Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ф. Хелминк, А. Г. Хелминк, А. В. Опимах, Относительное расслоение реперов бесконечномерного многообразия флагов и решения интегрируемых иерархий, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 3, 440–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:52:44

© 2010 г. Г. Ф. Хелминк*, А. Г. Хелминк[†], А. В. Опимах[‡]

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ РЕПЕРОВ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ И РЕШЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ИЕРАРХИЙ

Развит теоретико-групповой подход к построению решений интегрируемых иерархий, соответствующих деформации набора коммутирующих направлений внутри алгебры Ли верхнетреугольных $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матриц. В зависимости от выбора коммутирующих направлений однородное пространство, для которого строятся эти решения, представляет собой относительно расслоение реперов бесконечномерного многообразия флагов или само бесконечномерное многообразие флагов. Эволюционные уравнения для возмущений базисных направлений записываются в виде уравнений Лакса и сводятся к башне дифференциальных и разностных уравнений для коэффициентов этих возмущенных матриц. Уравнения Лакса следуют из линеаризации иерархии и требуют введения подходящего аналога функции Бейкера–Ахиезера.

Ключевые слова: верхнетреугольные $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матрицы, уравнения Лакса, представление нулевой кривизны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что бесконечномерные многообразия играют центральную роль в различных задачах об интегрируемых явлениях, таких как построение решений различных систем (см., например, [1], [2]) или описание преобразований Дарбу (см. [3]). В настоящей работе мы добавим в список имеющихся связей два других примера этого явления, а именно связь относительно расслоения реперов бесконечномерного многообразия флагов или самого бесконечномерного многообразия флагов с решениями двух иерархий типа иерархий Тоды.

Иерархии Тоды являются башнями дифференциальных и разностных уравнений и исходно возникли из описания уравнений движения для цепочек частиц с взаимодействием ближайших соседей (см., например, [4], [5]). К настоящему времени

*Korteweg–de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands. E-mail: g.f.helminck@uva.nl

[†]North Carolina State University, Raleigh, USA. E-mail: loek@math.ncsu.edu

[‡]Оренбургский государственный педагогический университет, Оренбург, Россия. E-mail: aopimakh@mail.ru

ясно, что они играют важную роль в широком круге проблем от квантовых кристаллов [6], [7], квантовой гравитации [8], теории струн [9], [10], специальных функций [11], [12], гармонических отображений [13] до зеркальной симметрии [14]. Рассматриваемые в настоящей работе иерархии также являются такими башнями дифференциальных и разностных уравнений. Они соответствуют выбору некоторого числа коммутирующих направлений в верхнетреугольных $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матрицах и их возмущений, не выходящих за пределы этих алгебр Ли. Понятие верхнетреугольности оказывается здесь несколько шире, чем в конечномерном случае: рассматривается разложение всех $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матриц в бесконечные суммы $(k \times k)$ -блочных диагоналей, нумеруемых целыми числами, и верхнетреугольность означает при этом, что число ненулевых $(k \times k)$ -блочных диагоналей ограничено снизу.

Каждый элемент M_0 порядка 1 с обратимым младшим коэффициентом в этом разложении определяет разбиение алгебры Ли верхнетреугольных $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матриц в прямую сумму двух подалгебр. Кроме этого элемента порядка 1, выбирается конечное множество элементов порядка 0, коммутирующих с данным элементом M_0 и линейно порождающих некоторое подпространство $\mathbf{h}$ в матрицах порядка 0. Для базисных коммутирующих направлений имеются два выбора: произведения элементов подпространства $\mathbf{h}$ со строго отрицательными степенями элемента M_0 или с допущением также нулевой степени элемента M_0 . Они представляют собой инфинитезимальные генераторы коммутирующих потоков $\Gamma(\mathbf{h}_{<0})$ и $\Gamma(\mathbf{h}_{\leq 0})$ соответственно.

Далее рассматриваются возмущения внутри верхнетреугольных $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матриц для одного из этих множеств базисных коммутирующих направлений. Эволюционные уравнения для этих возмущений представляют собой уравнения Лакса интегрируемой иерархии, состоящей из башни дифференциальных и разностных уравнений для коэффициентов возмущенных матриц. Эти иерархии называются $(M_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ - и $(M_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархией соответственно. Как будет показано ниже, структура этих иерархий аналогична структуре тех иерархий, которые были рассмотрены в работах [15] и [16], однако в настоящей работе мы воздерживаемся от использования бесконечномерного варианта задачи Коши, как и от внешнего дифференциального исчисления с дифференциальными формами по бесконечному числу переменных. Наша схема основана на алгебре и геометрии. Имеются общие подходы для реализации коммутирующих потоков и построения решений иерархии в виде группы Ли $G_+(r)$. Основной результат настоящей работы составляет следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p \in G_+(r)$ определяет направление элемента M_0 . Тогда для каждой иерархии имеют место следующие утверждения.

1. Рассмотрим операторы $g \in G_+(r)$ и $\gamma_{<0} \in \Gamma(\mathbf{h}_{<0})$ такие, что $g\gamma_{<0}^{-1}$ принадлежит большой клетке, относящейся к $(M_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии. Пусть $p(g, \gamma_{<0}, V_0)$ – параболическая компонента в соответствующем разложении типа разложения Римана–Гильберта. Тогда матрица $[p(g, \gamma_{<0}, V_0)][\gamma_{<0}]$ является волновой матрицей в нуле для множества матриц $(\mathcal{M}([p(g, \gamma_{<0}, V_0)]), \mathcal{V}_\beta([p(g, \gamma_{<0}, V_0)]))$. В частности, эти матрицы образуют решение $(M_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии. Для каждого u_0 из унитарной подгруппы $V_0 U - V_0^{-1}$ данного разложения выполнены равенства

$$\begin{aligned}\mathcal{M}([p(g, \gamma_{<0}, V_0)]) &= \mathcal{M}([p(u_0 g, \gamma_{<0}, V_0)]), \\ \mathcal{V}_\beta([p(g, \gamma_{<0}, V_0)]) &= \mathcal{V}_\beta([p(u_0 g, \gamma_{<0}, V_0)]).\end{aligned}$$

2. Рассмотрим операторы $g \in G_+(r)$ и $\gamma_{\leq 0} \in \Gamma(\mathbf{h}_{\leq 0})$ такие, что $g\gamma_{\leq 0}^{-1}$ принадлежит большой клетке, относящейся к $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии. Пусть $u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)$ обозначает унитарную компоненту элемента $g\gamma_{\leq 0}^{-1}$ в соответствующем разложении типа разложения Римана–Гильберта. Тогда матрица $[u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]^{[\gamma_{\leq 0}]}$ является волновой матрицей в нуле для множества матриц $(\mathcal{M}([u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]), \mathcal{V}_\beta([u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]))$, и эти матрицы образуют решение $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии. Более того, для каждого p_0 из параболической подгруппы $V_0 P_- V_0^{-1}$ разложения выполняются равенства

$$\begin{aligned}\mathcal{M}([u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]) &= \mathcal{M}([u(p_0 g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]), \\ \mathcal{V}_\beta([u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]) &= \mathcal{V}_\beta([u(p_0 g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]).\end{aligned}$$

Работа построена следующим образом. Некоторые необходимые алгебраические сведения, касающиеся $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матриц, приведены в разделе 2, где, в частности, можно найти необходимые разложения элементов. В разделе 3 рассматривается структура иерархии в лаксовом виде и другой вид уравнений, так называемое представление нулевой кривизны. Это уже означает, что уравнения Лакса можно интерпретировать как условия совместности некоторой линейной системы. Эта линеаризация представлена в разделе 4 вместе с понятием волновой матрицы в нуле, что является соответствующим аналогом функции Бейкера–Ахиезера для иерархии Кадомцева–Петвиашвили в нашем подходе. Также в разделе 4 содержится полезный критерий для характеристики волновых матриц в нуле. В разделе 5 выбираются базисные коммутирующие направления, после чего рассматривается актуальное построение решений иерархии. Это требует описания группы Ли $G_+(r)$, подходящих разложений типа разложения Римана–Гильберта в ней, а также реализации возникающих коммутирующих потоков. Этому посвящен раздел 6. Завершается работа построением волновых матриц в нуле на основе однородного пространства группы Ли, что дает решения иерархии.

2. ПРОСТРАНСТВО $M_{\mathbb{Z}}(R)$

Поскольку нелинейные системы дифференциальных и разностных уравнений, являющихся основным предметом исследования настоящей работы, формулируются в терминах соотношений для $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матриц, рассмотрим сначала необходимые составляющие из этого пространства. Пусть R – коммутативное кольцо. Введем обозначение $M_{\mathbb{Z}}(R)$ для R -модуля $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матриц с коэффициентами из R . На этом пространстве используется упорядочение столбцов и строк, которое можно применять в конечномерном случае: произвольная матрица $A = (a_{ij})$ определяется как

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ \ddots & \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} & \alpha_{n-1,n+1} & \ddots & & \ddots \\ \ddots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{n,n} & \alpha_{n,n+1} & \ddots & & \ddots \\ \ddots & \alpha_{n+1,n-1} & \alpha_{n+1,n} & \alpha_{n+1,n+1} & \ddots & & \ddots \\ \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

В пространстве $M_{\mathbb{Z}}(R)$ имеется набор специальных элементов, который мы будем часто использовать. Прежде всего, имеются базисные матрицы $E_{(i,j)}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, задаваемые как

$$(E_{(i,j)})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}, \quad (1)$$

где δ_{ts} , $t, s \in \mathbb{Z}$, – символ Кронекера. Таким образом, каждую матрицу $A = (\alpha_{ij})$ из $M_{\mathbb{Z}}(R)$ можно описывать как формальную линейную комбинацию базисных матриц

$$A = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{ij} E_{(i,j)} \equiv \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{(i,j)} E_{(i,j)}. \quad (2)$$

Обозначение $\alpha_{(i,j)}$ для матричного элемента α_{ij} матрицы A мы будем использовать, только если может возникнуть неясность в отношении нумерации. Мы не будем специально этого оговаривать. Базисные матрицы можно перемножать, они удовлетворяют равенствам

$$E_{(i,j)} E_{(m,k)} = \delta_{jm} E_{(i,k)}.$$

В общем случае для произвольных матриц $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ij})$ в $M_{\mathbb{Z}}(R)$ нельзя определить произведение AB как

$$(AB)_{ik} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{ij} \beta_{jk}. \quad (3)$$

Однако это выражение приобретает смысл, если и A , и B принадлежат к классам верхне- или нижнетреугольных матриц. Всякое отображение $\Delta: R \rightarrow R$ естественным образом продолжается до отображения $\Delta: M_{\mathbb{Z}}(R) \rightarrow M_{\mathbb{Z}}(R)$, если положить

$$\Delta(A)_{ij} = \Delta(\alpha_{ij}) \quad \text{при} \quad A = (\alpha_{ij}).$$

Важную роль играют матрица сдвига Λ и ее степени $\{\Lambda^m | m \in \mathbb{Z}\}$, определяемые как

$$\Lambda^m = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{(i-m,i)}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Это позволяет разлагать каждую матрицу $A \in M_{\mathbb{Z}}(R)$ по диагональным матрицам, что удобно для явных вычислений и дает возможность простого описания понятий ниже- и верхнетреугольных матриц в данном контексте.

Для каждого ненулевого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $M_k(R)$ кольцо $(k \times k)$ -матриц с коэффициентами из кольца R . Пусть дан набор $(k \times k)$ -матриц $\{d(ks) | s \in \mathbb{Z}\}$ из $M_k(R)$. С таким набором свяжем диагональ, состоящую из $(k \times k)$ -блоков $\text{diag}(d(ks))$ из $M_{\mathbb{Z}}(R)$ и задаваемую как

$$\text{diag}(d(ks)) := \sum_{s \in \mathbb{Z}} \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\beta=1}^k d(ks)_{\alpha\beta} E_{(sk+\alpha-1, sk+\beta-1)}. \quad (4)$$

Эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ \ddots & d(kn-k) & 0 & 0 & \ddots & & \\ \ddots & 0 & d(kn) & 0 & \ddots & & \\ \ddots & 0 & 0 & d(kn+k) & \ddots & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \end{pmatrix}, \quad (5)$$

чем оправдывается используемая терминология. Пусть для любого такого $k \geq 1$

$$\mathcal{D}_k(R) = \{d = \text{diag}(d(ks)) | d(ks) \in M_k(R) \text{ для всех } s \in \mathbb{Z}\}$$

обозначает кольцо $(k \times k)$ -блочно-диагональных матриц из $M_{\mathbb{Z}}(R)$. Имеем диагональное вложение i_k из $M_k(R)$ в $\mathcal{D}_k(R)$, получаемое, если для любого $A \in M_k(R)$ положить все диагональные блоки матрицы $i_k(A)$ равными A . Элементы Λ^{km} , $m \in \mathbb{Z}$, действуют на $\mathcal{D}_k(R)$ согласно формуле

$$\Lambda^{km} \text{diag}(d(ks)) \Lambda^{-km} = \text{diag}(d(ks + km)). \quad (6)$$

Отсюда следует, например, что образ i_k состоит из всех матриц из $\mathcal{D}_k(R)$, которые коммутируют с Λ^k . Это приводит к упомянутому выше разложению по диагоналям. Если $A = (\alpha_{ij}) \in M_{\mathbb{Z}}(R)$, то мы пользуемся следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. j -я $(k \times k)$ -Блочная диагональ любой матрицы A , $j \in \mathbb{Z}$, есть матрица

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\gamma=1}^k \sum_{\beta=1}^k \alpha_{(ki-kj+\gamma-1, ki+\beta-1)} E_{(ki-kj+\gamma-1, ki+\beta-1)}.$$

Из уравнения (6) видно, что j -ю $(k \times k)$ -блочную диагональ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матрицы A можно единственным образом записать в виде $\text{diag}(d(ks)) \Lambda^{kj}$ или $\Lambda^{kj} \text{diag}(c(ks))$, где и $\text{diag}(d(ks))$, и $\text{diag}(c(ks))$ принадлежат $\mathcal{D}_k(R)$. Таким образом, каждую матрицу $A = (\alpha_{i,j}) \in M_{\mathbb{Z}}(R)$ можно единственным образом записать в виде формальной бесконечной суммы

$$A = \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_j \Lambda^{kj} \quad \text{или} \quad A = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Lambda^{kj} c_j, \quad (7)$$

где все d_j и c_j лежат в $\mathcal{D}_k(R)$. Благодаря этому разложению и уравнению (6) ясно, что умножение любой матрицы A слева или справа на степень Λ хорошо определено и легко вычисляется. В частности, видим, что любая матрица, коммутирующая с Λ^k , имеет вид (7), где d_j и c_j лежат в образе i_k .

