Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. Бруццо, В. Н. Рубцов, Когомологии косооголоморфных алгеброидов Ли, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 3, 426–439

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6586>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:36:23

© 2010 г.

У. Бруццо^{*†}, В. Н. Рубцов^{‡§}

КОГОМОЛОГИИ КОСОГОЛОМОРФНЫХ АЛГЕБРОИДОВ ЛИ

Введено понятие косооголоморфного алгеброида Ли на комплексном многообразии и исследованы некоторые теории когомологий, которые можно связать с этим объектом. Приводятся примеры и приложения вводимых понятий в терминах разного рода голоморфных структур Пуассона.

Ключевые слова: голоморфные алгеброиды Ли, скрученные произведения алгеброидов Ли, когомологии алгеброидов Ли, голоморфные когомологии Пуассона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Комплексная структура комплексного многообразия X служит богатым источником разнообразных теорий когомологий, например когомологий Дольбо или голоморфных когомологий де Рама, которые нетривиальным образом связаны с обычными когомологиями де Рама X . Комплексную структуру на X можно рассматривать как интегрируемое разложение

$$T_X \otimes \mathbb{C} = T_X^{1,0} \oplus T_X^{0,1} \quad (1)$$

с условием $\overline{T_X^{1,0}} = T_X^{0,1}$.

С другой стороны, рассматривается понятие алгеброида Ли; говоря упрощенно (точное определение приводится ниже), имеется отображение векторных расслоений $a: A \rightarrow T_X$ вместе с “поднятием” структуры алгебры Ли на сечениях T_X до структуры алгебры Ли на сечениях A . Тогда, естественно, можно думать также и о поднятии разложения (1). В настоящей статье мы изучаем теории когомологий, связанные с подобными структурами. В частности, мы рассматриваем алгеброиды Ли, получаемые с помощью *скрученного произведения* (технические определения и смысл этого понятия будут уточнены в основном тексте статьи) голоморфного

^{*}International School for Advanced Studies, Trieste, Italy

[†]National Institute of Nuclear Physics, Sezione di Trieste, Italy. E-mail: bruzzo@sissa.it

[‡]Université d'Angers, Département de Mathématiques LAREMA, VFR Sciences, Angers, France

[§]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: Volodya.Roubtsov@univ-angers.fr

алгеброида Ли $\mathcal{A}_1$ с комплексно-сопряженным другого голоморфного алгеброида Ли $\mathcal{A}_2$. Мы называем полученную таким образом структуру *косоголоморфным* алгеброидом Ли. Частным случаем этой конструкции является пример, разобранный в статье [1], где $\mathcal{A}_2$ является голоморфным касательным расслоением X .

Настоящая работа посвящена изучению теории когомологий косооголоморфных алгеброидов. В разделе 3 после напомним базовых определений в разделе 2 мы рассматриваем известные понятия представления алгеброида Ли, скрученного произведения алгеброидов Ли и вводим новые понятия почти комплексной структуры на алгеброиде Ли и косооголоморфного алгеброида Ли. В разделе 4 мы формулируем и доказываем основную теорему о свойствах когомологий таких алгеброидов Ли. В разделе 5 приведены некоторые примеры, относящиеся, главным образом, к различным когомологиям, связанным с голоморфными пуассоновыми тензорами.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Алгеброиды Ли. Начнем с напомним понятий алгеброида Ли и когомологий алгеброидов Ли.

Пусть M – гладкое многообразие, T_M – его касательное расслоение, и пусть $\mathfrak{X}(M)$ обозначает пространство векторных полей на многообразии M , снабженное обычной скобкой Ли – коммутатором $[\cdot, \cdot]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгеброид A над многообразием M – это векторное расслоение на M вместе с морфизмом векторных расслоений $a: A \rightarrow T_M$ (называемым *якорем*) и структурой алгебры Ли на пространстве глобальных сечений $\Gamma(A)$ такое, что:

- 1) $a: \Gamma(A) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ есть гомоморфизм алгебр Ли;
- 2) для всех сечений $\alpha, \beta \in \Gamma(A)$ и любых гладких функций f выполняется следующее правило Лейбница:

$$\{\alpha, f\beta\} = f\{\alpha, \beta\} + a(\alpha)(f)\beta$$

(мы обозначаем $\{\cdot, \cdot\}$ скобку в $\Gamma(A)$).

Алгеброид Ли A называется *транзитивным*, если его якорь a сюръективен.

Морфизмы между двумя алгеброидами Ли (A, a) и (A', a') над одним и тем же многообразием M определяются естественным образом, т.е. это морфизмы векторных расслоений $\phi: A \rightarrow A'$ такие, что отображение $\phi: \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A')$ есть гомоморфизм алгебр Ли, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & A' \\ & \searrow a & \downarrow a' \\ & & T_M \end{array}$$

коммутативна.

ПРИМЕР 1. Интересным примером транзитивного алгеброида Ли является *алгеброид Атьи* векторного расслоения E на M . Это расслоение $\mathscr{D}(E)$ дифференциальных операторов первого порядка на E , символ которых – скалярная матрица. Якорь $\sigma: \mathscr{D}(E) \rightarrow T_M$ есть отображение символа. Более того, $\ker(\sigma) \simeq \text{End}(E)$.

С каждым алгеброидом Ли A можно связать коцепной комплекс $(C_A^\bullet, \delta)$, $C_A^\bullet = \Gamma(\Lambda^\bullet A^*)$, и дифференциал δ определяется как [2]

$$(\delta\xi)(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} a(\alpha_i)(\xi(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1})) + \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \xi(\{\alpha_i, \alpha_j\}, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_{p+1}), \quad (2)$$

если $\xi \in C_A^p$ и $\alpha_i \in \Gamma(A)$, $1 \leq i \leq p+1$. Соответствующие когомологии обозначаются $H^\bullet(A)$ и называются когомологиями алгеброида Ли A .

