Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ф. Хелминк, В. А. Побережный, Подвижные полюсы мероморфных линейных систем на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ в комплексной плоскости, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 3, 472–487

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6588>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:36:37

© 2010 г.

Г. Ф. Хелминк*, В. А. Побережный†

ПОДВИЖНЫЕ ПОЛЮСЫ МЕРОМОРФНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть E^0 – голоморфное векторное расслоение над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, а ∇^0 – мероморфная связность в E^0 . Введено понятие интегрируемой связности, описывающей движение полюсов связности ∇^0 в комплексной плоскости при сохранении интегрируемости. Показано, что при достаточно слабых условиях на деформационное пространство такая деформация существует. Также показано, что если векторное расслоение E^0 тривиально, то решения соответствующих нелинейных уравнений мероморфно продолжаются на деформационное пространство.

Ключевые слова: интегрируемая связность, деформационное пространство, интегрируемая деформация, логарифмический полюс.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно (см., например, работу [1]), что деформации линейных мероморфных дифференциальных уравнений на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ приводят к решениям различных интересных интегрируемых систем, однако в работе [1] деформации сформулированы только в локальных координатах. Мы предлагаем глобальный подход к описанию деформаций. Бескоординатный формализм для описания линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на связном комплексном многообразии – это плоские голоморфные векторные расслоения над таким пространством и интегрируемые связности на пучке их голоморфных сечений.

При некоторых ограничениях на пространство параметров деформации мы строим интегрируемые деформации мероморфных уравнений на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Они дают решения нелинейных уравнений локально на пространстве параметров деформации. Показано, что если исходная система на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ определена на тривиальном расслоении, то построенные локальные решения этих нелинейных уравнений продолжаются мероморфно на все деформационное пространство. Здесь имеется более широкий

*Korteweg–de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands. E-mail: g.f.helminck@uva.nl

†Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: poberezh@itep.ru

класс деформаций, чем те, что были рассмотрены в работе [2], тем не менее у них также отсутствуют подвижные существенные особенности.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 дано описание мероморфных линейных систем на римановой сфере и приведены необходимые сведения об интегрируемых пфаффовых системах. В разделе 3 описана конструкция интегрируемых деформаций. В разделе 4 можно найти свойства фредгольмовых операторов, которые используются при анализе деформированных систем в разделе 5. В разделе 6 описано мероморфное продолжение.

2. МЕРОМОРФНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ НА $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Рассмотрим *мероморфную линейную систему* на римановой сфере $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, т. е. систему из p линейных ОДУ с конечным числом особенностей в комплексной плоскости и, возможно, одной особенностью в ∞ . Такую систему можно записать в виде

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad (1)$$

где $y(z) \in \mathbb{C}^p$, а $B(z) - (p \times p)$ -матрица с элементами, являющимися рациональными функциями от z . Путем конформного преобразования $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$ всегда можно добиться, чтобы система имела только особенности $a_1^0, \dots, a_n^0$ в комплексной плоскости, и тогда она редуцируется к виду

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{l \geq 1} \frac{B_{il}^0}{(z - a_i^0)^l} \right) y, \quad (2)$$

где B_{il}^0 – комплексные $(p \times p)$ -матрицы, равные нулю при достаточно больших l и удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{i=1}^n B_{i1}^0 = 0, \quad (3)$$

которые обеспечивают отсутствие особенности в ∞ .

В рамках бескоординатного подхода систему (1) можно переформулировать и в более геометрических терминах. Пусть e_i обозначает стандартный i -й базисный вектор в $\mathbb{C}^p$. Рассмотрим тривиальное расслоение $E^0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^p$ над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ с базисом тривиализующих сечений $\{s_1, \dots, s_p\}$, определенных как $s_i(x) = e_i$ для всех $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. На открытом множестве $\mathbb{C} \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}$ имеется связность $\nabla^0 = d - B(z)dz$ с формой связности $\Omega^0 = -B(z)dz$ относительно $\{s_i\}$. Голomorphicная функция y в уравнении (1) отвечает в этой картине сечению расслоения $E^0|_{\mathbb{C} \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}}$ и называется *горизонтальным* сечением, потому что удовлетворяет равенству $\nabla^0(y) = 0$.

Важной характеристикой системы линейных дифференциальных уравнений является ее монодромия, или представление монодромии, которое определяется ниже. Снова предполагая, что имеются особенности только в точках $a_1^0, \dots, a_n^0$ комплексной плоскости, рассмотрим в окрестности неособой точки z_0 фундаментальную матрицу $Y(z)$ данной системы. Аналитическое продолжение матрицы $Y(z)$ вдоль произвольной петли γ , выходящей из z_0 и лежащей в $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}$, преобразует

матрицу $Y(z)$ в матрицу $\tilde{Y}(z)$, вообще говоря, отличную от $Y(z)$. Эти две фундаментальные матрицы связаны неособой матрицей перехода G_γ , соответствующей петле γ :

$$Y(z) = \tilde{Y}(z)G_\gamma.$$

Отображение $\gamma \mapsto G_\gamma$ зависит только от класса гомотопии $[\gamma]$ петли γ и таким образом определяет представление

$$\chi: \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}, z_0) \rightarrow GL(p, \mathbb{C})$$

фундаментальной группы пространства $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}$ в пространстве неособых комплексных матриц размера p . Это представление называется *монодромией* линейной системы.

2.1. Интегрируемость пфаффовых систем. Системы, рассматриваемые в настоящей работе, являются частным случаем так называемых *пфаффовых систем*, т.е. систем дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) или ОДУ первого порядка вида

$$\begin{aligned} dy_1 - (f_1^1 dz_1 + \dots + f_r^1 dz_r) &= 0, \\ &\dots\dots\dots, \\ dy_p - (f_1^p dz_1 + \dots + f_r^p dz_r) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $z_1, \dots, z_r$ — независимые переменные, $y_1, \dots, y_p$ — неизвестные, а $f_j^i = f_j^i(z, y)$ — голоморфные в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p$ функции. Система (4) называется (вполне) *интегрируемой*, если для любых $(z^0, y^0) \in D$ существует единственное решение $y(z)$, для которого $y(z^0) = y^0$.

