Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Шведов, О точно решаемых квантово-механических моделях с расходимостями Штюкельберга, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 1, 91–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf659>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:19:54

О ТОЧНО РЕШАЕМЫХ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С РАСХОДИМОСТЯМИ ШТЮКЕЛЬБЕРГА

Рассматривается точно решаемая квантово-механическая модель с бесконечным числом степеней свободы, являющаяся аналогом модели N скалярных полей $(\lambda/N)(\varphi^a \varphi^a)^2$ в главном порядке по $1/N$. В модели возникают вакуумные и S -матричные расходимости, а также расходимости Штюкельберга, отсутствующие в других известных перенормируемых квантово-механических моделях с расходимостями (таких, как частица в δ -образном потенциале или модель Ли). Для устранения расходимостей проводится перенормировка вакуумной энергии и заряда, а также сингулярно зависящее от параметра регуляризации унитарное преобразование гамильтониана. Построены гильбертово пространство с положительно определенной метрикой, самосопряженный оператор Гамильтона, представление для операторов физических величин. Интересно отметить, что пренебрежение слагаемыми, приводящими к вакуумным расходимостям, не улучшает, а ухудшает свойства перенормируемости модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных трудностей гамильтоновой квантовой теории поля является проблема расходимостей Штюкельберга [1], выражающаяся в том, что в подходе, основанном на уравнениях движения, даже в древесном приближении возникают расходимости. В качестве примеров можно привести расходимости, возникающие при вычислении вероятностей процессов испускания фотона электроном [1] и распада Z -бозона на конечных временах.

Проблемы расходимостей удобно исследовать на примере точно решаемых квантово-механических моделей, поскольку квантовая теория поля построена, по существу, лишь в рамках теории возмущений. Однако известные точно исследуемые квантово-механические модели (уравнение Шредингера с δ -образным потенциалом [2] (см. также [3, 4]), модель Ли [5–7]) допускают операторную реализацию в гильбертовом пространстве только в том случае, если расходимости Штюкельберга отсутствуют, в противном случае необходимо использовать пространство с индефинитной метрикой [5, 8–10].

В данной работе строится и анализируется точно решаемая квантово-механическая модель с бесконечным числом степеней свободы, которая допускает построение в прос-

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: shvedov@qs.phys.msu.ru

пространстве с положительно определенной метрикой и при наличии расходимостей Штюкельберга.

Гамильтониан модели формально записывается в виде

$$H = H(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k a_k^+ a_k^- + \frac{g}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \frac{a_k^+ + a_k^-}{\sqrt{2\Omega_k}} \right)^2 + E_0, \quad (1)$$

где величины $E_0, g, \mu_k \in \mathbb{R}$, Ω_k – возрастающая последовательность вещественных чисел, стремящаяся к бесконечности при $k \rightarrow \infty$ и удовлетворяющая свойству $\Omega_k \geq C > 0$, $a_k^{\pm}$ – операторы рождения и уничтожения в пространстве Фока.

Модели типа (1) возникают при применении метода $1/N$ -разложения к теории поля $(\lambda/N)(\varphi^a \varphi^a)^2$ [11, 12], а также при исследовании квантовой теории скалярного поля во внешнем δ -образном потенциале.

В зависимости от того, при каких s выполнено свойство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\Omega_k^s} < \infty, \quad (2)$$

в модели (1) возникают расходимости различных видов, которые устраняются перенормировкой констант g и E_0 и выбором другого (вообще говоря, нефоковского) представления операторов $a^{\pm}$. Расходимости, возникающие в модели (1) в теории возмущений, анализируются в разделе 2. Рассматривается вопрос о том, при каких условиях возникают расходимости Штюкельберга.

При исследовании моделей конструктивной теории поля обычно рассматриваются вопросы построения пространства состояний, представления группы Пуанкаре и гейзенберговских операторов поля [13]. В данной работе аналогичные вопросы рассматриваются для модели (1). В разделе 3 формальному выражению (1) сопоставляется самосопряженный оператор, действующий в некотором пространстве состояний $\mathcal{H}$, тем самым определяется унитарный оператор эволюции. В разделе 4 физическим величинам $a_k^{\pm}(t)$ сопоставляются операторы, являющиеся аналогами гейзенберговских операторов поля. Исследуется вопрос о том, в каком случае выражению

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+(t) z_k - a_k^-(t) z_k^*), \quad (3)$$

где z_k – некоторая последовательность, можно сопоставить оператор в пространстве $\mathcal{H}$ или операторную обобщенную функцию. Раздел 5 содержит заключительные замечания.

2. ВАКУУМНЫЕ, S -МАТРИЧНЫЕ РАСХОДИМОСТИ И РАСХОДИМОСТИ ШТЮКЕЛЬБЕРГА

Перейдем к анализу расходимостей, возникающих при применении гамильтоновой теории возмущений к модели (1).

1. Пусть $a_k^\pm$ – операторы рождения и уничтожения в пространстве Фока. Для определенности выберем в формуле (1) нормальное упорядочение. Согласно [14] выражение (1) определяет самосопряженный оператор в пространстве Фока, в область определения которого входит вакуумный вектор $\Phi^{(0)}$, тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\Omega_k} < \infty. \quad (4)$$

Данное условие означает, что вектор

$$H\Phi^{(0)} = E_0\Phi^{(0)} + \frac{g}{2} \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\sqrt{2\Omega_k}} \frac{\mu_l}{\sqrt{2\Omega_l}} a_k^+ a_l^+ \Phi^{(0)}$$

имеет конечную норму.