Подобное определение можно дать и в случае *комплексного алгеброида Ли*, когда A является комплексным векторным расслоением, а T_M заменяется своей комплексификацией $T_M \otimes \mathbb{C}$. Аналогично имеем понятие *голоморфного алгеброида Ли* на комплексном многообразии X , где A – голоморфное векторное расслоение (которое мы будем обозначать $\mathcal{A}$), T_M заменяется голоморфным касательным расслоением Θ_X , и мы требуем, чтобы $\mathcal{A}$ допускал структуру пучка алгебр Ли, удовлетворяющих соответствующему правилу Лейбница.

3. КОСОГОЛОМОРФНЫЕ АЛГЕБРОИДЫ ЛИ

Напомним некоторые результаты, касающиеся когомологий голоморфных алгеброидов Ли. Рассматриваемая ниже теория обобщает конструкцию, предложенную в работе [1]. Нам представляется полезным и интересным рассмотреть это расширение, хотя мы и не будем его использовать в полной общности.

Пусть X – n -мерное компактное комплексное многообразие, Θ_X – его голоморфное касательное расслоение, T_X – его касательное расслоение, когда X рассматривается как $2n$ -мерное вещественное гладкое многообразие. Ω_X^i обозначает расслоение голоморфных i -форм на X .

3.1. Почти комплексные алгеброиды Ли. Существует очень естественный способ расширить понятие почти комплексного многообразия до понятия почти комплексного алгеброида Ли (это обобщение определения почти комплексного пуассонова многообразия, введенного в статье [3], где приведены также некоторые примеры). Пусть M – почти комплексное многообразие с почти комплексной структурой $J_M: T_M \rightarrow T_M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Почти комплексная структура J_A на вещественном алгеброиде Ли $A \xrightarrow{a} T_M$ – это эндоморфизм векторного расслоения $J_A: A \rightarrow A$ такой, что $J_A^2 = -\text{id}_A$ и $J_M \circ a = a \circ J_A$.*

Как обычно, имеется разложение

$$A \otimes \mathbb{C} = A^{1,0} \oplus A^{0,1}$$

соответственно собственным значениям $\pm i$ структуры J_A . Мы положим

$$\lambda_A^{p,q} = \Lambda^p(A^*)^{1,0} \oplus \Lambda^q(A^*)^{0,1}.$$

Обозначим также $C_A^{p,q} = \Gamma(\lambda_A^{p,q})$; дифференциал d_A комплекса $C_A^\bullet = \bigoplus_{p,q} C_A^{p,q}$ разлагается в сумму

$$d_A = \partial'_A + \partial_A + \bar{\partial}_A + \partial''_A,$$

где

$$\begin{aligned} \partial'_A: C_A^{p,q} &\rightarrow C_A^{p+2,q-1}, & \partial_A: C_A^{p,q} &\rightarrow C_A^{p+1,q}, \\ \bar{\partial}_A: C_A^{p,q} &\rightarrow C_A^{p,q+1}, & \partial''_A: C_A^{p,q} &\rightarrow C_A^{p-1,q+2} \end{aligned}$$

и выполняются тождества

$$\begin{aligned} \partial_A^2 &= [\partial'_A, \bar{\partial}_A], & \bar{\partial}_A^2 &= [\partial''_A, \partial_A], & [\partial_A, \partial''_A] + [\partial_A, \bar{\partial}_A] &= 0, \\ (\partial'_A)^2 &= (\partial''_A)^2 = [\partial_A, \partial'_A] = [\bar{\partial}_A, \partial''_A] &= 0. \end{aligned}$$

Дифференциальный комплекс $(C_A^\bullet, d_A)$ допускает (регулярную) фильтрацию

$$F_p C_A^k = \bigoplus_{\substack{r+s=k \\ r \geq p-k}} C_A^{r,s}. \quad (3)$$

Непосредственное обобщение анализа, выполненного в работе [4], показывает, что справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Спектральная последовательность, ассоциированная с фильтрацией (3) дифференциального комплекса $(C_A^\bullet, d_A)$, сходится к комплектифицированным когомологиям алгеброида Ли A , т.е. к когомологиям $H^\bullet(A) \otimes \mathbb{C}$.*

Пусть X – n -мерное комплексное многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Почти комплексная структура на алгеброиде Ли A над X называется *интегрируемой*, если существует голоморфный алгеброид Ли $\mathcal{A}$ такой, что:

- 1) $A^{1,0} \simeq C_X^\infty \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$ как пучки C_X^∞ -модулей;
- 2) при этом изоморфизме скобка на $A \otimes \mathbb{C}$ ограничивается до скобки на $\mathcal{A}$;
- 3) якорь $a: A \otimes \mathbb{C} \rightarrow T_X^\mathbb{C}$ совпадает с $\tilde{a}$ на $\mathcal{A}$.

В этом случае мы будем называть $\mathcal{A}$ *голоморфной структурой* на A . Заметим, что дифференциал d_A алгеброида Ли A и ∂_A на $\mathcal{A}$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} d_A^{1,0}(f \otimes \xi) &= f \otimes \partial_A \xi + a^*(\partial f) \wedge \xi, \\ d_A^{0,1}(f \otimes \xi) &= a^*(\bar{\partial} f) \wedge \xi, \end{aligned}$$

если f – гладкая функция и $\xi \in \Lambda^\bullet \mathcal{A}^*$.

Интегрируемость почти комплексной структуры J_A на алгеброиде Ли может быть, как обычно, проверена с помощью подходящего тензора Нийенгейса. Можно определить элемент $N_A \in \Gamma(\Lambda^2(A^*) \otimes A)$,

$$N_A(\alpha, \beta) = \{\alpha, \beta\} + J_A\{J_A\alpha, \beta\} + \{\alpha, J_A\beta\} - \{J_A\alpha, \beta\},$$

и показать, что структура J_A интегрируема тогда и только тогда, когда $N_A = 0$.