Введем далее два подпространства в $M_{\mathbb{Z}}(R)$ – ниже- и верхнетреугольные матрицы, образующие кольцо относительно произведения (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент A из $M_{\mathbb{Z}}(R)$ называется *верхним $(k \times k)$ -блочным-треугольным элементом уровня m* , если его можно записать как

$$A = \sum_{j \geq m} a_j \Lambda^{kj}, \quad a_j \in \mathcal{D}_k(R). \quad (8)$$

Будем говорить, что m – *порядок* матрицы A по Λ^k , если a_m не равно нулю.

Множество всех верхних $(k \times k)$ -блочных-треугольных элементов уровня m по Λ^k обозначим как $UT_{\geq m}(\Lambda^k)$ или просто $UT_{\geq m}$. Для множества всех верхних $(k \times k)$ -блочных-треугольных матриц используется обозначение

$$UT(R) := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} UT_{\geq m}(\Lambda^k) =: UT.$$

Аналогично обозначим

$$UT_{< m}(\Lambda^k) := \left\{ A \mid A \in UT, A = \sum_{j < m} a_j \Lambda^{kj}, a_j \in \mathcal{D}_k(R) \right\} =: UT_{< m}.$$

Очевидно, $UT(R)$ не зависит от k и можно говорить просто о верхнетреугольных матрицах, если размер диагоналей не имеет специального значения. Прямая проверка показывает, что множество UT с произведением (3) есть R -алгебра. Аналогично можно ввести множество нижнетреугольных матриц $LT(R)$ как множество матриц в $M_{\mathbb{Z}}(R)$, у которых все j -е диагонали нулевые, если j достаточно велико. В множестве UT можно описать большой класс обратимых элементов. Поскольку умножение в $\mathcal{D}_k(R)$ соответствует умножению $(k \times k)$ -матриц на том же месте на диагонали матрицы, мы видим, что те элементы из $\mathcal{D}_k(R)$, у которых есть обратный элемент в $\mathcal{D}_k(R)$, состоят из всех $\text{diag}(d(kj))$, $d(kj) \in GL_k(R)$.

Пусть теперь имеется $V \in UT$ вида

$$V = \sum_{i \geq m} v_i \Lambda^{ik},$$

где v_m обратим в $\mathcal{D}_k(R)$. Тогда элемент, обратный к V , можно найти рекуррентно, причем имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Каждый элемент V из множества UT с обратимым младшим коэффициентом в своем $(k \times k)$ -блочном разложении (7) обратим в UT .*

Класс обратимых элементов из леммы 1 используется в процедуре одевания в UT .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорят, что элемент $A \in UT$ получен *одеванием* элемента $B \in UT$, если имеется элемент $V = \sum_{i \geq m} v_i \Lambda^{ik}$, где v_m обратим в $\mathcal{D}_k(R)$, такой что $A = VBV^{-1}$.

Заметим, что одевание элемента не меняет его порядка по Λ^k . В отличие от ситуации с псевдодифференциальными операторами, в данном контексте путем одевания степеней Λ^k можно получить все искомые матрицы. Это было показано в работе [17]. А именно, там было установлено следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть для любого ненулевого элемента $r \in \mathbb{Z}$ матрица M из $UT_{\geq k}$ имеет $(k \times k)$ -блочный вид:

$$M = \sum_{j \geq r} \alpha_j \Lambda^{jk},$$

где элемент α_r из $\mathcal{D}_k(R)$ обратим в $\mathcal{D}_k(R)$. Тогда существует элемент V из UT , имеющий $(k \times k)$ -блочный вид $V = \sum_{i \geq 0} \beta_i \Lambda^{ki}$, где $\beta_0 \in \mathcal{D}_k(R)$ обратим в $\mathcal{D}_k(R)$, причем

$$M = V \Lambda^{rk} V^{-1}.$$

При этом можно выбрать коэффициенты элемента V так, что они будут представлять собой факторы полиномиальных выражений от коэффициентов элементов M .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из предложения 1 следует, что любой элемент M_0 из UT порядка 1 по Λ^k с обратимым младшим коэффициентом можно записать как $M_0 = V_0 \Lambda^k V_0^{-1}$, где $V_0 \in UT$ имеет порядок 0. Поскольку сопряжение посредством V_0 является автоморфизмом UT , можно разложить любую матрицу A из UT также единственным образом как

$$A = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i M_0^i, \quad (9)$$

где все a_i принадлежат $V_0 \mathcal{D}_k(R) V_0^{-1}$. Такой тип “координатных преобразований” естественно возникает в интегрируемых иерархиях (см., например, [2], [6]). Понятия уровня и порядка по M_0 для элемента A из UT определяются аналогично тому, как это было сделано для Λ^k , при этом используется обозначение

$$UT_{\geq m}(\mathcal{M}_0) = \{A \in UT \mid \text{уровень } A \text{ по } \mathcal{M}_0 \text{ равен } m\}.$$

Таким образом, имеем

$$UT(R) := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} UT_{\geq m}(\mathcal{M}_0).$$

Для каждого $\mathcal{M}_0$, как и в замечании 1 и в соответствующем разложении (9), нас интересует конкретный способ разбиения элементов из UT . Если $A = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j M_0^j$ имеют вид (9), то можно записать

$$A = A_{<0}(\mathcal{M}_0) + A_{\geq 0}(\mathcal{M}_0) \quad (10)$$

с компонентами

$$A_{<0}(\mathcal{M}_0) = \sum_{j < 0} a_j M_0^j, \quad A_{\geq 0}(\mathcal{M}_0) = \sum_{j \geq 0} a_j M_0^j.$$

Из правила умножения $(k \times k)$ -блочных диагоналей следует, что это разложение индуцирует на алгебре Ли UT разбиение ее в прямую сумму двух подалгебр Ли

$$UT = UT_{<0}(\mathcal{M}_0) \oplus UT_{\geq 0}(\mathcal{M}_0), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} UT_{<0}(\mathcal{M}_0) &:= \{A \in UT \mid A = A_{<0}(\mathcal{M}_0)\}, \\ UT_{\geq 0}(\mathcal{M}_0) &:= \{A \in UT \mid A = A_{\geq 0}(\mathcal{M}_0)\}. \end{aligned}$$

Они порождают систему уравнений Лакса, которая составляет основной предмет рассмотрения настоящей работы. Как и для направления Λ^k , введем также для $\mathcal{M}_0$ более общие обозначения:

$$\begin{aligned} UT_{<r}(\mathcal{M}_0) &:= \left\{ A \in UT \mid A = \sum_{i<r} a_i \mathcal{M}_0^i \right\}, \\ UT_{\leq r}(\mathcal{M}_0) &:= \left\{ A \in UT \mid A = \sum_{i\leq r} a_i \mathcal{M}_0^i \right\}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Еще одна возможность разбиения алгебры Ли UT могла бы состоять в разложении матрицы $A = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \mathcal{M}_0^j$, как указано в (9), в соответствии с соотношением

$$A = A_{\leq 0}(\mathcal{M}_0) + A_{>0}(\mathcal{M}_0) \quad (12)$$

с компонентами

$$A_{\leq 0}(\mathcal{M}_0) = \sum_{j \leq 0} a_j \mathcal{M}_0^j, \quad A_{>0}(\mathcal{M}_0) = \sum_{j > 0} a_j \mathcal{M}_0^j,$$

что приводит к разложению алгебры Ли

$$UT = UT_{\leq 0}(\mathcal{M}_0) \oplus UT_{>0}(\mathcal{M}_0).$$

Это дает другую иерархию, однако подход аналогичен случаю, описываемому здесь, и поэтому мы ограничимся лишь замечаниями по этому поводу.

3. УРАВНЕНИЯ ЛАКСА В АЛГЕБРЕ ЛИ UT

Цель данного раздела – описать алгебраическую структуру, лежащую в основе совместных систем уравнений для матриц из UT , имеющих вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} = [Q, B] = QB - BQ. \quad (13)$$

Здесь нас интересуют уравнения вида (13), где $B \in UT$ – элемент отрицательного порядка по $\mathcal{M}_0$, а Q – элемент из $UT_{<0}(\mathcal{M}_0)$. Тогда из вида этого уравнения можно видеть, что происходит нечто особенное. Порядок $\partial B / \partial t$ по $\mathcal{M}_0$ в уравнении (13) будет больше или равен порядку B , тогда как порядок по $\mathcal{M}_0$ для правой части $[Q, B]$ больше или равен сумме порядков Q и B .

Таким образом, возникает естественный вопрос: имеется ли систематический способ найти для матрицы B отрицательного порядка по $\mathcal{M}_0$ некоторую матрицу Q из $UT_{<0}(\mathcal{M}_0)$ такую, что $[Q, B]$ имеет порядок по $\mathcal{M}_0$, больший или равный порядку матрицы B ? Для ответа на этот вопрос и нахождения Q рассмотрим уравнение (13)

для B . Ответ на вышеприведенный вопрос утвердительный. Рассмотрим централизатор $Z_{UT}(B)$ матрицы B в UT и выберем элемент Z в централизаторе $Z_{UT}(B)$; тогда имеем

$$[Z_{<0}(\mathcal{M}_0), B] = -[Z_{\geq 0}(\mathcal{M}_0), B],$$

и порядок правой части по $\mathcal{M}_0$, очевидно, больше или равен порядку B . Для матрицы $Q = Z_{<0}(\mathcal{M}_0)$ имеет смысл искать подходящее дифференцирование ∂_Z на R такое, что выполнены равенства

$$\partial_Z(B) = [Z_{<0}(\mathcal{M}_0), B]. \quad (14)$$

Здесь действие ∂_Z на элементы $M_{\mathbb{Z}}(R)$ определено покоэффициентно. Заметим, что уравнение (14) становится тривиальным, если взять элемент Z из $Z_{UT}(B)$, порядок которого по $\mathcal{M}_0$ больше или равен нулю. Поэтому мы будем рассматривать только уравнение (14) для $Z \in Z_{UT}(B)$ строго отрицательного порядка по $\mathcal{M}_0$.

Имеются различные выборы для матрицы B и также для матрицы Z из централизатора $Z_{UT}(B)$, при которых получаются внятные уравнения (14). Первый шаг в этом выборе заключается в фиксировании множества генераторов коммутирующего множества направлений в $UT(\mathcal{M}_0)$, включая $\mathcal{M}_0^{-1}$. Рассмотрим централизатор $Z_{UT}(\mathcal{M}_0)$ элемента $\mathcal{M}_0$ в UT . Если $k = 1$, то

$$Z_{UT}(\mathcal{M}_0) = \left\{ \sum_i b_i \mathcal{M}_0^i \in UT \mid b_i \in R \text{ для всех } i \right\},$$

что коммутативно. Таким образом, в данном случае степени $\mathcal{M}_0$ в основном линейно порождают пространство направлений, коммутирующих с $\mathcal{M}_0$, и, чтобы избежать тривиальных соотношений (14), мы будем рассматривать только базисные направления $\{\mathcal{M}_0^{-j} \mid j \geq 1\}$.

Однако если $k > 1$, то элемент централизатора $Z_{UT}(\mathcal{M}_0)$ имеет вид

$$\sum_i b_i \mathcal{M}_0^i \in UT \quad \text{при} \quad b_i \in V_0 i_k(M_k(R)) V_0^{-1},$$

где V_0 такое же, как в замечании 1, а $Z_{UT}(\mathcal{M}_0)$ более не коммутативно. Поэтому мы выбираем некоторое число матриц

$$\mathcal{V}_{\alpha,0} = V_0 i_k(F_{\alpha}) V_0^{-1}, \quad F_{\alpha} \in M_k(R),$$

из UT , имеющих порядок 0 по $\mathcal{M}_0$. Они очевидным образом коммутируют с $\mathcal{M}_0$, и мы потребуем, чтобы они также коммутировали друг с другом:

$$[\mathcal{V}_{\alpha,0}, \mathcal{V}_{\beta,0}] = 0 \quad \text{при всех } \alpha \text{ и } \beta.$$

Чтобы включить в рассмотрение как можно больше направлений, предположим, что $\{\mathcal{V}_{\alpha,0}\}$ представляет собой базис над R максимального коммутативного R -подмодуля $\mathbf{h}$ в $V_0 i_k(M_k(R)) V_0^{-1}$. Интересными коммутирующими направлениями для уравнения (14) тогда являются

$$\{\mathcal{V}_{\alpha,0} \mathcal{M}_0^{-j} \mid j \geq 1, \alpha \in \{1, \dots, m_U\}\}.$$

Для поддержания совместности в обозначениях между случаями $k = 1$ и $k > 1$ полагаем $\mathcal{V}_{1,0} = \text{Id}$, если $k = 1$. Фиксируя базисные коммутирующие направления, берем в качестве B некоторое число генераторов коммутативного кольца в UT , начиная с генератора $\mathcal{M}$ порядка -1 по $\mathcal{M}_0$:

$$\mathcal{M} := \sum_{i \geq -1} m_i \mathcal{M}_0^i \quad \text{с обратимым } m_{-1}. \quad (15)$$

Все коэффициенты в этом разложении $\mathcal{M}$ имеют вид

$$m_i = V_0 \text{diag}(m_i(k_s)) V_0^{-1}.$$

Согласно предложению 1 матрицу $\mathcal{M}$ можно записать в виде

$$\mathcal{M} = V \mathcal{M}_0^{-1} V^{-1}, \quad V = \sum_{i \geq 0} v_i \mathcal{M}_0^i, \quad (16)$$

