Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маршаков, Интегралы периодов, квантовые числа
и конфайнмент в суперсимметричной КХД, *ТМФ*, 2010,
том 165, номер 3, 488–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6589>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:25:05

© 2010 г.

А. В. Маршаков^{*†}

ИНТЕГРАЛЫ ПЕРИОДОВ, КВАНТОВЫЕ ЧИСЛА И КОНФАЙНМЕНТ В СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КХД

Приведено явное вычисление интегралов периодов на вырожденных кривых Виттена–Зайберга для суперсимметричной КХД, а также показано, как именно эти периоды определяют изменение квантовых чисел состояний при переходе из области слабой связи в район сильной связи в пространстве модулей масс теории. Обсуждается конфайнмент монополей в сильной связи, демонстрируется, что неоднозначность в выборе пути в пространстве модулей не влияет на физические выводы о конфайнменте монополей в фазе с конденсированными легкими дионами.

Ключевые слова: суперсимметричные калибровочные теории, конфайнмент, римановы поверхности, интегрируемые системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Суперсимметричная КХД в последнее время играет роль лаборатории по исследованию конфайнмента. Не будучи достаточно реалистичной теорией, чтобы описывать окружающий мир, она тем не менее может рассматриваться как модель квантовой теории, доступная непertурбативному анализу, и поэтому может существенно продвинуть горизонт нашего понимания, по крайней мере в принципе, того, что может происходить в калибровочной теории в сильной связи.

Ниже представлены некоторые подробности изучения свойств конфайнмента в суперсимметричной КХД в соответствии с программой работ [1], [2], а также завершено обсуждение ряда технических тонкостей, возникающих при этом в лежащей в основе комплексной геометрии. Основная идея рассматриваемого сценария заключается в том, чтобы начать с очевидного конфайнмента монополей типа (дуального) эффекта Мейсснера в кварковом вакууме суперсимметричной калибровочной теории в слабой связи [1], а затем продвигать эту картину, меняя массовые параметры теории, в область сильной связи [2]. Таким путем мы приходим к эффективной теории легких дионов, заменяющих изначальные кварки, так как БПС-состояния

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: mars@lpi.ru

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: mars@itep.ru

Рис. 1. Корни α и фундаментальные веса μ для алгебры Ли калибровочной группы $SU(3)$ в картановской плоскости, корни нормированы канонически условиями $\alpha^2 = 2$. Обозначения для корней выбраны в соответствии с условием ортогональности $\mu_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, с весами μ_1 и μ_2 фундаментального представления $\mathbf{3}$ (веса двойственного фундаментального представления $\bar{\mathbf{3}}$ изображены штриховыми линиями). Общее условие дуальности $\mu \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$ для произвольных векторов μ из решетки весов и α из ее подрешетки корней превращается в условие квантования Дирака для (хромо)электрических и магнитных зарядов.

меняют свои квантовые числа из-за нетривиальных монодромий в пространстве модулей масс. Исследование этих монодромий является нетривиальной задачей (см., например, работы [3], [4]) и максимально просто может быть проведено путем вычисления интегралов по периодам и исследования возмущения точек ветвления на (почти) сингулярных кривых Виттена–Зайберга [5]–[8].

Следуя работам [1], [2], мы рассмотрим в качестве базовой модели суперсимметричную КХД с калибровочной группой $SU(N_c)$ и большим числом N_f фундаментальных ароматов, $N_c \leq N_f \leq 2N_c$: первым нетривиальным (и основным в настоящей статье) примером является $SU(3)$ -калибровочная теория с $N_f = 4$ или $N_f = 5$. Квантовые числа легких состояний можно увидеть на рис. 1, где изображены цветные заряды кварков (фундаментальные веса) и заряды монополей (корни) для калибровочной группы $SU(3)$. В контексте теории Виттена–Зайберга [5], [6], которая необходима для изучения *точных* свойств суперсимметричной КХД в окрестности вакуумов в области сильной связи, условие квантования Дирака $\mu_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij}$ принимает вид формы пересечений циклов $A_i \circ B_j = \delta_{ij}$ на спектральной кривой (см. рис. 2 для калибровочной группы $SU(3)$). В дальнейшем мы будем пользоваться только “гомологической нормировкой” зарядов [6], в которой они измеряются в циклах на кривой Виттена–Зайберга, и поэтому всегда *целочисленны*.

Преобразования дуальности не меняют комплексной структуры на кривых Виттена–Зайберга, но переставляют электрические A -циклы с магнитными B -циклами, и поэтому отвечают электромагнитной дуальности [5], [6]. Важно, что периоды

$$a_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_i} dS, \quad a_i^D = \frac{1}{2\pi i} \oint_{B_i} dS, \quad (1)$$

Рис. 2. A - и B -циклы и их форма пересечений $A_i \circ B_j = \delta_{ij}$ римановой поверхности рода $N_c - 1 = 2$ в случае $SU(3)$ -калибровочной теории. Элементарные заряды кварков $\mu_{1,2} \leftrightarrow A_{1,2}$ отвечают A -циклам, в то время как заряды монополей $\alpha_{1,2} \leftrightarrow B_{1,2}$ — B -циклам.

входящие (вместе с вычетами $m_A = \text{res}_{P_A} dS$) в массовую формулу БПС-состояний

$$\text{Mass}(\mu, \alpha, b) \sim |\mu \cdot a + \alpha \cdot a^D + b_A m_A|, \quad (2)$$

никогда не бывают вещественными одновременно, за исключением сингулярных или вырожденных случаев, когда некоторые из этих периодов обращаются в нуль, в результате в спектре появляются дополнительные безмассовые состояния. Безмассовость этих состояний приводит к дополнительной возможности распадов, изменяющих квантовые числа легких состояний, а поэтому в различных областях пространства модулей в конденсаты выпадают различные заряды. Чтобы определить эти заряды, следует воспользоваться теорией Виттена–Зайберга для суперсимметричной КХД в окрестности сингулярных кривых, отвечающих $\mathcal{N} = 1$ вакуумам.