Предполагая, что A допускает комплексную структуру $\mathcal{A}$, положим $\Omega_{\mathcal{A}}^k = \Lambda^k \mathcal{A}^*$ и обозначим через $\partial_{\mathcal{A}}$ дифференциал алгеброида Ли $\mathcal{A}$. Мы получаем комплекс пучков на X

$$\Omega_{\mathcal{A}}^0 \xrightarrow{\partial_{\mathcal{A}}} \Omega_{\mathcal{A}}^1 \xrightarrow{\partial_{\mathcal{A}}} \Omega_{\mathcal{A}}^2 \dots \quad (4)$$

Пусть $\partial_{\mathcal{A}}$, d_A – дифференциалы алгеброидов Ли $\mathcal{A}$ и A , положим $\Omega_{\mathcal{A}}^{\bullet} = \Lambda^{\bullet} \mathcal{A}^*$. Получаем инъективное отображение $\Omega_{\mathcal{A}}^{\bullet} \hookrightarrow \Lambda^{\bullet} A^* \otimes \mathbb{C}$.

ЛЕММА 1. *Если A допускает голоморфную структуру $\mathcal{A}$, то d_A ограничивается до ∂_A на $\Omega_{\mathcal{A}}^{\bullet}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f – голоморфная функция, а $\alpha \in \Gamma(\mathcal{A})$, то

$$d_A(f)(1 \otimes \alpha) = a(1 \otimes \alpha)(f) = \tilde{a}(\alpha)(f) = \partial_A(f)(\alpha),$$

так что утверждение справедливо в степени 0. Если $\xi \in \Gamma(\Omega_{\mathcal{A}}^1)$, то

$$\begin{aligned} d_A(1 \otimes \xi)(1 \otimes \alpha, 1 \otimes \beta) &= \tilde{a}(\alpha)(\xi(\beta)) - \tilde{a}(\beta)(\xi(\alpha)) - \xi(\{\alpha, \beta\}) = \\ &= (1 \otimes \partial_A \xi)(1 \otimes \alpha, 1 \otimes \beta), \end{aligned}$$

так что в степени 1 оно также выполнено. Применение правила Лейбница завершает доказательство.

3.2. Касательный комплекс регулярного голоморфного алгеброида Ли.

Скажем, что голоморфный алгеброид Ли $a: \mathcal{A} \rightarrow \Theta_X$ *регулярен*, если его якорь a имеет постоянный ранг всюду на X . В этом случае образ $\mathcal{D}$ на $\mathcal{A}$ в Θ_X является инволютивным голоморфным подрасслоением в Θ_X , поточечно касательным к регулярному голоморфному слоению $\mathcal{F}$ в X . Дифференциал ∂_A комплекса пучков $\Lambda^{\bullet} \mathcal{A}^*$ ограничивается до дифференциала $\partial_{\mathcal{D}}: \Lambda^{\bullet} \mathcal{D}^* \rightarrow \Lambda^{\bullet+1} \mathcal{D}^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1. *Ядро $\partial_{\mathcal{D}}: \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{D}^*$ есть пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ голоморфных функций на X , локально-постоянных вдоль листов $\mathcal{F}$.*

2. *Комплекс пучков $(\Lambda^{\bullet} \mathcal{D}^*, \partial_{\mathcal{D}})$ является точным в положительных степенях.*

3. *Существует изоморфизм $H^k(X, \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \simeq \mathbb{H}^k(X, \Lambda^{\bullet} \mathcal{D}^*)$ для всех $k \geq 0$.*

Здесь $\mathbb{H}^{\bullet}$ обозначает функтор гиперкогомологий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet}$ обозначает фактор голоморфного комплекса де Рама $(\Omega_X^{\bullet}, \partial)$ по ядру сопряженного a^* к отображению якоря. Для всех k назовем $\Omega_{\mathcal{F}}^k$ пучком $\mathcal{F}$ -слоеных голоморфных дифференциальных форм на X .

Существует слоеный ∂ -оператор $\partial_{\mathcal{F}}: \Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet} \rightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet+1}$, и оказывается, что сопряженный к якорю задает изоморфизм комплексов $(\Lambda^{\bullet} \mathcal{D}^*, \partial_{\mathcal{D}}) \simeq (\Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet}, \partial_{\mathcal{F}})$. Поэтому мы можем доказать точность комплекса $(\Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet}, \partial_{\mathcal{F}})$ (в положительных степенях).

Мы можем также ввести пучки $\Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}$ гладких $\mathcal{F}$ -слоеных дифференциальных форм X хodgeва типа (p, q) (согласно стандартному определению). Имеем дифференциал $\bar{\partial}_{\mathcal{F}}: \Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet, \bullet} \rightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet, \bullet+1}$.

Далее, существуют голоморфные координаты $(z^1, \dots, z^m, y^1, \dots, y^{n-m})$ вокруг каждой точки X , где $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ и $m = \text{rk}_{\mathbb{C}} \mathcal{D}$, так что листы $\mathcal{F}$ задаются уравнениями $y^i = \text{const}$, и z – координаты на листах. Поскольку точность комплекса пучков $(\Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet}, \partial_{\mathcal{F}})$ – вопрос локальный, мы можем предположить, что $X = Z \times Y$, и отождествить листы $\mathcal{F}$ с комплексными подмногообразиями $Z \times \{y\}$ для $y \in Y$. Далее $(z^1, \dots, z^m)$ и $(y^1, \dots, y^{n-m})$ являются локальными координатами в Z и Y соответственно. Заметим, что в этих координатах сечения $\Omega_{\mathcal{F}}^k$ записываются как

$$\eta = \sum \eta_{i_1, \dots, i_k}(z, y) dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_k},$$

тогда как $\Omega_{\mathcal{F}}^{p,q}$ записываются как

$$\tau = \sum \tau_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q}(z, \bar{z}, y) dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}.$$

Утверждение 1 теперь получается непосредственно. Более того, теперь легко показать, что естественное отображение $\Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet} \rightarrow \Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet, \bullet}$ является резольвентой. Стандартный результат гомологической алгебры (см., например, лемму 8.5 в монографии [5]) показывает, что комплекс $\Omega_{\mathcal{F}}^{\bullet}$ квазиизоморфен комплексу гладких комплекснозначных $\mathcal{F}$ -слоеных дифференциальных форм, и, поскольку последний является точным (см. с. 215 в монографии [6]), то точным (в положительных степенях) является и первый. Это доказывает утверждение 2. Утверждение 3 является непосредственным следствием двух предыдущих.