где младший коэффициент v_0 элемента V можно положить равным $v_0 = V_0 w_0 V_0^{-1}$, где $w_0 = \text{diag}(w_0(k_s)) - (k \times k)$ -блочнo-диагональная матрица, задаваемая выражением $w_0(0) = \text{Id}$ и

$$w_0(tk) = \begin{cases} m_{-1}(tk) \dots m_{-1}(k), & t \geq 1, \\ m_{-1}(k(t+1))^{-1} \dots m_{-1}(0)^{-1}, & t < 0. \end{cases} \quad (17)$$

В таком качестве она рассматривается как деформация направления $\mathcal{M}_0^{-1}$. При $k = 1$ мы не деформируем “немое” направление $\mathcal{V}_{1,0}$. В этом случае централизатор $\mathcal{M}$ в UT равен

$$Z_{UT}(\mathcal{M}) = \left\{ \sum_i b_i \mathcal{M}^i \in UT \mid b_i \in R \text{ для всех } i \right\},$$

что коммутативно, и, полагая просто $Z = \mathcal{M}^{-j}, j \geq 1$, мы получаем уравнения

$$\partial_{\mathcal{M}^{-j}}(\mathcal{M}) = [\mathcal{M}_{<0}^{-j}(\mathcal{M}_0), \mathcal{M}]. \quad (18)$$

Поскольку ∂_Z и $[Z_{<0}(\mathcal{M}_0), -]$ – дифференцирования, мы видим, что коль скоро уравнение (14) выполнено для $\mathcal{M}$, оно выполнено также и для всех

$$\left\{ \sum_i b_i \mathcal{M}^i \in UT \mid b_i \in R \text{ и } \partial_Z(b_i) = 0 \text{ при всех } i \right\}.$$

Поэтому достаточно рассмотреть уравнения (18) только для генератора $\mathcal{M}$. Однако при $k > 1$ рассматриваются также деформации остальных базисных направлений $\{\mathcal{V}_{\alpha,0}\}$. Более точно, рассмотрим в UT элементы

$$\mathcal{V}_{\alpha} = \sum_{i \geq 0} v_{i,\alpha} \mathcal{M}_0^i, \quad v_{0,\alpha} = v_0 \mathcal{V}_{\alpha,0} v_0^{-1}, \quad (19)$$

где v_0 – описанный выше младший коэффициент одевающей матрицы для $\mathcal{M}$. Матрицы $(\mathcal{M}, \mathcal{V}_{\alpha})$ рассматриваются как деформации базисных генераторов $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathcal{V}_{\alpha,0})$.

В частности, мы хотим, чтобы эти деформации сохраняли соотношения коммутативности

$$[\mathcal{M}, \mathcal{V}_\alpha] = 0 \text{ и } [\mathcal{V}_\alpha, \mathcal{V}_\beta] = 0 \text{ при всех } \alpha \text{ и } \beta \in \{1, \dots, m_U\}. \quad (20)$$

Это условие тривиально выполнено, если матрицы $(\mathcal{M}, \mathcal{V}_\alpha)$ получают одеванием базисных направлений с помощью одной и той же матрицы, т. е.

$$\mathcal{M} = V \mathcal{M}_0 V^{-1} \quad \text{и} \quad \mathcal{V}_\alpha = V \mathcal{V}_{\alpha,0} V^{-1}.$$

Теперь для матрицы Z в централизаторах как $\mathcal{M}$, так и $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ можно выбрать $Z = Q_{j\alpha} := \mathcal{M}^j \mathcal{V}_\alpha$ при всех $j \geq 1$ и всех $\alpha \in \{1, \dots, m_U\}$. Нелинейные дифференциальные уравнения, выполнения которых мы требуем для $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\beta$, имеют вид

$$\partial_{Q_{j\alpha}}(\mathcal{M}) = [(Q_{j\alpha})_{<0}(\mathcal{M}_0), \mathcal{M}], \quad \partial_{Q_{j\alpha}}(\mathcal{V}_\beta) = [(Q_{j\alpha})_{<0}(\mathcal{M}_0), \mathcal{V}_\beta]. \quad (21)$$

Заметим, что если уравнения (21) выполняются для генераторов $\mathcal{M}$ и $\{\mathcal{V}_\alpha\}$, то они выполняются для всех $\{\mathcal{M}^m \mathcal{V}_\alpha \mid m \in \mathbb{Z}\}$, поскольку $\partial_{Q_{j\alpha}}$ и $[(Q_{j\alpha})_{<0}(\mathcal{M}_0), \cdot]$ являются дифференцированиями на UT . Следовательно, достаточно рассмотреть уравнения (21) только для генераторов.

Уравнения (20) и (21) для матриц $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\beta$ образуют уравнения $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии, соответствующей разбиению $UT = UT_{<0}(\mathcal{M}_0) \oplus UT_{\geq 0}(\mathcal{M}_0)$. Уравнения (21) называются *уравнениями Лакса* иерархии. Матрицы $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathcal{V}_{\beta,0})$ являются тривиальными решениями уравнений Лакса $(\mathcal{M}_0, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии; это означает, что

$$\partial_{Q_{j\alpha}}(\mathcal{M}_0^{-1}) = 0 \quad \text{и} \quad \partial_{Q_{j\alpha}}(\mathcal{V}_{\beta,0}) = 0 \quad \text{при всех } j \text{ и } \alpha.$$

Причина этого в том, что при всех $j \geq 1$ и всех $\alpha \in \{1, \dots, m_U\}$ имеем

$$(\mathcal{M}_0^{-j} \mathcal{V}_{\alpha,0})_{<0}(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}_0^{-j} \mathcal{V}_{\alpha,0}.$$

Для матриц $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\beta$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (20), рассмотрим множество конечнозонных матриц по $\mathcal{M}_0$,

$$C_{j\beta} := (Q_{j\beta})_{<0}(\mathcal{M}_0),$$

где $j \geq 1$ и все $\beta \in \{1, \dots, m_U\}$. Имеется другой набор соотношений, связанных с уравнениями Лакса иерархии, а именно так называемые соотношения нулевой кривизны

$$\partial_{Q_{n\alpha}}(C_{m\gamma}) - \partial_{Q_{m\gamma}}(C_{n\alpha}) - [C_{n\alpha}, C_{m\gamma}] = 0 \quad (22)$$

при всех $n \geq 1$, $m \geq 1$ и всех α и $\gamma \in \{1, \dots, m_U\}$.

В работе [17] следующее утверждение установлено чисто алгебраическим способом.

ТЕОРЕМА 2. *Уравнения Лакса (21) для $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\alpha$ эквивалентны соотношениям нулевой кривизны (22) для операторов $\{C_{r\gamma} := (\mathcal{M}^r \mathcal{V}_\gamma)_{<0}(\mathcal{M}_0)\}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Термин “соотношения нулевой кривизны” заимствован из следующей конечномерной ситуации: рассмотрим открытое подмножество U в $\mathbb{C}^t$ с локальными координатами $z_1, \dots, z_t$, а также $(p \times p)$ -матричную дифференциальную форму

$$\Omega = \sum_{i=1}^t C_i dz_i,$$

где C_i – голоморфные отображения из U в $gl_p(\mathbb{C})$. Такая матрица имеет следующий геометрический смысл: рассмотрим тривиальное векторное расслоение $E = U \times \mathbb{C}^p$ над U и базис $\{s_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ тривиализующих сечений, определяемых как

$$s_i(z) = e_i \quad \text{для всех } z \in U,$$

где $\{e_i\}$ – стандартный базис в $\mathbb{C}^p$. Тогда Ω определяет относительно $\{s_i\}$ связность $\nabla = d - \Omega$ на пространстве сечений расслоения E . Эта связность ∇ является отображением из пространства $A^0(E)$ голоморфных сечений расслоения E или форм нулевого порядка со значениями в E в пространство $A^1(E)$ 1-форм со значениями в E , удовлетворяющим равенству

$$\nabla(f\sigma) = \sigma df + f\nabla(\sigma), \quad (23)$$

где $\sigma \in A^0(E)$, а $f \in A^0$ – пространство голоморфных функций на базисном многообразии U . Связность ∇ имеет естественное продолжение $\nabla: A^s(E) \mapsto A^{s+1}(E)$, действующее из s -форм $A^s(E)$ со значениями в E в $(s+1)$ -формы $A^{s+1}(E)$ со значениями в E :

$$\nabla(f\sigma) = \sigma \wedge df + f\nabla(\sigma),$$

где f определено, как и выше, а $\sigma \in A^s(E)$. Пространство горизонтальных сечений, т.е. тех $y = \sum_{i=1}^p y_i s_i$, для которых $\nabla(y) = 0$, является p -мерным тогда и только тогда, когда кривизна

$$\nabla \circ \nabla = -d\Omega + (-\Omega) \wedge (-\Omega)$$

связности ∇ равна нулю. Тогда связность ∇ также называется *интегрируемой*. В терминах матриц $\{C_i\}$ интегрируемость связности ∇ сводится к так называемым уравнениям *нулевой кривизны* (см. [18])

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(C_j) - \frac{\partial}{\partial z_j}(C_i) - [C_i, C_j] = 0 \quad \text{для всех } i, j \in \{1, \dots, t\}. \quad (24)$$

Геометрический контекст для уравнений кривизны, рассматриваемых в настоящей работе, должен был бы заключаться в том, чтобы в качестве пространства параметров рассматривать $\mathbb{C}$ -оболочку S коммутирующих направлений

$$\{\mathcal{M}_0^{-j} \mathcal{V}_{\alpha,0} \mid j \geq 1, \alpha \in \{1, \dots, m_U\}\},$$

где $\{s_{j\beta} \mid j \geq 1, \beta \in \{1, \dots, m_U\}\}$ – локальные координаты. Тогда для каждого дифференцирования $\partial_{Q_{j\beta}}$ берется частная производная по $s_{j\beta}$ и рассматривается дифференциальная форма $\omega_{<0}$ со значениями в алгебре Ли UT

$$\omega_{<0} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_U} C_{j\beta} ds_{j\beta}.$$

Тогда уравнения (22) аналогичны условиям (24) обращения в нуль кривизны.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Сформулируем некоторые соображения, касающиеся дифференциального и разностного характера уравнений в иерархии. Для простоты положим $k = 1$ и $\mathcal{M}_0 = \Lambda$ и сосредоточимся на дифференцировании ∂_1 , соответствующем направлению Λ^{-1} . Тогда имеем

$$\mathcal{M} = \sum_{i \geq -1} m_i \Lambda^i, \quad m_i = \text{diag}(m_i(s)),$$

и уравнение Лакса для ∂_1 имеет вид

$$\sum_{i \geq -1} \partial_1(m_i) \Lambda^i = \sum_{j \geq 0} (m_{-1} \Lambda^{-1} m_j \Lambda - m_j \Lambda^j m_{-1} \Lambda^{-j}) \Lambda^{j-1}.$$

Покомпонентно это сводится к следующему утверждению: для всех $i \geq -1$ и всех $s \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство

$$\partial_1(m_i(s)) = m_{-1}(s) m_{i+1}(s-1) - m_{i+1}(s) m_{-1}(s+i+1).$$

В частности, для $m_{-1}(s)$ это дает

$$\partial_1(m_{-1}(s)) = m_{-1}(s)(m_0(s-1) - m_0(s)) \Leftrightarrow \partial_1(\ln(m_{-1}(s))) = m_0(s-1) - m_0(s)$$

– комбинацию дифференциального и разностного уравнений, подобных уравнениям Тоды.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При другом разложении UT , описанном в замечании 2, ищутся матрицы B из UT порядка, меньшего или равного нулю по $\mathcal{M}_0$, для уравнений Лакса вида (13), где $Q \in UT_{\leq 0}(\mathcal{M}_0)$. Хорошими кандидатами для Q снова являются компоненты $Z_{\leq 0}(\mathcal{M}_0)$ элементов Z в централизаторе матрицы B в UT . Таким образом, приходим к рассмотрению коммутирующих деформаций $(\mathcal{M}, \mathcal{V}_\alpha)$ внутри UT базисных генераторов $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathcal{V}_{\alpha,0})$, удовлетворяющих относительно направлений потока

$$\mathcal{M}_0^{-j} \mathcal{V}_{\alpha,0}, \quad j \geq 0, \quad \alpha \in \{1, \dots, m_U\},$$

уравнениям Лакса

$$\partial_{Q_{j\alpha}}(\mathcal{M}) = [(Q_{j\alpha})_{\leq 0}(\mathcal{M}_0), \mathcal{M}], \quad \partial_{Q_{j\alpha}}(\mathcal{V}_\beta) = [(Q_{j\alpha})_{\leq 0}(\mathcal{M}_0), \mathcal{V}_\beta], \quad (25)$$

где $Q_{j\alpha} = \mathcal{M}^j \mathcal{V}_\alpha$. Заметим, что из уравнений (25) следует, что младшие коэффициенты и для $\mathcal{M}$, и для $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ являются константами относительно дифференцирований $\partial_{Q_{j\alpha}}$, как это имеет место для $B = \mathcal{M}$ и $B = \mathcal{V}_\alpha$:

$$[(Q_{j\alpha})_{\leq 0}(\mathcal{M}_0), B] = -[(Q_{j\alpha})_{>0}(\mathcal{M}_0), B].$$

Это отличается от ситуации, описанной в замечании 4, и дает возможность калибровкой привести младший коэффициент $\mathcal{M}$ к единице. Затем калибровкой младший коэффициент v_0 матрицы, одевающей $\mathcal{M}$, также выбирается равным единице, так что младший коэффициент $\mathcal{V}_\alpha$ становится равным младшему коэффициенту $\mathcal{V}_{0,\alpha}$. Таким образом, достаточно рассмотреть деформации

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_0^{-1} + \sum_{i \geq 0} m_i \mathcal{M}_0^i, \quad \mathcal{V}_\alpha = \mathcal{V}_{\alpha,0} + \sum_{i \geq 1} v_{i,\alpha} \mathcal{M}_0^i. \quad (26)$$

Поскольку мы исходим из разложения (12), соответствующая иерархия будет называться $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархией, а уравнения (25) – уравнениями Лакса.