Интегрируемость системы (4) можно также выразить в терминах r -мерного голоморфного распределения S на D , определяемого этой системой. Для любых $(z, y) \in D$ и базиса $\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_r, \partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p$ в касательном пространстве $T_{(z,y)}D$ обозначим через $S_{(z,y)} \subset T_{(z,y)}D$ подпространство размерности r , порожденное векторами

$$\sum_{i=1}^p f_j^i \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Таким образом, распределение S порождено r голоморфными векторными полями на D . Тогда интегральные многообразия системы (4) являются интегральными многообразиями для распределения S . Интегрируемость системы при этом эквивалентна условию, что для любых двух локальных векторных полей X и Y таких, что $X_{(z,y)}, Y_{(z,y)} \in S_{(z,y)}$ при всех подходящих (z, y) , их коммутатор $[X, Y]_{(z,y)}$ также лежит в $S_{(z,y)}$. Это можно также сформулировать на уровне кокасательного расслоения. Обозначим через $\theta_1, \dots, \theta_p$ дифференциальные 1-формы из левой части системы (4), а через $\mathcal{I}$ — идеал в дифференциальной алгебре голоморфных k -форм ($1 \leq k \leq r+p$) на D , порожденный $\theta_1, \dots, \theta_p$. Тогда имеем *условие интегрируемости Фробениуса* для пфаффовой системы (4) (или для распределения S).

ТЕОРЕМА 1. Система (4) интегрируема, если и только если $d\theta_j \in \mathcal{I}$ при всех $j = 1, \dots, p$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы для гладкого случая из монографии [3]. Условие интегрируемости Фробениуса можно воспринимать как обобщение теоремы Коши для ОДУ на случай ДУЧП. Нетрудно проверить, что условие интегрируемости выполнено при $r = 1$.

Важным частным случаем пфаффовых систем является линейная система, записанная в матричном виде

$$dy = \Omega y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \quad (5)$$

где Ω – матрица голоморфных дифференциальных 1-форм на $U \subset \mathbb{C}^r$. Очевидно, множество локальных решений данной системы вблизи любой точки $z^0 \in U$ образует векторное пространство, и интегрируемость системы эквивалентна тому факту, что это пространство имеет размерность p . С другой стороны, условие интегрируемости Фробениуса для системы (5) принимает следующий вид.

СЛЕДСТВИЕ. Система (5) интегрируема, если и только если

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega. \quad (6)$$

Линейные пфаффовы системы также допускают описание в терминах голоморфных векторных расслоений и связностей. Рассмотрим тривиальное векторное расслоение $E = U \times \mathbb{C}^p$ над U и аналогичный базис $\{s_1, \dots, s_p\}$ тривиализующих сечений, который соответствует стандартному базису $\{e_1, \dots, e_p\}$ в $\mathbb{C}^p$. Матрица $\Omega = \sum_{i=1}^r C_i dz_i$ 1-форм над U определяет относительно $\{s_i\}$ связность $\nabla = d - \Omega$ на пространстве сечений расслоения E . Эта связность ∇ является отображением из пространства $A^0(E)$ голоморфных сечений расслоения E (или форм нулевого порядка со значениями в E) в пространство $A^1(E)$ 1-форм со значениями в E , для которых $\nabla(f\sigma) = \sigma \wedge df + f\nabla(\sigma)$, где $\sigma \in A^0(E)$ и $f \in A^0$, A^0 – пространство голоморфных функций на многообразии. Связность имеет естественное продолжение $\nabla: A^p(E) \rightarrow A^{p+1}(E)$, действующее из пространства p -форм $A^p(E)$ со значениями в E в пространство $(p+1)$ -форм $A^{p+1}(E)$ со значениями в E по формуле

$$\nabla(f\sigma) = \sigma \wedge df + f\nabla(\sigma),$$

где f такое же, как выше, и $\sigma \in A^p(E)$. Пространство горизонтальных сечений, т. е. тех $y = \sum_{i=1}^p y_i s_i$, для которых $\nabla(y) = 0$, является p -мерным, если и только если кривизна $\nabla \circ \nabla$ связности ∇ равна нулю,

$$\nabla \circ \nabla = -d\Omega + (-\Omega) \wedge (-\Omega) = 0,$$

что эквивалентно интегрируемости пфаффовой системы. В этом случае связность ∇ также называется *интегрируемой*. В терминах матриц $\{C_i\}$ интегрируемость связности ∇ сводится к так называемым уравнениям нулевой кривизны

$$\frac{\partial C_j}{\partial z_i} - \frac{\partial C_i}{\partial z_j} - [C_i, C_j] = 0 \quad \text{для всех } i, j \in \{1, \dots, r\}. \quad (7)$$

Подходящим образом соединяя приведенные выше определения, получаем такие понятия, как связность, интегрируемая связность и горизонтальные сечения голоморфных векторных расслоений E над комплексным многообразием Z .

3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Для пространства $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{a_1^0, \dots, a_n^0\}$ выше установлена связь между интегрируемой связностью, ассоциированной с p -мерным голоморфным векторным расслоением над этим пространством, и p -мерным представлением его фундаментальной группы. Такое соотношение имеет место и в общем случае. Пусть E – голоморфное векторное расслоение ранга n над комплексным многообразием Z и ∇ – интегрируемая связность на пучке $\mathbb{E}$ голоморфных сечений расслоения E . Тогда существует ключевое соотношение между парами (E, ∇) и представлениями фундаментальной группы пространства Z , которое мы будем неоднократно использовать. А именно, имеет место следующая теорема [4].