3.3. Представления алгеброидов Ли. Представление алгеброида Ли $A \xrightarrow{a} T_M$ в векторном расслоении E есть морфизм алгеброидов Ли $\nabla: A \rightarrow \mathcal{D}(E)$, где $\mathcal{D}(E) \xrightarrow{\sigma} M$ – алгеброид Атьи E [7], [8]. Поэтому, если α, s – сечения A и E соответственно, $\nabla(\alpha)$ действует на s ; мы обозначим это действие через $\nabla_{\alpha}s$. Предыдущее абстрактное определение означает что ∇ удовлетворяет условиям

$$\nabla_{\{\alpha, \beta\}} = [\nabla_{\alpha}, \nabla_{\beta}], \quad \sigma(\nabla(\alpha)) = a(\alpha).$$

Когда имеется представление A в E , скажем, как обычно, что E является A -модулем.

Можно определить когомологии алгеброида Ли с коэффициентами в E , рассматривая “твистованный” комплекс $C_A^{\bullet}(E) = \Gamma(\Lambda^{\bullet} A^* \otimes E^*)$ и определяя дифференциал согласно

$$\begin{aligned} (\delta_E \xi)(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}, s) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} [a(\alpha_i) \xi(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}, s) - \\ &\quad - \xi(\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p+1}, \nabla_{\alpha_i} s)] + \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \xi(\{\alpha_i, \alpha_j\}, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_{p+1}, s). \end{aligned} \quad (5)$$

3.4. Скрученные произведения алгеброидов Ли. Нам потребуется понятие скрученного произведения алгеброидов Ли [1], [9]–[12]. Мы приведем его для случая вещественных алгеброидов, но подобные конструкции могут быть приведены и для гладкого комплексного или голоморфного случаев.

Скажем, что A и B образуют скрученное произведение, если A является B -модулем, B является A -модулем и справедливы соотношения

$$\begin{aligned} [a(\alpha), b(\beta)] &= -a(\nabla_\beta \alpha) + b(\nabla_\alpha \beta), \\ \nabla_\alpha \{\beta_1, \beta_2\} &= \{\nabla_\alpha \beta_1, \beta_2\} + \{\beta_1, \nabla_\alpha \beta_2\} + \nabla_{\nabla_{\beta_2} \alpha} \beta_1 - \nabla_{\nabla_{\beta_1} \alpha} \beta_2, \\ \nabla_\beta \{\alpha_1, \alpha_2\} &= \{\nabla_\beta \alpha_1, \alpha_2\} + \{\alpha_1, \nabla_\beta \alpha_2\} + \nabla_{\nabla_{\alpha_2} \beta} \alpha_1 - \nabla_{\nabla_{\alpha_1} \beta} \alpha_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Если A , B образуют скрученное произведение алгеброидов Ли, то их прямая сумма $A \oplus B$ может быть наделена структурой алгеброида Ли $A \bowtie B$ с помощью якоря c , определенного как $c(\alpha + \beta) = a(\alpha) + b(\beta)$, и скобки

$$\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2\} = (\{\alpha_1, \alpha_2\} + \nabla_{\beta_1} \alpha_2 - \nabla_{\beta_2} \alpha_1) + (\{\beta_1, \beta_2\} + \nabla_{\alpha_1} \beta_2 - \nabla_{\alpha_2} \beta_1).$$

Если эти условия выполнены, мы можем рассматривать когомологии A с коэффициентами в A -модуле $\Lambda^\bullet B^*$ и, точно так же, когомологии B с коэффициентами в B -модуле $\Lambda^\bullet A^*$.

Довольно громоздкие условия (6) могут быть изящно переписаны в терминах коммутирования двух дифференциалов этих комплексов [1]. Таким образом, в случае скрученного произведения алгеброидов Ли мы получаем двойной комплекс. Более того, в работе [1] показано, что когомология тотального комплекса изоморфна когомологии скрученного произведения $A \bowtie B$ (с тривиальными коэффициентами).

3.5. Косоголоморфные алгеброиды Ли. В работе [1] доказано, что любой голоморфный алгеброид Ли на комплексном многообразии X может образовывать скрученное произведение с алгеброидом Ли $T_X^{0,1}$, и с использованием этого факта развита теория когомологий голоморфных алгеброидов Ли. Минимальными дополнительными усилиями мы можем обобщить эту теорию и изучить комплексы алгеброидов Ли, полученных скрученными произведениями голоморфных алгеброидов Ли с антиголоморфными. Мы называем это *косоголоморфной структурой*. Разумеется, это обобщает случай комплексификации касательного расслоения $T_{X,\mathbb{C}}$. Мы развиваем здесь элементы теории когомологий для этого класса алгеброидов Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Комплексный алгеброид Ли $A \xrightarrow{a} T_X^{\mathbb{C}}$ на комплексном многообразии X наделен *косоголоморфной структурой*, если

- 1) существует скрученное произведение алгеброидов Ли A_1, A_2 такое, что $A \simeq A_1 \bowtie A_2$;
- 2) $A_1 \simeq \mathcal{C}^\infty \otimes \mathcal{A}_1$ и $\bar{A}_2 \simeq \mathcal{C}^\infty \otimes \mathcal{A}_2$ (как комплексные алгеброиды Ли) для некоторых голоморфных алгеброидов Ли $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$.