2. ТЕОРИЯ ВИТТЕНА–ЗАЙБЕРГА ДЛЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КХД

Кривая общего вида для $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной КХД с N_c цветами и N_f ароматами может быть записана в виде [7], [9]

$$y^2 = P^2(x) - 4Q(x), \quad (3)$$

где

$$P(x) = \prod_{i=1}^{N_c} (x - \phi_i), \quad \sum_{i=1}^{N_c} \phi_i = -\Lambda \delta_{N_f, 2N_c-1}, \quad (4)$$

$$Q(x) = \Lambda^{2N_c - N_f} \prod_{A=1}^{N_f} (x + m_A)$$

являются полиномами степеней N_c и N_f соответственно. В квазиклассическом режиме корни ϕ_i , $i = 1, \dots, N_c$, полинома $P(x)$ совпадают с собственными значениями матрицы Φ конденсата комплексного скаляра из векторного мультиплетта $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга–Миллса, но, будучи вычисленными точно, они (точнее, симметрические функции от них) приобретают (зависящие от Λ и m_A) поправки благодаря инстантонным эффектам.

Гиперэллиптическое представление (3) может быть также переписано в виде

$$w + \frac{Q(x)}{w} = P(x) \quad (5)$$

или в виде¹⁾

$$W + \frac{1}{W} = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}, \quad (6)$$

где $y = w - Q(x)/w = (W - 1/W)\sqrt{Q(x)}$.

Кривые (3), (5) или (6) оснащены производящим дифференциалом

$$dS \sim x \frac{dw}{w} = x \frac{dW}{W} + \frac{1}{2} x \frac{dQ}{Q} = \frac{x dP}{y} - x \frac{P}{2y} \frac{dQ}{Q} + \frac{1}{2} x \frac{dQ}{Q}, \quad (7)$$

периоды которого (1) входят в массовую формулу (2) одновременно с его вычетами

$$\text{res}_{P_A^\pm} dS = m_A \cdot \frac{P}{2y} \Big|_{x=-m_A} - \frac{m_A}{2} = -m_A \quad (8)$$

в точках $P_A^\pm$, где $x(P_A^\pm) = -m_A$ на одном из листов кривой (3). Вычеты (8) должны обращаться в нуль в безмассовом пределе [6], и при $N_f = 2N_c - 1$ это требование приводит к появлению ненулевого члена порядка Λ в правой части второго равенства в формуле (4). Вариация дифференциала (7) при постоянном W приводит к формуле

$$\delta dS \sim \frac{dx}{y} \left(\delta P(x) - \frac{1}{2} P \frac{\delta Q(x)}{Q(x)} \right). \quad (9)$$

В случае калибровочной группы $SU(3)$ при $N_f < 5$ и $\phi_3 = -\phi_1 - \phi_2$ удобно ввести переменные u, v с помощью равенства

$$P(x) = (x - \phi_1)(x - \phi_2)(x - \phi_3) = x^3 - ux - v,$$

так что

$$u = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_1\phi_2, \quad v = -\phi_1\phi_2(\phi_1 + \phi_2). \quad (10)$$

Теперь мы рассмотрим частные случаи этих формул в окрестности сингулярных кривых.

3. ИНТЕГРАЛЫ ПЕРИОДОВ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ КРИВЫХ

3.1. Случай $N_c = 2$ и $N_f = 2$. Начав с $SU(3)$ -калибровочной теории в окрестности вакуума с двумя конденсированными ароматами ($r = 2$ в терминах работы [1]) в области слабой связи и двигаясь в область сильной связи, мы получим картину,

¹⁾Иногда (например, с точки зрения бранных конструкций [10] и возможной связи с матричными моделями [11] и квантовыми интегрируемыми системами) более адекватным является асимметричное представление с факторизованным $Q(x) = Q_+(x)Q_-(x)$ и $w = wQ_+(x)$, так что уравнение (5) принимает вид $w^2Q_+(x) - P(x)w + Q_-(x) = 0$.

эффективно описываемую $SU(2)$ -калибровочной теорией с $N_f = 2$ легкими ароматами, когда $r = 2$ вакуум сталкивается с вакуумом, содержащим безмассовые монополи [2]. В этом полезном примере теории с $N_c = 2$ и $N_f = 2$, взятыми для простоты с совпадающими массами $m_1 = m_2 = m$, для кривой (3) получаем

$$y^2 = (x^2 - u)^2 - 4\Lambda^2(x + m_1)(x + m_2) = (x^2 - u)^2 - 4\Lambda^2(x + m)^2. \quad (11)$$

Производящий дифференциал (7) превращается при совпадающих массах в

$$dS \sim \frac{x dP}{y} - x \frac{P}{2y} \frac{dQ}{Q} + \frac{1}{2} x \frac{dQ}{Q} = \frac{x dP}{y} - x \frac{P}{y} \frac{dq}{q} + x \frac{dq}{q}, \quad (12)$$

$$q(x) = \prod_{B=1}^{N_f/2} (x + m_B),$$

где мы выбрали $m_{B+N_f/2} = m_B$, $B = 1, \dots, N_f/2$, для четного числа ароматов N_f . Кривая (11) отвечает $P(x) = x^2 - u$ и $q(x) = x + m$.