Систему уравнений Лакса также можно сформулировать в виде соотношений нулевой кривизны. Рассмотрим множество конечнозонных матриц по $\mathcal{M}_0$

$$D_{j\beta} := (Q_{j\beta})_{\leq 0}(\mathcal{M}_0),$$

где $j \geq 0$ и все $\beta \in \{1, \dots, m_U\}$. Они представляют собой компоненты дифференциальной формы

$$\omega_{\leq 0} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_U} D_{j\beta} ds_{j\beta}.$$

Тогда уравнения Лакса (25) эквивалентны уравнениям

$$\underline{\partial}_{Q_{n\alpha}}(D_{m\gamma}) - \underline{\partial}_{Q_{m\gamma}}(D_{n\alpha}) - [D_{n\alpha}, D_{m\gamma}] = 0 \quad (27)$$

для всех $n \geq 0$, $m \geq 0$ и всех α и $\gamma \in \{1, \dots, m_U\}$. Эта система уравнений далее рассматривается как условие обращения в нуль кривизны формы $\omega_{\leq 0}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Решения обеих иерархий зависят от начального направления $\mathcal{M}_0$ следующим образом: если $\mathbf{k}$ является максимально коммутативным R -подмодулем в $i_k(M_k(R))$, то имеется биекция между решениями $\mathcal{M}$ и $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ $(\Lambda^{-1}, \mathbf{k}_{<0})$ -иерархии (соответственно $(\Lambda^{-1}, \mathbf{k}_{\leq 0})$ -иерархии) и $(\mathcal{M}_0^{-1}, (V_0 \mathbf{k} V_0^{-1})_{<0})$ -иерархии (соответственно $(\mathcal{M}_0^{-1}, (V_0 \mathbf{k} V_0^{-1})_{\leq 0})$ -иерархии), а именно

$$\mathcal{M}, \{\mathcal{V}_\alpha\} \mapsto V_0 \mathcal{M} V_0^{-1}, \{V_0 \mathcal{V}_\alpha V_0^{-1}\}.$$

Причина этого заключается в том, что для всех $\alpha \in \{1, \dots, m_U\}$ и соответственно для всех $j < 0$ и $j \leq 0$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} V_0(\mathcal{M}^j \mathcal{V}_\alpha)_{<0}(\Lambda^k) V_0^{-1} &= (V_0 \mathcal{M}^j \mathcal{V}_\alpha V_0^{-1})_{<0}(\mathcal{M}_0), \\ V_0(\mathcal{M}^j \mathcal{V}_\alpha)_{\leq 0}(\Lambda^k) V_0^{-1} &= (V_0 \mathcal{M}^j \mathcal{V}_\alpha V_0^{-1})_{\leq 0}(\mathcal{M}_0). \end{aligned}$$

Мы рассмотрим здесь общий случай, поскольку он дает лучшее понимание проблемы во всей геометрической картине и не требует приложения дополнительных усилий.

4. ВОЛНОВЫЕ МАТРИЦЫ ДЛЯ $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -ИЕРАРХИИ И $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -ИЕРАРХИИ

В данном разделе рассматриваются линеаризации $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии и $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии, однако мы начнем с обсуждения первого случая. Напомним (см. [18]), что в конечномерном случае, если кривизна формы Ω обращается в нуль, то имеются p независимых горизонтальных сечений, т.е. функций φ_j из U в $\mathbb{C}^p$, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(\varphi_j) = C_i \varphi_j.$$

Поэтому если Φ – $(p \times p)$ -матрица, в j -м столбце которой стоят φ_j , то для данного отображения из U в $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ выполнено

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(\Phi) = C_i \Phi \Leftrightarrow C_i = \frac{\partial}{\partial z_i}(\Phi) \Phi^{-1}. \quad (28)$$

Мы построим алгебраический аналог для форм

$$\omega_{<0} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_U} C_{j\beta} ds_{j\beta} \quad \text{и} \quad \omega_{\leq 0} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_U} D_{j\beta} ds_{j\beta}.$$

Начнем с $\mathbb{C}$ -алгебры R , снабженной набором $\mathbb{C}$ -линейных коммутирующих дифференцирований $\{\partial_{Q_{j\beta}}, j \geq 1, \beta \in \{1, \dots, m_U\}\}$. Имеем соответствующие потенциальные решения, а именно операторы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\alpha$ из $UT(R)$ вида (15) и (19) соответственно с обратимым элементом m_{-1} и $v_{0,\alpha} = v_0 \mathcal{V}_{\alpha,0} v_0^{-1}$. Линеаризация $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии состоит из следующих уравнений для $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\alpha$:

$$\mathcal{M}\phi = \phi \mathcal{M}_0^{-1}, \quad \mathcal{V}_\alpha \phi = \phi \mathcal{V}_{\alpha,0}, \quad \partial_{Q_{j\beta}}(\phi) = C_{j\beta} \phi, \quad (29)$$

где ϕ – пока еще не точно определенный объект, для которого имеют смысл все операции в (29), такие как умножение слева и справа на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матрицы и применение всех дифференцирований $\partial_{Q_{j\beta}}$. Чтобы получить уравнения Лакса для $\mathcal{M}$, применим дифференцирование $\partial_{Q_{j\beta}}$ к первому из уравнений (29) и подставим последнее. Это приводит к следующим действиям:

$$\begin{aligned} \partial_{Q_{j\beta}}(\mathcal{M}\phi - \phi \mathcal{M}_0^{-1}) &= \partial_{Q_{j\beta}}(\mathcal{M})\phi + \mathcal{M}(\partial_{Q_{j\beta}}(\phi)) - (\partial_{Q_{j\beta}}(\phi))\mathcal{M}_0^{-1} = \\ &= \partial_{Q_{j\beta}}(\mathcal{M})\phi + \mathcal{M}C_{j\beta}\phi - C_{j\beta}\phi \mathcal{M}_0^{-1} = \{\partial_{Q_{j\beta}}(\mathcal{M}) - [C_{j\beta}, \mathcal{M}]\}\phi = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, если удастся исключить функцию ϕ из последнего уравнения, то мы получим уравнения Лакса для $\mathcal{M}$. Для оператора $\mathcal{V}_\alpha$ применим дифференцирование $\partial_{Q_{j\beta}}$ ко второму из уравнений (29) и подставим последнее. Тогда получим

$$\begin{aligned} \partial_{Q_{j\beta}}(\mathcal{V}_\alpha \phi - \phi \mathcal{V}_{\alpha,0}) &= \partial_{Q_{j\beta}}(\mathcal{V}_\alpha)\phi + \mathcal{V}_\alpha(\partial_{Q_{j\beta}}(\phi)) - (\partial_{Q_{j\beta}}(\phi))\mathcal{V}_{\alpha,0} = \\ &= \partial_{Q_{j\beta}}(\mathcal{V}_\alpha)\phi + \mathcal{V}_\alpha C_{j\beta}\phi - C_{j\beta}\phi \mathcal{V}_{\alpha,0} = \{\partial_{Q_{j\beta}}(\mathcal{V}_\alpha) - [C_{j\beta}, \mathcal{V}_\alpha]\}\phi = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь, если опять можно исключить функцию ϕ , мы получаем уравнения Лакса для $\mathcal{V}_\alpha$.

Для линеаризации (29) нам потребуется левое действие $\mathcal{M}$ и всех $C_{j\beta}$ на функции ϕ и правое действие для матриц типа $\mathcal{M}_0^{-1}$ и $\mathcal{V}_{\alpha,0}$. Чтобы реализовать первое действие, построим левый $UT(R)$ -модуль. Фактический вид элементов в модуле определяется тривиальным решением $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0^{-1}$ и $\mathcal{V}_\alpha = \mathcal{V}_{\alpha,0}$ иерархии. В этом случае уравнения (29) принимают вид

$$\mathcal{M}_0^{-1}\phi = \phi\mathcal{M}_0^{-1}, \quad \mathcal{V}_{\alpha,0}\phi = \phi\mathcal{V}_{\alpha,0}, \quad \partial_{Q_{j\beta}}(\phi) = (\mathcal{M}_0^{-j}\mathcal{V}_{\beta,0})\phi. \quad (32)$$

Пусть R – кольцо функций от параметров $\{s_{j\beta} \mid j \geq 1, \beta \in \{1, \dots, m_U\}\}$; возьмем в качестве $\partial_{Q_{j\beta}}$ частную производную $\partial/\partial s_{j\beta} =: \partial_{s_{j\beta}}$ по параметру $s_{j\beta}$, и пусть R устойчиво относительно всех $\partial_{s_{j\beta}}$. Тогда уравнения (32) можно одновременно формально проинтегрировать. Действительно, рассмотрим формальные ряды

$$\phi_0 := \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_U} s_{j\beta} \mathcal{V}_{\beta,0} \mathcal{M}_0^{-j}\right). \quad (33)$$

Путем формальных преобразований их можно привести к виду, удовлетворяющему уравнениям (32). При подходящих условиях сходимости они задают корректно определенный элемент из $V_0 LT(R) V_0^{-1}$, что будет показано в разделе 5. Модуль для линеаризации будет состоять из возмущений этого тривиального решения в $UT(R)$. Рассмотрим множество $M^{(0)}(\mathcal{M}_0)$, состоящее из формальных произведений

$$\left\{ \sum_{j=N}^{\infty} d_j \mathcal{M}_0^j \right\} \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_U} s_{j\beta} \mathcal{V}_{\beta,0} \mathcal{M}_0^{-j}\right), \quad d_j \in V_0 \mathcal{D}_k(R) V_0^{-1}. \quad (34)$$

Элементы из $M^{(0)}(\mathcal{M}_0)$ называются *осциллирующими матрицами в нуле*. В общем случае эти формальные произведения не дают корректно определенный элемент из $M_{\mathbb{Z}}(R)$. Тем не менее имеется корректно определенное левое действие $UT(R)$ на него. Для всех u_1 и $u_2 \in UT(R)$ положим

$$u_1 \{u_2\} \phi_0 = \{u_1 u_2\} \phi_0. \quad (35)$$

Аналогично правое умножение на $\mathcal{M}_0^{-1}$ и $\mathcal{V}_{\beta,0}$ корректно определено на элементах из $M^{(0)}(\mathcal{M}_0)$. Действие дифференцирований $\partial_{s_{j\beta}}$ на $M^{(0)}(\mathcal{M}_0)$ определено таким образом, как будто произведение на модуле $M^{(0)}(\mathcal{M}_0)$ является настоящим:

$$\partial_{s_{j\beta}} \left\{ \sum_{t=N}^{\infty} d_t \mathcal{M}_0^t \right\} \phi_0 = \left\{ \sum_{t=N}^{\infty} \partial_{s_{j\beta}}(d_t) \mathcal{M}_0^t + \sum_{t=N}^{\infty} d_t \mathcal{M}_0^t \mathcal{M}_0^{-j} \mathcal{V}_{\beta,0} \right\} \phi_0. \quad (36)$$

Теперь введены все действия, появляющиеся при линеаризации. Заметим, что $M^{(0)}(\mathcal{M}_0)$ является свободным $UT(R)$ -модулем с генератором ϕ_0 . Поэтому исключение функции ϕ из уравнений (30) и (31) становится возможным, коль скоро мы знаем, что $\phi = \hat{\phi} \phi_0$, где элемент $\hat{\phi} \in UT(R)$ обратим. В последнем случае из уравнения $\mathcal{M}\phi = \phi \mathcal{M}_0^{-1}$ следует

$$\mathcal{M} = \hat{\phi} \mathcal{M}_0^{-1} \hat{\phi}^{-1},$$

а из уравнения $\mathcal{V}_\alpha \phi = \phi \mathcal{V}_{\alpha,0}$ следует

$$\mathcal{V}_\alpha = \hat{\phi} \mathcal{V}_{\alpha,0} \hat{\phi}^{-1}.$$

Осциллирующая матрица в нуле $\phi = \hat{\phi}\phi_0$, где $\hat{\phi} = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \mathcal{M}_0^i$, а элемент d_0 обратим, называется *волновой матрицей в нуле* для матриц $\mathcal{M} = \hat{\phi}\mathcal{M}_0^{-1}\hat{\phi}^{-1}$ и $V_\alpha = \hat{\phi}\mathcal{V}_{\alpha,0}\hat{\phi}^{-1}$, если она удовлетворяет уравнениям (29). Поскольку преобразования, в результате которых получаются уравнения Лакса, корректно определены на такой функции ϕ , матрицы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\alpha$ образуют решение иерархии. Если мы хотим доказать уравнения (29) для осциллирующей матрицы в нуле функции ϕ правильного вида, достаточно доказать более слабый результат, поскольку имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\phi = \hat{\phi}\phi_0$, где $\hat{\phi} - d_0 \in UT_{\geq 1}(\mathcal{M}_0)$ и элемент $d_0 \in V_0\mathcal{D}_k(R)V_0^{-1}$ обратим, – осциллирующая матрица в нуле. Если для всех $j \geq 1$ и всех $\beta \in \{1, \dots, m_U\}$ она удовлетворяет уравнению

$$\partial_{s_{j\beta}}(\phi) = G_{j\beta}\psi, \quad G_{j\beta} \in UT(R)_{<0},$$

то $G_{j\beta} = (\mathcal{M}^j \mathcal{V}_\beta)_{<0}$, где $\mathcal{M} := \hat{\phi}\mathcal{M}_0^{-1}\hat{\phi}^{-1}$ и $\mathcal{V}_\beta = \hat{\phi}\mathcal{V}_{\beta,0}\hat{\phi}^{-1}$. В частности, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\beta$ образуют решение $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения действия дифференцирования $\partial_{s_{j\beta}}$ на $M^{(0)}(\mathcal{M}_0)$ и того факта, что $M^{(0)}(\mathcal{M}_0)$ является свободным $UT(R)$ -модулем с генератором ϕ_0 , получаем операторное уравнение

$$\partial_{s_{j\beta}}(\hat{\phi}) + \hat{\phi}\mathcal{M}_0^{-j}\mathcal{V}_{\beta,0} = G_{j\beta}\hat{\phi}. \quad (37)$$

Умножим это уравнение справа на $\hat{\phi}^{-1}$ и возьмем строго нижнетреугольную часть матрицы $\mathcal{M}_0$, тогда получим требуемый результат.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Волновые матрицы в нуле являются в данном контексте аналогами функций Бейкера–Ахиезера для иерархии Кадомцева–Петвиашвили.