ТЕОРЕМА 2. *Если пространство Z связно, то имеется эквивалентность между категорией пар (E, ∇) , состоящих из голоморфного векторного расслоения E ранга n над Z и интегрируемой связности ∇ на $\mathbb{E}$, и категорией n -мерных представлений группы $\pi_1(Z)$. Это соответствие дается естественным действием группы $\pi_1(Z)$ на слое расслоения E над некоторой базисной точкой пространства Z .*

Связности системы (1) не определены на всем $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, но обладают особенностями, которые достаточно слабы в том смысле, что элементы матрицы $B(z)$ мероморфны над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Их деформации, которые рассматриваются ниже, являются примерами так называемых мероморфных связностей. Мы введем понятие мероморфной связности в весьма общих рамках. Пусть X – комплексное многообразие, а Y – гладкое комплексное подмногообразие коразмерности один. Если X связно, то пространство $X - Y$ также связно (см. теорему 16.2 из книги [5]). Чтобы иметь возможность говорить о мероморфности относительно Y , мы должны задать голоморфность локально на X . Это достигается путем взятия голоморфного векторного расслоения E над X ранга n . Рассмотрим пары (E, ∇) , состоящие из голоморфного векторного расслоения $E|_{X-Y}$ и интегрируемой связности ∇ на пучке его голоморфных сечений над $X - Y$. Первое понятие, которое мы введем, таково.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Связность ∇ называется *мероморфной над Y* , если для каждого $y \in Y$ существует окрестность U точки y такая, что ограничение $E|_U$ тривиально и форма связности ∇ в базисе тривиализующих сечений ограничения $E|_U$ мероморфна на U .

Заметим, что это понятие не зависит от выбора локальных тривиализующих сечений. Набор мероморфных систем из раздела 2, для которых $B_{il}^0 = 0$ при всех i и всех $l \geq 2$, служит примером следующего класса мероморфных связностей ∇ над Y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что мероморфная связность ∇ над Y имеет *логарифмический полюс над Y* , если существуют локальные координаты $(t_1, \dots, t_m)$ вблизи

каждой точки y из Y такие, что многообразие Y локально задается условием $t_1 = 0$, а форма связности Ω связности ∇ относительно базиса тривиализующих сечений в окрестности всех координат $(t_1, \dots, t_m)$ имеет вид

$$\Omega = \frac{A_1}{t_1} dt_1 + \sum_{i=2}^m A_i dt_i,$$

где A_i – голоморфные $(n \times n)$ -матрицы.

Исходной точкой для деформаций является калибровка, выбранная в начале статьи для пространства $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ и $Y = \{a_1^0, \dots, a_n^0\}$, а также линейное дифференциальное уравнение на X , у которого есть особенности только в точках Y и которое мероморфно над Y , или, в более геометрических терминах,

- голоморфное векторное расслоение E^0 над X ,
- интегрируемая связность ∇^0 расслоения $E|_{X-Y}$, мероморфная над Y .

Поскольку на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ нет ненулевых голоморфных дифференциальных форм, форму связности Ω^0 связности ∇^0 можно записать в виде

$$\Omega^0 = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{l \geq 1} \frac{B_{il}^0}{(z - a_i^0)^l} \right) dz, \quad \sum_{i=1}^n B_{i1}^0 = 0. \quad (8)$$

Деформации, которые нас интересуют, заключаются в передвижении полюсов $\{a_i^0\}$ формы связности Ω^0 внутри $\mathbb{C}$. Для простоты предположим, что пространство параметров деформации, кратко называемое *деформационным пространством*, является связным комплексным многообразием T . Способ, которым перемещаются полюсы, определяется набором голоморфных функций $a_i: T \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$, – так называемых *деформационных функций*. Далее, требуется наличие базисной точки $t_0 \in T$, для которой $a_i(t_0) = a_i^0$ при всех i . Мы ограничимся деформациями, при которых полюсы не сливаются, т. е. деформационные функции удовлетворяют соотношениям

$$a_i(t) \neq a_j(t) \quad \text{для всех } t \in T \quad \text{и всех } i \neq j. \quad (9)$$

Естественные примеры деформационных пространств даются открытыми, связными, содержащими $a^0 = \{a_1^0, \dots, a_n^0\}$ подмножествами D в

$$\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i\} \in \mathbb{C}^n: a_i = a_j\}$$

с проекциями на все координаты в качестве деформационных функций или накрытий таких открытых подмножеств, с композицией отображения накрытия и координатными функциями в качестве деформационных функций. Другие примеры даются произведениями $T = \tilde{D} \times B$, где B – произвольное связное комплексное многообразие, $\tilde{D}$ – накрытие описанного выше открытого множества D , а деформационные функции суть композиции функций на $\tilde{D}$ с проекцией $\pi: T \rightarrow \tilde{D}$, $\pi(d, b) = d$.

Пусть теперь многообразие $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times T$. Внутри X рассмотрим подмногообразие $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ такое, что $Y_i = \{(z, t) \in X: a_i(t) = z\}$. Тем самым мы приходим к введению следующего понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Интегрируемая деформация* (E, ∇) пары (E^0, ∇^0) с деформационным пространством T , деформационными функциями $\{a_i\}$ и базисной точкой $t_0 \in T$ состоит из следующих объектов:

- голоморфного векторного расслоения E над $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times T$ ранга n ;
- интегрируемой связности ∇ расслоения $E|_{X-Y}$, мероморфной над Y , такой, что ограничение пары (E, ∇) на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{t_0\}$ изоморфно (E^0, ∇^0) .

При заданных деформационном пространстве, деформационных функциях $\{a_i\}$ и базисной точке t_0 актуальный вопрос состоит в том, существует ли интегрируемая деформация с этими данными деформации. Здесь можно натолкнуться на топологические препятствия. Пусть $i: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times T$ – вложение $z \mapsto (z, t_0)$. Оно индуцирует естественное отображение

$$i^*: \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{a_1^0, \dots, a_n^0\}) \mapsto \pi_1(X - Y).$$

В силу теоремы 2 из существования интегрируемой деформации (E, ∇) пары (E^0, ∇^0) следует, что представление ρ_0 группы $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{a_1^0, \dots, a_n^0\})$, соответствующее (E^0, ∇^0) , изоморфно $\rho \circ i^*$, где ρ – представление группы $\pi_1(X - Y)$, соответствующее (E, ∇) . Рассмотрим проекцию $p_2: X - Y \rightarrow T$, задаваемую как $p_2(x, t) = t$. Ее слой над t есть $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{a_1(t), \dots, a_n(t)\}$. Таким образом, $(X - Y, T, p_2)$ является расслоением над T , и имеется длинная точная последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_2(T) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{a_1^0, \dots, a_n^0\}) \xrightarrow{i^*} \pi_1(X - Y) \rightarrow \pi_1(T) \rightarrow 1.$$