В кварковом вакууме, т. е. в точности в точке $u = u_Q = m^2$, кривая (11) еще более вырождается и задается уравнением

$$y^2 = (x + m)^2((x - m)^2 - 4\Lambda^2) \equiv (x + m)^2 Y^2, \quad (13)$$

где $Y^2 = (x - m)^2 - 4\Lambda^2$, а дифференциал Виттена–Зайберга (7) принимает вид

$$dS = \frac{x dx}{Y} + \frac{x dx}{x + m}, \quad (14)$$

где первое слагаемое в правой части равенства совпадает с производящим дифференциалом формальной чистой $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной $U(1)$ -калибровочной теории с единственным вакуумным средним, равным m [12], [13].

Благодаря условию (8) и тому факту, что на вырожденной кривой положение массового полюса в $x = -m$ (для обоих ароматов) совпадает с вырожденным разрезом, дифференциал (14) нормирован следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{x=-m} dS_+ = \frac{1}{2\pi i} \oint_{A^+} dS_+ = a = -m, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{x=-m} dS_- = \text{res}_{x=-m} dS_- - \frac{1}{2\pi i} \oint_{A^-} dS_- = -2m + a = -m,$$

что, очевидно, выполняется для (14). Так как кривая (13) рациональна, дифференциал (14) может быть явно проинтегрирован:

$$S = Y + m \ln(x - m + Y) + x - m \ln(x + m). \quad (16)$$

Для того чтобы вычислить нужный B -период (массу монополя), следует взять разность $S_+|_{x=-m} - S_-|_{x=-m}$ значений интеграла (16) на двух различных листах римановой поверхности (13). Это невозможно сделать путем прямой подстановки

значения $x = -m$ в формулу (16) из-за логарифмической особенности, т.е. кривая (13) является “слишком вырожденной”²⁾. Слегка регуляризируем ее и обозначим расстояние между положением полюса и ближайшим к нему концом разреза через $\epsilon^\pm$ в зависимости от листа $Y = Y_\pm$ кривой (13). Величины $\epsilon^\pm = \epsilon^\pm(m, \Lambda)$ можно определить следующим образом (см., например, работы [13]): у дифференциала

$$d\phi = \frac{dw}{w} \stackrel{(13)}{=} \frac{dx}{Y} + \frac{dx}{x+m} \quad (17)$$

периоды должны быть константами [16], более того, его B -периоды на кривой (13) можно выбрать просто равными нулю. Интегрируя (17), получаем

$$\phi = \ln(x - m + Y) + \ln(x + m); \quad (18)$$

полагая $\phi_+|_{x=-m} - \phi_-|_{x=-m} \equiv \phi_+|_{x=-m+\epsilon^+} - \phi_-|_{x=-m+\epsilon^-} = 0$, имеем (при $\epsilon^\pm \rightarrow 0$)

$$\ln \frac{\epsilon^+}{\epsilon^-} = \ln \frac{m + \sqrt{m^2 - \Lambda^2}}{m - \sqrt{m^2 - \Lambda^2}}. \quad (19)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_+|_{x=-m} - S_-|_{x=-m} &= -m \ln \frac{\epsilon^+}{\epsilon^-} + 2Y|_{x=-m} + m \ln \frac{-2m + Y|_{x=-m}}{-2m - Y|_{x=-m}} = \\ &= 4\sqrt{m^2 - \Lambda^2} + 2m \ln \frac{m - \sqrt{m^2 - \Lambda^2}}{m + \sqrt{m^2 - \Lambda^2}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, вычисление B -периода для вырожденной кривой (13) приводит к явной формуле (ср. с работами [17], где похожие структуры возникали опосредованным образом из двумерного подхода)

$$a^D = \frac{1}{2\pi i} (S_+|_{x=-m} - S_-|_{x=-m}) = -\frac{i}{\pi} \left(2\sqrt{m^2 - \Lambda^2} + m \ln \frac{m - \sqrt{m^2 - \Lambda^2}}{m + \sqrt{m^2 - \Lambda^2}} \right), \quad (21)$$

утверждающей, в частности, что $\text{Im } a^D|_{m=\pm\Lambda} = 0$.

Однако, чтобы почувствовать разницу между безмассовыми монополями и дионами, следует аккуратно рассмотреть вещественную часть интеграла (21) с учетом логарифмического разреза в m -плоскости. Эту вещественную часть можно выбрать равной нулю при $m = \Lambda$, тогда

$$\text{Re } a^D|_{m=\Lambda} = 0, \quad \text{Re } a^D|_{m=-\Lambda} = 2m = -2a. \quad (22)$$

Это означает, что при столкновении кварковой сингулярности u_Q с u_M возникает безмассовый монополю с $|a^D| = 0$, в то время как если u_Q сталкивается с u_D , то мы получаем $|a^D + 2a| = 0$, т.е. обращение в нуль массы $(1, 1) = [2, 1]$ -диона. Здесь,

²⁾Например, уже матрица периодов кривой (13) не является хорошо определенным объектом. Легко проверить, что в точке Аргиреса–Дугласа при $m = \Lambda$ имеем $\tau_* = i$, как это и следует из условия самодуальности [3], [14], поскольку кривая (13) вырождается в $y^2 \sim (x+m)^3$, что как раз отвечает данному предельному значению (см., например, справочник [15]).

следуя работам [6], [2], необходимо особо отметить, что “гомологический” электрический заряд [2, 1] этого диона отличается от электрического заряда, принятого в физической нормировке (1, 1), в то время как магнитные заряды в обеих нормировках совпадают. Электрический заряд этого диона совпадает с зарядом W -бозона и равен удвоенному заряду кварка: последний равен $(1/2, 0)$ в физической нормировке, но отвечает одному A -циклу (т. е. равен $[1, 0]$) в гомологической нормировке, поэтому электрический заряд этого диона (как и W -бозона) отвечает двум A -циклам.