2. Если сумма (4) бесконечна, возникает необходимость регуляризации гамильтониана (1). Пусть $\Lambda > 0$ – параметр регуляризации. Обозначим

$$\mu_k^\Lambda = \begin{cases} \mu_k, & k < \Lambda, \\ 0, & k \geq \Lambda, \end{cases}$$

и рассмотрим регуляризованный гамильтониан $H^\Lambda = H(\mu^\Lambda)$. В первом порядке теории возмущений по g оператор эволюции имеет вид

$$e^{-iH^\Lambda t} = e^{-iH_0 t} - ie^{-iH_0 t} \int_0^t d\tau e^{iH_0 \tau} H_1^\Lambda e^{-iH_0 \tau} + O(g^2), \quad (5)$$

где

$$H_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k a_k^+ a_k^- + E_0, \quad H_1^\Lambda = \frac{g}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^\Lambda \frac{a_k^+ + a_k^-}{\sqrt{2\Omega_k}} \right)^2.$$

Используя свойство

$$e^{iH_0 \tau} a_k^\pm e^{-iH_0 \tau} = a_k^\pm e^{\pm i\Omega_k \tau}$$

и применяя оператор (5) к вакуумному вектору $\Phi^{(0)}$, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_t^\Lambda &= e^{-iH^\Lambda t} \Phi^{(0)} = e^{-iE_0 t} \Phi^{(0)} - \\ &- \frac{ig}{2} \int_0^t d\tau \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\mu_k^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_k}} \frac{\mu_l^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_l}} a_k^+ a_l^+ e^{-i(\Omega_k + \Omega_l)(t-\tau)} \Phi^{(0)} + O(g^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Двухчастичная компонента $\Psi_{kl}^{t,\Lambda} = (1/\sqrt{2})(\Phi^{(0)}, a_k^- a_l^- \Psi_t^\Lambda)$ вектора (6) имеет вид

$$\Psi_{kl}^{t,\Lambda} = -\frac{ig}{2} \frac{\mu_k^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_k}} \frac{\mu_l^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_l}} \frac{1 - e^{-i(\Omega_k + \Omega_l)t}}{i(\Omega_k + \Omega_l)}.$$

При снятии регуляризации квадрат нормы этой компоненты будет конечен, если

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{2\Omega_k} \frac{\mu_l^2}{2\Omega_l} \frac{1}{(\Omega_k + \Omega_l)^2} < \infty. \quad (7)$$

В силу соотношения $\Omega_k + \Omega_l \geq 2\sqrt{\Omega_k \Omega_l}$ данное условие будет выполнено при

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\Omega_k^2} < \infty. \quad (8)$$

Если сумма (7) бесконечна, то уже в первом порядке теории возмущений вакуумный вектор пространства Фока в результате эволюции переходит в вектор, имеющий бесконечную норму, т.е. возникает вакуумная расходимость.

3. Для устранения вакуумных расходимостей в теории возмущений используется метод преобразования Фаддеева [15], заключающийся в следующем.

А. Рассматривается регуляризованное уравнение Шредингера

$$i \frac{d\Psi_t^\Lambda}{dt} = H^\Lambda \Psi_t^\Lambda.$$

Помимо условий на зависимость гамильтониана от параметра регуляризации, накладывается условие на зависимость вектора Ψ^Λ от Λ :

$$\Psi_t^\Lambda = T^\Lambda \Phi_t^\Lambda, \quad (9)$$

где T^Λ – сингулярно зависящий от Λ унитарный оператор, а $\Phi_t^\Lambda \rightarrow \Phi_t$ при $\Lambda \rightarrow \infty$. Для того чтобы это условие было инвариантно относительно эволюции, оператор

$$e^{-i\tilde{H}^\Lambda t} = (T^\Lambda)^\dagger e^{-iH^\Lambda t} T^\Lambda \quad (10)$$

при $\Lambda \rightarrow \infty$ должен иметь сильный предел.

Б. Оператор T^Λ выбирается в теории возмущений в виде

$$T^\Lambda = \exp(gA_1^\Lambda + g^2 A_2^\Lambda + \dots).$$

Антиэрмитовы операторы $A_1^\Lambda, A_2^\Lambda, \dots$ имеют следующий вид. Рассмотрим разложение оператора $\tilde{H}^\Lambda$ в ряд теории возмущений

$$\tilde{H}^\Lambda = H_0 + g\tilde{H}_1^\Lambda + g^2\tilde{H}_2^\Lambda + \dots,$$

m -е слагаемое разложения определяется из соотношения

$$\tilde{H}_m^\Lambda + [A_m^\Lambda, H_0] = \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{\substack{s_1, \dots, s_l = \overline{1, m}, \\ s_1 + \dots + s_l + p + l = m}} [A_{s_1}^\Lambda \dots [A_{s_l}^\Lambda, H_p^\Lambda] \dots]. \quad (11)$$

Правая часть равенства (11) в рассматриваемом примере представляется в виде квадратичного гамильтониана

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} A_{kl}^m a_k^+ a_l^+ + B_{kl}^m a_k^+ a_l^- + \frac{1}{2} A_{kl}^{m*} a_k^- a_l^- \right).$$

Оператор A_l^Λ содержит слагаемые с двумя операторами рождения и двумя операторами уничтожения и подбирается таким образом, чтобы сократить аналогичные слагаемые в правой части формулы (11). Гамильтониан $\tilde{H}_m^\Lambda$ содержит один оператор рождения и один оператор уничтожения:

$$\tilde{H}_m^\Lambda = \sum_{k,l=1}^{\infty} B_{kl}^m a_k^+ a_l^-.$$

В результате преобразования Фаддеева уравнение на Φ_t^Λ принимает вид

$$i \frac{d\Phi_t^\Lambda}{dt} = \tilde{H}^\Lambda \Phi_t^\Lambda$$

и не содержит вакуумных расходимостей.