Отметим, что из этих условий следует, что для якорей a_1, a_2 алгеброидов A_1, A_2 можно записать $a_1(A_1) \subset T^{1,0}X$, $a_2(A_2) \subset T^{0,1}X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\mathcal{A}$ – голоморфный алгеброид Ли, то $A_1 = \mathcal{C}_X^\infty \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$ и $T_X^{0,1}$ образуют скрученное произведение. Поэтому мы получаем комплексный алгеброид Ли $A = A_1 \bowtie T_X^{0,1}$ с косооголоморфной структурой. Это воспроизводит теорию, развитую в работе [1], которая, таким образом, является специальным случаем нашей теории. Если в дополнение к этому $\mathcal{A}$ есть голоморфное касательное расслоение Θ_X , то A – комплексификация $T_X^{\mathbb{C}}$, и наша теория когомологий совпадает с теорией де Рама. В более общем случае, если дан комплексный алгеброид Ли $A = A_1 \bowtie A_2$ с косооголоморфной структурой, якорь $a_2: A_2 \rightarrow T^{0,1}X$ определяет морфизм комплексных алгеброидов Ли $A \rightarrow A_1 \bowtie T^{0,1}X$. В свою очередь это определяет морфизмы $H^\bullet(A_1 \bowtie T^{0,1}X) \rightarrow H^\bullet(A)$.

4. ЛОКАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ КОСОГОЛОМОРФНЫХ АЛГЕБРОИДОВ ЛИ

Пусть A – косооголоморфный алгеброид Ли на комплексном многообразии X . Рассмотрим пучки

$$\lambda_A^{p,q} = \Lambda^p A_1^* \otimes \Lambda^q A_2^*$$

с дифференциалами

$$\partial_A: \lambda_A^{p,q} \rightarrow \lambda_A^{p+1,q}, \quad \bar{\partial}_A: \lambda_A^{p,q} \rightarrow \lambda_A^{p,q+1}.$$

Поскольку комплексные алгеброиды Ли A, A_2 образуют скрученное произведение, $(\lambda^{\bullet,\bullet}, \partial_A, \bar{\partial}_A)$ является двойным комплексом [1]. Следующий результат можно легко проверить (см. также работу [1], предложение 4.6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Когомологии алгеброида Ли A изоморфны когомологиям тотального комплекса двойного комплекса $(\Gamma(\lambda^{\bullet,\bullet}), \partial_A, \bar{\partial}_A)$.*

Обозначим через $\mathcal{A}$ пучок голоморфных сечений алгеброида A_1 . Более того, мы скажем, что A_2 транзитивен, если $a_2: A_2 \rightarrow T_X^{0,1}$ сюръективно.

ЛЕММА 2. *Если алгеброид A снабжен косооголоморфной структурой и A_2 транзитивен, то $\ker[\lambda_A^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_A} \lambda_A^{p,1}] \simeq \Omega_{\mathcal{A}}^p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если f – некоторая функция, то $\bar{\partial}_A(f)(\alpha) = a_2(\alpha)(f)$ для $\alpha \in \Gamma(\lambda_A^{p,1})$; если $\bar{\partial}_A(f) = 0$ и a_2 сюръективно, то функция f голоморфна. Пусть $\beta = \sum_i \alpha_i \otimes f_i$ – сечение $\lambda_A^{p,0}$. Мы можем предположить, что α_i голоморфны (именно, они являются сечениями $\Omega_{\mathcal{A}}^p$). Если $\bar{\partial}_A \beta = 0$, то $\sum_i \alpha_i \otimes \bar{\partial}_A f_i = 0$, откуда следует, что функции f_i являются голоморфными. Тогда $\beta = \sum_i f_i \alpha_i \otimes 1$ есть сечение Ω_A^p .

В общем случае, без предположения транзитивности A_2 , пусть $\mathcal{K}^p = \ker[\lambda_A^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_A} \lambda_A^{p,1}]$. Поскольку $\bar{\partial}_A(\Omega_{\mathcal{A}}^0) = \bar{\partial}_A(\mathcal{O}_X) = 0$ и $A_1 \simeq \mathcal{C}^\infty \otimes \mathcal{A}$, имеем инъективное отображение комплексов $\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet \rightarrow \mathcal{K}^\bullet$. Получаем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}^{k-1} & \longrightarrow & \lambda_A^{k-1,0} & \longrightarrow & \lambda_A^{k-1,1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}^k & \longrightarrow & \lambda_A^{k,0} & \longrightarrow & \lambda_A^{k,1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{K}^{k+1} & \longrightarrow & \lambda_A^{k+1,0} & \longrightarrow & \lambda_A^{k+1,1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots
 \end{array}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что алгеброид A удовлетворяет $\bar{\partial}_A$ -лемме Пуанкаре ($\bar{\partial}_A$ -лемме Пуанкаре), если для всех p комплекс пучков $(\lambda_A^{\bullet,p}, \partial_A)$ (соответственно $(\lambda_A^{p,\bullet}, \bar{\partial}_A)$) точен в положительных степенях.

ПРИМЕР 2. Комплексный алгеброид Ли из замечания 1 удовлетворяет $\bar{\partial}_A$ -лемме Пуанкаре, которая в данном случае означает просто точность комплекса Дольбо, “твистованного” голоморфным расслоением $\mathcal{A}$. Более того, в этом случае A_2 очевидно транзитивен.

Следующая теорема описывает главные когомологические свойства комплексного алгеброида Ли, снабженного косо голоморфной структурой.

ТЕОРЕМА. Пусть алгеброид A удовлетворяет $\bar{\partial}_A$ -лемме Пуанкаре. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Обобщенная голоморфная теорема де Рама. Существует изоморфизм

$$\mathbb{H}^p(X, \mathcal{K}^\bullet) \simeq H^p(A),$$

где $\mathbb{H}^\bullet$ обозначает гиперкогомологии.

