков ϵ_{jl} в формулировке теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобно ввести следующие сокращенные обозначения для комбинации функций, часто возникающей в настоящей работе. Для произвольного дивизора $\mathcal{A}$ положим

$$\langle P - \mathcal{A} \rangle \equiv \theta(\phi(P) - \phi(\mathcal{A}) - K).$$

Функция $g_j(P)$ была выбрана в виде

$$g_j(P_j) = 1, \quad \text{Div } g_j(P) = \Delta_j - P_j + \sum_{k=1}^n P_k - \delta.$$

Функцию $g_j(P)$ можно представить несколькими способами. Во-первых, как

$$g_j(P) = \frac{f_j(P)}{f_j(P_j)},$$

где

$$f_j(P) = \frac{\langle P - \Delta_j \rangle}{\langle P - \tilde{\delta} - \delta_{g-1+j} \rangle} \prod_{t \neq j} \frac{\langle P - \tilde{\delta} - P_t \rangle}{\langle P - \tilde{\delta} - \delta_{g-1+t} \rangle},$$

$$\tilde{\delta} = \sum_{k=1}^{g-1} \delta_k, \quad \delta = \sum_{k=1}^{g+n-1} \delta_k.$$

Эта форма использовалась при общем обсуждении функции Бейкера–Ахиезера. В случае монополя имеем $g = (n-1)^2 \geq n-1$ для $n \geq 2$, и имеет место второе, более экономичное представление. Можно взять

$$f_j(P) = \frac{\langle P - \sum_{k \neq j} P_k - \sum_{s=1}^{g-(n-1)} \delta_s \rangle \langle P - \Delta_j \rangle}{\langle P - \sum_{t=1}^{n-1} \delta_{t+g-(n-1)} - \sum_{s=1}^{g-(n-1)} \delta_s \rangle \langle P - \sum_{t=1}^{n-1} \delta_{t+g} - \sum_{s=1}^{g-(n-1)} \delta_s \rangle} =$$

$$= \frac{\langle P - \sum_{k \neq j} P_k - \hat{\delta} \rangle \langle P - \Delta_j \rangle}{\langle P - \delta^{(1)} - \hat{\delta} \rangle \langle P - \delta^{(2)} - \hat{\delta} \rangle},$$

где

$$\hat{\delta} = \sum_{k=1}^{g-(n-1)} \delta_k, \quad \delta^{(1)} = \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{g-(n-1)+j}, \quad \delta^{(2)} = \sum_{j=1}^{n-1} \delta_{g+j}.$$

Тогда $\delta = \hat{\delta} + \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$.

Мы имеем

$$\begin{aligned} \Psi_j(P) &= g_j(P) \frac{\langle P_j - \Delta_j \rangle}{\langle P - \Delta_j \rangle} \frac{\theta(\phi(P) - \phi(P_j) + (z+1)U - \widetilde{K})}{\theta((z+1)U - \widetilde{K})} e^{z[\int_{P_0}^P \gamma_\infty - \nu_j]}, \\ Q_0(z)_{jl} &= -(\rho_j - \rho_l) \hat{c}_{jl} \frac{\theta(\phi(P_l - P_j) + (z+1)U - \widetilde{K})}{\theta((z+1)U - \widetilde{K})} e^{z(\nu_l - \nu_j)}, \\ \hat{c}_{jl} &= \lim_{P \rightarrow P_l} \zeta g_j(P) \frac{\langle P_j - \Delta_j \rangle}{\langle P - \Delta_j \rangle} \equiv c_{jl} \frac{\langle P_j - \Delta_j \rangle}{\langle P_l - \Delta_j \rangle} = c_{jl} \frac{\theta(U - \widetilde{K})}{\theta(\phi(P_l - P_j) + U - \widetilde{K})}, \end{aligned}$$

где $c_{jl} = \lim_{P \rightarrow P_l} \zeta g_j(P)$ – постоянная Эрколани–Синха. Отметим, что следует проявлять аккуратность при перегруппировании комбинации из тета-функций в нашем выражении для Q_0 и проследивать их свойства квазипериодичности. Если $2(U - \widetilde{K}) = \tilde{p} + \tau \tilde{q}$, $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{Z}^g$, то

$$\begin{aligned} c_{jl} = -c_{lj} &\iff \hat{c}_{jl} = -\hat{c}_{lj} e^{2\pi i [\tilde{q} \cdot (\phi(P_l - P_j) + U - \widetilde{K}) - (\tilde{q}/2) \cdot \tau \tilde{q}]} \iff \\ &\iff \hat{c}_{jl} = -\hat{c}_{lj} e^{2\pi i \tilde{q} \cdot \phi(P_l - P_j)}. \end{aligned}$$

Здесь было использовано то, что $U - \widetilde{K}$ – четная тета-характеристика.

Применяя второе представление для $f_j(P)$, вычислим

$$\begin{aligned} \hat{c}_{jl} &= \lim_{P \rightarrow P_l} \zeta \frac{f_j(P)}{f_j(P_j)} \frac{\langle P_j - \Delta_j \rangle}{\langle P - \Delta_j \rangle} = \\ &= \lim_{P \rightarrow P_l} \zeta \frac{\langle P - \sum_{k \neq j} P_k - \hat{\delta} \rangle}{\langle P - \delta^{(1)} - \hat{\delta} \rangle \langle P - \delta^{(2)} - \hat{\delta} \rangle} \frac{\langle P_j - \delta^{(1)} - \hat{\delta} \rangle \langle P_j - \delta^{(2)} - \hat{\delta} \rangle}{\langle P_j - \sum_{k \neq j} P_k - \hat{\delta} \rangle}. \end{aligned}$$

Используя теперь формулу (2.17) из работы [13], получим

$$\left\langle P - \sum_{i=1}^g x_i \right\rangle = c \frac{\det(v_i(x_j))}{\prod_{i < j} E(x_i, x_j)} \frac{\sigma(P)}{\prod_{i=1}^g \sigma(x_i)} \prod_{i=1}^g E(x_i, P),$$

где

$$\sigma(P) = \exp \left(- \sum_{s=1}^g \oint_{\mathbf{a}_s} v_s(y) \ln E(y, P) \right).$$

При выборе $\{x_i^{(0)}\} = \{P_k\}_{k \neq j} \cup \hat{\delta}$, $\{x_i^{(1)}\} = \delta^{(1)} \cup \hat{\delta}$ и $\{x_i^{(2)}\} = \delta^{(2)} \cup \hat{\delta}$ это дает

$$\hat{c}_{jl} = \lim_{P \rightarrow P_l} \zeta \frac{\sigma(P)}{\sigma(P_j)} \prod_{i=1}^g \frac{E(x_i^{(0)}, P)}{E(x_i^{(0)}, P_j)} \left[\frac{\sigma(P_j)}{\sigma(P)} \right]^2 \prod_{i=1}^g \left[\frac{E(x_i^{(1)}, P_j)}{E(x_i^{(1)}, P)} \frac{E(x_i^{(2)}, P_j)}{E(x_i^{(2)}, P)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{P \rightarrow P_l} \zeta \frac{\sigma(P_j)}{\sigma(P)} \left[\prod_{k \neq j} \frac{E(P_k, P)}{E(P_k, P_j)} \prod_{\substack{\delta_i \in \delta^{(1)} \\ \delta_r \in \hat{\delta}, \delta_s \in \delta^{(2)}}} \frac{E(\delta_i, P_j) E(\delta_r, P_j) E(\delta_s, P_j)}{E(\delta_i, P) E(\delta_r, P) E(\delta_s, P)} \right] = \\
&= \left[\lim_{P \rightarrow P_l} \zeta \frac{\sigma(P_j)}{\sigma(P)} \frac{E(P_l, P)}{E(P_l, P_j)} \prod_{k \neq l, j} \frac{E(P_k, P)}{E(P_k, P_j)} \right] \prod_{i=1}^{g+n-1} \frac{E(\delta_i, P_j)}{E(\delta_i, P_l)} = \\
&= \left[\lim_{P \rightarrow P_l} \zeta \frac{E(P_l, P)}{E(P_l, P_j)} \right] \frac{\sigma(P_j)}{\sigma(P_l)} \prod_{k \neq l, j} \frac{E(P_k, P_l)}{E(P_k, P_j)} \prod_{i=1}^{g+n-1} \frac{E(\delta_i, P_j)}{E(\delta_i, P_l)}.
\end{aligned}$$