Разные волновые матрицы в нуле могут давать одинаковые решения $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии. А именно, предположим, что

$$\mathcal{M} = \hat{\phi}_1\mathcal{M}_0^{-1}\hat{\phi}_1^{-1} = \hat{\phi}_2\mathcal{M}_0^{-1}\hat{\phi}_2^{-1}$$

и

$$\mathcal{V}_\beta = \hat{\phi}_1\mathcal{V}_{\beta,0}\hat{\phi}_1^{-1} = \hat{\phi}_2\mathcal{V}_{\beta,0}\hat{\phi}_2^{-1},$$

где ϕ_1 и ϕ_2 – волновые матрицы в нуле. Тогда, в первую очередь, получаем, что матрица $\hat{\phi}_1^{-1}\hat{\phi}_2$ коммутирует с $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{V}_{\beta,0}$ и, таким образом, должна иметь вид

$$\hat{\phi}_1^{-1}\hat{\phi}_2 = \sum_{i \geq 0} v_i \mathcal{M}_0^i,$$

где $v_i \in V_0 i_k(M_k(R))V_0^{-1}$ коммутирует с $\mathcal{V}_{\beta,0}$. В доказательстве предложения 2 было показано, что при всех $j \geq 1$, всех $\beta \in \{1, \dots, m_U\}$ и $i = 1, 2$ имеет место равенство

$$\partial_{s_{j\beta}}(\hat{\phi}_i) = (\mathcal{M}^j \mathcal{V}_\beta)_{<0}(\mathcal{M}_0)\hat{\phi}_i - \hat{\phi}_i\mathcal{M}_0^{-j}\mathcal{V}_{\beta,0}.$$

Поэтому если применить оператор $\partial_{s_{j\beta}}$ к равенству $\hat{\phi}_2 = \hat{\phi}_1 \sum_i v_i \mathcal{M}_0^i$, то получим

$$\begin{aligned} \partial_{s_{j\beta}}(\hat{\phi}_2) &= \partial_{s_{j\beta}}(\hat{\phi}_1) \sum_{i \geq 0} v_i \mathcal{M}_0^i + \hat{\phi}_1 \sum_{i \geq 0} \partial_{s_{j\beta}}(v_i) \mathcal{M}_0^i = \\ &= [(\mathcal{M}^j V_\beta)_{<0}(\mathcal{M}_0) \hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_1 (\mathcal{M}_0^{-j} \mathcal{V}_{\beta,0})] \sum_{i \geq 0} v_i \mathcal{M}_0^i + \hat{\phi}_1 \sum_{i \geq 0} \partial_{s_{j\beta}}(v_i) \mathcal{M}_0^i = \\ &= (\mathcal{M}^j V_\beta)_{<0}(\mathcal{M}_0) \hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_2 \mathcal{M}_0^{-j} \mathcal{V}_{\beta,0} + \hat{\phi}_1 \sum_{i \geq 0} \partial_{s_{j\beta}}(v_i) \mathcal{M}_0^i. \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом, при всех $i \geq 0$, всех $j \geq 1$ и всех $\beta \in \{1, \dots, m_U\}$ должно выполняться равенство $\partial_{s_{j\beta}}(v_i) = 0$. Для полноты картины зафиксируем этот результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если ϕ_1 и ϕ_2 – волновые матрицы в нуле относительно одних и тех же операторов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\beta$, то имеет место равенство

$$\phi_2 = \phi_1 \sum_{i \geq 0} v_i \mathcal{M}_0^i,$$

где все v_i – константы относительно дифференцирований $\partial_{s_{j\beta}}$, т. е. $\partial_{s_{j\beta}}(v_i) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В соответствии со сказанным выше подходящим параметрическим пространством для $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии является $\mathbb{C}$ -оболочка S коммутирующих направлений

$$\{\mathcal{M}_0^{-j} \mathcal{V}_{\alpha,0} \mid j \geq 0, \alpha \in \{1, \dots, m_U\}\},$$

где имеются локальные координаты $\{t_{j\alpha} \mid j \geq 0, \alpha \in \{1, \dots, m_U\}\}$. В качестве R нужно взять кольцо функций от параметров $\{t_{j\alpha} \mid j \geq 0, \beta \in \{1, \dots, m_U\}\}$, устойчивое относительно всех частных производных $\partial/\partial t_{j\beta} =: \partial_{t_{j\beta}}$. Далее, каждое дифференцирование $\partial_{Q_{j\beta}}$ кольца R считается равным $\partial_{t_{j\beta}}$.

Предположим, что имеется множество потенциальных решений $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии, а именно матрицы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\alpha$ из $UT(R)$ вида (26). Тогда линейаризация $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии состоит из следующих уравнений для $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\alpha$:

$$\mathcal{M}\phi = \phi \mathcal{M}_0^{-1}, \quad V_\alpha \phi = \phi \mathcal{V}_{\alpha,0}, \quad \partial_{t_{j\beta}}(\phi) = D_{j\beta} \phi, \quad (39)$$

где $D_{j\beta} = (Q_{j\beta})_{\leq 0}(\mathcal{M}_0)$ определено, как в замечании 5. Здесь ϕ – снова возмущение решения:

$$\phi_0 := \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_U} t_{j\beta} \mathcal{V}_{\beta,0} \mathcal{M}_0^{-j}\right), \quad (40)$$

соответствующее тривиальному решению $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0^{-1}$ и $\mathcal{V}_\alpha = \mathcal{V}_{\alpha,0}$ иерархии. Такие возмущения снова образуют $UT(R)$ -модуль с подходящим действием всех $\partial_{t_{j\beta}}$. А именно, рассмотрим множество $\underline{\mathcal{M}}^{(0)}(\mathcal{M}_0)$, состоящее из формальных произведений:

$$\left\{ \sum_{j=N}^{\infty} d_j \mathcal{M}_0^j \right\} \exp\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_U} t_{j\beta} \mathcal{V}_{\beta,0} \mathcal{M}_0^{-j}\right), \quad d_j \in V_0 \mathcal{D}_k(R) V_0^{-1}. \quad (41)$$

Элементы из $\underline{M}^{(0)}(\mathcal{M}_0)$ также называются *осциллирующими матрицами в нуле*. Коль скоро мы знаем, что уравнения линеаризации выполняются для $\phi = \hat{\phi}\underline{\phi}_0$, где элемент $\hat{\phi} \in UT(R)$ обратим, матрицы $\mathcal{M}$ и $\{\mathcal{V}_\alpha\}$ даются уравнениями

$$\mathcal{M} = \hat{\phi}\mathcal{M}_0^{-1}\hat{\phi}^{-1}, \quad \mathcal{V}_\alpha = \hat{\phi}\mathcal{V}_{\alpha,0}\hat{\phi}^{-1}.$$

Снова применим калибровочное преобразование и назовем осциллирующую матрицу в нуле $\phi = \hat{\phi}\underline{\phi}_0$, где $\hat{\phi} = \text{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \mathcal{M}_0^i$, *волновой матрицей в нуле* для матриц $\mathcal{M} = \hat{\phi}\mathcal{M}_0^{-1}\hat{\phi}^{-1}$ и $\mathcal{V}_\alpha = \hat{\phi}\mathcal{V}_{\alpha,0}\hat{\phi}^{-1}$, если она удовлетворяет уравнениям (39). Полезным для характеристики волновой матрицы в нуле является следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\phi = \hat{\phi}\underline{\phi}_0$, где $\hat{\phi} = \text{Id} + \sum_{i=1}^{\infty} d_i \mathcal{M}_0^i$, – осциллирующая матрица в нуле. Если для всех $j \geq 0$ и всех $\beta \in \{1, \dots, m_U\}$ она удовлетворяет уравнению

$$\partial_{t_{j\beta}}(\phi) = \underline{G}_{j\beta}\psi, \quad \underline{G}_{j\beta} \in UT(R)_{\leq 0},$$

то $\underline{G}_{j\beta} = (\mathcal{M}^j \mathcal{V}_\beta)_{\leq 0}(\mathcal{M}_0)$, где $\mathcal{M} := \hat{\phi}\mathcal{M}_0^{-1}\hat{\phi}^{-1}$ и $\mathcal{V}_\beta = \hat{\phi}\mathcal{V}_{\beta,0}\hat{\phi}^{-1}$. В частности, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\beta$ образуют решение $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии.

Для волновых матриц в нуле, которые дают одни и те же решения $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии, имеет место приводимое ниже следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если ϕ_1 и ϕ_2 – волновые матрицы в нуле относительно одних и тех же операторов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}_\beta$, то выполнено равенство

$$\phi_2 = \phi_1 \left(\text{Id} + \sum_{i \geq 1} v_i \mathcal{M}_0^i \right),$$

где все $v_i \in V_0 i_k(\mathcal{M}_k(R)) V_0^{-1}$ коммутируют с $\mathcal{V}_{\beta,0}$ и являются константами по отношению к дифференцированиям $\partial_{t_{j\beta}}$, т. е. $\partial_{t_{j\beta}}(v_i) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Чтобы построить решения $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии и $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии, мы опишем в следующем разделе геометрический формализм, на основании которого можно построить осциллирующие функции в нуле, для которых экспоненциальный множитель задает корректно определенный элемент в $V_0 LT(R) V_0^{-1}$, формальное произведение этого экспоненциального множителя и компоненты из UT является настоящим, т. е. сходится, и осциллирующие функции в нуле удовлетворяют предложениям 2 и 3 соответственно.

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Пусть S^1 – единичная окружность в комплексной плоскости. Мы работаем с гильбертовым пространством $H = L^2(S^1, \mathbb{C}^k)$ квадратично-интегрируемых $\mathbb{C}^k$ -значных функций на S^1 . Его элементы представляются своими рядами Фурье

$$h = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) z^n, \quad a(n) \in \mathbb{C}^k \text{ при всех } n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $(\cdot|\cdot)$ – стандартное скалярное произведение на $\mathbb{C}^k$. Скалярное произведение на пространстве H выражается через коэффициенты Фурье входящих в него элементов как

$$\left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) z^n \mid \sum_{n \in \mathbb{Z}} b(n) z^n \right\rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a(n) | b(n)).$$

Если $\{f_s | 0 \leq s \leq k-1\}$ обозначает стандартный базис в $\mathbb{C}^k$, где f_s содержит единицу в $(s+1)$ -м элементе и нули во всех остальных элементах, то получаем гильбертов базис $\{e_i | i \in \mathbb{Z}\}$ в H , если для всех $j \in \mathbb{Z}$ и всех $s, 0 \leq s \leq k-1$, положить

$$e_{s+kj} := f_s z^j.$$

С каждым ограниченным оператором $B \in B(H)$ свяжем $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матрицу $[B]$ в этом базисе. В настоящей работе мы в основном имеем дело с разложением матрицы $[B]$ на $(k \times k)$ -блоки. Для этого рассмотрим некоторые подпространства в пространстве H . Для каждого $i \in \mathbb{Z}$ обозначим через $H^{(i)}$ комплексное подпространство в пространстве H , линейно порожденное элементами

$$\{f_s z^i | 0 \leq s \leq k-1\}.$$

Проекция $H \rightarrow H^{(i)}$, задаваемая как $\sum_{j \in \mathbb{Z}} h(j) z^j \rightarrow h(i) z^i$, обозначается через $p^{(i)}$. Пространство H разлагается в прямую сумму

$$H = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^{(i)},$$

что определяет для каждого ограниченного линейного оператора $B \in B(H)$ блочное разложение $B = (B_{ij})$, где $B_{ij} := p^{(i)} \circ B | H^{(j)}$, и соответственно матричное разложение $[B] = ([B_{ij}])$ по $(k \times k)$ -блокам. Например, если $A \in gl_k(\mathbb{C})$, то умножение слева на A определяет ограниченное отображение $M_A: H \rightarrow H$ такое, что $(k \times k)$ -блочное разложение его $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матрицы имеет вид

$$[M_A] = i_k(A) = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & A & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & A & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & 0 & A & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Аналогично, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матрица ограниченного отображения $M_z: H \rightarrow H$, определяемого как

$$M_z \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i z^i \right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} h_i z^{i+1},$$

имеет $(k \times k)$ -блочное разложение вида

$$[M_z] := \Lambda^{-k} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & \text{Id} & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & \text{Id} & 0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

где Λ – $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -матрица, соответствующая оператору сдвига $\sum_i \alpha_i e_i \rightarrow \sum_i \alpha_i e_{i-1}$. Прямое вычисление показывает, что сопряжение посредством M_z соответствует в матричной картине сдвигу каждого $(k \times k)$ -блока на один шаг вдоль диагонали. Поэтому все операторы $B \in B(H)$, которые коммутируют с M_z , можно записать в виде

$$B = \sum_{i \in \mathbb{Z}} M_{B_i} M_z^i, \quad B_i \in gl_k(\mathbb{C}). \quad (42)$$

Другое подпространство, которое потребуется нам в дальнейшем, – это подпространство H_j , $j \in \mathbb{Z}$, определяемое как

$$H_j = \bigoplus_{i \leq j} H^{(i)},$$

с ортогональной проекцией $p_j := \bigoplus_{i \leq j} p^{(i)}$. Мы используем специальное обозначение для разложения любого элемента $b \in B(H)$ относительно разбиения $H = H_j \oplus H_j^\perp$:

$$b = \begin{pmatrix} b_{++}(j) & b_{+-}(j) \\ b_{-+}(j) & b_{--}(j) \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Теперь мы готовы ввести группу Ли, в которой можно реализовать потоки, соответствующие базисным направлениям

$$\{\mathcal{M}_0^j \mathcal{V}_{0,\beta}, j < 0, 1 \leq \beta \leq m_U\},$$

и из которой можно построить решения иерархии. Здесь имеется произвол, иллюстрируемый тем, что группа, которую мы собираемся ввести, зависит от класса компактных операторов в пространстве H , причем конструкция работает для каждого класса. Для каждого целочисленного $r \geq 1$ обозначим через S_r идеал Шаттена (см. [19]) ограниченных операторов $A: H \rightarrow H$ таких, что

$$\|A\|_r^r := \text{tr}((A^* A)^{r/2}) = \text{tr}(|A|^r) < \infty,$$

где A^* – оператор, комплексно-сопряженный к A . При $r = 1$ это дает операторы со следом, а при $r = 2$ – операторы Гильберта–Шмидта. Для каждого такого r введем группу

$$G_+(r) = \left\{ g = (g_{ij}) \in GL(H) \mid \begin{array}{l} \bigoplus_{i < j} g_{ij} \in S_r, \\ \bigoplus_{i < j} (g^{-1})_{ij} \in S_r \end{array} \right\}.$$