2. Обобщенная теорема Дольбо. Существует изоморфизм

$$H^p(X, \mathcal{K}^q) \simeq H^p(\Gamma(\lambda_A^{q,\bullet}), \bar{\partial}_A),$$

где $H^p(X, \mathcal{K}^q)$ обозначают когомологии пучков.

Если, более того, A удовлетворяет $\bar{\partial}_A$ -лемме Пуанкаре, то справедливы следующие утверждения.

3. Комплекс пучков $(\Lambda^\bullet A^*, d_A)$ точен в положительных степенях (т.е. существует лемма Пуанкаре для дифференциала d_A).

4. Обобщенная теорема де Рама. Существует изоморфизм $H^p(X, \mathcal{F}^\infty) \simeq H^p(A)$, где $H^p(X, \mathcal{F}^\infty)$ – когомологии пучков, и $\mathcal{F}^\infty = \ker[\mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{d_A} A^*]$ является пучком функций Казимира A .

5. Комплекс пучков $(\mathcal{K}^\bullet, \partial_A)$ точен в положительных степенях.

Наконец, если в дополнение к предыдущим условиям A_2 является транзитивным, то справедливы следующие утверждения.

6. Существует изоморфизм $H^p(X, \mathcal{F}) \simeq H^p(A)$, где $\mathcal{F} = \ker[\mathcal{O}_X \xrightarrow{\partial_A} \mathcal{A}^*]$ – пучок функций Казимира $\mathcal{A}$.

7. Если многообразие X штейново, то группы когомологий $H^p(X, \mathcal{F})$ (и, следовательно, группы $H^p(A)$) изоморфны группам когомологий комплекса глобальных сечений $\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Член E_1 первой спектральной последовательности двойного комплекса пучков $(\lambda^{\bullet, \bullet}, \partial_A, \bar{\partial}_A)$ имеет вид

$$\begin{aligned} E_1^{p,0} &\simeq \mathcal{K}^p, \\ E_1^{p,q} &= 0 \quad \text{для } q > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, спектральная последовательность вырождается на первом шаге, и мы получим

$$\begin{aligned} E_2^{p,0} &\simeq \mathcal{H}^p(\mathcal{K}^\bullet), \\ E_2^{p,q} &= 0 \quad \text{для } q > 0, \end{aligned}$$

что вместе с предложением 3 доказывает, что композиция $\mathcal{K}^\bullet \hookrightarrow \lambda_A^{\bullet,0} \hookrightarrow \Lambda^\bullet A^*$ является квазиизоморфизмом между комплексами $(\Lambda^\bullet A^*, d_A)$ и $\mathcal{K}^\bullet$. Поскольку пучок $\Lambda^\bullet A^*$ тонкий, это доказывает утверждение 1 теоремы.

Утверждение 2 следует из абстрактной теоремы де Рама.

Утверждение 3 очевидно.

$\Lambda^\bullet A^*$ является (тонкой) резольвентой $\mathcal{F}^\infty$, так что абстрактная теорема де Рама доказывает утверждение 4. Утверждение 5 следует из утверждения 3 и квазиизоморфизма $(\Lambda^\bullet A^*, d_A) \simeq \mathcal{K}^\bullet$.

Так как алгеброид A_2 транзитивен, то имеем $\mathcal{K}^\bullet \simeq \Omega_{\mathcal{A}}^\bullet$. С другой стороны, согласно утверждению 5 комплекс, образованный $\mathcal{F}$ в степени 0, квазиизоморфен $\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet$. Поэтому

$$H^p(X, \mathcal{F}) \simeq H^p(X, \Omega_{\mathcal{A}}^\bullet) \simeq H^p(A),$$

т.е. справедливо утверждение 6.

Поскольку комплекс $\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet$ является резольвентой $\mathcal{F}$, то существует спектральная последовательность со вторым членом $E_2^{p,q} = H^q(H^p(X, \Omega_{\mathcal{A}}^\bullet), \partial_A)$, которая сходится к $H^\bullet(X, \mathcal{F})$. Если многообразие X штейново, то единственные ненулевые компоненты во втором члене – это $E_2^{0,q} = H^q(\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet(X), \partial_A)$, откуда и следует утверждение 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. 1. Отметим, что в утверждениях 1–5 теоремы предположение о транзитивности A_2 нам не требуется.

2. Если $A_2 = T^{0,1}X$ с $a_2 = \text{id}$ (см. замечание 1), то $\mathcal{H}^\bullet \simeq \Omega_{\mathcal{A}}^\bullet$, и утверждение 1 теоремы дает результат из работы [1] (меняя в [1] утверждение “когомологии комплекса $\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet$ ” (нулевые в положительных степенях) на “гиперкогомологии комплекса $\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet$ ”).

3. Если $A_1 = T^{1,0}X$, $a_1 = \text{id}$, так что A – комплексный алгеброид де Рама, утверждение 2 теоремы превращается в теорему Дольбо, утверждение 4 – в теорему де Рама, утверждение 1 – в голоморфную теорему де Рама [5].

5. ПРИМЕРЫ

5.1. Голоморфные структуры Пуассона. Этот пример был рассмотрен в работе [1], однако для полноты мы кратко опишем его здесь. Пусть X – комплексное многообразие и P – голоморфный пуассонов тензор, так что голоморфное кокасательное расслоение Ω_X^1 с якорем $P: \Omega_X^1 \rightarrow \Theta_X$ является голоморфным алгеброидом Ли. Как отмечалось выше, можно рассмотреть скрученное произведение этого алгеброида с алгеброидом Ли, естественно ассоциированным с расслоением $T_X^{0,1}$, получив комплексный алгеброид Ли с косо голоморфной структурой A . Доказанная выше теорема и лемма 2 доставляют изоморфизмы

$$\mathbb{H}^p(X, \mathcal{V}_P^\bullet) \simeq H^p(A), \quad H^p(X, \mathcal{V}_P^q) \simeq H^p(\Gamma(\lambda_A^{q,\bullet}), \bar{\partial}_A),$$

где $\mathcal{V}_P^\bullet$ – комплекс пучков голоморфных поливекторных полей с дифференциалом, задаваемым пуассоновым тензором P . Первый из этих изоморфизмов описывает соотношение между когомологиями голоморфного пуассонова многообразия и когомологиями подлежащего гладкого пуассонова многообразия.