Прим-форма $E(P, Q)$, появляющаяся в данном выражении, есть дифференциал веса $(-1/2, -1/2)$ на $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Если $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – несингулярная нечетная тета-характеристика, то можно записать

$$E(P, Q) = \frac{\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\phi(P) - \phi(Q))}{h_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(P) h_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(Q)}, \quad h_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^2(P) = \sum_{r=1}^g \frac{\partial \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(0)}{\partial z_r} v_r(P). \quad (3.9)$$

Прим-форма не зависит от выбора векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Примечательно то, что в вышеприведенном выражении $(1/2)$ -дифференциалы $h_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ в числителе и знаменателе в точности сокращаются, если заметить, что все точки P_k суть прообразы одной и той же точки $P \in \mathbb{P}^1$. Удобно записать

$$E(P, Q) = \frac{\mathcal{E}(P, Q)}{\sqrt{dx(P) dx(Q)}}. \quad (3.10)$$

Производя предельный переход, получим $\lim_{P \rightarrow \infty_l} \zeta \mathcal{E}(\infty_l, P) = 1$, что приводит к соотношению

$$\hat{c}_{jl} \mathcal{E}(P_l, P_j) = \frac{\sigma(P_j)}{\sigma(P_l)} \prod_{k \neq l, j} \frac{E(P_k, P_l)}{E(P_k, P_j)} \prod_{i=1}^{g+n-1} \frac{E(\delta_i, P_j)}{E(\delta_i, P_l)}.$$

Применяя свойство антисимметричности примарной формы, $E(P_l, P_j) = -E(P_j, P_l)$, получим

$$\begin{aligned}
c_{jl} = -c_{lj} &\iff \left[\sigma(P_l) \frac{\prod_{i=1}^{g+n-1} E(\delta_i, P_l)}{\prod_{k \neq l, j} E(P_k, P_l)} e^{i\pi \tilde{q} \cdot \phi(P_l)} \right]^2 = \\
&= \left[\sigma(P_j) \frac{\prod_{i=1}^{g+n-1} E(\delta_i, P_j)}{\prod_{k \neq l, j} E(P_k, P_j)} e^{i\pi \tilde{q} \cdot \phi(P_j)} \right]^2.
\end{aligned}$$

Но это свойство должно выполняться при всех $j \neq l$, что возможно, только если

$$c_{jl} = -c_{lj} \iff \left[\sigma(P_j) \frac{\prod_{i=1}^{g+n-1} E(\delta_i, P_j)}{\prod_{k \neq j} E(P_k, P_j)} e^{i\pi \tilde{q} \cdot \phi(P_j)} \right]^2 = c^2$$

при некотором постоянном c , не зависящем от j . Это в свою очередь приводит к соотношению

$$\frac{\sigma(P_j)}{\sigma(P_l)} \prod_{k \neq l, j} \frac{E(P_k, P_l)}{E(P_k, P_j)} \prod_{i=1}^{g+n-1} \frac{E(\delta_i, P_j)}{E(\delta_i, P_l)} = \epsilon_{jl} e^{i\pi \tilde{q} \cdot (\phi(P_l) - \phi(P_j))} = \pm e^{i\pi \tilde{q} \cdot (\phi(P_l) - \phi(P_j))}. \quad (3.11)$$

Поскольку зна́ковые параметры ϵ_{jl} имеют вид s_j/s_l (где $s_j = \pm c$), в этом случае в модели присутствуют $n - 1$ условий связи, которые можно фиксировать выбором величин ϵ_{jj+1} . Таким образом, имеются 2^{n-1} различных вариантов выбора знаков величин ϵ_{jl} . В итоге получаем следующее утверждение:

$$\hat{c}_{jl}\mathcal{E}(P_l, P_j) = \epsilon_{jl}e^{i\pi\tilde{q}\cdot(\phi(P_l)-\phi(P_j))}. \quad (3.12)$$

Рассмотрим различные возможные ограничения. После того как найден вектор U и в силу того, что величины $\phi(P_j)$ фиксированы выбором отображения Абеля, имеем

$$\phi(\Delta_j) = \phi\left(P_j + (n-2)\sum_{k=1}^n P_k\right) + U.$$

Это выражение задает эффективный дивизор Δ_j степени g . При этом на дивизор δ степени $g + n - 1$ налагается условие

$$\delta \sim \Delta_j - P_j + \sum_{k=1}^n P_k, \quad \phi(\delta) = \phi\left(\Delta_j - P_j + \sum_{k=1}^n P_k\right) = U + (n-1)\phi\left(\sum_{k=1}^n P_k\right),$$

которое добавляет еще g ограничений в дополнение к $n - 1$ условию из формулы (3.11). Таким образом, в случае неспециального дивизора δ степени $g + n - 1$ налагаются $g + n - 1$ условий. Отметим здесь, что $n - 1$ ограничение из формулы (3.11), имеющие вид s_j/s_l , соответствуют свободе в выборе постоянной диагональной калибровки, которая наличествует в матрице $Q_0(z)$. Выбор решения для условий (3.11) эквивалентен выбору калибровки.

Представим на время, что существует дивизор δ , удовлетворяющий всем вышеприведенным требованиям. Если это так, то, учитывая все полученные выше результаты, теорема оказывается полностью доказанной и имеют место равенства

$$Q_0(z)_{jl} = \epsilon_{jl} \frac{\rho_j - \rho_l}{\mathcal{E}(P_j, P_l)} e^{i\pi\tilde{q}\cdot(\phi(P_l)-\phi(P_j))} \frac{\theta(\phi(P_l - P_j) + [z+1]U - \widetilde{K})}{\theta([z+1]U - \widetilde{K})} e^{z(\nu_l - \nu_j)},$$

в которых $\epsilon_{jl} = \epsilon_{lj} = \pm 1$ задаются (при $j < l$) формулами $\epsilon_{jl} = \epsilon_{jj+1}\epsilon_{j+1j+2}\dots\epsilon_{l-1l}$, а $n - 1$ знаковых величин $\epsilon_{jj+1} = \pm 1$ остаются произвольными.

Альтернативное вычисление. В вышеприведенном доказательстве применялась вторая параметризация функций $f_j(P)$. Точно такие же условия связей возникают, если применить первую из параметризаций:

$$g_j(P) = \frac{f_j(P)}{f_j(P_j)}, \quad f_j(P) = \frac{\langle P - \Delta_j \rangle}{\langle P_j - \tilde{\delta} - \delta_{g-1+j} \rangle} \prod_{t \neq j} \frac{\langle P - P_t - \tilde{\delta} \rangle}{\langle P - \delta_{g-1+t} - \tilde{\delta} \rangle},$$

где $\tilde{\delta} = \sum_{k=1}^{g-1} \delta_k$. Пусть $\{\tilde{x}^{(l)}\} = \{P_l, \tilde{\delta}\}$, $\tilde{y}^{(l)} = \{\delta_{g-1+l}, \tilde{\delta}\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\langle P - P_t - \tilde{\delta} \rangle}{\langle P_j - P_t - \tilde{\delta} \rangle} \frac{\langle P_j - \delta_{g-1+t} - \tilde{\delta} \rangle}{\langle P - \delta_{g-1+t} - \tilde{\delta} \rangle} &= \frac{\sigma(P)}{\sigma(P_j)} \left(\prod_{k \neq t} \frac{E(\tilde{x}^{(k)}, P)}{E(\tilde{x}^{(k)}, P_j)} \frac{E(\tilde{y}^{(k)}, P_j)}{E(\tilde{y}^{(k)}, P)} \right) \frac{\sigma(P_j)}{\sigma(P)} = \\ &= \frac{E(P_t, P)}{E(P_t, P_j)} \frac{E(\delta_{g-1+t}, P_j)}{E(\delta_{g-1+t}, P)}. \end{aligned}$$

Теперь снова вычислим

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_{jl} &= \lim_{P \rightarrow P_l} \zeta \frac{f_j(P)}{f_j(P_j)} \frac{\langle P_j - \Delta_j \rangle}{\langle P - \Delta_j \rangle} = \\
 &= \lim_{P \rightarrow P_l} \zeta \frac{\langle P_j - \tilde{\delta} - \delta_{g-1+j} \rangle}{\langle P - \tilde{\delta} - \delta_{g-1+j} \rangle} \prod_{t \neq j} \frac{E(P_t, P)}{E(P_t, P_j)} \frac{E(\delta_{g-1+t}, P_j)}{E(\delta_{g-1+t}, P)} = \\
 &= \lim_{P \rightarrow P_l} \zeta \frac{\sigma(P_j)}{\sigma(P)} \left(\prod_{k=1}^{g-1} \frac{E(\delta_k, P_j)}{E(\delta_k, P)} \right) \frac{E(\delta_{g-1+j}, P_j)}{E(\delta_{g-1+j}, P)} \prod_{t \neq j} \frac{E(P_t, P) E(\delta_{g-1+t}, P_j)}{E(P_t, P_j) E(\delta_{g-1+t}, P)}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\hat{c}_{jl} E(P_l, P_j) = \left[\lim_{P \rightarrow P_l} \zeta E(P_l, P) \right] \frac{\sigma(P_j)}{\sigma(P_l)} \prod_{k \neq l, j} \frac{E(P_k, P_l)}{E(P_k, P_j)} \prod_{i=1}^{g+n-1} \frac{E(\delta_i, P_j)}{E(\delta_i, P_l)},$$

что совпадает с выражением, полученным предыдущим методом. Теорема доказана.