Мы видим, что, помимо того что ρ^0 может быть продолжено на ρ , также с необходимостью ρ^0 тривиально на образе $\pi_2(T)$. Эти проблемы не возникают, если $\pi_1(T) = \pi_2(T) = \{1\}$, в частности, деформация сохраняет монодромию. Приведем пример такого пространства.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим пространство

$$Z = \mathbb{C}^n - \bigcup_{i \neq j} D_{ij}, \quad D_{ij} = \{(x_k) \in \mathbb{C}^n: x_i = x_j\}.$$

В качестве деформационного пространства возьмем универсальную накрывающую $\tilde{Z}$ для Z , а в качестве деформационных функций – композицию естественной проекции $\tilde{\pi}: \tilde{Z} \rightarrow Z$ с проекцией на i -ю координату. Из длинной точной последовательности гомотопических групп видим, что при всех $k \geq 2$ имеет место $\pi_k(\tilde{Z}) = \pi_k(Z)$. В работе [6] было вычислено $\pi_k(Z)$ и показано, что для всех $k \geq 2$

$$\pi_k(Z) = \bigoplus_{1 \leq r \leq n} \pi_k((S^1)^r) = \{1\},$$

где $(S^1)^r$ обозначает объединение r непересекающихся экземпляров единичной окружности в комплексной плоскости. Заметим, что из предположения (9) следует, что имеется аналитическое отображение $a: T \rightarrow Z$, задаваемое как $a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$.

Поскольку $\tilde{Z}$ является односвязным, всегда существует поднятие a , т. е. голоморфное отображение $\tilde{a}: T \rightarrow \tilde{Z}$, такое что $a = \tilde{\pi} \circ \tilde{a}$.

Пространство $\tilde{Z}$ обладает еще одним полезным свойством: будучи дополнением в $\mathbb{C}^m$ нулевого локуса голоморфной функции, оно является пространством Штейна. Согласно работе [7] каждое неразветвленное накрытие пространства Штейна, в частности $\tilde{Z}$, снова есть пространство Штейна. Полезное следствие из этого свойства состоит в том, что теорема Грауэрта применима к $\tilde{Z}$, а потому каждое голоморфное векторное расслоение над $\tilde{Z}$ тривиально [8].

Проиллюстрируем теперь роль, которую в построении интегрируемых деформаций играет сохранение монодромии. Для деформационного пространства $\tilde{Z}$ из примера 1 и соответствующих деформационных функций нет топологических препятствий для существования интегрируемой деформации с этими деформационными данными, потому что имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Для каждой пары (E^0, ∇^0) существует ее интегрируемая деформация (E, ∇) , в которой $\tilde{Z}$ играет роль деформационного пространства, а $\{a_i\}$ – деформационных функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала построим (E, ∇) на пространстве $X - Y$. Из приведенной выше точной последовательности гомотопических групп мы знаем, что i^* есть изоморфизм. Поэтому p -мерное представление фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{a_1^0, \dots, a_n^0\})$, соответствующее паре $(E^0|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{a_1^0, \dots, a_n^0\}}, \nabla^0)$, определяет p -мерное представление фундаментальной группы $\pi_1(X - Y)$, и таким образом получается пара $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ на $X - Y$. Остается лишь продолжить векторное расслоение $\tilde{E}$ на X и показать, что $\tilde{\nabla}$ мероморфна над Y . Это будет сделано на непересекающихся окрестностях компонент Y . Нам потребуются некоторые обозначения. Для каждого $t \in \tilde{Z}$ положим

$$D(t) = \left\{ x \in \mathbb{C} : |x| < \min_{i \neq j} \frac{|a_i(t) - a_j(t)|}{4} \right\}.$$

Далее определим окрестности $V(i)$ каждого Y_i как

$$V(i) = \{(x, t) \in X : x \in a_i(t) + D(t) \cap D(t_0)\}.$$

По построению эти открытые подмножества не пересекаются. При проекции $(x, t) \rightarrow t$ множества $V(i) - Y_i$ отображаются на пространство $\tilde{Z}$ со слоем над $t \in \tilde{Z}$, равным $a_i(t) + (D(t) \cap D(t_0) - \{0\})$. Поэтому эти окрестности являются, вообще говоря, расслоениями с базисным пространством $\tilde{Z}$ и слоем $D(t_0) - \{0\}$. Тогда из длинной точной последовательности гомотопических групп

$$\dots \rightarrow \pi_2(\tilde{Z}) \rightarrow \pi_1(D(t_0) - \{0\}) \xrightarrow{i^*} \pi_1(V(i) - Y_i) \rightarrow \pi_1(\tilde{Z}) \rightarrow 1$$

следует, что отображение i^* индуцирует изоморфизм между $\pi_1(a_i(t) + D(t_0) - \{0\})$ и $\pi_1(V(i) - Y_i)$.

Пусть для $1 \leq j \leq n$ отображение $p_j: V(j) \rightarrow a_j^0 + D(t_0)$ задается как $p_j(x, t) = x - a_j(t) + a_j(t_0)$. На $V(j)$ рассмотрим расслоение E_j , получаемое как обратный образ расслоения $E^0|_{a_j^0 + D(t_0)}$ относительно p_j . Пусть Ω^0 – форма связности для связности ∇^0 относительно тривиализующих сечений $\{e_1, \dots, e_n\}$. Определим связность ∇_j на $E_j|_{V(j)-Y_j}$ как связность, форма которой относительно $\{p_j^*(e_1), \dots, p_j^*(e_n)\}$ есть $p_j^*(\Omega^0)$. В частности, форму связности Ω_j связности ∇_j на $V(j) - Y_j$ можно записать относительно любого тривиализующего базиса сечений расслоения E_j в виде

$$\Omega_j = \sum_{l \geq 1} \frac{B_{jl}(t)}{(x - a_j(t))^l} d(x - a_j(t)) + w_j. \quad (10)$$