Она состоит из обратимых элементов в банаховой алгебре

$$\mathcal{G}_+(r) = \left\{ b = (b_{ij}) \in B(H) \mid \bigoplus_{i < j} b_{ij} \in S_r \right\},$$

снабженной нормой $\|\cdot\|_{\text{res}}$, определяемой как

$$\|b\|_{\text{res}} = \|(b_{ij})\|_{\text{res}} := \|b\| + \left\| \bigoplus_{i < j} b_{ij} \right\|_r.$$

Здесь $\|\cdot\|$ – операторная норма, а $\|\cdot\|_r$ – норма Шаттена. Это естественным образом превращает $G_+(r)$ в банахову группу Ли, алгеброй Ли которой является $\mathcal{G}_+(r)$. Для каждого $N \geq 1$ имеем подгруппу

$$G_N := \left\{ g = (g_{ij}) \in G_+(r) \mid \begin{array}{l} g_{ij} = 0 \text{ при } i < j \text{ и } |j| > N, \\ g_{ij} = 0 \text{ при } i < -N \text{ и } -N \leq j \leq N, \\ g_{jj} \text{ обратим при } |j| > N \end{array} \right\}. \quad (44)$$

Используя тот факт, что в каждом пространстве $GL(n, \mathbb{C})$ любой элемент можно связать с тождественным непрерывным путем, доказываем это же утверждение для группы G_N ; другими словами, группа G_N является связной. Поскольку каждый элемент из $G_+(r)$ отличается от элемента из G_N при некотором N на малый оператор из класса Шаттена S_r , можно связать любой элемент из $G_+(r)$ непрерывным путем с некоторым элементом из G_N . Таким образом, можно сформулировать следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Группа $G_+(r)$ связна.*

Рассмотрим некоторые способы, которыми можно разбить алгебру Ли $\mathcal{G}_+(r)$. Прежде всего, алгебру Ли $\mathcal{G}_+(r)$ можно разбить в сумму подалгебр Ли

$$\mathcal{P} := \{p = (p_{ij}) \in \mathcal{G}_+(r) \mid p_{ij} = 0 \text{ для всех } i > j\}$$

и

$$\mathcal{U}_- := \{u = (u_{ij}) \in \mathcal{G}_+(r) \mid u_{ij} = 0 \text{ для всех } i \leq j\}.$$

Соответствующие им группы Ли суть

$$P := \{p = (p_{ij}) \in G_+(r) \mid p_{ij} = 0 \text{ и } (p^{-1})_{ij} = 0 \text{ для всех } i > j\}$$

и

$$U_- := \left\{ u = (u_{ij}) \in G_+(r) \mid \begin{array}{l} u_{ij} = 0 \text{ для всех } i < j, \\ u_{ii} = \text{Id для всех } i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}.$$

Группа U_- является унипотентным радикалом противоположной параболической группы

$$P_- = \{p = (p_{ij}) \in \mathcal{G}_+(r) \mid p_{ij} = 0 \text{ для всех } i < j\},$$

которая имеет алгебру Ли

$$\mathcal{P}_- := \{p = (p_{ij}) \in \mathcal{G}_+(r) \mid p_{ij} = 0 \text{ для всех } i < j\}.$$

Для $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии также требуется унипотентный радикал U параболической группы P , определяемый как

$$U := \left\{ u = (u_{ij}) \in G_+(r) \mid \begin{array}{l} u_{ij} = 0 \text{ для всех } i > j, \\ u_{ii} = \text{Id для всех } i \in \mathbb{Z} \end{array} \right\},$$

и ее алгебра Ли

$$\mathcal{U} := \{ u = (u_{ij}) \in \mathcal{G}_+(r) \mid u_{ij} = 0 \text{ для всех } i \geq j \}.$$

Группа $P \cap P_-$ диагональных $(k \times k)$ -блоков в $G_+(r)$ обозначается как D_k . Пусть p_0 – элемент группы P . Тогда его матрица $[p_0] = V_0$ имеет порядок 0 по Λ^k . Тем самым его младший коэффициент обратим и определяет направление $\mathcal{M}_0^{-1}$.

Сопряжение посредством элемента p_0 определяет другой способ разбиения $\mathcal{G}_+(r)$, а именно

$$\mathcal{G}_+(r) = V_0 \mathcal{U}_- V_0^{-1} \oplus \mathcal{P} = V_0 \mathcal{P}_- V_0^{-1} \oplus \mathcal{U}.$$

Все коммутирующие направления

$$\{\mathcal{V}_{\alpha,0} \mathcal{M}_0^{-j} \mid \alpha \in \{1, \dots, m_U\}, j \geq 1\},$$

которые актуальны для $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии, принадлежат алгебре Ли $V_0 \mathcal{U}_- V_0^{-1}$, и базисные направления

$$\{\mathcal{V}_{\alpha,0} \mathcal{M}_0^{-j} \mid \alpha \in \{1, \dots, m_U\}, j \geq 0\}$$

для $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии являются элементами алгебры Ли $V_0 \mathcal{P}_- V_0^{-1}$. Группа Ли, соответствующая алгебре Ли $V_0 \mathcal{U}_- V_0^{-1}$, является, очевидно, группой $V_0 U_- V_0^{-1}$, и аналогично группа Ли алгебры Ли $V_0 \mathcal{P}_- V_0^{-1}$ есть $V_0 P_- V_0^{-1}$.

Поскольку отображение из $V_0 \mathcal{U}_- V_0^{-1} \times \mathcal{P}$ в $G_+(r)$, определяемое как $(u, p) \rightarrow e^u e^p$, является локальным диффеоморфизмом в $(0, 0)$, множество $V_0 U_- V_0^{-1} P = V_0 P_- V_0^{-1} U$ есть открытое подмножество в G . Оно называется *большой клеткой* в $G_+(r)$ относительно $V_0 U_- V_0^{-1}$ и P или относительно $V_0 P_- V_0^{-1}$ и U в зависимости от рассматриваемой иерархии. Компоненты из $V_0 P_- V_0^{-1}$ или P называются параболическими компонентами разложения, а компоненты из $V_0 U_- V_0^{-1}$ или U – унипотентными компонентами разложения. Каждая большая клетка есть плотное открытое подмножество в $G_+(r)$, поскольку это имеет место в случае $V_0 = \text{Id}$, причем это следствие следующей характеристики, демонстрирующей сходство с конечномерным случаем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\Omega \subset G_+(r)$ – множество всех $g \in G_+(r)$ таких, что оператор $g_{++}(i)$ обратим при всех $i \in \mathbb{Z}$. Тогда Ω равняется $U_- P = P_- U$ и является плотным открытым подмножеством в $G_+(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с альтернативного описания большой клетки. Поскольку для всех $i \in \mathbb{Z}$ и всех $p \in P$ и $u \in U_-$ имеются разложения

$$p = \begin{pmatrix} p_{++}(i) & p_{+-}(i) \\ 0 & p_{--}(i) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_{++}(i) & 0 \\ u_{-+}(i) & u_{--}(i) \end{pmatrix},$$

то, очевидно, имеется включение $U_- P \subset \Omega$.

Обратно, прямое вычисление показывает, что Ω – инвариант относительно правого умножения на элементы из P и левого умножения на элементы из U_- .

Для каждого $j > i$ рассмотрим разложение оператора $g \in \Omega$ относительно разбиения $H = H_i \oplus H_j \cap H_i^\perp \oplus H_j^\perp$:

$$g = \begin{pmatrix} g_{++}(i) & g_{1,2} & g_{1,3} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} \\ g_{3,1} & g_{3,2} & g_{--}(j) \end{pmatrix}.$$

По определению подмножества Ω оператор $g_{++}(i)$ обратим, и можно образовать элемент

$$u = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 & 0 \\ -g_{2,1}g_{++}(i)^{-1} & \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$$

из U_- . Посредством левого умножения на u редуцируем оператор g к виду

$$g = \begin{pmatrix} g_{++}(i) & \tilde{g}_{1,2} & g_{1,3} \\ 0 & \tilde{g}_{2,2} & \tilde{g}_{2,3} \\ g_{3,1} & g_{3,2} & g_{--}(j) \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно избавиться от $g_{3,1}$. Заметим теперь, что определяющее свойство Ω обеспечивает обратимость элемента $\tilde{g}_{2,2}$, и та же процедура показывает, что $g_{3,2}$ можно также положить равным нулю. Таким образом, оператор g снова приводится к виду

$$g = \begin{pmatrix} g_{++}(i) & * & * \\ 0 & \tilde{g}_{2,2} & * \\ 0 & 0 & g_{--}(j) \end{pmatrix}.$$

Оператор $\tilde{g}_{2,2}$ является конечномерным и удовлетворяет на $(k \times k)$ -блочном уровне конечномерному аналогу определяющего свойства Ω , откуда и следует требуемое разбиение. Как и остальные операторы на диагонали, $g_{++}(i)$ разлагается как

$$g_{++}(i) = u_i(g) + p_i(g),$$

где $(k \times k)$ -блочные разложения компонент имеют вид

$$u_i(g) := \begin{pmatrix} \ddots & & \ddots & \ddots \\ \ddots & g_{i-2,i-2} & 0 & \ddots \\ \ddots & g_{i-1,i-2} & g_{i-1,i-1} & 0 \\ \dots & g_{i,i-2} & g_{i,i-1} & g_{ii} \end{pmatrix}, \quad p_i(g) := \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & 0 & g_{i-2,i-1} & g_{i-2,i} \\ \ddots & 0 & 0 & g_{i-1,i} \\ \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выбирая i достаточно малым, можно получить норму Шаттена произвольно малого $p_i(g)$, так что для всех $t < i$ выполнено

$$\max(\|u_i(g)g_{++}(t)^{-1}p_i(g)\|_{\text{res}}, \|g_{++}(t)^{-1}p_i(g)\|_{\text{res}}) < \alpha \text{ для некоторого } 0 < \alpha < 1$$

независимо от t . Теперь можно разбить $g_{++}(i)$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} g_{++}(i+1) & v \\ u & g_{ii} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{++}(i+1) & 0 \\ u & g_{ii} - ug_{++}(i+1)^{-1}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id} & g_{++}(i+1)^{-1}v \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

В силу оценки сверху повторение этого процесса задает корректно определенный оператор вида

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \text{Id} & * & \ddots \\ \ddots & 0 & \text{Id} & * \\ \dots & 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

Далее можно редуцировать оператор $g_{++}(i)$ к оператору вида $u_i(g)$ посредством правого умножения на этот оператор. Продолжение этого оператора единичным на $H_i^\perp$ дает элементы из U_- . Аналогично оператор $g_{--}(j)$ разлагается как

$$g_{--}(j) = u^{(j)}(g) + p^{(j)}(g),$$

где $(k \times k)$ -блочные разложения этих компонент суть

$$u^{(j)}(g) := \begin{pmatrix} g_{j+1,j+1} & 0 & 0 & \dots \\ g_{j+2,j+1} & g_{j+2,j+2} & 0 & \ddots \\ g_{j+3,j+1} & g_{j+3,j+2} & g_{j+3,j+3} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$p^{(j)}(g) := \begin{pmatrix} 0 & g_{j+1,j+2} & g_{j+1,j+3} & \dots \\ 0 & 0 & g_{j+2,j+3} & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Выбирая j достаточно большим, можно сделать норму Шаттена $p^{(j)}(g)$ произвольно малой, так что все $\{g_{kk} | k \geq j+1\}$ будут обратимы. Далее, $g_{--}(j)$ можно разбить аналогичным образом:

$$\begin{pmatrix} g_{j+1,j+1} & x \\ y & g_{--}(j+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{j+1,j+1} & 0 \\ y & g_{--}(j+1) - yg_{j+1,j+1}^{-1}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id} & g_{j+1,j+1}^{-1}x \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

Бесконечное произведение

$$\cdots \begin{pmatrix} \text{Id}_k & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \text{Id}_k & u_2 & \dots \\ 0 & 0 & \text{Id} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id}_k & u_1 & * & \dots \\ 0 & \text{Id}_k & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & \text{Id} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id}_k & u_1 & * & \dots \\ 0 & \text{Id}_k & u_2 & \dots \\ 0 & 0 & \text{Id} & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

позволяет таким образом редуцировать $g_{--}(j)$ к оператору вида $u^j(g)$ посредством правого умножения на операторы вида

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & * & * & \dots \\ 0 & \text{Id} & * & \ddots \\ 0 & 0 & \text{Id} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Их продолжение единичным оператором на H_j снова дает операторы из U_- , и, таким образом, выполняется редукция g к элементу из $P_- = U_- D_k$. Это доказывает равенство $\Omega = U_- P$. Отсюда непосредственно следует, что большая клетка является открытым множеством.