В асимптотике для (21) имеем

$$a^D \underset{m \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{i}{\pi} 2m \left(\ln \frac{2m}{\Lambda} - 1 \right) + \dots \quad (23)$$

Для производных выражения (21) по массам получаем

$$\frac{\partial a^D}{\partial m} = -\frac{i}{\pi} \ln \frac{m - \sqrt{m^2 - \Lambda^2}}{m + \sqrt{m^2 - \Lambda^2}}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 a^D}{\partial m^2} = \frac{2i}{\pi \sqrt{m^2 - \Lambda^2}}. \quad (25)$$

В точках, где вторая производная сингулярна, можно написать разложения по дробным степеням: при $m = \Lambda$

$$a^D \underset{m \rightarrow \Lambda}{\simeq} \frac{4i}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \cdot (m - \Lambda)^{3/2} + \dots, \quad (26)$$

аналогично при $m = -\Lambda$

$$a^D \underset{m \rightarrow -\Lambda}{\simeq} 2m + \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \cdot (m + \Lambda)^{3/2} + \dots \quad (27)$$

Эти выражения могут быть легко проанализированы на предмет наличия нетривиальных монодромий в m -плоскости.

В частности, из (26) следует, что, будучи чисто мнимым при $t = m - \Lambda > 0$, значение периода a^D при движении в область отрицательных значений $t = m - \Lambda < 0$ становится либо положительным, либо отрицательным – в зависимости от выбранного пути в m -плоскости (знака угловой переменной в $t = \varepsilon e^{\pm i\varphi}$ при $t \approx 0$). Формула (26) утверждает, что

$$a^D \approx \frac{4i}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} t^{3/2} = \pm \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \varepsilon^{3/2}. \quad (28)$$

Предположим, что мы взяли $u = m^2 + \delta$, причем $m \gg |\delta| > 0$, в окрестности кваркового вакуума. Тогда $a = -\sqrt{u} \simeq -m - \delta/2m$, другими словами, $a + m \simeq -\delta/2m$. Когда m стремится к Λ при $t \rightarrow 0$, масса легкого кварка приблизительно равна

$$|a + m| \simeq \left| \frac{\delta}{2m} \right| \simeq \left| \frac{\delta}{2\Lambda} \right| \gtrsim 0. \quad (29)$$

Из формулы (28) следует, что при стремлении к отрицательным t в зависимости от выбранного пути в m -плоскости после пересечения критической линии масса одного из дионов с зарядами $(1/2, \pm 1) = [1, \pm 1]$ становится меньше, чем масса кварка. Эти условия можно формально записать в виде

$$\begin{aligned} \text{sign}(\text{Im } t) = \text{sign}(\delta) : & \quad |a + m + a^D| < |a + m|, \\ \text{sign}(\text{Im } t) = -\text{sign}(\delta) : & \quad |a + m - a^D| < |a + m|. \end{aligned} \quad (30)$$

Если такое случается, скажем, для положительного магнитного заряда, т. е. знака плюс a^D в неравенстве $|a + m + a^D| < |a + m|$, то кварк может испустить безмассовый антимонополь и превратиться в дион с зарядом $(1/2, 1) = [1, 1]$ с законом сохранения зарядов $[1, 0] + [0, 1] = [1, 1]$. В противоположном случае следует изменить знак заряда монополя, т. е. общая формула имеет вид

$$[1, 0] + [0, q] = [1, q], \quad q = \pm 1, \quad (31)$$

причем конкретный выбор знака q , как мы увидим ниже, физически ненаблюдаем. Похожим образом на другой критической линии, при $m = -\Lambda$, возникает процесс с законом сохранения $[1, q] = [2, q] + [-1, 0]$, где опять $q = \pm 1$, или дион с зарядом $[1, q]$ распадается в $[2, q]$ -дион, безмассовый при $m = -\Lambda$ в силу (22), и кварк $[-1, 0]$, который можно считать “двойственным” $[1, 0]$ -кварку после изменения знака массы $m \leftrightarrow -m$ (см. работу [2]).

Проведенный в этом пункте анализ может быть дополнен непосредственным рассмотрением процесса перестановки точек ветвления на кривой Виттена–Зайберга (3) в окрестности сингулярности [2], [18], который приводит в основном к тем же заключениям.

3.2. Теории с $N_c = 3$ и $N_f = 4, 5$. Обратимся теперь непосредственно к теории с группой $SU(3)$ и $N_f = 4$ с попарно совпадающими массами $m_1 = m_3$ и $m_2 = m_4$, когда кривая (3) принимает вид

$$y^2 = (x - \phi_1)^2(x - \phi_2)^2(x + \phi_1 + \phi_2)^2 - 4\Lambda^2(x + m_1)^2(x + m_2)^2. \quad (32)$$

Если положить $\phi_i = -m_A \delta_{i,A}$ при $i, A = 1, 2$ для выбранного кваркового вакуума, то кривая (32) вырождается в

$$\begin{aligned} y^2 &= (x + m_1)^2(x + m_2)^2((x - m_1 - m_2)^2 - 4\Lambda^2) = \\ &= (x + m_1)^2(x + m_2)^2((x - M)^2 - 4\Lambda^2) \equiv (x + m_1)^2(x + m_2)^2 Y^2, \end{aligned} \quad (33)$$

где $Y^2 = (x - M)^2 - 4\Lambda^2$ и $M = m_1 + m_2$. Дифференциал Виттена–Зайберга (7) в этом случае принимает вид

$$dS = \frac{x dx}{Y} + \frac{x dx}{x + m_1} + \frac{x dx}{x + m_2}, \quad (34)$$

где $p = x - M$, $Y^2 = p^2 - 4\Lambda^2$. Его нормировка ($k = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{x=-m_k} dS_+ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_k^+} dS_+ = a_k = -m_k, \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{x=-m_k} dS_- &= \text{res}_{x=-m_k} dS_- - \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_k^-} dS_- = -2m_k + a_k = -m_k \end{aligned} \quad (35)$$

получается совершенно аналогично (15) для каждой из масс $m_{1,2}$ в (33), (34). Очевидно, что вычеты (35) в точности отвечают обращению в нуль эффективных масс кварков, $a_k + m_k = 0$, $k = 1, 2$, в выбранном кварковом вакууме с двумя выпавшими в конденсат ароматами.