В первом порядке теории возмущений имеем

$$i \dot{\Phi}_t^\Lambda = H_0 \Phi_t^\Lambda + g \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\mu_k^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_k}} \frac{\mu_l^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_l}} a_k^+ a_l^- \Phi_t^\Lambda + \dots \quad (12)$$

4. Перейдем к исследованию расходимостей в уравнении (12). В первом порядке теории возмущений уравнение для первой компоненты $\varphi_k^{t,\Lambda}$ вектора пространства Фока

$$\Phi_t^\Lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{t,\Lambda} a_k^+ \Phi^{(0)}$$

принимает вид

$$i \dot{\varphi}_k^{t,\Lambda} = \Omega_k \varphi_k^{t,\Lambda} + g \frac{\mu_k^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_k}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu_l^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_l}} \varphi_l^{t,\Lambda}, \quad (13)$$

а его решение записывается в виде

$$\varphi_k^{t,\Lambda} = e^{-i\Omega_k t} \left(\varphi_k^{0,\Lambda} - ig \int_0^t d\tau \frac{\mu_k^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_k}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu_l^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_l}} e^{i(\Omega_k - \Omega_l)\tau} \varphi_l^{0,\Lambda} \right) + O(g^2). \quad (14)$$

При быстро убывающих на бесконечности начальных данных вектор (14) при $k \rightarrow \infty$ ведет себя как

$$\sum_{l=1}^{\infty} g \frac{\mu_k^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_k}} \frac{e^{-i\Omega_k t} - e^{-i\Omega_l t}}{\Omega_k - \Omega_l} \frac{\mu_l^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_l}} \varphi_l^0.$$

Его квадрат нормы имеет предел при $\Lambda \rightarrow \infty$, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\Omega_k^3} < \infty.$$

В противном случае вектор из пространства l^2 в результате эволюции переходит в вектор, не принадлежащий l^2 . Данная расходимость называется расходимостью Штюкельберга. Отметим, что в теории возмущений эти расходимости могут быть устранены преобразованием типа преобразования Фаддеева [16].

5. Исследуем, наконец, вопрос о том, в каком случае S -матрица Боголюбова [17] для модели (1) может быть перенормирована. Пусть коэффициент g в формуле (1) является гладкой функцией времени $g = g(t)$ и обращается в нуль вне некоторого конечного интервала $(-T, T)$. S -матрица Боголюбова определяется следующим образом:

$$S[g(\cdot)] = T \exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_{\text{int}}^{\Lambda}(g(\cdot), t) \right),$$

где

$$H_{\text{int}}^{\Lambda}(g(\cdot), t) = \frac{1}{2} g(t) \widehat{Q}_{\Lambda}^2(t) + H_{\text{ct}}^{\Lambda}(t),$$

$$\widehat{Q}_{\Lambda}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{\Lambda} \frac{a_k^{+} e^{i\Omega_k t} + a_k^{-} e^{-i\Omega_k t}}{\sqrt{2\Omega_k}},$$

H_{ct}^{Λ} – контрчлен, добавляемый к гамильтониану, пропагатор “поля” $\widehat{Q}_{\Lambda}(t)$ имеет вид

$$\overline{\widehat{Q}_{\Lambda}(t_1) \widehat{Q}_{\Lambda}(t_2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_k^{\Lambda})^2}{2\Omega_k} e^{-i\Omega_k |t_1 - t_2|} \equiv \frac{1}{i} D_{\Lambda}^c(t_1 - t_2).$$

Для исследования особенностей пропагатора при $t_1 - t_2 \rightarrow 0$ удобно перейти в импульсное представление:

$$\widetilde{D}_{\Lambda}^c(\varepsilon) = \int dt D_{\Lambda}^c(t) e^{i\varepsilon t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_k^{\Lambda})^2}{\Omega_k^2 - \varepsilon^2}.$$

При выполнении условия (8) можно перейти к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\Omega_k^2} = \infty, \quad (15)$$

но

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\Omega_k^4} < \infty, \quad (16)$$

то пропагатор может быть представлен в виде суммы $\widetilde{D}_{\Lambda}^c(\varepsilon) = a_{\Lambda} + \widetilde{D}_{\text{reg}, \Lambda}^c(\varepsilon)$, включающей сингулярную, не зависящую от ε , часть

$$a_{\Lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_k^{\Lambda})^2}{\Omega_k^2}$$

и регулярную при $\Lambda \rightarrow \infty$ часть

$$\widetilde{D}_{\text{reg}, \Lambda}^c(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_k^2}{\Omega_k^2 - \varepsilon^2} - \frac{\mu_k^2}{\Omega_k^2} \right).$$

Тогда

$$D_{\Lambda}^c(t) = a_{\Lambda}\delta(t) + D_{\text{reg},\Lambda}^c(t).$$

Расходящаяся часть “диаграммы”

$$\int dt_1 dt_2 g(t_1)g(t_2)\widehat{Q}_{\Lambda}(t_1)\overline{\widehat{Q}_{\Lambda}(t_1)\widehat{Q}_{\Lambda}(t_2)}(\widehat{Q}_{\Lambda}(t_2)$$

имеет вид

$$\frac{a_{\Lambda}}{i} \int dt g^2(t)\widehat{Q}_{\Lambda}^2(t).$$

Для устранения расходимостей к гамильтониану взаимодействия необходимо добавить контрчлен того же типа, что и сам гамильтониан взаимодействия. Тем самым при выполнении свойства (16) модель перенормируема. В противном случае сингулярная часть пропагатора содержит производную δ -функции, поэтому необходимы контрчлены другого вида.

Отметим, что формализм S -матрицы Боголюбова также может быть использован для устранения расходимостей Штюкельберга в теории возмущений [16].

3. ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ

Перейдем к исследованию модели вне рамок теории возмущений. Рассмотрим регуляризованный гамильтониан

$$H^{\Lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k a_k^+ a_k^- + \frac{g_{\Lambda}}{2} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{\Lambda} \frac{a_k^+ + a_k^-}{\sqrt{2\Omega_k}} \right)^2 : + E_0^{\Lambda}. \quad (17)$$

Оказывается, что при некотором выборе оператора T^{Λ} (отличного от рассмотренного в предыдущем разделе) оператор (10) имеет при $\Lambda \rightarrow \infty$ сильный предел, который может быть интерпретирован как перенормированный оператор эволюции в модели (1).

Для построения оператора T^{Λ} приведем квадратичный гамильтониан к каноническому виду. После замены

$$q_k = \frac{a_k^+ + a_k^-}{\sqrt{2\Omega_k}}, \quad p_k = i\sqrt{\frac{\Omega_k}{2}}(a_k^+ - a_k^-)$$

оператор (17) принимает вид

$$H^{\Lambda} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \left(\frac{p_k^2}{2} \delta_{kl} + \frac{q_k (M_{\Lambda})_{kl} q_l}{2} - \frac{1}{2} \Omega_k \delta_{kl} \right) + \widetilde{E}_0^{\Lambda}, \quad (18)$$

где

$$\widetilde{E}_0^{\Lambda} = E_0^{\Lambda} - \frac{g_{\Lambda}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_k^{\Lambda})^2}{2\Omega_k}, \quad (M_{\Lambda})_{kl} = \Omega_k^2 \delta_{kl} + g_{\Lambda} \mu_k^{\Lambda} \mu_l^{\Lambda}. \quad (19)$$

В случае, если оператор M_Λ , соответствующий матрице $(M_\Lambda)_{kl}$, положительно определен, можно однозначно определить операторы $M_\Lambda^{1/2}$ и $M_\Lambda^{1/4}$, также являющиеся положительно определенными самосопряженными операторами. После преобразования

$$b_k^\pm = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} ((M_\Lambda^{\frac{1}{4}})_{kl} q_l \mp i(M_\Lambda^{-\frac{1}{4}})_{kl} p_l)$$

гамильтониан (18) принимает вид

$$H = \sum_{k,l=1}^{\infty} b_k^+ (M_\Lambda^{\frac{1}{2}})_{kl} b_l^- + \mathcal{E}_0^\Lambda, \quad (20)$$

где

$$\mathcal{E}_0^\Lambda = E_0^\Lambda - \frac{g_\Lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_k^\Lambda)^2}{2\Omega_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ((M_\Lambda^{\frac{1}{2}})_{kk} - \Omega_k)$$

(отметим, что в каждой из сумм лишь конечное число слагаемых отлично от нуля), через $(M_\Lambda^{1/2})_{kl}$ и $(M_\Lambda^{1/4})_{kl}$ обозначены матрицы, отвечающие операторам $M_\Lambda^{1/2}$ и $M_\Lambda^{1/4}$, соответственно.

Таким образом, преобразованием

$$\begin{aligned} a_k^+ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} ((\Omega^{\frac{1}{2}} M_\Lambda^{-\frac{1}{4}})_{kl} (b_l^+ + b_l^-) + (\Omega^{-\frac{1}{2}} M_\Lambda^{\frac{1}{4}})_{kl} (b_l^+ - b_l^-)), \\ a_k^- &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} ((\Omega^{\frac{1}{2}} M_\Lambda^{-\frac{1}{4}})_{kl} (b_l^+ + b_l^-) + (\Omega^{-\frac{1}{2}} M_\Lambda^{\frac{1}{4}})_{kl} (b_l^- - b_l^+)) \end{aligned} \quad (21)$$

квадратичный гамильтониан (1) приводится к каноническому виду (20).

При конечном Λ каноническое преобразование (21) охватывает лишь конечное число степеней свободы, так как $a_k^\pm = b_k^\pm$ при $k \geq \Lambda$. Поэтому каноническое преобразование (21) является унитарно реализуемым [14]: существует такой унитарный оператор T^Λ , определенный с точностью до умножения на числовой множитель, что

$$\begin{aligned} T^{\Lambda+} a_k^+ T^\Lambda &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} ((\Omega^{\frac{1}{2}} M_\Lambda^{-\frac{1}{4}})_{kl} (a_l^+ + a_l^-) + (\Omega^{-\frac{1}{2}} M_\Lambda^{\frac{1}{4}})_{kl} (a_l^+ - a_l^-)), \\ T^{\Lambda+} a_k^- T^\Lambda &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} ((\Omega^{\frac{1}{2}} M_\Lambda^{-\frac{1}{4}})_{kl} (a_l^+ + a_l^-) + (\Omega^{-\frac{1}{2}} M_\Lambda^{\frac{1}{4}})_{kl} (a_l^- - a_l^+)). \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда

$$T^{\Lambda+} H^\Lambda T^\Lambda = \tilde{H}^\Lambda, \quad T^{\Lambda+} e^{-iH^\Lambda t} T^\Lambda = e^{-i\tilde{H}^\Lambda t}, \quad (23)$$

где

$$\tilde{H}^\Lambda = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_k^+ (M_\Lambda^{\frac{1}{2}})_{kl} a_l^- + \mathcal{E}_0^\Lambda.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть выполнено условие (16) и при $\Lambda \rightarrow \infty$

$$E_0^\Lambda - \frac{g_\Lambda}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu_k^\Lambda)^2}{2\Omega_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ((M_\Lambda^{\frac{1}{2}})_{kk} - \Omega_k) \rightarrow \mathcal{E}_0,$$

$$g_\Lambda^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(\mu_s^\Lambda)^2}{\Omega_s^2} \rightarrow g_R^{-1} < 0.$$