Чтобы показать, что она является плотной, заметим, что, как мы видели выше, при достаточно малых i все операторы $g_{++}(i)$ обратимы. Теперь добавим подходящий малый $(k \times k)$ -блок в элемент $(i+1, i+1)$, чтобы сделать оператор $g_{++}(i+1)$ также обратимым. Этого можно добиться следующим образом: оператор $g_{++}(i+1)$ является фредгольмовым с индексом 0, поскольку оператор $g_{++}(i)$ обратим. Поэтому достаточно показать, что такое малое возмущение может сделать ядро оператора $g_{++}(i)$ равным нулю. Вектор v из ядра оператора $g_{++}(i+1)$ удовлетворяет равенству

$$g_{++}(i+1)(v) = \begin{pmatrix} g_{++}(i) & b \\ c & g_{i+1,i+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

а поскольку $g_{++}(i)$ является обратимым, это сводится к уравнению

$$(-cg_{++}(i)^{-1}b + g_{i+1,i+1})y = 0.$$

Поэтому, добавляя к $g_{i+1,i+1}$ подходящий $(k \times k)$ -блок, можно добиться того, чтобы эта задача имела только тривиальное решение $y = 0$. Продолжая этот процесс конечное число шагов, можно добиться для достаточно большого N , что при всех $i \leq N$ возмущенные матрицы $\tilde{g}_{++}(i)$ будут обратимы. Если N достаточно велико, то оператор $\tilde{g}_{+-}(N)$ является малым, в точности как матричная часть $p^N(\tilde{g})$, и все матрицы $\tilde{g}_{jj}$ при $j \geq N+1$ обратимы. Таким образом, мы видим, что при всех $j \geq N+1$ матрица $\tilde{g}_{++}(j)$ есть матрица фредгольмова оператора, который отличается на малый оператор от оператора с матрицей

$$\begin{pmatrix} \tilde{g}_{++}(j) & 0 \\ \tilde{g}_{-+}(j) & \tilde{g}_{j+1,j+1} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

В частности, он обратим, если $\tilde{g}_{++}(j)$ и $\tilde{g}_{j+1,j+1}$ обратимы. Отсюда следует, что все $\tilde{g}_{++}(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, обратимы для матриц $\tilde{g}$ с малыми возмущениями, или, другими словами, что $\tilde{g} \in \Omega$. Предложение доказано.

Чтобы показать, как построить волновую матрицу в нуле, сначала выберем базисные коммутирующие направления. Пусть $\mathfrak{h}$ – максимальная коммутативная подалгебра алгебры $M_k(\mathbb{C})$ с базисом $\{F_\rho | 1 \leq \rho \leq m_U\}$. Возьмем пространство

$\mathfrak{h}_{<0}$ равным $V_0(i_k(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} R)V_0^{-1}$, где V_0 – верхнетреугольная матрица, определяющая направление $\mathcal{M}_0$, которая соответствует подходящему ограниченному обратимому оператору на гильбертовом пространстве, которое мы определим ниже.

Имеется естественная группа коммутирующих потоков, связанных с $\mathfrak{h}$, которая вкладывается в $GL(H)$. А именно, пусть U – любая открытая связная окрестность единичной окружности S^1 в комплексной плоскости. Тогда обозначим через $\Gamma(U, \mathfrak{h})$ множество голоморфных отображений $\gamma: U \rightarrow \mathfrak{h}$, для которых

$$\det(\gamma(u)) \neq 0 \text{ для всех } u \in U.$$

Оно является группой относительно поточечного умножения в $GL_k(\mathbb{C})$. Если две такие окрестности U_1 и U_2 таковы, что $U_2 \subset U_1$, то имеем естественное вложение $\Gamma(U_1, \mathfrak{h})$ в $\Gamma(U_2, \mathfrak{h})$ и индуктивный предел, обозначаемый как $\Gamma(\mathfrak{h})$. Для каждого $r \geq 1$ обозначим через $\Gamma(\mathfrak{h}, r)$ подгруппу в $\Gamma(\mathfrak{h})$, состоящую из индуктивного предела всех $\Gamma(U, \mathfrak{h})$ при условии, что U содержит диск радиуса r . Каждый элемент $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{h})$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \gamma_i z^i, \quad \gamma_i \in \mathfrak{h}.$$

Используя тот факт, что голоморфные векторные расслоения над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ являются прямой суммой линейных (см. [20]), и разбивая алгебру $\mathfrak{h}$ на прямую сумму полупростой и нильпотентной частей, получаем следующее разложение $\Gamma(\mathfrak{h})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Существует подгруппа $\mathfrak{h}$ группы $\Gamma(\mathfrak{h})$, изоморфная к $\mathbb{Z}^r$, где r – размер полупростой части $\mathfrak{h}$, такая, что $\Gamma(\mathfrak{h}) = \Gamma_{>0}(\mathfrak{h})\Delta(\mathfrak{h})\Gamma_{\leq 0}(\mathfrak{h})$, где*

$$\Gamma_{>0}(\mathfrak{h}) = \left\{ \gamma_{>0} \left| \gamma_{>0} \in \Gamma(\mathfrak{h}), \gamma_{>0} = \exp\left(\sum_{s < 0} \gamma_s z^s\right), \text{ где } \gamma_s \in \mathfrak{h} \text{ для всех } s < 0 \right. \right\}$$

и

$$\Gamma_{\leq 0}(\mathfrak{h}) = \left\{ \gamma_{\leq 0} \left| \gamma_{\leq 0} \in \Gamma(\mathfrak{h}), \gamma_{\leq 0} = \exp\left(\sum_{s \geq 0} \gamma_s z^s\right), \text{ где } \gamma_s \in \mathfrak{h} \text{ для всех } s \geq 0 \right. \right\}.$$

Если $\mathfrak{h}$ – диагональная матрица, тогда $\Delta(\mathfrak{h})$ – подгруппа, линейно порожденная элементами

$$\begin{pmatrix} z^{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z^{m_k} \end{pmatrix}, \quad m_i \in \mathbb{Z}.$$

Прямое вложение образа $\Gamma(\mathfrak{h})$ в $GL(H)$ получается, если разрешить ему действовать на H умножением слева на этот ряд. Тем самым определяется ограниченный оператор $M_\gamma: H \rightarrow H$. В общем случае операторы $M_\gamma: H \rightarrow H$ не принадлежат $G_+(r)$. Например, пусть $\gamma(0)$ обозначает элемент $u \rightarrow \text{Id } u^{-1}$; тогда $[M_{\gamma(0)}] = \Lambda^k$ и $M_{\gamma(0)}$ не принадлежит $G_+(r)$. Поскольку элементы коммутаторной подгруппы элемента $M_{\gamma(0)}$ имеют вид

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} M_{A_i} M_{\gamma(0)}^i, \quad A_i \in \mathfrak{gl}_k(\mathbb{C}),$$

видим, что образ $\Gamma(\mathfrak{h})$ содержит довольно много направлений, которые коммутируют с $\mathfrak{h}$ и $M_{\gamma(0)}$. Пусть B – оператор из $GL(H)$ с обратным оператором B^{-1} . Тогда имеем твистованное вложение i_B подгруппы $\Gamma(\mathfrak{h}, \|B\| \|B^{-1}\|)$ в $GL(H)$, определяемое как

$$\gamma \rightarrow BM_{\gamma}B^{-1}. \quad (46)$$

Аналогично образ $\Gamma(\mathfrak{h}, \|B\| \|B^{-1}\|)$ при отображении i_B учитывает все направления, которые коммутируют с $B\mathfrak{h}B^{-1}$ и $BM_{\gamma(0)}B^{-1}$.

Потоки из $\Gamma_{>0}(\mathfrak{h})$ не вкладываются в $G_+(r)$ описанным выше способом, поскольку они не удовлетворяют условию Шаттена, однако потоки из $\Gamma_{\leq 0}(\mathfrak{h})$ ему удовлетворяют. Пусть для оператора $p_0 \in P$, определяющего направление $\mathcal{M}_0^{-1}$, $\alpha(p_0)$ – максимум из чисел 1 и $\|p_0\| \|p_0^{-1}\|$. Тогда потоки, связанные с $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархией, являются элементами из

$$\Gamma_{\leq 0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0)) = \left\{ \gamma_{\leq 0} \mid \gamma_{\leq 0} \in \Gamma(\mathfrak{h}, \alpha(p_0)), \gamma_{\leq 0} = \exp\left(\sum_{s \geq 0} \gamma_s z^s\right), \right. \\ \left. \text{где } \gamma_s \in \mathfrak{h} \text{ для всех } s \geq 0 \right\}.$$

Для соответствующих потоков $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии рассмотрим

$$\Gamma_{<0}(\mathfrak{h}) = \left\{ \gamma_{<0} \mid \gamma_{<0} \in \Gamma(\mathfrak{h}), \gamma_{<0} = \exp\left(\sum_{s \geq 1} \gamma_s z^s\right) \text{ при } \gamma_s \in \mathfrak{h} \text{ для всех } s \geq 1 \right\}$$

и подгруппу

$$\Gamma_{<0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0)) = \left\{ \gamma_{<0} \mid \gamma_{<0} \in \Gamma(\mathfrak{h}, \alpha(p_0)), \gamma_{<0} = \exp\left(\sum_{s \geq 1} \gamma_s z^s\right), \right. \\ \left. \text{где } \gamma_s \in \mathfrak{h} \text{ для всех } s \geq 1 \right\}.$$

И $\Gamma_{\leq 0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0))$, и $\Gamma_{<0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0))$ вкладываются с помощью i_{p_0} в подгруппу $V_0 P V_0^{-1}$ в $G_+(r)$. Их образы являются группами коммутирующих потоков $\Gamma(\mathbf{h}_{\leq 0})$ и $\Gamma(\mathbf{h}_{<0})$ соответственно, упомянутыми в разделе 1. После этого вложения для каждого элемента $\gamma_{\leq 0}$ из $\Gamma_{<0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0))$ имеется некоторое $N_1 > \alpha(p_0)$ такое, что

$$[i_{p_0}(\gamma_{\leq 0})] = \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{m_U} t_{i\alpha} \mathcal{V}_{\alpha,0} \mathcal{M}_0^{-i}\right), \quad t_{i\alpha} \in \mathbb{C}, \quad \sum_{i,\alpha} |t_{i\alpha}| N_1^i < \infty,$$

и аналогично для каждого элемента $\gamma_{<0}$ из $\Gamma_{<0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0))$ некоторое $N_2 > \alpha(p_0)$ такое, что

$$[i_{p_0}(\gamma_{<0})] = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{m_U} s_{j\beta} \mathcal{V}_{\beta,0} \mathcal{M}_0^{-j}\right), \quad s_{j\beta} \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j,\beta} |s_{j\beta}| N_2^j < \infty.$$

Это демонстрирует, что $\{t_{i\alpha}\}$ и $\{s_{j\beta}\}$ являются координатами относительно базисных направлений групп коммутирующих потоков $\Gamma(\mathbf{h}_{\leq 0})$ и $\Gamma(\mathbf{h}_{<0})$ соответственно. Для $\gamma_{\leq 0}$ из $\Gamma_{\leq 0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0))$, как и для $\gamma_{<0}$ из $\Gamma_{<0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0))$, имеем, таким образом, корректно определенные матрицы $[i_{p_0}(\gamma_{\leq 0})]$ и $[i_{p_0}(\gamma_{<0})]$, которые можно использовать в качестве экспоненциальных множителей в волновых матрицах в нуле.

6. КОНСТРУКЦИЯ РЕШЕНИЙ ОБЕИХ ИЕРАРХИЙ

Начнем с элемента $g \in G_+(r)$. Внутри двух групп коммутирующих потоков $\Gamma_{\leq 0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0))$ и $\Gamma_{< 0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0))$ рассмотрим соответственно

$$\Gamma_{\leq 0}(g, \mathfrak{h}, \alpha(p_0)) = \{\gamma_{\leq 0} \in \Gamma_{\leq 0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0)) | gi_{p_0}(\gamma_{\leq 0}^{-1}) \in V_0 \Omega V_0^{-1}\}$$

и

$$\Gamma_{< 0}(g, \mathfrak{h}, \alpha(p_0)) = \{\gamma_{< 0} \in \Gamma_{< 0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0)) | gi_{p_0}(\gamma_{< 0}^{-1}) \in V_0 \Omega V_0^{-1}\}.$$

Очевидным образом, множества $\Gamma_{\leq 0}(g, \mathfrak{h}, \alpha(p_0))$ и $\Gamma_{< 0}(g, \mathfrak{h}, \alpha(p_0))$ являются открытыми подмножествами в $\Gamma_{\leq 0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0))$ и $\Gamma_{< 0}(\mathfrak{h}, \alpha(p_0))$ соответственно. Теперь выберем кольцо R для обеих иерархий. В случае $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии в качестве R берется кольцо голоморфных функций на $\Gamma_{\leq 0}(g, \mathfrak{h}, \alpha(p_0))$, а для $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{< 0})$ -иерархии – кольцо голоморфных функций на $\Gamma_{< 0}(g, \mathfrak{h}, \alpha(p_0))$. На этих кольцах, очевидно, имеются соответствующие множества дифференцирований

$$\left\{ \partial_{t_{i\alpha}} := \frac{\partial}{\partial t_{i\alpha}} \mid i \geq 0, 1 \leq \alpha \leq m_U \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \partial_{s_{j\beta}} := \frac{\partial}{\partial s_{j\beta}} \mid j \geq 1, 1 \leq \beta \leq m_U \right\}.$$

Для $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{< 0})$ -иерархии используется разложение $V_0 \Omega V_0^{-1} = V_0 U_- V_0^{-1} P$ большой клетки: если элемент $\gamma_{< 0} \in \Gamma_{< 0}(g, \mathfrak{h}, \alpha(p_0))$, то

$$gi_{p_0}(\gamma_{< 0}^{-1}) = u_-(g, \gamma_{< 0}, V_0)^{-1} p(g, \gamma_{< 0}, V_0), \quad (47)$$

где одна компонента $p(g, \gamma_{< 0}, V_0) \in P$, а другая $u_-(g, \gamma_{< 0}, V_0) \in V_0 U_- V_0^{-1}$. Разложение $V_0 \Omega V_0^{-1} = V_0 P_- V_0^{-1} U$ является базисным для $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии: если элемент $\gamma_{\leq 0} \in \Gamma_{\leq 0}(g, \mathfrak{h}, \alpha(p_0))$, то имеет место

$$gi_{p_0}(\gamma_{\leq 0}^{-1}) = p_-(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)^{-1} u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0), \quad (48)$$

где компонента $p_-(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)$ принадлежит $V_0 P_- V_0^{-1}$, а компонента $u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)$ принадлежит U . Таким образом, получаются элементы $M^{(0)}(\mathcal{M}_0)$ и $\underline{M}^{(0)}(\mathcal{M}_0)$, а именно

$$[p(g, \gamma_{< 0}, V_0)] [i_{p_0}(\gamma_{< 0})] =: \hat{\Phi} \phi_0 = \Phi$$