Обратимся теперь к двойственным (35) B -периодам, отвечающим вследствие равенств $\mu_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, массам монополей. Они опять вычисляются как разности $S_+|_{x=-m_k} - S_-|_{x=-m_k}$, $k = 1, 2$, значений абелева интеграла от дифференциала (34),

$$S = Y + M \ln(x - M + Y) + 2x - m_1 \ln(x + m_1) - m_2 \ln(x + m_2). \quad (36)$$

Поскольку эти выражения также сингулярны при $x + m_k = 0$, следует ввести регуляторы $\epsilon_k^\pm$, $k = 1, 2$, на каждом из листов кривой (33). Как и в (19), эти регуляторы определяются из следующих соотношений ($k = 1, 2$):

$$\phi_+|_{x=-m_k} - \phi_-|_{x=-m_k} = \ln \frac{\epsilon_k^+}{\epsilon_k^-} + \ln \frac{M + m_k - \sqrt{(M + m_k)^2 - 4\Lambda^2}}{M + m_k + \sqrt{(M + m_k)^2 - 4\Lambda^2}} = 0, \quad (37)$$

где

$$\phi = \int \left(\frac{dx}{Y} + \frac{dx}{x + m_1} + \frac{dx}{x + m_2} \right) = \ln(x - M + Y) + \ln(x + m_1) + \ln(x + m_2). \quad (38)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_+|_{x=-m_k} - S_-|_{x=-m_k} &= -m_k \ln \frac{\epsilon_k^+}{\epsilon_k^-} + 2Y|_{x=-m_k} + M \ln \frac{-m_k - M + Y|_{x=-m_k}}{-m_k - M - Y|_{x=-m_k}} = \\ &= 2\sqrt{(m_k + M)^2 - 4\Lambda^2} + (m_k + M) \ln \frac{m_k + M - \sqrt{(m_k + M)^2 - 4\Lambda^2}}{m_k + M + \sqrt{(m_k + M)^2 - 4\Lambda^2}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом (ср. с формулой (21)),

$$\begin{aligned} a_1^D &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{B_1} dS = -\frac{i}{\pi} \left(\sqrt{(2m_1 + m_2)^2 - 4\Lambda^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(m_1 + \frac{m_2}{2} \right) \ln \frac{2m_1 + m_2 - \sqrt{(2m_1 + m_2)^2 - 4\Lambda^2}}{2m_1 + m_2 + \sqrt{(2m_1 + m_2)^2 - 4\Lambda^2}} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

и

$$\begin{aligned} a_2^D &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{B_2} dS = -\frac{i}{\pi} \left(\sqrt{(m_1 + 2m_2)^2 - 4\Lambda^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) \ln \frac{m_1 + 2m_2 - \sqrt{(m_1 + 2m_2)^2 - 4\Lambda^2}}{m_1 + 2m_2 + \sqrt{(m_1 + 2m_2)^2 - 4\Lambda^2}} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Полученные выражения, очевидно, обладают нужными свойствами, как и в случае теории с $N_c = 2$ и $N_f = 2$, которая эффективно описывает динамику в подгруппах калибровочной группы $SU(3)$, отвечающих корням $\alpha_{1,2}$.

В теории с $N_f = 5$ вычисление совершенно аналогично, хотя сами конечные формулы имеют несколько более сложный вид. Вырожденную кривую можно опять записать в форме

$$y^2 = (x + m_1)^2(x + m_2)^2Y^2, \quad (42)$$

где теперь

$$Y^2 = p^2 - 4\Lambda(x + m_5), \quad p = x - M + \Lambda = x - m_1 - m_2 + \Lambda.$$

Она оснащена дифференциалом Виттена–Зайберга (7), имеющим в данном случае вид

$$dS = \frac{x dx}{Y} - \frac{xp}{2Y} \frac{dx}{x + m_5} + \frac{1}{2} \frac{x dx}{x + m_5} + \frac{x dx}{x + m_1} + \frac{x dx}{x + m_2}. \quad (43)$$

Вычисление B -периодов дифференциала (43) аналогично случаю $N_f = 4$ приводит к результату

$$a_k^D = \frac{1}{2\pi i} \oint_{B_k} dS = -\frac{i}{\pi} \left(Y_k + \left(M + \frac{m_k + m_5}{2} \right) \ln \frac{M + m_k + \Lambda - Y_k}{M + m_k + \Lambda + Y_k} + \right. \\ \left. + \frac{m_k - m_5}{2} \ln \frac{a + b_+ m_k - b_- Y_k}{a + b_+ m_k + b_- Y_k} \right), \quad k = 1, 2, \quad (44)$$

где $a = (M - \Lambda)^2 + m_5(M - 3\Lambda)$, $b_{\pm} = M + m_5 \pm \Lambda$, с двумя параболой $Y_{1,2}$ в (m_1, m_2) -плоскости, определенными уравнениями

$$Y_1^2 = (2m_1 + m_2)^2 - \Lambda(2m_5 + m_2) + \Lambda^2 = 0, \\ Y_2^2 = (m_1 + 2m_2)^2 - \Lambda(2m_5 + m_1) + \Lambda^2 = 0. \quad (45)$$

Эти параболы, естественным образом возникающие в процессе вычисления периодов, играют роль границ деформированной области режима сильной связи в случае теории с $N_f = 5$, если сравнивать ее с теорией при $N_f = 4$, в которой эти границы представляют собой прямые $m_1 + 2m_2 = \pm 2\Lambda$ и $2m_1 + m_2 = \pm 2\Lambda$.