Тогда при достаточно больших Λ оператор M_Λ положительно определен, а оператор $T^{\Lambda+} e^{-iH^\Lambda t} T^\Lambda$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ сильно сходится к некоторому оператору $U(t)$, определяющему сильно непрерывную однопараметрическую группу унитарных операторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем сильную сходимость при $\Lambda \rightarrow \infty$ резольвенты самосопряженного оператора M_Λ , которой соответствует следующая матрица:

$$(\lambda - M_\Lambda)_{kl}^{-1} = (\lambda - \Omega_k^2)^{-1} \delta_{kl} + a_\Lambda(\lambda) (\lambda - \Omega_k^2)^{-1} \mu_k^\Lambda \mu_l^\Lambda (\lambda - \Omega_l^2)^{-1}, \quad (24)$$

где

$$a_\Lambda(\lambda) = \left(g_\Lambda^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(\mu_s^\Lambda)^2}{\Omega_s^2} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda (\mu_s^\Lambda)^2}{\Omega_s^2 (\lambda - \Omega_s^2)} \right)^{-1}.$$

Начиная с некоторого Λ выполняется неравенство $a_\Lambda(0) < 0$, поэтому $M_\Lambda^{-1} > 0$ и $M_\Lambda > 0$. Из сходимости ряда (16) вытекают следующие свойства:

- а) $(\lambda - \Omega_k^2)^{-1} \mu_k^\Lambda \rightarrow (\lambda - \Omega_k^2)^{-1} \mu_k$ по норме пространства l^2 при $\Lambda \rightarrow \infty$;
- б) $a_\Lambda(\lambda) \rightarrow a(\lambda) = (g_R^{-1} - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda \mu_s^2 / \Omega_s^2 (\lambda - \Omega_s^2))^{-1}$ при $\Lambda \rightarrow \infty$.

Ограниченный оператор $(\lambda - M_\Lambda)^{-1}$ сильно сходится при $\Lambda \rightarrow \infty$ к ограниченному оператору $R(\lambda)$ с матрицей

$$R_{kl}(\lambda) = (\lambda - \Omega_k^2)^{-1} \delta_{kl} + a(\lambda) (\lambda - \Omega_k^2)^{-1} \mu_k \mu_l (\lambda - \Omega_l^2)^{-1}.$$

Самосопряженный оператор $R(0)$ не имеет нулевых собственных значений и отрицательно определен. Следовательно, определен (неограниченный) самосопряженный положительно определенный оператор $M = -(R(0))^{-1}$. Непосредственным вычислением получаем

$$R(\lambda) = (\lambda - M)^{-1}.$$

Таким образом, резольвента оператора M_Λ сильно сходится к резольвенте оператора M . Из общих результатов [18] вытекает, что в этом случае

$$s\text{-}\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} e^{-iM_\Lambda^{\frac{1}{2}} t} = e^{-iM^{\frac{1}{2}} t}.$$

Оператор $e^{-i\tilde{H}^\Lambda t}$ действует на вектор пространства Фока

$$\varphi = (\varphi^{(0)}, \varphi_{k_1}^{(1)}, \dots, \varphi_{k_1 \dots k_n}^{(n)}, \dots)$$

следующим образом:

$$(e^{-i\tilde{H}^\Lambda t} \varphi)_{k_1 \dots k_n}^{(n)} = e^{-i\mathcal{E}_0^\Lambda t} \sum_{l_1, \dots, l_n=1}^{\infty} (e^{-iM_\Lambda^{\frac{1}{2}} t})_{k_1 l_1} \dots (e^{-iM_\Lambda^{\frac{1}{2}} t})_{k_n l_n} \varphi_{l_1 \dots l_n}^{(n)}.$$

Рассмотрим подмножество $\mathcal{D}$ пространства Фока, состоящее из всех таких векторов φ , у которых только конечное число компонент отлично от нуля, а каждая из них является конечной линейной комбинацией произведений

$$\varphi_{l_1 \dots l_n}^{(n)} = \sum_a f_{l_1}^{1,a} \dots f_{l_n}^{n,a}, \quad f^{s,a} \in l^2.$$

На этом плотном подмножестве пространства Фока

$$e^{-i\tilde{H}^\Lambda t} \varphi \rightarrow U(t) \varphi \quad \text{при } \Lambda \rightarrow \infty,$$

где

$$(U(t) \varphi)_{k_1 \dots k_n}^{(n)} = e^{-i\mathcal{E}_0 t} \sum_{l_1, \dots, l_n=1}^{\infty} (e^{-iM^{\frac{1}{2}} t})_{k_1 l_1} \dots (e^{-iM^{\frac{1}{2}} t})_{k_n l_n} \varphi_{l_1 \dots l_n}^{(n)}. \quad (25)$$

По теореме Банаха–Штейнгауза (см., например, [19]) из равенства (25) вытекает, что оператор $e^{-i\tilde{H}^\Lambda t}$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ сильно сходится к $U(t)$. Операторы (25) образуют сильно непрерывную однопараметрическую группу. Предложение доказано.

Рассмотрим генератор $\tilde{H}$ группы $U(t)$, определяемый из соотношения $U(t) = e^{-i\tilde{H}t}$ в соответствии с теоремой Стоуна. Примем для него обозначение

$$\tilde{H} = a^+ M^{\frac{1}{2}} a^- + \mathcal{E}_0. \quad (26)$$

Тем самым *формальному выражению* (1) *сопоставлен самосопряженный оператор* (26), *действующий в пространстве Фока* $\mathcal{H}$: *оператору* $\tilde{H}$ *отвечает оператор эволюции* (25).