Если многообразие X штейново, гиперкогомологии $\mathbb{H}^\bullet(X, \mathcal{V}_P^\bullet)$ изоморфны когомологиям комплекса глобальных сечений $\mathcal{V}_P^\bullet$.

5.2. Голоморфные касательные когомологии Лихнеровича–Пуассона. Пусть P – регулярный голоморфный тензор Пуассона на комплексном многообразии X (т.е. ранг линейного комплексного отображения $P_x: (\Theta_X^*)_x \rightarrow (\Theta_X)_x$ не зависит от x). Положив $\mathcal{A} = \Omega_X^1 / \ker P$, получаем точную последовательность голоморфных векторных расслоений

$$0 \rightarrow \ker P \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow 0.$$

Более того, скобка, определяемая P на локальных сечениях Ω_X^1 , опускается до скобки на $\mathcal{A}$, и мы получаем морфизм $\tilde{a}: \mathcal{A} \rightarrow \Theta_X$. Это определяет голоморфный алгеброид Ли $\mathcal{A} \xrightarrow{\tilde{a}} \Theta_X$ (разумеется, это специальный случай ситуации, описанной в п. 3.2). Мы назовем гиперкогомологии ассоциированного комплекса $\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet$ *голоморфными касательными когомологиями Лихнеровича–Пуассона*.

Пусть $A = [C_X^\infty \otimes \mathcal{A}] \ltimes T_X^{0,1}$. Тогда алгеброид A удовлетворяет $\bar{\partial}_A$ -лемме Пуанкаре, а A_2 транзитивен. Более того, согласно предложению 2 алгеброид A удовлетворяет ∂_A -лемме Пуанкаре, так что он удовлетворяет всем условиям теоремы.

Поэтому мы получаем изоморфизмы

$$\mathbb{H}^p(X, \Omega_{\mathcal{A}}^\bullet) \simeq H^p(X, \mathcal{F}) \simeq H^p(A).$$

Если X является многообразием Штейна, то эти группы совпадают также с группами $H^p(\Omega_{\mathcal{A}}^\bullet(X), \partial_A)$.

5.3. Косоголоморфные структуры Пуассона. Предположим, что на комплексном многообразии X заданы два голоморфных пуассоновых тензора P_1 и P_2 . Векторные расслоения $\Omega_X^{1,0}$ и $\Omega_X^{0,1}$ снабжены скобками, задаваемыми P_1 и комплексно-сопряженным пуассоновым тензором $\bar{P}_2$ соответственно, и задают структуры комплексных алгеброидов Ли A_1 , A_2 с якорями $P_1: A_1 \rightarrow T_X^{1,0}$, $\bar{P}_2: A_2 \rightarrow T_X^{0,1}$. Каждый алгеброид имеет представления одного в другом, задаваемые как

$$\nabla_\alpha \beta = \partial_{P_1(\alpha)}(\beta), \quad \bar{\nabla}_\beta \alpha = \bar{\partial}_{\bar{P}_2(\beta)}(\alpha), \quad (7)$$

если $\alpha \in \Omega^{1,0}(X)$, $\beta \in \Omega^{0,1}(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Алгеброиды Ли A_1 и A_2 вместе с модульными структурами, заданными уравнением (7), образуют скрученное произведение алгеброидов Ли. Это скрученное произведение $A = A_1 \bowtie A_2$ является алгеброидом Ли с косоголоморфной структурой, а его подлежащее векторное расслоение есть комплексификация гладкого кокасательного расслоения X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо только проверить выполнение условий скрученного произведения. Как уже отмечалось, согласно предложению 4.5 из работы [1] это превращается в проверку коммутативности дифференциала ∂_1 алгеброида Ли A_1 , твистованного с помощью $\Lambda^\bullet A_2^*$, с дифференциалом алгеброида Ли A_2 , твистованного с помощью $\Lambda^\bullet A_1^*$.

Обобщая очевидным образом формулы из предложения 4.25 в работе [1], мы можем записать

$$\partial_1(\mu \otimes \nu) = [[P_1, \mu]] \otimes \nu + \sum_i (e_i \wedge \mu) \otimes \mathcal{L}_{P_1(e^{*i})} \nu,$$

где $\mu \in \Gamma(\Lambda^\bullet A_1^*) = \Gamma(\Lambda^\bullet T_X^{1,0})$, $\nu \in \Gamma(\Lambda^\bullet A_2^*) = \Gamma(\Lambda^\bullet T_X^{0,1})$, $\{e_i\}$ – локальный базис сечений $T_X^{1,0}$, $\{e^{*i}\}$ – двойственный базис, $\mathcal{L}$ – производная Ли, $[[\cdot, \cdot]]$ – скобка Схоутена. Аналогично имеем

$$\partial_2(\mu \otimes \nu) = \mu \otimes [[\bar{P}_2, \nu]] + \sum_i \mathcal{L}_{\bar{P}_2(f^{*i})} \mu \otimes (f_i \wedge \nu),$$

где $\{f_i\}$ – локальный базис сечений $T_X^{0,1}$, $\{f^{*i}\}$ – двойственный базис. Так как оба дифференциала удовлетворяют правилу Лейбница, то достаточно проверить их коммутативность в случае, когда тензор μ голоморфен, а ν антиголоморфен. Таким образом, получаем

$$\partial_1(\mu \otimes \nu) = [[P_1, \mu]] \otimes \nu = d_1 \mu \otimes \nu,$$

где d_1 – дифференциал (нетвистованного) комплекса Лихнеровича–Пуассона P_1 . Аналогично имеем

$$\partial_2(\mu \otimes \nu) = \mu \otimes [[\bar{P}_2, \nu]] = \mu \otimes d_2\nu,$$

где d_2 – дифференциал комплекса Лихнеровича–Пуассона $\bar{P}_2$. Так как дифференциал $d_1\mu$ голоморфен, а $d_2\nu$ антиголоморфен, мы получаем

$$\partial_1\partial_2(\mu \otimes \nu) = d_1\mu \otimes d_2\nu = \partial_2\partial_1(\mu \otimes \nu).$$

Эти результаты усиливают замечание из работы [3], где отмечено, что скобки Схоутена P_1 и $\bar{P}_2$ обращаются в нуль, т.е. тензоры P_1 и $\bar{P}_2$ удовлетворяют условию бигамильтоновости. Однако, как мы обсуждали в работе [13], условие скрученного произведения сильнее, чем условие бигамильтоновости, и первое влечет второе.