Легко проверить, что периоды (44) обладают всеми необходимыми свойствами. Заметим также, что представленный в настоящей работе вывод соотношений (44) не имеет ничего общего с содержащимися в работах [17], [18] непрямыми методами, которые основаны на параллелях между двумерным и четырехмерным анализом проблемы.

Формулы (40), (41) и (44) немедленно приводят к простым физическим следствиям [2]. Обращение в нуль величин $a_k^D = \alpha_k \cdot \mathbf{a}^D$ отвечает безмассовости монополей с зарядами

$$M_k = \sqrt{2}(\mathbf{n}_e \oplus \mathbf{n}_m)_k^M = \mathbf{0} \oplus \alpha_k, \quad k = 1, 2, \quad (46)$$

в терминах корней калибровочной группы $SU(3)$ (см. рис. 1). Для периода (40) это происходит при $2m_1 + m_2 = 2\Lambda$, а для периода (41) – при $m_1 + 2m_2 = 2\Lambda$.

Очевидно, что $\text{Im } a_1^D = 0$ также при $2m_1 + m_2 = -2\Lambda$, и аналогично $\text{Im } a_2^D = 0$, если $m_1 + 2m_2 = -2\Lambda$. Однако вещественная часть выражения (40) при $2m_1 + m_2 =$

Рис. 3. Изменение квантовых чисел, диктуемое монодромиями: дублет кварков (в слабой связи) превращается в дублет дионов (в сильной связи) в зависимости от выбора того или иного пути в массовой плоскости.

-2Λ равна $2m_1 + m_2 = -\alpha_1 \cdot \mathbf{a}$ – массе W -бозона с зарядом α_1 . Тем самым при $2m_1 + m_2 = -2\Lambda$ мы получаем безмассовый дион с зарядом

$$D_1 = \sqrt{2}(\mathbf{n}_e \oplus \mathbf{n}_m)_1^D = \alpha_1 \oplus \alpha_1 \quad (47)$$

и аналогично – безмассовый дион с зарядом

$$D_2 = \sqrt{2}(\mathbf{n}_e \oplus \mathbf{n}_m)_2^D = \alpha_2 \oplus \alpha_2 \quad (48)$$

при $m_1 + 2m_2 = -2\Lambda$. Формулы (44) показывают, что при $Y_k = 0$, $k = 1, 2$ (т.е. на каждой из парабол (45) в (m_1, m_2) -плоскости), мнимая часть соответствующего периода $\text{Im } a_k^D$ равна нулю, в то время как вещественная часть $\text{Re } a_k^D$ испытывает скачок при переходе с положительной на отрицательную ветвь соответствующей k -й параболы.

Анализ вычисленных периодов (40), (41) и (44) приводит к следующей картине изменения квантовых чисел благодаря монодромиям (см. рис. 3): начав с конденсата двух кварков в слабой связи, мы приходим в фазе сильной связи к конденсату из двух легких дионов. Формула (31) предыдущего пункта описывает проекцию рис. 3 на горизонтальную ось. В терминах весовых и корневых векторов из рис. 1 мы обнаруживаем, что каждый кварк с “весоподобным” электрическим зарядом приобретает также “корнеподобный” магнитный заряд и превращается в дион, природа которого *отлична* от природы дионов (47) и (48): в фазе сильной связи мы получаем конденсат легких дионов $\Psi_{1,2}$ с зарядами³⁾

$$\mathcal{D}_k = \mu_k \oplus \alpha_k = \sqrt{2}(\mathbf{n}_e \oplus \mathbf{n}_m)_k^D \equiv \sqrt{2}\mathbf{n}^k, \quad k = 1, 2, \quad (49)$$

вместо конденсата кварков [2].

³⁾ Отметим сразу, что каллиграфической буквой $\mathcal{D}$ мы обозначаем дионы с “весоподобными” электрическими зарядами, чтобы не путать их с дионными родственниками монополей, заряды которых (47) и (48) задаются исключительно корневыми векторами.

4. КОНФАЙНМЕНТ

Поскольку в режиме слабой связи изначальной теории при больших m в $r = 2$ вакууме кварки находятся в хиггсовской фазе, объектами конфайнмента являются монополи. Два из трех элементарных $SU(3)$ -монополя с магнитными зарядами $\alpha_{1,2}$ (см. формулы (46)) приклеиваются к концам элементарных струн, в то время как третий, с зарядом $\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2$, реализуется как узел соприкосновения двух элементарных струн [1]. В области сильной связи эти аргументы можно воспроизвести для дуальной теории легких дионов (49), построив фундаментальные струны из лагранжиана эффективной теории $\mathcal{L} \sim \sum_{k=1,2} |\nabla \Psi_k|^2 + \dots$, в котором минимальное взаимодействие

$$\nabla \Psi_k = (\partial - i\mathcal{D}_k \cdot (\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}^D))\Psi_k = (\partial - i(\boldsymbol{\mu}_k \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}_k \cdot \mathbf{A}^D))\Psi_k \quad (50)$$

определяется дионными зарядами (49).