Здесь w_j – голоморфная форма на $V(j)$, $(n \times n)$ -матрицы $\{B_{jl}\}$ голоморфны на $\tilde{Z}$ и удовлетворяют равенствам $B_{jl} = 0$ для всех достаточно больших l . Поскольку $p_j^*(\Omega^0)$ удовлетворяет (6), связность ∇_j является интегрируемой. Далее, связность ∇_j мероморфна над $V(j)$, и ограничение (E_j, ∇_j) на $a_j^0 + D(t_0)$, получающееся с помощью отображения i , изоморфно $(E^0|_{a_j^0 + D(t_0)}, \nabla^0)$. Поскольку $p_j \circ i$ тождественно на $a_j^0 + D(t_0)$, легко видеть, что представления монодромии для $(\tilde{E}|_{V(j)-Y_j}, \tilde{\nabla})$ и $(E_j|_{V(j)-Y_j}, \nabla_j)$ одинаковы. Поэтому пары $(\tilde{E}|_{V(j)-Y_j}, \tilde{\nabla})$ и $(E_j|_{V(j)-Y_j}, \nabla_j)$ изоморфны, и, таким образом, $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ продолжается на X . Это завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Далее мы покажем, что ту же конструкцию можно построить, если заменить $\tilde{Z}$ деформационным пространством, для которого $\pi_1(T) = \pi_2(T) = \{1\}$, таким, например, как маленький шар вокруг a^0 . Интегрируемые деформации существуют также для деформационного пространства $T = \tilde{D} \times B$, которое есть произведение пространства из одного из предыдущих примеров и произвольного связного пространства B . В этом случае берем интегрируемую деформацию на $\tilde{D}$ и ее обратный образ с помощью проекции $\pi: T \rightarrow \tilde{D}, \pi(d, b) = d$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть (E, ∇) – интегрируемая деформация в том виде, как мы ее определили выше. Тогда посредством ограничения определена интегрируемая связность $\nabla(\infty)$ на $\{\infty\} \times T$.

4. ФРЕДГОЛЬМОВЫ ОПЕРАТОРЫ

Содержание данного раздела играет важную роль при анализе семейств векторных расслоений, который проводится в следующем разделе. Пусть H – сепарабельное комплексное гильбертово пространство, $B(H)$ – пространство ограниченных операторов из H в H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оператор $A \in B(H)$ называется *фредгольмовым*, если ядро $\text{Ker}(A)$ оператора A является конечномерным подпространством в H , а образ $R(A)$ оператора A является замкнутым подпространством конечной коразмерности в H .

Пространство всех фредгольмовых операторов обозначается через $\Phi(H)$. Для $A \in \Phi(H)$ определим индекс $\text{ind}(A)$ как

$$\text{ind}(A) = \dim \text{Coker}(A) - \dim \text{Ker}(A). \quad (11)$$

Множество всех обратимых операторов является открытым подмножеством в $B(H)$ и очевидным образом содержится в пространстве $\Phi(H)$, кроме того, само $\Phi(H)$ является открытым подмножеством в $B(H)$ (см., например, монографию [9]). Пространство $\Phi(H)$ обладает набором свойств, которые мы приведем в виде теоремы. Их доказательство можно найти, например, в книге [10].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{K}(H)$ – идеал компактных операторов в $B(H)$. Тогда имеют место следующие утверждения:

если $A \in \Phi(H)$ и $K \in \mathcal{K}(H)$, то их сумма $A + K$ также принадлежит $\Phi(H)$, а индекс не меняется: $\text{ind}(A) = \text{ind}(A + K)$;

для каждого $A \in \Phi(H)$, если $\text{ind}(A) = 0$, то существует конечномерный оператор $K \in B(H)$ такой, что оператор $A + K$ обратим;

для любых двух операторов $A, B \in \Phi(H)$ произведение AB принадлежит $\Phi(H)$, и его индекс есть $\text{ind}(AB) = \text{ind}(A) + \text{ind}(B)$.

Утверждения этой теоремы серьезным образом указывают на следующее альтернативное описание фредгольмовых операторов. Рассмотрим алгебру Калкина $C(H) = B(H)/\mathcal{K}(H)$ и естественную проекцию $\pi: B(H) \rightarrow C(H)$. Наделенная нормой $\|b + \mathcal{K}(H)\| = \inf_{y \in b + \mathcal{K}(H)} \|y\|$ и $*$ -операцией, индуцированной $B(H)$, алгебра $C(H)$ есть C^* -алгебра, которая, более того, является простой [11]. Пространство $\Phi(H)$ можно также охарактеризовать как обратный образ обратимых элементов C^* -алгебры $C(H)$ относительно проекции π .

ПРИМЕР 2. Обсудим тот естественный контекст, связанный с конструкциями настоящей работы, в котором возникают операторы Фредгольма. Пусть S^1 – единичная окружность в комплексной плоскости, а $H = L^2(S^1, \mathbb{C}^p)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых $\mathbb{C}^p$ -значных функций. Его элементы представляются рядами Фурье, $h = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n)z^n$, где $h(n) \in \mathbb{C}^p$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Пространство H разлагается в сумму $H_+ \oplus H_-$, где

$$H_+ = \left\{ \sum_{n \geq 0} h(n)z^n \right\}, \quad H_- = \left\{ \sum_{n < 0} h(n)z^n \right\}.$$

Пусть $\Gamma(U)$ – группа всех голоморфных отображений γ из открытого связного множества $U \subset S^1$ в $GL_p(\mathbb{C})$ и Γ – ее индуктивный предел относительно U . Эта группа представляет собой набор функций перехода голоморфных p -мерных векторных расслоений над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Элементы $\gamma \in \Gamma$ действуют левым умножением на H как операторы M_γ . Если разложить M_γ в соответствии с $H = H_+ \oplus H_-$, то

$$M_\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где оператор a фредгольмов. В самом деле, каждое голоморфное векторное расслоение над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ является прямой суммой линейных расслоений [12], а это означает, что каждое γ разлагается как

$$\gamma = \gamma_- \begin{pmatrix} z^{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{m_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z^{m_p} \end{pmatrix} \gamma_+ = \gamma_- \gamma_0 \gamma_+,$$

где γ_+ – элемент из Γ , который голоморфно продолжается в нуль, γ_- голоморфно продолжается на бесконечность, причем $\gamma_-(\infty) = \text{Id}$, и $(m_i) \in \mathbb{Z}^p$. Пользуясь конкретным видом γ_0 , непосредственно проверяем, что

$$M_{\gamma_0} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix},$$

где a_0 – фредгольмов оператор с индексом $\sum_{i=1}^p m_i$, а операторы b_0 и c_0 конечномерны. Поскольку γ_+ голоморфно продолжается в нуль, а γ_- – на бесконечность,

$$M_{\gamma_+} = \begin{pmatrix} a_+ & b_+ \\ 0 & d_+ \end{pmatrix}, \quad M_{\gamma_-} = \begin{pmatrix} a_- & 0 \\ c_- & d_- \end{pmatrix}.$$

Поэтому $a = a_- a_0 a_+$ согласно теореме 4 является фредгольмовым оператором с индексом $\sum_{i=1}^p m_i$.