В условиях предложения 4 косооголоморфный алгеброид Ли A не удовлетворяет ни одному из условий теоремы. Если пуассонов тензор P_2 невырожден, то имеется изоморфизм алгеброидов Ли $\bar{P}_2: A_2 \rightarrow T_X^{0,1}$, где $T_X^{0,1}$ снабжен стандартной структурой алгеброида Ли. Таким образом, мы получаем пример из п. 5.1.

5.4. Косооголоморфные пуассоновы структуры. Мы можем совместить два предыдущих примера, рассматривая два регулярных голоморфных пуассонова тензора P_1 , P_2 и алгеброид Ли скрученного произведения, полученный, как в п. 5.2, из P_1 и комплексно-сопряженного к P_2 . Таким образом, мы попадаем в ситуацию, когда верны утверждения 1–5 теоремы.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развиваемая в настоящей работе теория предлагает одновременно обобщения и упрощения известных результатов и их доказательств, приведенных в работе [1]. Более того, совершенно естественные приложения этой теории обнаруживаются при изучении пар голоморфных пуассоновых структур, удовлетворяющих условиям совместности голоморфных бигамильтоновых систем [13]. Поэтому можно предположить, что наша теория будет полезна при изучении голоморфных интегрируемых систем. Можно применить ее также к изучению комплексных многообразий с заданной на них парой совместных, возможно особых, голоморфных слоений.

Предложенная теория когомологий может также быть использована при изучении теории деформаций комплексных алгеброидов Ли и связи условий деформации с вышеупомянутыми условиями совместности. Пример такой связи был предложен недавно в статье [14], мотивированной некоторыми естественными вопросами классической механики. Наши конструкции и их очевидные обобщения для случая алгеброидов Ли скрученных произведений из работы [14], их двойственных алгеброидов и симплектических реализаций скрученных коалгеброидов предлагают полезный инструментальный и прозрачный язык для изучения “внутренних” деформаций и условий совместности в голоморфном случае.

Благодарности. Эта статья в основном была написана во время визита У. Бруццо в Физический департамент Университета Ратгерс, который он благодарит за гостеприимство. В. Н. Рубцов выражает благодарность Лаборатории теоретической физики Университета Сержи-Понтуаз за гостеприимство. Часть результатов была представлена В. Н. Рубцовым на конференции “Дифференциальные уравнения и топология” в Институте математики НАН Украины в феврале 2010 г. в Киеве. Автор благодарен проекту CNRS PICS “Проблемы математической физики” (Франция–Украина) за поддержку его визита в Киев. Авторы также благодарны И. Косманн-Шварцбах и М. Стиенону за полезные обсуждения и признательны Университету г. Анжер, Франция, и SISSA за гостеприимство и финансовую поддержку. Работа выполнена при частичной поддержке INFN (проект PI14 “Непертурбативная динамика калибровочных теорий”), а также проекта MISGAM (Методы интегрируемых систем, геометрии, прикладной математики), EINSTEIN Italo-Russian project “Интегрируемость в топологических струнных и полевых теориях”, MATPYL Angers-SISSA project “Алгеброиды Ли, эквивариантные когомологии и топологические квантовые и струнные полевые теории”.

Список литературы

- [1] C. Laurent-Gengoux, M. Stiénon, P. Xu, *Int. Math. Res. Not.*, **2008** (2008), Art. ID rnn 088, 46 pp., arXiv: 0707.4253.
- [2] S. Evens, J.-H. Lu, A. Weinstein, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **50**:200 (1999), 417–436.
- [3] L. A. Cordero, M. Fernández, R. Ibáñez, L. Ugarte, *Ann. Global Anal. Geom.*, **18**:3–4 (2000), 265–290.
- [4] V. V. Lychagin, V. N. Rubtsov, “Non-holonomic filtration: algebraic and geometric aspects of non-integrability”, *Geometry in Partial Differential Equations*, eds. A. Prastaro, Th. M. Rassias, World Sci., River Edge, NJ, 1994, 189–214.
- [5] C. Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry. V.I*, Cambridge Stud. Adv. Math., **76**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [6] I. Vaisman, *Cohomology and Differential Forms*, Pure Appl. Math., **21**, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [7] В. Н. Рубцов, *УМН*, **35**:4(214) (1980), 209–210.
- [8] K. C. H. Mackenzie, *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **213**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [9] J.-H. Lu, *Duke Math. J.*, **86**:2 (1997), 261–304.
- [10] K. C. H. Mackenzie, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1998), 74–87.
- [11] T. Mokri, *Glasgow Math. J.*, **39**:2 (1997), 167–181.
- [12] J. Huebschmann, “Differential Batalin–Vilkovisky algebras arising from twilled Lie–Rinehart algebras”, *Poisson Geometry*, Banach Center Publ., **51**, eds. J. Grabowski, P. Urbański, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2000, 87–102.
- [13] U. Bruzzo, V. Rubtsov, *On compatibility of Lie algebroid structures*, in preparation.
- [14] J. F. Cariñena, J. M. Nuñez da Costa, P. Santos, *J. Phys. A*, **39**:22 (2006), 6897–6918.