Новое выражение для $Q_0(z)$ получается, если справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть заданы n постоянных величин (общего вида) $\alpha_j \neq 0$. Тогда существует неспециальный дивизор $\delta = \sum_{s=1}^{g+n-1} \delta_s$ степени $g+n-1$, для которого

$$\phi \left(\delta - (n-1) \sum_{k=1}^n \infty_k \right) = U, \quad (3.13)$$

удовлетворяющий $n-1$ (эквивалентным) условиям связи:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & \alpha_1 \prod_{s=1}^{g+n-1} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_1}^{\delta_s} \mathbf{v} \right) = \alpha_2 \prod_{s=1}^{g+n-1} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_2}^{\delta_s} \mathbf{v} \right) = \dots = \alpha_n \prod_{s=1}^{g+n-1} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_n}^{\delta_s} \mathbf{v} \right); \\
 \text{б)} \quad & \prod_{i=1}^{g+n-1} \frac{E(\delta_i, \infty_s)}{E(\delta_i, \infty_n)} = \tilde{\alpha}_s, \quad s = 1, \dots, n-1; \\
 \text{в)} \quad & \sum_{i=1}^{g+n-1} \int_{P_0}^{\delta_i} \omega_{\infty_s, \infty_n}(P) = \hat{\alpha}_s, \quad s = 1, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\alpha}_s = \alpha_n / \alpha_s$ и $\hat{\alpha}_s = \ln \tilde{\alpha}_s - (g+n-1) \ln [E(P_0, \infty_s) / E(P_0, \infty_n)]$, ϕ – отображение Абеля, $\mathbf{v}$ – $\mathbf{a}$ -нормированные голоморфные дифференциалы, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – несингулярная нечетная $(1/2)$ -тета-характеристика, а U представляет собой еще более специализированную $(1/2)$ -тета-характеристику. Эквивалентность условий связи “а” и “б” можно проследить, если выписать прим-форму через тета-функции (3.9) и заметить, что $(1/2)$ -дифференциалы $h_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ в определении прим-формы в числителе и знаменателе в точности сокращаются (каждая из точек ∞_k является прообразом одной и той же точки $\infty \in \mathbb{P}^1$). Доказательство эквивалентности условию “в” становится полным, если применить выражение

$$\omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}(P) = d \ln \prod_{j=1}^m \frac{E(P, P_j)}{E(P, Q_j)}, \quad (3.14)$$

в котором $\mathcal{P} = P_1 + \dots, P_m$, а $\mathcal{Q} = Q_1 + \dots + Q_m$ – дивизоры одной и той же степени m . Например,

$$\omega_{\infty_s, \infty_n}(P) = d \ln \frac{E(P, \infty_s)}{E(P, \infty_n)},$$

и тем самым

$$\int_{P_0}^{\delta_i} \omega_{\infty_s, \infty_n}(P) = \ln \frac{E(\delta_i, \infty_s)}{E(\delta_i, \infty_n)} - \ln \frac{E(P_0, \infty_s)}{E(P_0, \infty_n)}.$$

Утверждение предложения теперь представляет собой обобщение стандартной операции обращения отображения Абеля–Якоби: формула (3.13) есть обычное отображение Абеля–Якоби, а условие (в) добавляет к стандартным голоморфным дифференциалам абелевы дифференциалы третьего рода. Такие обобщенные отображения Абеля–Якоби часто возникают при рассмотрении интегрируемых систем. Клебш и Гордан в книге [14] исследовали ситуацию, когда помимо голоморфных дифференциалов имеются n абелевых дифференциалов ω_{X_i, Y_i} третьего рода в случае, когда все пары (X_i, Y_i) различны (этого достаточно для решения случая рода один и $n = 2$). В дальнейшем эту теорию развил Федоров в работе [15]. Хотя представленная здесь форма условия (в), в которой имеется общая для всех абелевых дифференциалов точка, по-видимому, является новой, подход работы [15] применим и в этом случае, и соответствующее доказательство предложения можно найти в работе [16].

3.3. Составные элементы конструкции. Теперь уместно воспроизвести элементы, обеспечивающие эффективность нашего построения величины Q_0 , что является вторым шагом в конструкции Эрколани–Синха при построении данных Нама. На первом шаге были вычислены корни ρ_j многочлена (2.13).

Конструкция полностью базируется на тета-функции, построенной над спектральной кривой. Поэтому необходимо произвести следующие вычисления:

- 1) построить матрицу периодов τ , связанную с кривой $\mathcal{C}$;
- 2) определить полупериод $\widetilde{\mathbf{K}}$;
- 3) построить вектор Эрколани–Синха $\mathbf{U}$;
- 4) для нормированных голоморфных дифференциалов $\mathbf{v}$ вычислить интегралы $\int_{\infty_i}^{\infty_j} \mathbf{v} = \phi(\infty_j) - \phi(\infty_i)$;
- 5) найти прим-форму $E(\infty_j, \infty_i)$;
- 6) найти $\gamma_\infty(P)$ и $\nu_i = \lim_{P \rightarrow \infty_i} (\int_{P_0}^P \gamma_\infty(P') + (\eta/\zeta)(P))$.

3.4. Фундаментальный бидифференциал. Опишем теперь, как можно вычислить мероморфный дифференциал γ_∞ и постоянные, появляющиеся в конструкции Эрколани–Синха. Все эти величины могут быть выражены в терминах фундаментального бидифференциала.

Пусть $\mathbf{v}$ – вектор, составленный из $\mathfrak{a}$ -нормированных голоморфных дифференциалов и имеющий разложение (2.40). Введем производные по направлениям вдоль векторных полей $\mathbf{V}^{(i)}$, $\mathbf{W}^{(i)}$ и т.д. в соответствии со стандартными формулами:

$$\partial_{\mathbf{V}} f(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^g V_k \frac{\partial}{\partial v_k} f(\mathbf{v}), \quad \partial_{\mathbf{V}, \mathbf{W}} f(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^g \sum_{l=1}^g V_k W_l \frac{\partial^2}{\partial v_k \partial v_l} f(\mathbf{v}).$$

Напомним (см. монографию [13]), что фундаментальный бидифференциал $\Omega_{\mathbf{B}}$ представляет собой симметричный 2-дифференциал второго рода, заданный на $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ и однозначно фиксируемый условием

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathbf{B}}(P, Q) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_Q^P \mathbf{v} \right) dx dy = \\ &= \left(\frac{1}{(x(P) - y(Q))^2} + \text{несингулярные члены} \right) dx dy,\end{aligned}\quad (3.15)$$

где P, Q – две различные точки на кривой $\mathcal{C}$ с локальными координатами $x(P), y(Q)$, а $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ – нечетная несингулярная полуцелая тета-характеристика. Это ядро имеет полюс второго порядка на диагонали. Для фиксированной точки $Q \in \mathcal{C}$ имеем

$$\oint_{\mathbf{a}_j} \Omega_{\mathbf{B}}(P, Q) = 0, \quad \oint_{\mathbf{b}_j} \Omega_{\mathbf{B}}(P, Q) = 2\pi i v_j(Q). \quad (3.16)$$

Для каждой точки бесконечности ∞_i , $i = 1, \dots, n$, рассмотрим дифференциал второго рода

$$\Omega_{\mathbf{B}}^{(i)}(P) = \left. \frac{\Omega_{\mathbf{B}}(P, Q)}{dt(Q)} \right|_{Q=\infty_i} = - \sum_{k,l=1}^g \frac{\partial^2}{\partial z^k \partial z^l} \ln \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_i}^P \mathbf{v} \right) v_k(P) \frac{v_l(Q)}{dt(Q)} \Big|_{Q=\infty_i},$$