5. НЕТРИВИАЛЬНОСТЬ ДЕФОРМИРОВАННОГО РАССЛОЕНИЯ

Вернемся к интегрируемым деформациям (E, ∇) системы (E^0, ∇^0) из п. 2.1. Предположим, что исходное расслоение E^0 на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ тривиально. Отсюда следует, что ограничение $E|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{t_0\}}$ также тривиально. Можно поинтересоваться, является ли $E|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{t\}}$ тривиальным на всем деформационном пространстве T . Рассмотрим для этого подмножество Θ в T , на котором это свойство утеряно, т. е.

$$\Theta = \{t \in T: E|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{t\}} \text{ нетривиально}\}.$$

Сначала покажем, что Θ локально есть локус нулей аналитической функции на T и что E тривиально на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times U$ для некоторой открытой окрестности U точки $t \in T - \Theta$. Первым шагом в доказательстве будет подходящая характеристика подмножества Θ . Для этого нам потребуются некоторые обозначения. Выберем вещественные числа ρ_1 и ρ_2 такие, что $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$, и положим

$$D_1 = \{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}): |z| > \rho_1\}, \quad D_2 = \{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}): |z| < \rho_2\}.$$

Выберем открытую окрестность U точки $t \in T$, являющуюся стягиваемым пространством Штейна. Тогда векторные расслоения $E|_{D_1 \times U}$ и $E|_{D_2 \times U}$ тривиальны.

Если $T = \tilde{Z}$ такое же, как в теореме 3, то можно положить $U = \tilde{Z}$. Пусть набор $\{f_1, \dots, f_p\}$ (набор $\{g_1, \dots, g_p\}$) есть базис тривиализующих сечений расслоения $E|_{D_1 \times U}$ (соответственно базис $E|_{D_2 \times U}$). Тогда существует голоморфная функция перехода $S: D_1 \cap D_2 \times U \rightarrow GL_p(\mathbb{C})$, которая позволяет выразить $\{f_i\}$ через $\{g_i\}$. Возьмем произвольное $t \in T$. Расслоение $E|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{t\}}$ тривиально, если и только если найдутся такие голоморфные отображения $S_+(t): D_2 \rightarrow GL_p(\mathbb{C})$ и $S_-(t): D_1 \rightarrow GL_p(\mathbb{C})$, что для всех $z \in D_1 \cap D_2$ выполнено равенство

$$S(z, t) = S_-^{-1}(t)(z) S_+(t)(z). \quad (12)$$

Можно положить $S_-(t)(\infty) = \text{Id}$, что мы и сделаем. Используя результаты работ [12] или [13], можно заключить, что это зависящее от U семейство элементов из Γ разлагается как

$$S(z, t) = S_-^{-1}(t)(z) \text{diag}(z^{m_1}, \dots, z^{m_p}) S_+(t)(z), \quad (13)$$

где S_+ и S_- те же, что и выше, а $\text{diag}(z^{m_1}, \dots, z^{m_p})$ – диагональная матрица с элементами z^{m_j} на диагонали, $m_j \in \mathbb{Z}$, $m_{j+1} \geq m_j$. Как и в примере 2, свяжем с каждым членом в (13) оператор в гильбертовом пространстве H квадратично-интегрируемых $\mathbb{C}^p$ -значных функций, заданных на единичной окружности в комплексной плоскости. В пространстве H снова рассмотрим подпространство H_+ рядов Фурье, которые продолжаются на всю внутренность единичной окружности. Как мы видели в примере 2, умножение на $S(\cdot, t)$ определяет для фиксированного $t \in U$ ограниченный изоморфизм $\mathbb{S}(t)$ пространства H , разложение которого в соответствии с $H = H_+ \oplus H_+^\perp$ имеет вид

$$\mathbb{S}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}.$$

Теперь первый, второй и третий множители в правой части (13) определяют автоморфизмы пространства H , которые разлагаются в соответствии с $H = H_+ \oplus H_+^\perp$ как

$$\begin{pmatrix} a_- & 0 \\ c_- & d_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_+ & b_+ \\ 0 & d_+ \end{pmatrix},$$

причем $a(t) = a_- \alpha a_+$. Поскольку a_- и a_+ обратимы, обратимость оператора $a(t)$ эквивалентна обратимости оператора α . Из явного вида α мы непосредственно заключаем, что это выполнено, если и только если $m_j = 0$ для всех j , т. е. имеет место разложение (12). Теперь $a(t)$ является фредгольмовым оператором. Поскольку $\tilde{Z}$ связно, а $a(t_0)$ обратим, индекс оператора $a(t)$ равен нулю для всех $t \in T$. Отсюда следует (см. теорему 4), что для каждого t из U имеется конечномерный оператор $k(t)$ из $\text{End}(H_+)$ такой, что $a(t) + k(t)$ обратим. Локально можно даже выбрать этот оператор не зависящим от t , $k(t) = k$, поскольку если $a(t_1) + k(t_1)$ обратим, то $t \mapsto a(t) + k(t_1)$ есть непрерывное отображение из T в $\Phi(H_+)$. Обратимые операторы образуют открытое множество в $\Phi(H_+)$, поэтому оператор $a(t) + k(t_1)$ обратим, если t близко к t_1 . В частности, $a(t)(a(t) + k)^{-1} = \text{Id} - k(a(t) + k)^{-1}$. Во всяком случае,

для каждого t из $\tilde{Z}$ существует открытая окрестность U_t и голоморфное отображение $q: U_t \rightarrow \text{Aut}(H_+)$ такое, что $a(t)q(t)^{-1} - \text{Id}$ есть конечномерный оператор. Согласно работе [12] любой оператор вида $\text{Id} + A$, где A – конечномерный оператор, обратим, если и только если его определитель не равен нулю. Поэтому локально в такой окрестности U_{t_1} точки t_1 имеем

$$U_{t_1} \cap \Theta = \{t \in U_{t_1}, \tau_{U_{t_1}}(t) := \det(a(t)q^{-1}(t)) = 0\}.$$

Этим доказывается первое из утверждений о строении Θ , выдвинутых в начале раздела.