Отметим, что если $g_R^{-1} > 0$ и справедливо равенство (15), то оператор M не является положительно определенным. Условие $g_R < 0$ аналогично условию отсутствия тахионов в модели $(\lambda/N)(\varphi^a \varphi^a)^2$ в главном порядке по $1/N$ [20].

4. “ПОЛЕВЫЕ” ОПЕРАТОРЫ

Сопоставим линейным комбинациям физических величин $a_k^\pm(t)$ (3) операторы, действующие в пространстве Фока. В регуляризованной теории физическим величинам (3) отвечают операторы

$$e^{iH^\Lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ z_k - a_k^- z_k^*) e^{-iH^\Lambda t}. \quad (27)$$

В результате преобразования (9) операторы (27) переходят в операторы

$$\mathcal{A}_\Lambda(z^\Lambda, z^{\Lambda*}, t) = T^{\Lambda+} e^{iH^\Lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ z_k^\Lambda - a_k^- z_k^{\Lambda*}) e^{-iH^\Lambda t} T^{\Lambda}. \quad (28)$$

Мы рассматриваем более общий случай, когда z зависит от Λ .

В настоящем разделе исследуется вопрос о том, в каком случае предел выражения (28) при $\Lambda \rightarrow \infty$ определяет операторную обычную или обобщенную функцию времени t . Данный предел можно считать оператором, соответствующим физической величине (3).

Из формул (22) и (23) вытекает, что выражение (28) принимает вид

$$\mathcal{A}_\Lambda(z^\Lambda, z^{\Lambda*}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ w_k^\Lambda(t) - a_k^- w_k^{\Lambda*}(t)), \quad (29)$$

где

$$w^\Lambda(t) = e^{iM_\Lambda^{\frac{1}{2}}t} \left[M_\Lambda^{\frac{1}{4}} \Omega^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (z^\Lambda + z^{\Lambda*}) + M_\Lambda^{-\frac{1}{4}} \Omega^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (z^\Lambda - z^{\Lambda*}) \right]. \quad (30)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть для некоторого n элементы пространства l^2 вида $M_\Lambda^{-n} \Omega^{-1/2} (z^\Lambda + z^{\Lambda*})$ и $M_\Lambda^{-n} \Omega^{1/2} (z^\Lambda - z^{\Lambda*})$ сильно сходятся при $\Lambda \rightarrow \infty$. Тогда для любой функции f из пространства Шварца на финитных векторах φ пространства Фока существует сильный предел

$$A[f]\varphi = s\text{-}\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int dt f(t) \mathcal{A}_\Lambda(z^\Lambda, z^{\Lambda*}, t) \varphi.$$

Отображение $f \mapsto A[f]$ определяет операторную обобщенную функцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор

$$A_\Lambda[f] = \int dt f(t) \mathcal{A}_\Lambda(z^\Lambda, z^{\Lambda*}, t)$$

может быть записан в виде

$$A_\Lambda[f] = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ w_k^\Lambda[f] - a_k^- w_k^{\Lambda*}[f]),$$

где

$$w^\Lambda[f] = \frac{1}{2} \tilde{f}(M_\Lambda^{\frac{1}{2}}) \left[M_\Lambda^{\frac{1}{4}} \Omega^{-\frac{1}{2}} (z^\Lambda + z^{\Lambda*}) + M_\Lambda^{-\frac{1}{4}} \Omega^{\frac{1}{2}} (z^\Lambda - z^{\Lambda*}) \right].$$

Через $\tilde{f}$ обозначено преобразование Фурье функции f . Из сильной сходимости резольвенты оператора M_Λ к резольвенте оператора M и ограниченности функции $\tilde{f}(x)x^{2n\pm 1/2}$ вытекает [18], что

$$s\text{-}\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \tilde{f}(M_\Lambda^{\frac{1}{2}}) M_\Lambda^{n\pm \frac{1}{4}} = \tilde{f}(M^{\frac{1}{2}}) M^{n\pm \frac{1}{4}}$$

в сильном смысле. Отсюда

$$s\text{-}\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} w^\Lambda[f] = w[f] = \frac{1}{2} \tilde{f}(M^{\frac{1}{2}}) M^{n+\frac{1}{4}} \xi_n + \frac{1}{2} \tilde{f}(M^{\frac{1}{2}}) M^{n-\frac{1}{4}} \eta_n,$$

где

$$\xi_n = s\text{-}\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} M_\Lambda^{-n} \Omega^{-\frac{1}{2}} (z^\Lambda + z^{\Lambda*}),$$

$$\eta_n = s\text{-}\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} M_\Lambda^{-n} \Omega^{\frac{1}{2}} (z^\Lambda - z^{\Lambda*}).$$

Следовательно, $A_\Lambda[f] \rightarrow A[f]$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ в сильном смысле на финитных векторах пространства Фока. Далее, если последовательность функций f_s сходится к нулю в пространстве Шварца, то $\|\tilde{f}_s(M^{1/2})M^{n\pm 1/4}\| \leq \max_x |\tilde{f}_s(x)x^{2n\pm 1/2}| \rightarrow 0$, поэтому линейное отображение $f \mapsto A[f]$ непрерывно в сильной топологии и определяет операторную обобщенную функцию. Предложение доказано.