где через $t(Q)$ обозначена локальная координата в окрестности точки Q . Из разложения (2.40) получим, что $v_l(Q)/dt(Q) \rightarrow V_l^{(i)}$ при $Q \rightarrow \infty_i$. Применяя формулу (3.16), имеем

$$\oint_{\mathbf{a}_l} \Omega_{\mathbf{B}}^{(i)}(P) = 0, \quad \oint_{\mathbf{b}_l} \Omega_{\mathbf{B}}^{(i)}(P) = 2i\pi V_l^{(i)} \quad l = 1, \dots, g. \quad (3.17)$$

Величины $\int_{P_0}^P \Omega_{\mathbf{B}}^{(i)}(P)$ при этом становятся абелевыми интегралами второго рода с единственным полюсом первого порядка в точке ∞_i . Далее, из формулы (3.15) видим, что если $t(P)$ задает локальную координату в окрестности точки ∞_i , то $\Omega_{\mathbf{B}}^{(i)}(P) = (1/t^2 + \text{регулярная часть}) dt$. Отсюда и из условия (3.17) получим условия

$$\gamma_{\infty}(P) = \sum_{i=1}^n \rho_i \Omega_{\mathbf{B}}^{(i)}(P) = - \frac{\partial}{\partial x(P)} \sum_{i=1}^n \rho_i \partial_{\mathbf{V}^{(i)}} \ln \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_i}^P \mathbf{v} \right) dx(P) \quad (3.18)$$

и $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^g \rho_i \mathbf{V}^{(i)}$. Теперь

$$\int_{P_0}^P \Omega_{\mathbf{B}}^{(i)}(P') = \int_{P_0}^P - \frac{\partial}{\partial x(P')} \partial_{\mathbf{V}^{(i)}} \ln \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_i}^{P'} \mathbf{v} \right) dx(P') = - \partial_{\mathbf{V}^{(i)}} \ln \left[\frac{\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_i}^P \mathbf{v} \right)}{\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_i}^{P_0} \mathbf{v} \right)} \right].$$

Объединяя этот результат с формулами (3.18), получаем

$$\begin{aligned}\nu_i &= \lim_{P \rightarrow \infty_i} \left(\int_{P_0}^P \gamma_{\infty}(P') + \frac{\eta}{\zeta}(P) \right) = \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty_i} \rho_i \left[\frac{1}{t(P)} - \partial_{\mathbf{V}^{(i)}} \ln \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_i}^P \mathbf{v} \right) \right] - \\ &\quad - \sum_{j \neq i} \rho_j \partial_{\mathbf{V}^{(j)}} \ln \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_j}^{\infty_i} \mathbf{v} \right) + \text{Res}_{\infty_i} \frac{\eta}{\zeta^2} + c(P_0),\end{aligned}$$

где $c(P_0) = \sum_{i=1}^n \rho_i \partial_{\mathbf{V}^{(i)}} \ln \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_i}^{P_0} \mathbf{v} \right)$ – постоянная, не зависящая от индекса i . Первый из предельных переходов можно вычислить непосредственно. Рассмотрим для краткости изложения случай исчезновения производных первого порядка. В терминах локальной координаты t при этом получаем

$$\lim_{P \rightarrow \infty_i} \partial_{\mathbf{V}^{(i)}} \ln \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_i}^P \mathbf{v} \right) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \frac{\partial_{\mathbf{V}^{(i)}, \mathbf{V}^{(i)}}^2 \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{0})}{\partial_{\mathbf{V}^{(i)}} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{0})} - \frac{1}{2} \frac{\partial_{\mathbf{W}^{(i)}} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{0})}{\partial_{\mathbf{V}^{(i)}} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{0})} + \dots$$

В силу того, что $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ представляет собой нечетную тета-характеристику, имеет место равенство $\partial_{\mathbf{V}^{(i)}, \mathbf{V}^{(i)}}^2 \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{0}) = 0$. Таким образом,

$$\nu_i = \frac{\rho_i}{2} \frac{\partial_{\mathbf{W}^{(i)}} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{0})}{\partial_{\mathbf{V}^{(i)}} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{0})} - \sum_{j \neq i} \rho_j \partial_{\mathbf{V}^{(j)}} \ln \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_j}^{\infty_i} \mathbf{v} \right) + \text{Res}_{\infty_i} \frac{\eta}{\zeta^2} + c(P_0). \quad (3.19)$$

Поскольку при вычислениях важны лишь разности $\nu_i - \nu_j$, имеется другое представление, использующее нормированные дифференциалы третьего рода. Пусть $\omega_{\infty_i, \infty_j}$ – мероморфный дифференциал третьего рода с двумя простыми полюсами: вычетом $+1$ в точке ∞_i и вычетом -1 в точке ∞_j , и с нулевыми $\mathbf{a}$ -периодами. Рассмотрим теперь интеграл

$$\mathfrak{I} = \int_{\partial \Gamma} \int_{P_0}^P \left[\gamma_{\infty}(P') + d \left(\frac{\eta}{\zeta} \right) (P') \right] \omega_{\infty_i, \infty_j}(P),$$

взятый вдоль границы $\partial \Gamma$ фундаментальной области, и вычислим его двумя способами: в виде суммы вычетов и в виде контурного интеграла. В силу выбранной нормировки дифференциалов γ_{∞} и $\omega_{\infty_i, \infty_j}$ интеграл по контуру равен нулю. Поэтому сумма вычетов также обращается в нуль, что с применением тождества

$$\text{Res}_{P=0_k} \frac{\eta}{\zeta}(P) = \eta(0_k)$$

приводит к равенству

$$\nu_i - \nu_j = - \sum_{k=1}^n \eta(0_k) \omega_{\infty_i, \infty_j}(0_k). \quad (3.20)$$

С помощью (3.14) эту формулу можно выписать через прим-форму, что приводит к следующему результату:

$$\nu_i - \nu_j = - \sum_{k=1}^n \eta(0_k) \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\mathcal{E}(P, \infty_i)}{\mathcal{E}(P, \infty_j)} \Big|_{P=0_k} = - \sum_{k=1}^n \eta(0_k) \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_i}^P \mathbf{v} \right)}{\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\int_{\infty_j}^P \mathbf{v} \right)} \Big|_{P=0_k}. \quad (3.21)$$

Отметим, что применение реализации Клейна–Вейерштрасса для дифференциалов третьего рода приводит к еще более явным результатам [17].

Описав общую конструкцию, перейдем к явным примерам ее применения. Случай $n = 2$ рассматривался целым рядом исследователей, и этот пример будет изучен ниже с применением только что полученных формул. Хотя отдельные детали нашего подхода отличаются от стандартных, окончательные результаты совпадают. Случай $n = 3$ был рассмотрен в наших работах [8], [9].

4. ПРИМЕР: МОНОПОЛЬ ЗАРЯДА ДВА

В этом разделе рассмотрим хорошо изученный случай $n = 2$, преимущество которого состоит в том, что можно произвести сравнение с результатами, полученными другими авторами. На первом шаге соединим воедино ингредиенты нашего построения для матрицы $Q_0(z)$. Для полноты изложения опишем здесь также и оставшиеся шаги, необходимые для восстановления данных Нама.

Будет использоваться (центрированная) спектральная кривая в виде, предложенном Эрколани и Синха:

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^2 + \frac{\kappa^2}{4}(\zeta^4 + 2(k^2 - k'^2)\zeta^2 + 1) = \\ &= \eta^2 + \frac{\kappa^2}{4}(\zeta - k' - ik)(\zeta - k' + ik)(\zeta + k' - ik)(\zeta + k' + ik), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $k'^2 = 1 - k^2$. Обозначив $k' = \cos \alpha$, $k = \sin \alpha$, корни можно записать в виде $\pm e^{\pm i\alpha}$, свидетельствующем о том, что они лежат на единичном круге. Можно выбрать $0 \leq \alpha \leq \pi/4$. Выберем систему разрезов, проходящих между $-k' + ik = -e^{-i\alpha}$ и $k' + ik = e^{i\alpha}$ и между $-k' - ik$ и $k' - ik$. Пусть контур $\mathfrak{b}$ обходит вокруг точек $-k' + ik$ и $k' + ik$, а контур $\mathfrak{a}$ – вокруг точек $k' + ik$ и $-k' + ik$ на двух листах. Предписание для выбора листов ($j = 1, 2$ с аналитическим продолжением из точки $\zeta = 0$ во внешнюю область разрезов) имеет вид

$$\eta_j = (-1)^j i \frac{\kappa}{2} \sqrt{\zeta^4 + 2(k^2 - k'^2)\zeta^2 + 1}. \quad (4.2)$$