На каждом множестве $U_{t_1} \cap U_{t_2}$ функции $\tau_{U_{t_1}}$ и $\tau_{U_{t_2}}$ различаются на ненулевое голоморфное отображение $\det(q_1(t)q_2^{-1}(t))$. Оно определяет линейное расслоение над U , которое является тривиальным, поскольку U – стягиваемое пространство Штейна. Поэтому локальные функции $\tau_{U_{t_i}}$, описывающие Θ , можно склеить в глобально голоморфную функцию $\tau_U: U \rightarrow \mathbb{C}$, для которой $U \cap \Theta$ есть locus нулей. На пересечении двух открытых стягиваемых пространств Штейна U_1 и U_2 операторы $a_1(t)$ и $a_2(t)$ отличаются друг от друга на обратимые левый и правый множители. Отсюда заключаем, что τ_{U_1} и τ_{U_2} отличаются на обратимый множитель, и все эти множители снова определяют линейное расслоение над T . Тем самым мы получили следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если все голоморфные линейные расслоения над T тривиальны, как в случае $T = \tilde{Z}$, то имеется такое голоморфное отображение $\tau: T \rightarrow \mathbb{C}$, что $\Theta = \{t \in T: \tau(t) = 0\}$.*

Произведение (12) можно также выразить в терминах оператора $a(t)$. Если $t \notin \Theta$, то определим $\Sigma_+(t)$ как $\Sigma_+(t) = a^{-1}(t)(\delta_{ij})$, где столбцы единичной $(n \times n)$ -матрицы понимаются как элементы из H_+ , а оператор $a^{-1}(t)$ действует на них естественным образом. Матрица $\Sigma_+(t)$ голоморфна в окрестности диска $\{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}): |z| \leq 1\}$. Из определения $\Sigma_+(t)$ видим, что

$$S(z, t)\Sigma_+(t)(z) = \text{Id} + \Sigma_-(t)(z),$$

где $\Sigma_-(t)$ есть голоморфная $(p \times p)$ -матрица, заданная в окрестности области $\{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}): |z| \geq 1\}$ и удовлетворяющая равенству $\Sigma_-(t)(\infty) = 0$. Далее, подставляя $S(\cdot, t) = S_-^{-1}(t)S_+(t)$ и пользуясь тем, что константы являются единственными голоморфными функциями на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, получаем равенства

$$S_+(t)\Sigma_+(t) = S_-(t)(\text{Id} + \Sigma_-(t)) = S_-(t)(\infty)(\text{Id} + \Sigma_-(t)(\infty)) = \text{Id}.$$

Другими словами, на $U - \Theta \cap U$ имеем

$$S(\cdot, t) = (\text{Id} + \Sigma_-(t))\Sigma_+^{-1}(t).$$

В дальнейшем будет ясно, что $S_+(t)$ и $S_-(t)$ зависят от t голоморфно. Можно утверждать и большее. Известно [12], что оператор, обратный к оператору вида $\text{Id} + A$, где A – конечномерный оператор из $\text{End}(H_+)$, выражается формулой

$$(\text{Id} + A)^{-1} = \det(\text{Id} + A)^{-1}R(A),$$

где $R(A)$ – конечная линейная комбинация максимальных отображений различных степеней из пространства конечномерных эндоморфизмов пространства H_+ . Отсюда следует, что отображение $t \mapsto \tau(t)a(t)$ голоморфно на $\tilde{Z}$. Комбинируя это с выражением для S_+ , получаем второе предложение о строении Θ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $U \subset T$ – открытое стягиваемое пространство Штейна. Тогда существуют такие голоморфные отображения

$$S_+ : D_2 \times \{U - \Theta \cap U\} \rightarrow GL_p(\mathbb{C}), \quad S_- : D_1 \times \{U - \Theta \cap U\} \rightarrow GL_p(\mathbb{C}),$$

где $S_-(\infty, t) = \text{Id}$, что $S = S_-^{-1}S_+$. При этом отображения S_+ и S_- мероморфны над $D_2 \times \Theta \cap U$ и $D_1 \times \Theta \cap U$ соответственно.

Отсюда получаем еще одно утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Векторное расслоение E тривиально над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{U - \Theta \cap U\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_i\}$ и $\{g_j\}$ такие же, как в начале данного раздела. Рассмотрим

$$h_i = \sum_{j=1}^p (S_-)_{ij} f_j = \sum_{j=1}^p (S_+)_{ij} g_j.$$

Все h_i голоморфны на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{U - \Theta \cap U\}$ и образуют базис тривиализующих сечений расслоения $E|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{U - \Theta \cap U\}}$. В частности, они являются тривиальными продолжениями набора $(f_1|_{\{\infty\} \times U}, \dots, f_p|_{\{\infty\} \times U})$. Заметим, что в данном разделе мы не требуем никаких специальных свойств наборов $\{f_i\}$ и $\{g_j\}$.

6. МЕРОМОРФНОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

В данном разделе, как и в предыдущем, мы предполагаем, что E^0 – тривиальное расслоение и U – открытое стягиваемое пространство Штейна в T .

Рассмотрим интегрируемую связность $\nabla(\infty)$ из замечания 2. Пусть $\{e_1, \dots, e_p\}$ – базис горизонтальных сечений для $(E|_U, \nabla(\infty))$. Выберем базис $\{f_1, \dots, f_p\}$ сечений расслоения $E|_{D_1 \times U}$ так, что $f_i|_{\{\infty\} \times U} = e_i$. Пусть $\{g_j\}$ – базис сечений расслоения $E|_{D_2 \times U}$ и S – матрица перехода, связывающая $\{g_i\}$ и $\{f_i\}$, как и в разделе 3.