и

$$[u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)] [i_{p_0}(\gamma_{\leq 0})] =: \hat{\underline{\Phi}} \phi_0 = \underline{\Phi}$$

соответственно, для которых формальное произведение, входящее в определение этих пространств, корректно определено. Заметим, что в терминах матриц имеем соотношения

$$[u_-(g, \gamma_{< 0}, V_0)] [g] = [p(g, \gamma_-, V_0)] [i_{p_0}(\gamma_{< 0})] \quad (49)$$

и

$$[p_-(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)] [g] = [u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)] [i_{p_0}(\gamma_{\leq 0})]. \quad (50)$$

Рассмотрим сначала случай $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{< 0})$ -иерархии и возьмем производную $[p(g, \gamma, V_0)] [i_p(\gamma_{< 0})]$ по параметру $s_{j\beta}$. С одной стороны, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \partial_{s_{j\beta}} (\hat{\Phi} [i_{p_0}(\gamma_{< 0})]) &= \partial_{s_{j\beta}} (\hat{\Phi}) [i_{p_0}(\gamma_{< 0})] + \hat{\Phi} \mathcal{V}_{\beta, 0} \mathcal{M}_0^{-j} [i_{p_0}(\gamma_{< 0})] = \\ &= \{ \partial_{s_{j\beta}} (\hat{\Phi}) \hat{\Phi}^{-1} + \mathcal{M}(\hat{\Phi})^j \mathcal{V}_{\beta}(\hat{\Phi}) \} \Phi, \end{aligned} \quad (51)$$

где матрицы $\mathcal{M}(\widehat{\Phi})$ и $\mathcal{V}_\beta(\widehat{\Phi})$ получаются одеванием базисных направлений с помощью $\widehat{\Phi}$:

$$\mathcal{M}(\widehat{\Phi}) = \widehat{\Phi} \mathcal{M}_0^{-1} \widehat{\Phi}^{-1}, \quad \mathcal{V}_\beta(\widehat{\Phi}) = \widehat{\Phi} \mathcal{V}_{\beta,0} \widehat{\Phi}^{-1}.$$

С другой стороны, если записать $\Psi := [u_-(g, \gamma_{<0}, V_0)]$, то уравнение (49) дает

$$\partial_{s_{j\beta}}(\Phi) = \partial_{s_{j\beta}}(\Psi)[g] = \{\partial_{s_{j\beta}}(\Psi)\Psi^{-1}\}\Phi. \quad (52)$$

Поскольку $M^{(0)}(\mathcal{M}_0)$ является свободным $UT(R)$ -модулем, уравнения (51) и (52) дают

$$\partial_{s_{j\beta}}(\widehat{\Phi})\widehat{\Phi}^{-1} + \mathcal{M}(\widehat{\Phi})^j \mathcal{V}_\beta(\widehat{\Phi}) = \partial_{s_{j\beta}}(\Psi)\Psi^{-1}.$$

Поскольку правая часть этого уравнения принадлежит $LT_{\leq -1}(R)$, левая часть принадлежит $UT_{\geq -j}(R)$, а матрица $\partial_{s_{j\beta}}(\widehat{\Phi})\widehat{\Phi}^{-1}$ принадлежит $UT_{\geq 0}(R)$, можно заключить, что

$$\partial_{s_{j\beta}}(\Psi)\Psi^{-1} = (\mathcal{M}(\widehat{\Phi})^j \mathcal{V}_\beta(\widehat{\Phi}))_{<0}(\mathcal{M}_0), \quad \partial_{s_{j\beta}}(\widehat{\Phi})\widehat{\Phi}^{-1} = -(\mathcal{M}(\widehat{\Phi})^j \mathcal{V}_\beta(\widehat{\Phi}))_{\geq 0}(\mathcal{M}_0).$$

В частности, оператор Φ удовлетворяет уравнениям линеаризации для матриц $(\mathcal{M}(\widehat{\Phi}), \mathcal{V}_\alpha(\widehat{\Phi}))$. Если заменить $g \in G_+(r)$ на $u_0 g$ при произвольном $u_0 \in V_0 U_- V_0^{-1}$, то верхнетреугольная компонента не изменится: $p(u_0 g, \gamma_{<0}, V_0) = p(g, \gamma_{<0}, V_0)$, и, следовательно, соответствующие решения иерархии останутся прежними. Для $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии аналогичным способом с использованием соотношения (50) можно показать, что производная $\underline{\Phi}$ по $t_{i\alpha}$ удовлетворяет соотношению

$$\partial_{t_{i\alpha}}(\underline{\Phi})\underline{\Phi}^{-1} = (\mathcal{M}(\underline{\Phi})^i \mathcal{V}_\alpha(\underline{\Phi}))_{\leq 0}(\mathcal{M}_0),$$

где $\mathcal{M}(\underline{\Phi})$ и $\mathcal{V}_\beta(\underline{\Phi})$ получены одеванием тривиального решения посредством $\underline{\Phi}$:

$$\mathcal{M}(\underline{\Phi}) = \underline{\Phi} \mathcal{M}_0^{-1} \underline{\Phi}^{-1}, \quad \mathcal{V}_\beta(\underline{\Phi}) = \underline{\Phi} \mathcal{V}_{\beta,0} \underline{\Phi}^{-1}.$$

Таким образом, $\underline{\Phi}$ является решением линеаризации $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии. В этом случае умножение g на элемент $p_- \in V_0 P_- V_0^{-1}$ слева не затрагивает одевающую матрицу, что приводит к тем же решениям $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии. Суммируем полученные результаты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p_0 \in G_+(r)$ с матрицей $V_0 := [p_0]$ определяет направление $\mathcal{M}_0$. Тогда для рассматриваемых иерархий имеют место следующие утверждения.

1. Рассмотрим элементы $g \in G_+(r)$ и $\gamma_{<0} \in \Gamma_{<0}(g, \mathfrak{h}, \alpha(p_0))$. Пусть $p(g, \gamma_{<0}, V_0)$ – параболическая компонента в соответствующем разложении типа разложения Римана–Гильберта элемента $g i_{p_0}(\gamma_{<0}^{-1})$. Тогда матрица $[p(g, \gamma_{<0}, V_0)] [i_{p_0}(\gamma_{<0})]$ является волновой матрицей в нуле для множества матриц $(\mathcal{M}([p(g, \gamma_{<0}, V_0)]), \mathcal{V}_\beta([p(g, \gamma_{<0}, V_0)]))$. В частности, эти матрицы образуют решение $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии. Для каждого u_0 из унитарной подгруппы $V_0 U_- V_0^{-1}$ в этом разложении имеем

$$\mathcal{M}([p(g, \gamma_{<0}, V_0)]) = \mathcal{M}([p(u_0 g, \gamma_{<0}, V_0)]),$$

$$\mathcal{V}_\beta([p(g, \gamma_{<0}, V_0)]) = \mathcal{V}_\beta([p(u_0 g, \gamma_{<0}, V_0)]).$$

2. В случае $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии рассмотрим операторы $g \in G_+(r)$ и $\gamma_{\leq 0} \in \Gamma_{\leq 0}(g, \mathbf{h}, \alpha(p_0))$. Обозначим унитарную компоненту элемента $g i_{p_0}(\gamma_{\leq 0}^{-1})$ в соответствующем разложении типа разложения Римана–Гильберта через $u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)$. Тогда матрица $[u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)][i_{p_0}(\gamma_{\leq 0})]$ является волновой матрицей в нуле для множества матриц $(\mathcal{M}([u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]), \mathcal{V}_\beta([u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]))$ и эти матрицы образуют решение $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии. Более того, для каждого p_- из параболической подгруппы $V_0 P_- V_0^{-1}$ разложения имеют место соотношения

$$\mathcal{M}([u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]) = \mathcal{M}([u(p_- g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]),$$

$$\mathcal{V}_\beta([u(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]) = \mathcal{V}_\beta([u(p_- g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Теорема 3 показывает, что многообразие $V_0 U_- V_0^{-1} \backslash G_+(r)$ определяет решения $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{<0})$ -иерархии. Оно, очевидно, изоморфно $U_- \backslash G_+(r)$ и $G_+(r)/U_-$. Кроме того, многообразие $G_+(r)/P_-$ является многообразием флагов и состоит из всех бесконечных флагов:

$$\dots W_{i+1} = g H_{i+1}^\perp \subset W_i = g H_i^\perp \subset W_{i-1} = g H_{i-1}^\perp \dots$$

Естественная проекция, отображающая из многообразия $G_+(r)/P_-$ на многообразие $G_+(r)/U_-$, представляет собой слой расслоения над многообразием флагов $G_+(r)/P_-$ с диагональной группой

$$\{g = (g_{ij}) \in G_+(r) \mid g_{ij} = 0 \text{ и } (g^{-1})_{ij} = 0 \text{ для всех } i \neq j\}$$

в качестве слоя, и это является не чем иным, как множеством реперов пространства $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} W_i/W_{i+1}$, ограниченных сверху и отличных от нуля. Поэтому будем называть их *относительным расслоением реперов многообразия флагов $G_+(r)/P_-$* .

С другой стороны, для $(\mathcal{M}_0^{-1}, \mathbf{h}_{\leq 0})$ -иерархии решения определены многообразием $V_0 P_- V_0^{-1} \backslash G_+(r)$. Оно, очевидно, изоморфно многообразиям флагов $P_- \backslash G_+(r)$ и $G_+(r)/P_-$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Остальные компоненты $u_-(g, \gamma_{<0}, V_0)$ и $p_-(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)$ в разложениях (47) и (48) также удовлетворяют системе линейных уравнений. Для $u_-(g, \gamma_{<0}, V_0)$ в силу (47) имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial s_{j\beta}} [u_-(g, \gamma_{<0}, V_0)] = (\mathcal{M}(\hat{\Phi})^j \mathcal{V}_\beta(\hat{\Phi}))_{<0}(\mathcal{M}_0) [u_-(g, \gamma_{<0}, V_0)].$$

Другими словами, $[u_-(g, \gamma_{<0}, V_0)]$ – единственное решение в группе $[V_0 U_- V_0^{-1}]$ задачи Коши относительно всех $\{(\mathcal{M}(\hat{\Phi})^j \mathcal{V}_\beta(\hat{\Phi}))_{<0}(\mathcal{M}_0)\}$ с начальным значением в некоторой точке из $\Gamma_{<0}(g, \mathbf{h}, \alpha(p_0))$. Аналогично для $p_-(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)$ из соотношения (48) следует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t_{i\alpha}} [p_-(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)] = (\mathcal{M}(\hat{\Phi})^i \mathcal{V}_\alpha(\hat{\Phi}))_{\leq 0}(\mathcal{M}_0) [p_-(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)].$$

Таким образом, $[p_-(g, \gamma_{\leq 0}, V_0)]$ является единственным решением в группе $[V_0 P_- V_0^{-1}]$ задачи Коши относительно всех $\{(\mathcal{M}(\hat{\Phi})^i \mathcal{V}_\alpha(\hat{\Phi}))_{\leq 0}(\mathcal{M}_0)\}$ с начальным значением в некоторой точке из $\Gamma_{\leq 0}(g, \mathbf{h}, \alpha(p_0))$.

Список литературы

- [1] E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Nonlinear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory*, eds. M. Jimbo, T. Miwa, World Sci., Singapore, 1983, 39–119.
- [2] G. Segal, G. Wilson, *Publ. Math. IHES*, **61** (1985), 5–65.
- [3] G. F. Helminck, J. W. van de Leur, *Canad. J. Math.*, **53**:2 (2001), 278–309.
- [4] M. Toda, *Nonlinear Waves and Solitons*, Math. and its Appl., **5**, Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [5] A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Comm. Math. Phys.*, **79**:4 (1981), 473–488.
- [6] A. Okounkov, R. Pandharipande, *Ann. Math. (2)*, **163**:2 (2006), 561–605.
- [7] T. Nakatsu, K. Takasaki, *Comm. Math. Phys.*, **285**:2 (2009), 445–468, arXiv: 0710.5339.
- [8] R. Dijkgraaf, “Integrable hierarchies and quantum gravity”, *Geometric and Quantum Aspects of Integrable Systems*, Lecture Notes in Phys., **424**, eds. G. F. Helminck, Springer, Berlin, 1993, 67–89.
- [9] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov, *Nucl. Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 565–618.
- [10] P. van Moerbeke, “Integrable foundations of string theory”, *Lectures on Integrable Systems*, eds. O. Babelon, P. Cartier, Y. Kosmann-Schwarzbach, World Sci., Singapore, 1994, 163–267.
- [11] M. Adler, P. van Moerbeke, “Matrix integrals, Toda symmetries, Virasoro constraints and orthogonal polynomials”, *R.C.P.* 25. V. 47, Prépubl. Inst. Rech. Math. Av., **1995/24**, Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1995, 215–262, arXiv: solv-int/9706010.
- [12] L. Haine, E. Horozov, *Bull. Sci. Math.*, **117**:2 (1993), 485–518.
- [13] M. A. Guest, *Harmonic Maps, Loop Groups and Integrable Systems*, Math. Soc. Stud. Texts, **38**, Cambridge Univ. Press, London, 1997.
- [14] A. Givental, “Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture”, *Topics in Singularity Theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **180**, eds. A. Khovanskii, A. Varchenko, V. Vassiliev, AMS, Providence, RI, 1997, 103–115.
- [15] K. Ueno, K. Takasaki, “Toda lattice hierarchy”, *Group Representations and Systems of Differential Equations*, Adv. Stud. Pure Math., **4**, ed. K. Okamoto, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1–95.
- [16] M. Adler, P. van Moerbeke, *Internat. Math. Res. Notices*, **1997**:12 (1997), article ID 555, 572 pp.
- [17] G. F. Helminck, A. V. Opimakh, “The zero curvature form of integrable hierarchies in the upper triangular matrices”, *Algebra Colloq.* (to appear).
- [18] S. Kobayashi, *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Publ. Math. Soc. Japan, **15**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Iwanami Shoten, Tokyo, 1987.
- [19] R. Schatten, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **27**, Springer, Berlin, New York, 1970.
- [20] A. Grothendieck, *Am. J. Math.*, **79** (1957), 121–138.