Используя теперь подстановки $\zeta = e^{i\theta}$ и $k \sin u = \sin \theta$, на листе 1 получим

$$\frac{d\zeta}{\eta} = i \frac{2}{\kappa} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - e^{2i\alpha})(\zeta^2 - e^{-2i\alpha})}} = \frac{-1}{k\kappa} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1/k^2) \sin^2 \theta}} = \frac{-1}{\kappa} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}.$$

Поэтому

$$\oint_{\mathfrak{a}} \frac{d\zeta}{\eta} = \frac{-2}{\kappa} \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \theta}} = \frac{4}{\kappa} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \frac{4}{\kappa} \mathbf{K}(k),$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Аналогично (с $\zeta = e^{i(w+\pi/2)}$) имеем

$$\oint_{\mathfrak{b}} \frac{d\zeta}{\eta} = \frac{2i}{\kappa} \int_{\alpha-\pi/2}^{\pi/2-\alpha} \frac{dw}{\sqrt{k'^2 - \sin^2 w}} = \frac{4i}{\kappa} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 u}} = \frac{4i}{\kappa} \mathbf{K}'(k).$$

Нормированный голоморфный дифференциал для кривой (4.1) с указанным выбором базиса гомологий имеет вид $\mathbf{v} = \kappa d\zeta / (4\mathbf{K}\eta)$. Сравнивая с выражениями (2.44), получим, что условие связи Эрколани–Синха будет выполнено при $\kappa = \mathbf{K}(k)$ и при $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$. Поэтому $U = -1/2$. Матрица периодов для кривой будет при этом иметь вид $\tau = i\mathbf{K}'/\mathbf{K}$. Наличие симметрии позволяет вычислить разнообразные отображения Абеля (с базисной точкой $P_0 = k' + ik$):

$$\phi(\infty_1) = \frac{1 + \tau}{4} = -\phi(\infty_2), \quad \phi(0_1) = \frac{1 - \tau}{4} = -\phi(0_2).$$

Из формулы (2.13) и нашего предписания для листов получим

$$\rho_1 = -\frac{i}{2} \mathbf{K}, \quad \rho_2 = \frac{i}{2} \mathbf{K}.$$

Многие из свойств, присущих данному случаю, можно найти, не прибегая к явным вычислениям. Например, $\widetilde{\mathbf{K}}$ – (полуцелая) тета-характеристика такая, что θ обращается в нуль до порядка $s = 2^2/4 = 1$ включительно в точке $\widetilde{\mathbf{K}}$. Отсюда можно сразу заключить, что $\widetilde{\mathbf{K}}$ – единственная нечетная тета-характеристика $\widetilde{\mathbf{K}} = (1 + \tau)/2$. Далее, имеем $\tau^*(d\zeta/\eta) = -(\overline{d\zeta/\eta})$. С помощью свойства $\tau_*(\mathbf{c}) = -\mathbf{c}$ можно фиксировать вектор $\mathbf{c} = \pm \mathbf{a}$ и соответственно $\mathbf{U} = \pm 1/2$, а выбор правильного знака следует из (2.44). Несингулярная четная тета-характеристика получается из формулы $\mathbf{U} + \widetilde{\mathbf{K}} = \tau/2$. Тогда

$$\mathbf{U} - \widetilde{\mathbf{K}} = -1 - \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}\tilde{p} + \frac{1}{2}\tau\tilde{q} \Rightarrow \tilde{p} = -2, \quad \tilde{q} = -1.$$

Подставив собранные воедино величины в формулу (3.8), получим

$$Q_0(z)_{12} = \epsilon_{12} \frac{-i\mathbf{K}}{\mathcal{E}(\infty_1, \infty_2)} e^{i\pi(1+\tau)/2} \frac{\theta(-[z+1]/2 - 1 - \tau)}{\theta(-[z+1]/2 - (1+\tau)/2)} e^{z(\nu_2 - \nu_1)}. \quad (4.3)$$

Отождествив $\theta(z)$ с тета-функцией Якоби $\theta_3(z)$, с помощью свойств периодичности для тета-функций Якоби $\theta_*(z)$, задаваемых формулами

$$\begin{aligned} \theta\left(-\frac{[z+1]}{2} - 1 - \tau\right) &= -e^{-i\pi(z+\tau)}\theta_4\left(\frac{z}{2}\right), \\ \theta\left(-\frac{[z+1]}{2} - \frac{1+\tau}{2}\right) &= e^{-i\pi(z/2+\tau/4)}\theta_2\left(\frac{z}{2}\right), \end{aligned}$$

получим

$$Q_0(z)_{12} = -\epsilon_{12} \frac{\mathbf{K}}{\mathcal{E}(\infty_1, \infty_2)} e^{-i\pi\tau/4} \frac{\theta_4(z/2)}{\theta_2(z/2)} e^{z(\nu_2 - \nu_1 - i\pi/2)}.$$

Прим-форма. Вычислим теперь прим-форму. Из формулы (3.9) имеем

$$E(P, Q) = \frac{\theta\left[\frac{1/2}{1/2}\right](\phi(P) - \phi(Q))}{h(P)h(Q)}, \quad h^2(P) = \frac{\partial\theta\left[\frac{1/2}{1/2}\right](0)}{\partial z} v(P).$$

Выбрав $\zeta = 1/t$ в качестве локальной переменной в точке ∞_j , получим $v(\infty_j) = d\zeta/4\eta|_{\infty_j} = -dt/(4\rho_j)$. Отождествляя $\theta\left[\frac{1/2}{1/2}\right](z)$ с тета-функцией Якоби $-\theta_1(z)$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\infty_1, \infty_2) &= E(\infty_1, \infty_2) dt = -4\sqrt{\rho_1\rho_2} \frac{\theta_1(\int_{\infty_2}^{\infty_1} v)}{\theta'_1} = -2\mathbf{K} \frac{\theta_1(\int_{\infty_2}^{\infty_1} v)}{\theta'_1} = \\ &= -2\mathbf{K} e^{-i\pi\tau/4} \frac{\theta_3}{\theta'_1}. \end{aligned}$$

Из тождества $\theta'_1 = \pi\theta_2\theta_3\theta_4$ теперь следует соотношение

$$Q_0(z)_{12} = \epsilon_{12} \frac{\pi\theta_2\theta_4}{2} \frac{\theta_4(z/2)}{\theta_2(z/2)} e^{z(\nu_2 - \nu_1 - i\pi/2)}. \quad (4.4)$$

Альтернативное вычисление. Проверим наш результат с помощью вычисления, основанного на представлении (3.6). В этом случае имеет место равенство

$$\begin{aligned} Q_0(z)_{12} &= -(\rho_1 - \rho_2)c_{12} \frac{\theta(\phi(\infty_2) - \phi(\infty_1) + (z+1)U - \widetilde{K})\theta(U - \widetilde{K})}{\theta(\phi(\infty_2) - \phi(\infty_1) + U - \widetilde{K})\theta((z+1)U - \widetilde{K})} e^{z(\nu_2 - \nu_1)} = \\ &= c_{12} i K \frac{\theta_2 \theta_4(z/2)}{\theta_4 \theta_2(z/2)} e^{z(\nu_2 - \nu_1 - i\pi/2)}, \end{aligned}$$

в котором $c_{12} = \lim_{P \rightarrow \infty_2} \zeta g_1(P)$ – постоянная Эрколани–Синха. Для ее вычисления необходимо знать функцию $g_1(P) = f_1(P)/f_1(\infty_1)$ с

$$f_1(P) = \frac{\theta(\phi(P) - \phi(\Delta_1) - K)\theta(\phi(P) - \phi(\infty_2) - K)}{\theta(\phi(P) - \phi(\delta_1) - K)\theta(\phi(P) - \phi(\delta_2) - K)},$$

где $\delta_1 + \delta_2 \sim \Delta_1 - \infty_1$ и $\phi(\Delta_1 - \infty_1) = U = -1/2$. Если известны значения отображения Абеля, то из последнего равенства следует, что $\phi(\Delta_1) = (-1 + \tau)/4$, и можно отождествить $\Delta_1 = 0_2$ (аналогично $\Delta_2 = 0_1$). Из этих свойств следует равенство

$$g_1(P) = \frac{\theta_1(\int_{\infty_2}^P v)\theta_1(\int_{0_2}^P v)\theta_1(\int_{\delta_1}^{\infty_1} v)\theta_1(\int_{\delta_2}^{\infty_1} v)}{\theta_1(\int_{\infty_2}^{\infty_1} v)\theta_1(\int_{0_2}^{\infty_1} v)\theta_1(\int_{\delta_1}^P v)\theta_1(\int_{\delta_2}^P v)}.$$