ПРИМЕР 1. Пусть z не зависит от Λ ,

$$\Omega^{-\frac{1}{2}}(z + z^*) \in l^2, \quad \Omega^{\frac{1}{2}}(z - z^*) \in l^2.$$

Тогда величине (3) отвечает операторная обобщенная функция

$$\mathcal{A}(z, z^*, t) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mathcal{A}_\Lambda(z, z^*, t).$$

ПРИМЕР 2. Пусть $z_k^\Lambda = ig_\Lambda \mu_k / \sqrt{2\Omega_k}$. Тогда $M_\Lambda^{-1} \Omega^{1/2}(z^\Lambda - z^{\Lambda*}) \rightarrow -i\sqrt{2} g_R \mu_k / \Omega_k^2$ при $\Lambda \rightarrow \infty$, поэтому физической величине

$$Q(t) = g \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\sqrt{2\Omega_k}} (a_k^+(t) + a_k^-(t))$$

также соответствует операторная обобщенная функция. Физическая величина $Q(t)$ является аналогом составного поля $(\lambda/\sqrt{N})\varphi^a\varphi^a$ в модели $(\lambda/N)(\varphi^a\varphi^a)^2$ в главном порядке по $1/N$.

Рассмотренные физические величины удовлетворяют уравнению

$$\mp i \frac{d}{dt} a_k^\mp(t) = \Omega_k a_k^\mp(t) + \frac{\mu_k}{\sqrt{2\Omega_k}} Q(t).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть для некоторого $n > l/2 + 1/4$ элементы пространства l^2 вида $M_\Lambda^n \Omega^{-1/2}(z^\Lambda + z^{\Lambda*})$ и $M_\Lambda^n \Omega^{1/2}(z^\Lambda - z^{\Lambda*})$ сильно сходятся при $\Lambda \rightarrow \infty$. Тогда при $s \leq l$ s -я сильная производная $(d^s/dt^s)\mathcal{A}_\Lambda(z^\Lambda, z^{\Lambda*}, t)$ сильно сходится на финитных векторах пространства Фока к s -й производной некоторой операторной функции $A(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из формулы (30).

ПРИМЕР 3. Пусть z_k — такая последовательность, что

$$\Omega^{-\frac{1}{2}}(z + z^*) \in D(M^\infty), \quad \Omega^{\frac{1}{2}}(z - z^*) \in D(M^\infty). \quad (31)$$

Выбирая последовательности

$$\begin{aligned} z^\Lambda + z^{\Lambda*} &= \Omega^{\frac{1}{2}} M_\Lambda^{-n} M^n \Omega^{-\frac{1}{2}}(z + z^*), \\ z^\Lambda - z^{\Lambda*} &= \Omega^{-\frac{1}{2}} M_\Lambda^{-n} M^n \Omega^{\frac{1}{2}}(z - z^*), \end{aligned}$$

получаем, что оператор $\mathcal{A}_\Lambda(z^\Lambda, z^{\Lambda*}, t)$ и его производные сильно сходятся при $\Lambda \rightarrow \infty$ к оператору

$$\mathcal{A}(z, z^*, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ w_k(t) - a_k^- w_k^*(t)), \quad (32)$$

где

$$w(t) = e^{iM^{\frac{1}{2}}t} \left[M^{\frac{1}{4}} \Omega^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (z + z^*) + M^{-\frac{1}{4}} \Omega^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (z - z^*) \right],$$

и его производным. Таким образом, при выполнении условий (31) физической величины (3) сопоставляется бесконечно дифференцируемая операторная функция (32). Тем самым построено представление физических величин (3). Если не накладывать требование дифференцируемости, условия (31) можно ослабить: $\Omega^{-1/2}(z + z^*) \in D(M^{1/4})$, $\Omega^{1/2}(z - z^*) \in l^2$. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех финитных последовательностей φ_k , удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k \mu_k}{\sqrt{\Omega_k}} = 0.$$

Отметим, что $\Omega^{-1/2}\mathcal{E} \subset D(M)$. Множество $\mathcal{E}$ плотно в l^2 , если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{\Omega_k} = \infty$$

(см., например, [4]). При $f, g \in \mathcal{E}$ определены унитарные операторы

$$U(f) = \exp\left(\mathcal{A}\left(\frac{f}{\sqrt{2}}, \frac{f}{\sqrt{2}}, 0\right)\right), \quad V(g) = \exp\left(\mathcal{A}\left(\frac{ig}{\sqrt{2}}, -\frac{ig}{\sqrt{2}}, 0\right)\right),$$

реализующие представление канонических коммутационных соотношений в форме Вейля:

$$\begin{aligned} U(f_1)U(f_2) &= U(f_1 + f_2), & V(f_1 + f_2) &= V(f_1)V(f_2), \\ U(f)V(g) &= e^{i(f,g)}V(g)U(f). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если

$$\sum_k \frac{\mu_k^2}{\Omega_k^3} = \infty,$$

то построенное представление не эквивалентно фоковскому.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что унитарный оператор в пространстве Фока

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^+ w_k^{(n)} - a_k^- w_k^{(n)*})\right),$$

где $w^{(n)} \in l^2$, сильно сходится при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность $w^{(n)}$ сходится по норме l^2 . Для проверки утверждения достаточно исследовать сходимость на когерентных состояниях $\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} z_k a_k^+\right)|0\rangle$, $z \in l^2$, и воспользоваться теоремой Банаха–Штейнгауза [19].

Пусть $f_n, g_n \in \mathcal{E}$. Последовательность операторов $U(f_n)$ и $V(g_n)$ сильно сходится при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда существуют пределы в пространстве l^2

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} M^{\frac{1}{4}} \Omega^{-\frac{1}{2}} f_n, \quad s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} M^{-\frac{1}{4}} \Omega^{\frac{1}{2}} g_n. \quad (33)$$

Предположим, что построенное представление эквивалентно фоковскому. Тогда сильная сходимость операторов $U(f_n)$ и $V(g_n)$ имеет место при условии существования пределов в пространстве l^2

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} g_n. \quad (34)$$

Из равносильности условий (33) и (34) вытекает ограниченность оператора $M^{-1/4} \Omega^{1/2}$, а значит, и оператора $M^{-3/4} M^{-1/4} \Omega^{1/2}$ с матричными элементами

$$(M^{-1} \Omega^{\frac{1}{2}})_{kl} = \Omega_k^{-\frac{3}{2}} \delta_{kl} - g_R \Omega_k^{-2} \mu_k \Omega_l^{-\frac{3}{2}} \mu_l.$$

Но при выполнении условия предложения данный оператор неограничен. Тем самым предложение доказано.