Элементарные заряды $\mathbb{Z}_2$ -струн $S_{1,2}$ фиксируются зарядами дионов (49) путем анализа поведения калибровочных потенциалов на пространственной бесконечности:

$$S_i : \quad \mathcal{D}_k \cdot (\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}^D) = \boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{A}^D \sim \delta_{ik} d\theta, \quad i, k = 1, 2, \quad (51)$$

где θ обозначает угол в плоскости, перпендикулярной направлению струны. Отсюда следует, что для декартовых проекций $A_3 \sim \alpha_{12} \cdot \mathbf{A} \sim (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2) \cdot \mathbf{A}$ и $A_8 \sim (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \mathbf{A} \sim -\boldsymbol{\mu}_{12} \cdot \mathbf{A}$ (отвечающих горизонтальному и вертикальному направлениям на рис. 1) с индексами 3, 8, унаследованными от диагональных матриц Гелл-Манна, мы имеем

$$A_3 + A_3^D \sim d\theta, \quad \frac{A_8}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}A_8^D \sim d\theta. \quad (52)$$

Ортогональные к (52) комбинации потенциалов стремятся на бесконечности к нулю:

$$A_3 - A_3^D \sim 0, \quad A_8^D - 3A_8 \sim 0. \quad (53)$$

В результате получаем [2] для зарядов (51) в терминах потоков⁴⁾

$$\begin{aligned} \oint dx \cdot (\mathbf{A}^D \oplus \mathbf{A}) &= \oint dx \cdot (A_3^D, A_3; A_8^D, A_8) = \\ &= 4\pi(-n_3^e, n_3^m; -n_8^e, n_8^m) = 4\pi(-\mathbf{n}^e \oplus \mathbf{n}^m), \end{aligned} \quad (54)$$

что заряд S_1 -струны равен

$$\mathbf{n}_{S_1} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{20}, \frac{\sqrt{3}}{20} \right) \equiv \frac{S_1}{\sqrt{2}}, \quad (55)$$

в то время как заряд S_2 -струны, возникающей из намоток на пространственной бесконечности фазы второго диона, равен

$$\mathbf{n}_{S_2} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}; -\frac{3\sqrt{3}}{20}, \frac{\sqrt{3}}{20} \right) \equiv \frac{S_2}{\sqrt{2}}. \quad (56)$$

⁴⁾ Такое определение обеспечивает равенство заряда струны и заряда пробного диона, который приклеивается к ее концу (не обязательно при этом существуя в спектре самой теории).

Теперь легко проверить, что для каждого из трех $SU(3)$ -монополь действительно наблюдается конфайнмент, вызванный наличием этих струн [2]. Для монополей с зарядами $\mathbf{0} \oplus \alpha_{1,2}$ или $(0, \pm 1/2; 0, \sqrt{3}/2)$ можно написать следующие разложения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{0} \oplus \alpha_1) &= \left(0, \frac{1}{2}; 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathbf{n}_{S_1} + \frac{7}{10}\mathbf{n}^1 + \frac{2}{10}\mathbf{n}^2, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{0} \oplus \alpha_2) &= \left(0, -\frac{1}{2}; 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathbf{n}_{S_2} + \frac{2}{10}\mathbf{n}^1 + \frac{7}{10}\mathbf{n}^2, \end{aligned} \quad (57)$$

где $\mathbf{n}^k = \mathcal{D}_k/\sqrt{2}$, $k = 1, 2$, представляют собой нормированные заряды дионов (49). Соотношения (57) показывают, что только часть монополь-антимонопольного потока “запирается” внутри мировой поверхности струны, в то время как оставшаяся часть просто экранируется дионным конденсатом.

Для третьего α_{12} -монополя в $SU(3)$ -случае формулы приобретают более элегантный вид: из (57) получаем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{0} \oplus \alpha_{12}) = (0, 1; 0, 0) = \mathbf{n}_{S_1} - \mathbf{n}_{S_2} + \frac{1}{2}(\mathbf{n}^1 - \mathbf{n}^2), \quad (58)$$

откуда следует, что этот монополь также находится в фазе конфайнмента, представляя собой узел стыковки двух элементарных струн S_1 и S_2 . Динамику в неабелевом направлении α_{12} можно изобразить в виде “разностного диона” $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 = \cdots \longrightarrow$ и “разностной струны” $S_1 - S_2 = \longleftarrow \cdots$. Формула (58) утверждает, что вследствие полного экранирования электрического заряда “разностной струны” конденсатом “разностного диона” $S_1 - S_2 + (\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2)/2 = \cdots \longrightarrow$ в фазе конфайнмента находятся лишь магнитные заряды ($SU(2)$)-монополя.

Вернемся теперь к проблеме неоднозначности. Заметим, что при переходе в область сильной связи знак магнитного заряда, приобретаемый легким кварком при превращении в легкий дион, является ненаблюдаемым, поскольку зависит от выбора конкретной траектории в массовом пространстве (см. обсуждение в п. 3.1). Это означает, что вместо эффективной теории легких дионов с зарядами (49) может также возникнуть теория, в которой заряды дионов равны

$$\sqrt{2}\tilde{\mathbf{n}}^1 = \mu_1 \oplus (-\alpha_1), \quad \sqrt{2}\tilde{\mathbf{n}}^2 = \mu_2 \oplus (-\alpha_2). \quad (59)$$

Эта теория на самом деле эквивалентна той, которую мы только что обсудили: единственное различие между ними заключается в изменении на противоположный знаков компонент дуального калибровочного поля A^D . В результате вместо (55) и (56) для зарядов элементарных струн мы будем иметь выражения

$$\tilde{\mathbf{n}}_{S_1} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{20}, \frac{\sqrt{3}}{20}\right), \quad \tilde{\mathbf{n}}_{S_2} = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{20}, \frac{\sqrt{3}}{20}\right), \quad (60)$$

т. е. электрические компоненты зарядов окажутся противоположными по знаку. Легко, однако, проверить, что вместо (57) теперь можно написать разложение