Эта функция имеет полюсы в точках дивизора δ и обращается в нуль в точках ∞_2 и $\Delta_1 = 0_2$ ⁴⁾. Теперь имеем

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow \infty_2} \zeta(P)\theta_1\left(\int_{\infty_2}^P v\right) &= -\frac{\theta'_1}{4\rho_2}, \\ c_{12} &= \frac{\pi\theta_4^2}{2K} \frac{\theta_1(\int_{\delta_1}^{\infty_1} v)\theta_1(\int_{\delta_2}^{\infty_1} v)}{\theta_1(\int_{\delta_1}^{\infty_2} v)\theta_1(\int_{\delta_2}^{\infty_2} v)}. \end{aligned}$$

Аналогичное вычисление также дает

$$c_{21} = \frac{\pi\theta_4^2}{2K} \frac{\theta_1(\int_{\delta_1}^{\infty_2} v)\theta_1(\int_{\delta_2}^{\infty_2} v)}{\theta_1(\int_{\delta_1}^{\infty_1} v)\theta_1(\int_{\delta_2}^{\infty_1} v)}.$$

Тем самым

$$c_{12} = -c_{21} \iff \frac{\theta_1(\int_{\delta_1}^{\infty_2} v)\theta_1(\int_{\delta_2}^{\infty_2} v)}{\theta_1(\int_{\delta_1}^{\infty_1} v)\theta_1(\int_{\delta_2}^{\infty_1} v)} = \pm i,$$

откуда снова получаем решение (4.4). Чтобы найти дивизор δ , заметим, что $\phi(\delta_1) + \phi(\delta_2) = -1/2$, что позволяет решить задачу относительно $x = \phi(\delta_1)$,

$$\frac{\theta_1((1+\tau)/4 - x)\theta_1((3+\tau)/4 + x)}{\theta_1((1+\tau)/4 + x)\theta_1((3+\tau)/4 - x)} = \pm i.$$

Левая часть уравнения есть эллиптическая функция (с периодами 1 и x) относительно переменной x , а потому уравнение имеет решения. Выбрав, например,

⁴⁾В этом месте наш результат расходится с формулами Эрколани и Синха: полюсы их функции не находятся там, где указано в их работе [5] (см. формулу (IV.26a)).

$x = \phi(\delta_1) = 3\tau/4$ и $x = 1/2 + \tau/4$, получим знак плюс, а выбрав $x = \phi(\delta_1) = 1/2 + 3\tau/4$ и $x = \tau/4$, получим знак минус. При фиксированном знаке два решения отвечают перестановке δ_1 и δ_2 , так что с точностью до эквивалентности выбор разных знаков приводит к двум различным решениям.

Фундаментальный бидифференциал. Вычислим наконец фундаментальный бидифференциал и применим полученные формулы для того, чтобы показать, что

$$\nu_2 - \nu_1 = \frac{i\pi}{2}.$$

Из свойства четности для кривой (4.1) получим, что для точки P в окрестности ∞_i

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^P \mathbf{v} &= \int_{P_0}^{\infty_i} \mathbf{v} + \int_{\infty_i}^{P_0} \mathbf{v} = \int_{P_0}^{\infty_i} \mathbf{v} - \frac{t}{4\rho_i} + O(t^3), \\ \mathbf{V}^{(i)} &= -\frac{1}{4\rho_i}, \quad \mathbf{W}^{(i)} = 0, \\ \text{Res}_{\infty_1, \infty_2} \frac{\eta}{\zeta^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\Omega_{\mathbf{B}}^{(i)}(P) = \frac{1}{4\rho_i} \partial_x \left[\frac{\theta_1'(\int_{\infty_i}^P \mathbf{v})}{\theta_1(\int_{\infty_i}^P \mathbf{v})} \right] dx(P).$$

Далее, $\theta_1(x)$ – нечетная функция, а потому $\theta_1''(0) = 0$. Таким образом, получим

$$\nu_2 - \nu_1 = \frac{1}{4} \partial_x \ln \left[\frac{\theta_1(x + \int_{\infty_1}^{\infty_2} \mathbf{v})}{\theta_1(x + \int_{\infty_2}^{\infty_1} \mathbf{v})} \right]_{x=0} = \frac{1}{4} \partial_x \ln \left[\frac{\theta_1(x - (1+\tau)/2)}{\theta_1(x + (1+\tau)/2)} \right]_{x=0} = \frac{i\pi}{2},$$

если применим равенство $\theta_1(x + (1+\tau)/2) = B(x)\theta_3(x)$ с $B(x) = e^{-i\pi(x+\tau/4)}$. Тот же самый результат получается из формул (3.21):

$$\begin{aligned} \nu_1 - \nu_2 &= -\eta(0_1) \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\theta_1(\int_{\infty_1}^P \mathbf{v})}{\theta_1(\int_{\infty_2}^P \mathbf{v})} \Big|_{P=0_1} - \eta(0_2) \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\theta_1(\int_{\infty_1}^P \mathbf{v})}{\theta_1(\int_{\infty_2}^P \mathbf{v})} \Big|_{P=0_2} = \\ &= -\frac{1}{4} \partial_x \ln \frac{\theta_1(x + \int_{\infty_1}^{0_1} \mathbf{v})}{\theta_1(x + \int_{\infty_2}^{0_2} \mathbf{v})} \Big|_{x=0} - \frac{1}{4} \partial_x \ln \frac{\theta_1(x + \int_{\infty_2}^{0_1} \mathbf{v})}{\theta_1(x + \int_{\infty_1}^{0_2} \mathbf{v})} \Big|_{x=0} = \\ &= -\frac{1}{4} \partial_x \ln \frac{\theta_1(x - \tau/2)}{\theta_1(x + \tau/2)} \Big|_{x=0} + \frac{1}{4} \partial_x \ln \frac{\theta_1(x + 1/2)}{\theta_1(x - 1/2)} \Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Здесь использовались наши выражения для $\phi(\infty_{1,2})$ и $\phi(0_{1,2})$. Применяя тождество $\theta_1(x + \tau/2) = iB(x)\theta_4(x)$, в котором $B(x) = e^{-i\pi(x+\tau/4)}$, можно снова заключить, что $\nu_1 - \nu_2 = i\pi/2$. Для полноты картины заметим, что

$$\omega_{\infty_1, \infty_2} = -\frac{i\mathbf{K}(k)}{2} \frac{\zeta}{\eta} d\zeta + c\mathbf{v}(P),$$

где нормировочная константа задается соотношением

$$c = \frac{i\mathbf{K}(k)}{8} \oint_{\mathbf{a}} \frac{\zeta d\zeta}{\eta} = \frac{i\pi}{4}.$$

Можно сразу применить это соотношение и формулу (3.20) и получить тот же самый итог.

Определение данных Нама. На данном этапе установлено, что

$$Q_0(z)_{12} = \epsilon_{12} \frac{\pi \theta_2 \theta_4}{2} \frac{\theta_4(z/2)}{\theta_2(z/2)} = \epsilon_{12} \mathbf{K} k' \frac{1}{\operatorname{cn} \mathbf{K} z}$$

и имеется матрица

$$Q_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & Q_0(z)_{12} \\ Q_0(z)_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Не ограничивая общности, положим $\epsilon_{12} = 1$.