Отметим, что операторы $U(f)$ и $V(g)$ могут быть определены и на более широких, чем $\mathcal{E}$, множествах, $f \in \mathcal{E}_1 = \Omega^{1/2} D(M)$, $g \in D(\Omega^{1/2})$. При этом при наличии расходимостей Штюкельберга (т.е. при условии предложения 4) множество $\mathcal{E}_1$ даже не является подмножеством l^2 . Действительно, элементы $\varphi \in D(M)$ имеют вид $\varphi_k = a \mu_k \Omega_k^{-2} + \chi_k$, где $\Omega^2 \chi \in l^2$, $a = -g_R \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \chi_k$. Таким образом, $\Omega^{1/2} \varphi - (a \mu_k / \Omega_k^{3/2}) \in l^2$. При $a \neq 0$ последовательность $\Omega^{1/2} \varphi$ не принадлежит пространству l^2 .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена точно решаемая модель (1). Вне рамок теории возмущений показано, что расходимости Штюкельберга, возникающие в этой модели при $s = 3$, могут быть устранены методом “одевающих преобразований”, включающим следующие операции:

- 1) введение промежуточной регуляризации, добавление необходимых контрчленов (переход к гамильтониану H^Λ (17));
- 2) сингулярно зависящее от Λ унитарное преобразование оператора эволюции (23);
- 3) переход к сильному пределу оператора эволюции при $\Lambda \rightarrow \infty$.

Аналогичная процедура устранения расхождений Штюкельберга может быть применена и к моделям типа $(\lambda/N)(\varphi^a \varphi^a)^2$ и $(\lambda/\sqrt{N})\varphi^a \varphi^a \Phi$, рассмотренным в главном порядке по $1/N$, когда гамильтониан становится квадратичным по операторам рождения и уничтожения. Можно ожидать, что описанная процедура применима и к реалистичным моделям квантовой теории поля в рамках теории возмущений, в низшем порядке это было продемонстрировано в работе [16].

Отметим, что слагаемые в гамильтониане (1), содержащие операторы рождения $a^+ a^+$, приводят к вакуумным расхождениям. На первый взгляд, пренебрежение этими слагаемыми привело бы к улучшению свойств перенормируемости модели. Тем не менее модель с гамильтонианом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k a_k^+ a_k^- + g \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\sqrt{2\Omega_k}} \frac{\mu_l}{\sqrt{2\Omega_l}} a_k^+ a_l^-$$

не может быть построена без использования индефинитной метрики: последовательность резольвент операторов с матрицами

$$\Omega_k^2 \delta_{kl} + g\Lambda \frac{\mu_k^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_k}} \frac{\mu_l^\Lambda}{\sqrt{2\Omega_l}}$$

не может иметь нетривиального предела при $\Lambda \rightarrow \infty$, если сумма (2) расходится при $s = 3$.

Аналогичная ситуация возникает в модели Ли [5, 6], получающейся из модели типа $\Phi\varphi\varphi$ при пренебрежении вакуумными слагаемыми. Известно [6], что трудности перенормировки модели Ли возникают при меньших значениях размерности пространства, чем в модели $\Phi\varphi\varphi$, рассматриваемой в S -матричном подходе.

Благодарности. Автор благодарит И. Я. Арефьеву, В. П. Маслова и Д. В. Ширкова за полезное обсуждение ряда вопросов, а также И. В. Тютину за ценные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01198).

Список литературы

- [1] *E. C. G. Stueckelberg.* Phys. Rev. 1951. V. 81. P. 130.
- [2] *Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев.* ДАН СССР. 1961. Т. 137. С. 1011.
- [3] *С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеег-Крон, Х. Хольден.* Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [4] *В. Д. Кошманенко.* УМЖ. 1989. Т. 41. С. 3.
- [5] *Ф. А. Березин.* Матем. сб. 1963. Т. 60. С. 425.
- [6] *К. Хепп.* Теория перенормировок. М.: Наука, 1974.
- [7] *И. Я. Арефьева.* ТМФ. 1972. Т. 12. С. 331.
- [8] *О. И. Завьялов.* ТМФ. 1973. Т. 16. С. 145.
- [9] *Ю. М. Широков.* ТМФ. 1979. Т. 41. С. 291.
- [10] *Ю. Г. Шондин.* ТМФ. 1988. Т. 74. С. 331.
- [11] *F. A. Berezin.* Commun. Math. Phys. 1978. V. 63. P. 131.
- [12] *V. P. Maslov, O. Yu. Shvedov.* Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 105012.

- [13] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [14] *Ф. А. Березин.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [15] *Л. Д. Фаддеев.* ДАН СССР. 1963. Т. 152. С. 573.
- [16] *В. П. Маслов, О. Ю. Шведов.* Тр. МИАН. 1999. Т. 226. С. 112.
- [17] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1973.
- [18] *W. S. Faris.* Self-Adjoint Operators. Lect. Notes in Math. V. 433. Berlin: Springer, 1975.
- [19] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
- [20] *M. Kobayashi, T. Kugo.* Progr. Theor. Phys. 1975. V. 54. P. 1537.

Поступила в редакцию 16.XI.1999 г.
после доработки 29.V.2000 г.