Согласно предложению 3 матрица перехода разлагается над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times (\tilde{Z} - \Theta)$ как $S = S_-^{-1}S_+$. Тогда тривиализующий базис $\{h_i\}$ из предложения 3 состоит из тривиальных продолжений набора $\{e_i\}$. Пусть Ω – форма связности для ∇ относительно $\{h_i\}$. Из формул (10) видим, что в окрестности Y_i форма Ω имеет вид

$$\Omega = \sum_{l \geq 1} \frac{B_{il}(t)}{(x - a_i(t))^l} d(x - a_i) + w_i,$$

где w_i голоморфны над Y_i , а B_{il} голоморфны на $U - \Theta \cap U$. Положим

$$\Omega_f = \sum_i \sum_{l \geq 1} \frac{B_{il}(t)}{(x - a_i(t))^l} d(x - a_i). \quad (14)$$

Тогда можно сказать, что форма $\Omega_\infty = \Omega - \Omega_f$ голоморфна на $\mathbb{C} \times \{\tilde{Z} - \Theta\}$ и мероморфна над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \{\tilde{Z} - \Theta\}$. Из определения $\nabla(\infty)$ непосредственно следует, что Ω_∞ является формой связности для $\nabla(\infty)$. Поскольку сечения $\{h_i|_{\{\infty\} \times \tilde{Z}}\}$ горизонтальны, $\Omega = \Omega_f$. В силу того что $(i^*(E), i^*(\nabla))$ изоморфно (E^0, ∇^0) , имеется некоторое $A \in GL_p(\mathbb{C})$ такое, что для всех i и l выполнено соотношение $B_{il}(t_0) = AB_{il}^0 A^{-1}$.

Таким образом, применяя к $\{h_i\}$ линейное преобразование, можно считать, что $\{B_{il}\}$ таковы, что $B_{il}(t_0) = B_{il}^0$ для всех i и l . Чтобы убедиться в том, что B_{il} мероморфны над $U \subset \tilde{Z}$, обозначим через Ω_1 форму связности для ∇ относительно $\{f_i\}$, а через Ω_2 – форму связности относительно $\{g_j\}$. Тогда Ω_i голоморфна на $D_i \times U - Y \cap \{D_i \times U\}$ и мероморфна на $D_i \times U$. Формы Ω_1 и Ω_2 связаны с Ω равенствами

$$\begin{aligned}\Omega &= S_- \Omega_1 S_-^{-1} + dS_- S_-^{-1} \quad \text{на } D_1 \times U - \Theta \cap U, \\ \Omega &= S_+ \Omega_2 S_+^{-1} + dS_+ S_+^{-1} \quad \text{на } D_2 \times U - \Theta \cap U.\end{aligned}$$

Учитывая предложение 2, можно суммировать результаты этого раздела следующим образом.

ТЕОРЕМА 5. Пусть исходное расслоение E^0 тривиально, а ∇^0 имеет только особенности $a_1^0, \dots, a_n^0$ в комплексной плоскости, так что уравнения на горизонтальные сечения имеют вид (1), где все $B_{\infty l}^0 = 0$. Пусть (E, ∇) – интегрируемая деформация (E^0, ∇^0) . Рассмотрим открытую часть U деформационного пространства T , содержащую t_0 и являющуюся стягиваемым многообразием Штейна. Тогда имеются окрестность V_0 точки t_0 такая, что $E|_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times V_0}$ тривиально, а также базис сечений $\{h_i\}$ такой, что форма связности Ω относительно $\{h_i\}$ имеет вид

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{l \geq 1} \frac{B_{il}(t)}{(x - a_i(t))^l} d(x - a_i),$$

где $B_{il}(t_0) = B_{il}^0$ для всех i и l . Эти решения $\{B_{il}\}$ уравнений интегрируемости голоморфно продолжаются на $U - \Theta \cap U$ и являются мероморфными на U .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для интегрируемой деформации, построенной в теореме 3, из теоремы 5 следует, что решения $\{B_{il}\}$ продолжаются мероморфно на $\tilde{Z}$. В случае, когда ∇^0 имеет только логарифмические полюсы, получаем знаменитую теорему Мальгранжа [2] для уравнения Шлезингера с произвольными начальными условиями $B_{i1}(a^0) = B_i^0$.

ТЕОРЕМА 6. Матрицы $B_{i1}(a)$ можно продолжить на универсальную накрывающую $\tilde{Z}$ пространства $\mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} \{a_i = a_j\}$ как мероморфные функции.

На утверждение этой теоремы обычно ссылаются как на свойство Пенлеве системы.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке программы NWO “Geometric Aspects of Quantum Theory and Integrable Systems” (проект № 047.017.015), РФФИ (грант № 10-01-00836), Программы государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (грант МК-3178.2009.1) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-8508.2010.1).

Список литературы

- [1] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, *Phys. D*, **2**:2 (1981), 306–352.
- [2] B. Malgrange, “Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières”, *Mathématique et physique*, Progr. Math., **37**, eds. L.B. de Monvel, A. Douady and J.-L. Verdier, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, 401–426.
- [3] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, М., 1987.
- [4] S. Kobayashi, *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Publ. Math. Soc. Japan, **15**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ; Iwanami Shoten, Tokyo, 1987.
- [5] Р. Ганнинг, Х. Росси, *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.
- [6] E. Fadell, L. Neuwirth, *Math. Scand.*, **10** (1962), 111–118.
- [7] K. Stein, *Arch. Math.*, **7**:5 (1956), 354–361.
- [8] H. Grauert, *Publ. Math. IHES*, **5** (1960), 233–292.
- [9] M. F. Atiyah, *K-theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1967.
- [10] M. Schechter, *Principles of Functional Analysis*, Academic Press, New York, London, 1973.
- [11] J. W. Calkin, *Ann. Math.*, **42**:4 (1941), 839–873.
- [12] A. Grothendieck, *Bull. Soc. Math. France*, **84** (1956), 319–384.
- [13] K. F. Clancey, I. Gohberg, *Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators*, Operator Theory: Advances and Applications, **3**, Birkhäuser, Basel–Boston, MA, 1981.