Завершим этот раздел выводом хорошо известного эллиптического решения уравнений Нама, задаваемого формулами

$$T_j(z) = \frac{\sigma_j}{2i} f_j(z), \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.5)$$

где σ_j – матрицы Паули, а функции $f_j(z)$ могут быть представлены в терминах эллиптических функций Якоби:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \mathbf{K} \frac{\operatorname{dn} \mathbf{K} z}{\operatorname{cn} \mathbf{K} z} = \frac{\pi \theta_2 \theta_3}{2} \frac{\theta_3(z/2)}{\theta_2(z/2)}, & f_2(z) &= \mathbf{K} k' \frac{\operatorname{sn} \mathbf{K} z}{\operatorname{cn} \mathbf{K} z} = \frac{\pi \theta_3 \theta_4}{2} \frac{\theta_1(z/2)}{\theta_2(z/2)}, \\ f_3(z) &= \mathbf{K} k' \frac{1}{\operatorname{cn} \mathbf{K} z} = \frac{\pi \theta_2 \theta_4}{2} \frac{\theta_4(z/2)}{\theta_2(z/2)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Воспользуемся тем, что

$$\int \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \frac{1}{k'} \ln \frac{\operatorname{dn} u + k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}. \quad (4.7)$$

Следуя теореме 2.2, мы перечислили все шаги, необходимые для нахождения данных Нама, если известно выражение для $Q_0(z)$. Найдем, во-первых, матрицу $C(z)$ с начальными условиями $C(0) = 1_2$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dC(z)}{dz} = \frac{1}{2} C(z) Q_0(z).$$

Его решение с выбранными начальными условиями имеет простой вид:

$$C(z) = \begin{pmatrix} F(z) & G(z) \\ G(z) & F(z) \end{pmatrix}$$

при

$$F(z) = \operatorname{ch} \left(\frac{1}{2} \int_0^z f_3(u) du \right), \quad G(z) = \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \int_0^z f_3(u) du \right).$$

Поэтому выполняется равенство

$$A_0(z) = C(z) Q_0(z) C^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Q_0(z)_{12} = -\sigma_3 f_3(z). \quad (4.8)$$

Следующий шаг нашей процедуры при этом утверждает, что

$$A_1(z) = C(z) A_1(0) C^{-1}(z) = C(z) \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} C^{-1}(z) =$$

$$= \frac{K}{2i} \begin{pmatrix} 1 + 2G(z)^2 & -2F(z)G(z) \\ 2F(z)G(z) & -1 - 2G(z)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

С помощью прямых вычислений (с применением формулы (4.7)) теперь получим

$$G(z)^2 = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{dn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} - \frac{1}{2}, \quad 2F(z)G(z) = k' \frac{\operatorname{sn} Kz}{\operatorname{cn} Kz}.$$

Таким образом,

$$A_1(z) = \frac{K}{2i} \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{dn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} & -k' \frac{\operatorname{sn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} \\ k' \frac{\operatorname{sn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} & -\frac{\operatorname{dn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} \end{pmatrix},$$

$$A_{-1}(z) = -A_1^\dagger(z) = -\frac{K}{2i} \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{dn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} & -k' \frac{\operatorname{sn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} \\ k' \frac{\operatorname{sn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} & \frac{\operatorname{dn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} \end{pmatrix}.$$

Последним шагом на пути к получению данных Нама оказывается получение

$$T_1(z) = \frac{1}{2} (A_1(z) + A_{-1}(z)) = \frac{K}{2i} \begin{pmatrix} \frac{\operatorname{dn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} & 0 \\ 0 & -\frac{\operatorname{dn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \sigma_1 f_1(z),$$

$$T_2(z) = \frac{1}{2i} (A_{-1}(z) - A_1(z)) = \frac{K}{2i} \begin{pmatrix} 0 & -ik' \frac{\operatorname{sn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} \\ ik' \frac{\operatorname{sn} Kz}{\operatorname{cn} Kz} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \sigma_2 f_2(z),$$

что в итоге приводит к известному решению (4.6).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хотя решения типа монополей изучались в течение довольно длительного времени и с различных точек зрения, известно относительно немного аналитических решений. В этой работе предпринята попытка установления эффективной связи монополей с теорией интегрируемых систем, что должно способствовать построению таких решений. Тем не менее настоящая работа представляет собой лишь первые шаги на этом пути.

В работе было представлено общее построение. В случае ситуации общего вида имеют место дополнительные условия связи, налагаемые на вектор Эрколани–Синха (см. лемму 3.1), и можно найти новое решение для матрицы Q_0 (см. теорему 2.2), из которого данные Нама реконструируются в виде решения матричного дифференциального уравнения первого порядка. Этот следующий шаг будет рассмотрен в последующих публикациях. Наше построение для матрицы Q_0 основывалось исключительно на данных, определяемых по спектральной кривой. Предыдущие представления для этой матрицы в терминах функций Бейкера–Ахиезера требовали выбора неспециального дивизора, который мы относим на счет выбора калибровки. В предложенном нами анализе все составляющие, необходимые для построения указанной матрицы, были явно описаны, а также было показано, как при этом можно использовать для вычислений фундаментальный бидифференциал. Почти для всех элементов конструкции важным обстоятельством оказывается то, что их можно явно представить в виде интегралов на кривой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Тета-функции

Каноническая тета-функция Римана для $r \in \mathbb{N}$ имеет вид

$$\theta(\mathbf{z}; \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r} e^{i\pi \mathbf{n}^T \tau \mathbf{n} + 2i\pi \mathbf{z}^T \mathbf{n}}. \quad (\text{П.1})$$

тета-функция голоморфна на $\mathbb{C}^r \times \mathbb{S}^r$ и удовлетворяет условиям сдвига:

$$\theta(\mathbf{z} + \mathbf{p}; \tau) = \theta(\mathbf{z}; \tau), \quad \theta(\mathbf{z} + \mathbf{p}\tau; \tau) = e^{-i\pi(\mathbf{p}^T \tau \mathbf{p} + 2\mathbf{z}^T \mathbf{p})} \theta(\mathbf{z}; \tau), \quad (\text{П.2})$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^r$.

Тета-функция Римана $\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{z}; \tau)$ с характеристикой $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{z}; \tau) &= e^{i\pi(\mathbf{a}^T \tau \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T(\mathbf{z} + \mathbf{b}))} \theta(\mathbf{z} + \tau \mathbf{a} + \mathbf{b}; \tau) = \\ &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r} e^{i\pi(\mathbf{n} + \mathbf{a})^T \tau (\mathbf{n} + \mathbf{a}) + 2i\pi(\mathbf{n} + \mathbf{a})^T (\mathbf{z} + \mathbf{b})}, \end{aligned}$$

в котором $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}^r$. Ее также можно записать в виде

$$\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{z}; \tau) = \theta \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} (\mathbf{z}; \tau).$$

Для произвольных $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Q}^r$ и $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathbb{Q}^r$ справедлива следующая формула:

$$\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{z} + \mathbf{a}'\tau + \mathbf{b}'; \tau) = e^{-i\pi \mathbf{a}'^T \tau \mathbf{a}' - 2i\pi \mathbf{a}'^T \mathbf{z} - 2i\pi(\mathbf{b} + \mathbf{b}')^T \mathbf{a}'} \theta_{\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b} + \mathbf{b}'}(\mathbf{z}; \tau). \quad (\text{П.3})$$

Функция $\theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau) = \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{0}; \tau)$ называется θ -константой с характеристикой $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Имеем

$$\begin{aligned} \theta_{-\mathbf{a}, -\mathbf{b}}(\mathbf{z}; \tau) &= \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(-\mathbf{z}; \tau), \\ \theta_{\mathbf{a} + \mathbf{p}, \mathbf{b} + \mathbf{q}}(\mathbf{z}; \tau) &= e^{2\pi i \mathbf{a}^T \mathbf{q}} \theta_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{z}; \tau). \end{aligned}$$

Следующая формула преобразования содержится в монографии [18] (см. с. 85, 176).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ П.1. Для произвольной матрицы $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Q}^{2g}$ положим

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mathbf{g}^{-1} + \frac{1}{2} (\text{diag}(CD^T), \text{diag}(AB^T)), \\ \phi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{g}) &= -\frac{1}{2} (\mathbf{a} D^T B \mathbf{a}^T - 2\mathbf{a} B^T C \mathbf{b}^T + \mathbf{b} C^T A \mathbf{b}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{a} D^T - \mathbf{b} C^T)^T \text{diag}(AB^T), \end{aligned}$$

где $\text{diag}(A)$ – вектор-строка, составленный из диагональных компонент A . Тогда для любого вектора $\mathbf{g} \in \text{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ получим

$$\theta_{\mathbf{g} \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})}(\mathbf{0}; (A\tau_{\mathbf{b}} + B)(C\tau_{\mathbf{b}} + D)^{-1}) = \kappa(\mathbf{g}) e^{2\pi i \phi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\mathbf{g})} \det(C\tau_{\mathbf{b}} + D)^{1/2} \theta_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}(\mathbf{0}; \tau_{\mathbf{b}}), \quad (\text{П.4})$$

где $\kappa(\mathfrak{g})^2$ – корень из единицы четвертого порядка, выбор которого зависит только от $\mathfrak{g}$, в то время как

$$\begin{aligned} \theta_{\mathfrak{g} \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})}(z(C\tau_{\mathbf{b}} + D)^{-1}; (A\tau_{\mathbf{b}} + B)(C\tau_{\mathbf{b}} + D)^{-1}) = \\ = \mu e^{i\pi z(C\tau_{\mathbf{b}} + D)^{-1}Cz^T} \det(C\tau_{\mathbf{b}} + D)^{1/2} \theta_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}(z; \tau_{\mathbf{b}}), \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

а μ – комплексное число, не зависящее ни от τ , ни от z и такое, что $|\mu| = 1$.