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{0} \oplus \alpha_1) &= \left(0, \frac{1}{2}; 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tilde{\mathbf{n}}_{S_1} - \frac{7}{10}\tilde{\mathbf{n}}^1 - \frac{2}{10}\tilde{\mathbf{n}}^2, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{0} \oplus \alpha_2) &= \left(0, -\frac{1}{2}; 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tilde{\mathbf{n}}_{S_2} - \frac{2}{10}\tilde{\mathbf{n}}^1 - \frac{7}{10}\tilde{\mathbf{n}}^2,\end{aligned}\tag{61}$$

и мы получим, что основной вывод работы [2] остается неизменным при замене знаков магнитных компонент зарядов дионов: объектами, испытывающими конфайнмент благодаря струнам в эффективной теории, остаются монополи, причем часть струнного заряда экранируется дионным конденсатом. Это означает, в частности, что в зависимости от выбора конкретного пути в массовой плоскости при переходе к фазе сильной связи изначальной теории можно получить различные заряды дионов и струнных решений в эффективной теории. Однако эта неоднозначность не влияет на наблюдаемые физические результаты: в любом случае будет наблюдаться конфайнмент *тех же самых* магнитных монополей.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы обсудили некоторые особенности теории Виттена–Зайберга для вырожденных кривых в окрестности $\mathcal{N} = 1$ вакуумов суперсимметричной КХД. Вычисление периодов для этих сингулярных кривых позволяет понять, как именно изменяются квантовые числа легких состояний при переходе из области слабой связи в область сильной связи по какой-либо траектории в пространстве модулей масс теории. Этот анализ позволяет получить точную картину конфайнмента в суперсимметричной КХД в сильной связи.

Показано, что вычисление периодов может быть проведено непосредственно с использованием техники интегрируемых систем. В данном контексте это просто означает, что точное решение суперсимметричной калибровочной теории характеризуется кривой с двумя мероморфными дифференциалами, периоды которых фиксированы. Фиксации периодов этих дифференциалов оказывается достаточно, чтобы обеспечить регуляризацию сингулярной кривой, отвечающей $\mathcal{N} = 1$ вакууму, и поэтому массы легких состояний вычисляются точно. Это является еще одним нетривиальным применением классических интегрируемых систем в квантовой теории.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке Российского федерального агентства по атомной энергии, Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1615.2008.2), РФФИ (гранты № 08-01-00667, 09-02-90493-Укр, 09-02-93105-CNRS, 09-01-92440-СЕ) и университета города Киото, а также Министерством образования и науки РФ (контракт 02.740.11.0608). Автор благодарен Институту теоретической физики им. Юкавы, где была выполнена основная часть настоящей работы, за гостеприимство.

Список литературы

- [1] A. Marshakov, A. Yung, *Nucl. Phys. B*, **647**:1–2 (2002), 3–48, arXiv: hep-th/0202172.
- [2] A. Marshakov, A. Yung, *Nucl. Phys. B*, **831**:1–2 (2010), 72–104, arXiv: 0912.1366.

- [3] A. Bilal, F. Ferrari, *Nucl. Phys. B*, **516**:1–2 (1998), 175–228, arXiv:hep-th/9706145.
- [4] A. Ritz, A. Vainshtein, *Nucl. Phys. B*, **617**:1–3 (2001), 43–70, arXiv:hep-th/0102121.
- [5] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52; Erratum, **430** (1994), 485–486, arXiv:hep-th/9407087.
- [6] N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **431**:3 (1994), 484–550, arXiv:hep-th/9408099.
- [7] A. Hanany, Y. Oz, *Nucl. Phys. B*, **452**:1–2 (1995), 283–312, arXiv:hep-th/9505075.
- [8] P. C. Argyres, M. R. Plesser, N. Seiberg, *Nucl. Phys. B*, **471**:1–2 (1996), 159–194, arXiv:hep-th/9603042.
- [9] A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **380**:1–2 (1996), 75–80, arXiv:hep-th/9603140.
- [10] D. Gaiotto, *N=2 dualities*, arXiv:0904.2715.
- [11] T. Eguchi, K. Maruyoshi, *JHEP*, 2010, 022, 21 pp., arXiv:0911.4797.
- [12] A. Losev, A. Marshakov, N. Nekrasov, “Small instantons, little strings and free fermions”, *From Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics*, Ian Kogan memorial collection. V. 1, eds. M. Shifman, A. Vainshtein, J. Wheeler, World Sci., Singapore, 2005, 581–621, arXiv:hep-th/0302191.
- [13] A. Marshakov, N. A. Nekrasov, *JHEP*, **01** (2007), 104, 39 pp., arXiv:hep-th/0612019; A. В. Маршаков, *ТМФ*, **154**:3 (2008), 424–450, arXiv:0706.2857.
- [14] P. C. Argyres, M. R. Douglas, *Nucl. Phys. B*, **448**:1–2 (1995), 93–126, arXiv:hep-th/9505062; P. C. Argyres, M. R. Plesser, N. Seiberg, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **461**:1–2 (1996), 71–84, arXiv:hep-th/9511154; T. Eguchi, K. Hori, K. Ito, S.-K. Yang, *Nucl. Phys. B*, **471**:3 (1996), 430–442, arXiv:hep-th/9603002.
- [15] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т. 3: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Маттье*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1967.
- [16] I. M. Krichever, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **47**:4 (1992), 437–475, arXiv:hep-th/9205110.
- [17] N. Dorey, *JHEP*, **11** (1998), 005, 50 pp., arXiv:hep-th/9806056; N. Dorey, T. Hollowood, D. Tong, *JHEP*, **05** (1999), 006, arXiv:hep-th/9902134.
- [18] M. Shifman, A. Yung, *Phys.Rev. D*, **79**:12 (2009), 125012, 23 pp., arXiv:0904.1035.