П.1. Вектор римановых констант. Для вектора римановых констант в нашем случае при обратном преобразовании Якоби принято следующее условие:

$$\theta\left(\phi(P) - \phi\left(\sum_{i=1}^g Q_i\right) - \mathbf{K}\right) = 0.$$

Это условие принималось Фаркашом и Кра, и оно противоположно по знаку условию, принятому Мамфордом; выбор знаков важен при реальном построении величины $\mathbf{K}$ (см. формулу (2.4.1) в книге [19]). Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_Q)_j &= \frac{1}{2}\tau_{jj} - \sum_k \oint_{\mathbf{a}_k} \omega_k(P) \int_Q^P \omega_j = \\ &= \frac{1}{2}(\tau_{jj} + 1) - \sum_{k \neq j} \oint_{\mathbf{a}_k} \omega_k(P) \int_Q^P \omega_j. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Вектор римановых констант содержит зависимость от базиса гомологий и базовой точки Q . При изменении базовой точки отображения Абеля $\phi_Q \rightarrow \phi_{Q'}$ получим $\mathbf{K}_Q = \mathbf{K}_{Q'} + \phi_{Q'}(Q^{g-1})$. При таком выборе получается, что

$$\phi_Q(\operatorname{div}(\mathbf{K}_C)) = -2\mathbf{K}_Q. \quad (\text{П.7})$$

П.2. Тета-характеристики. Множество Σ классов дивизоров D таких, что $2D = \mathbf{K}_C$ – канонический класс, называется набором тета-характеристик кривой $\mathcal{C}$. Множество Σ представляет собой главное однородное пространство для группы J_2 , которая является группой точек 2-кручений группы $\operatorname{Pic}^0(\mathcal{C})$ линейных расслоений нулевой степени на кривой $\mathcal{C}$. Эквивалентно эта же конструкция может пониматься как множество точек 2-кручений на якобиане кривой, $J_2 = (1/2)\Lambda/\Lambda$. В геометрическом описании, если ξ – голоморфное линейное расслоение над $\mathcal{C}$ такое, что ξ^2 голоморфно эквивалентно $\mathbf{K}_C$, то дивизор расслоения ξ оказывается тета-характеристикой. Если L – голоморфное линейное расслоение степени 2, т. е. если расслоение L^2 голоморфно тривиально, то дивизор $\xi \otimes L$ также оказывается тета-характеристикой. Таким образом, имеются $|J_2| = 2^{2g}$ тета-характеристик.

Можно трактовать $J_2 = \{v \in \operatorname{Pic}^0(\mathcal{C}) \mid 2v = 0\}$ как векторное пространство размерности $2g$ над $\mathbb{F}_2$. Это векторное пространство допускает невырожденную симплектическую (а значит и симметрическую, поскольку поле имеет вид $\mathbb{F}_2$) форму, заданную спариванием Вейля. Если D и E – дивизоры с непересекающимися носителями в соответствующих классах u и v и $2D = \operatorname{div}(f)$, $2E = \operatorname{div}(g)$, то спаривание Вейля имеет вид

$$\lambda_2: J_2 \times J_2 \rightarrow \mathbb{F}_2, \quad \lambda_2(u, v) = \frac{g(D)}{f(E)},$$

где при $D = \sum_j n_j x_j$ должно выполняться условие $g(D) = \prod_j g(x_j)^{n_j}$. Мамфорд отождествляет $\mathbb{F}_2$ с ± 1 при помощи отображения 0 в 1 и 1 в -1 . (В общем случае можно рассматривать J_r – точки r -кручений в группе $\text{Pic}^0(\mathcal{C})$, и тогда спаривание Вейля задает невырожденное антисимметричное отображение $\lambda_2: J_r \times J_r \rightarrow \mu_r$, в котором μ_r представляют собой корни из единицы r -й степени.) Векторное пространство J_2 над $\mathbb{F}_2$ можно отождествить с пространством $H^1(\mathcal{C}, \mathbb{F}_2)$, и при таком отождествлении λ_2 становится просто антисимметричным произведением.

Зададим $\omega_\xi: J_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ формулой

$$\omega_\xi(u) = \text{Dim } H^0(\mathcal{C}, \xi \otimes u) - \text{Dim } H^0(\mathcal{C}, \xi) \pmod{2}, \quad (\text{П.8})$$

где $u = L_D$ – линейное расслоение с дивизором D . Тогда

$$\lambda_2(u, v) = \omega_\xi(u \otimes v) - \omega_\xi(u) - \omega_\xi(v).$$

Произвольную функцию ω_ξ , удовлетворяющую этому условию, принято называть функцией Арфа, и произвольная функция Арфа задается ω_ξ при некоторой тета-характеристике с соответствующим линейным расслоением ξ . Пространство тета-характеристик может быть, таким образом, отождествлено с пространством квадратичных форм (П.8).

Благодарности. Работа была задумана в 2001 г. во время спонсируемой EPSRC Программой “Интегрируемые системы” Института Ньютона и получила на ранних этапах одобрение Г. Флашки и Н. Эрколани. Обсуждения и переписка с многочисленными коллегами принесли исключительную пользу в последующие годы; авторы особенно признательны Н. Хитчину, К. Хоугтону и П. Сатклиффу за ценные замечания, касающиеся монополей, Д. Калдербанку, М. Рейду, Р. Томасу и А. Трейбику за рекомендации в области геометрии и алгебраической геометрии, Р. Видунасу и А. О. Долхусу за предоставленные сведения относительно гипергеометрических функций, М. Эггару и К. Мацумото за помощь в описании топологических аспектов кривых и К. Эйлбеку, Т. Граве, Ю. Федорову, Д. Маккею и С. Ричардсону за многочисленные обсуждения теории римановых поверхностей. Авторы благодарны INTAS и EPSRC за выделение грантов, позволивших им работать совместно, а также Институту высших исследований в Делменхорсте за финансирование исследовательского визита.

Список литературы

- [1] N. Manton, P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [2] N. J. Hitchin, *Comm. Math. Phys.*, **83**:4 (1982), 579–602.
- [3] N. J. Hitchin, *Comm. Math. Phys.*, **89**:2 (1983), 145–190.
- [4] W. Nahm, “The construction of all self-dual multimonopoles by the ADHM method”, *Monopoles in Quantum Field Theory*, eds. N. S. Craigie, P. Goddard, W. Nahm, World Sci., Singapore, 1982, 87–94.
- [5] N. Ercolani, A. Sinha, *Comm. Math. Phys.*, **125**:3 (1989), 385–416.
- [6] Б. А. Дубровин, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:4 (1977), 28–41.
- [7] H. W. Braden, V. Z. Enolski, *Remarks on the complex geometry of the 3-monopole*, 2006, arXiv:math-ph/0601040.

- [8] Г. У. Браден, В. З. Энольский, *Матем. сб.*, **201**:6 (2010), 19–74.
- [9] H. W. Braden, V. Z. Enolski, *Comm. Math. Phys.*, **299**:1 (2010), 255–282, arXiv: 0908.3449.
- [10] H. W. Braden, V. Z. Enolski, *Glasgow Math. J.*, **51**:A (2009), 25–41, arXiv: 0806.1807.
- [11] J. Hurtubise, *Comm. Math. Phys.*, **92**:2 (1983), 195–202.
- [12] E. Corrigan, P. Goddard, *Comm. Math. Phys.*, **80**:4 (1981), 575–587.
- [13] J. D. Fay, *Theta Functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., **352**, Springer, Berlin, 1973.
- [14] A. Clebsch, P. Gordan, *Theorie der Abelschen Funktionen*, Teubner, Leipzig, 1866.
- [15] Yu. Fedorov, *Acta Appl. Math.*, **55**:3 (1999), 251–301.
- [16] H. W. Braden, Yu. N. Fedorov, *J. Geom. Phys.*, **58**:10 (2008), 1346–1354, arXiv: [math-ph/0701045](https://arxiv.org/abs/math-ph/0701045).
- [17] H. F. Baker, *Abel's Theorem and the Allied Theory of Theta Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1897, reprinted 1995.
- [18] J.-ichi Igusa, *Theta Functions*, Grund. Math. Wiss., **194**, Springer, Berlin, 1972.
- [19] H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces*, Grad. Texts in Math., **71**, Springer, New York, 1980.