Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Миронов, С. А. Миронов, А. Ю. Морозов,
А. А. Морозов, Вычисления в конформной теории,
необходимые для проверки гипотезы Алдая–Гайотто–
Тачикавы, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 3, 503–542

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6590>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:29:29

© 2010 г. А. Д. Миронов^{*†}, С. А. Миронов^{†‡}, А. Ю. Морозов[†],
А. А. Морозов^{†‡}

ВЫЧИСЛЕНИЯ В КОНФОРМНОЙ ТЕОРИИ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ АЛДАЯ–ГАЙОТТО–ТАЧИКАВЫ

Явная проверка соотношений Алдая–Гайотто–Тачикавы между конформными блоками, регулируемые W_N -симметрией, и функциями Некрасова $U(N)$ требует знания матрицы Шаповалова и различных тройных корреляторов для потомков W -алгебры. Собраны простейшие выражения этого типа для $N = 3$ и для двух низших уровней потомков, приведены подробные выводы, которые могут быть компьютеризированы и использованы при общем изучении конформных блоков и соотношений Алдая–Гайотто–Тачикавы на более высоких уровнях.

Ключевые слова: двумерные конформные теории, суперсимметричные калибровочные теории.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная конформная теория поля [1], [2] давно известна и широко используется [3]–[14]. Она имеет ряд прямых приложений в физике твердого тела и в теории групп. Обеспечивая явно решаемый пример, она одновременно лежит в фундаменте нашего понимания квантовой теории поля и содержит основные алгебро-геометрические структуры, возникающие в рамках теории струн. Этот пример служит моделью, о которой можно мечтать в любой области теоретической физики; он задает качественный уровень для любого самосогласованного описания “из первых принципов”. Тем не менее наиболее замечательные части конформной теории остаются слабо востребованными современной теоретической физикой. Замечательным исключением является недавнее предложение [15] разложить лиувиллевские конформные блоки и конформные модели Тоды [16] в ряды функций Некрасова [17]. Соотношение Алдая–Гайотто–Тачикавы (АГТ) должно быть адекватным описанием

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: mironov@lpi.ru

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: mironov@itep.ru, morozov@itep.ru

[‡]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: badzilla@rambler.ru, Andrey.Morozov@itep.ru

разложения интегралов Фатеева–Доценко с экранирующими зарядами по степеням α -параметров. Это, как известно, приводит к интегралам, очень напоминающим те, которые хорошо разлагаются [17] в суммы по диаграммам Юнга и связаны с различными вопросами теории представлений и моделями Гурвица–Концевича (см. [18] и приведенную там литературу). Однако изучение соотношений АГТ [16], [19]–[21] заторможено, как это ни странно, в связи с недостатком необходимых формул в учебниках по конформной теории. Задача настоящей статьи – восполнить в некоторой степени этот пробел.

В центре нашего внимания находится конформный блок. Если мы знаем структурные константы модели, мы можем рекуррентно вычислять конформные блоки уровень за уровнем, используя конформную симметрию, по стандартной процедуре [2], [13], [14]. Иногда удобнее использовать рекуррентные соотношения, предложенные в различных формах в работах [3], [4], [13]. Мы, однако, пойдем другим путем, идейно близким работам [10], [11]. А именно, мы строим конформный блок из тройных вершин и обращенной матрицы Шаповалова. Поэтому наша главная задача в настоящей статье – вывести и проверить простейшие выражения для тройных корреляторов в алгебре Вирасоро и W -алгебрах (эти выражения выделены в рамку в тексте), которые используются для построения четырехточечного конформного блока, в частности, при изучении соотношения АГТ в работе [19] и особенно в работе [21]. Заметим, что для вычисления многоточечных конформных блоков уже на втором уровне требуются дополнительные тройные вершины, но мы не обсуждаем это здесь.

По сравнению с алгеброй Вирасоро, где конформные блоки хорошо изучены, формулы для конформных блоков в алгебре W_3 известны гораздо меньше. Более того, в отличие от алгебры Вирасоро, в этом случае мы не знаем никаких общих формул для тройных вершин. Поэтому мы интересуемся именно этим более сложным случаем. Тем не менее, поскольку используемые методы и часть ответов должны быть хорошо известны специалистам, мы организовали текст в виде простого обучающего обзора, который может быть использован новичками для дальнейших исследований в этой области.

Мы начинаем с двумерной модели безмассового свободного поля как главного прототипа общей двумерной конформной теории. Все киральные (голоморфные) корреляторы в этой модели могут быть немедленно посчитаны с помощью теоремы Вика. Мы рассматриваем только корреляторы на сфере, так как этого достаточно для наших целей, обобщение на произвольную риманову поверхность может быть также легко произведено [12]. Любое общее соотношение между корреляторами может быть легко проверено явным вычислением обеих частей уравнения в свободной теории. Так, мы рассматриваем общее разложение конформных блоков по тройным вершинам *двух типов* и обратной матрице Шаповалова и выводим различные рекуррентные соотношения между тройными вершинами с различным числом потомков. Далее некоторые из этих соотношений проверяются в модели свободного поля. В самом конце мы делаем обзор рекуррентных соотношений, которые использовались для анализа соотношения АГТ в работах [19], [21], включая частное ограничение на *специальные состояния* в случае теории с киральной алгеброй $W^{(3)}$ (примером которой является теория двух свободных полей).

2. ОБЫЧНАЯ СВОБОДНАЯ ТЕОРИЯ С ЗАРЯДОМ $c = 1$

Модель безмассового поля в двух измерениях определяется действием $(1/2) \int \partial\phi \bar{\partial}\phi d^2z$, но для наших целей удобнее определить ее непосредственно с помощью теоремы Вика. Мы обсуждаем голоморфные (киральные) корреляторы, они определяются как суммы по всем возможным спариваниям полей ϕ в разных точках с простыми выражениями для пропагаторов:

$$\langle \phi(z_1)\phi(z_2) \rangle = \ln(z_1 - z_2),$$

$$\langle \partial\phi(z_1)\phi(z_2) \rangle = \frac{1}{z_{12}}, \quad \langle \phi(z_1)\partial\phi(z_2) \rangle = -\frac{1}{z_{12}}, \quad \langle \partial\phi(z_1)\partial\phi(z_2) \rangle = \frac{1}{z_{12}^2}, \quad \dots,$$

где $z_{ij} \equiv z_i - z_j$. По определению *нормальное упорядочивание* означает, что всеми спариваниями операторов внутри $:\dots:$ пренебрегается при применении теоремы Вика. Среднее от нормально упорядоченного оператора равно константе и не зависит от ϕ . В частности,

$$\prod_i :e^{\alpha_i \phi(z_i)}: = \left(\prod_{i < j} z_{ij}^{\alpha_i \alpha_j} \right) : \prod_i e^{\alpha_i \phi(z_i)} : \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle \prod_i :e^{\alpha_i \phi(z_i)}: \right\rangle = \left(\prod_{i < j} z_{ij}^{\alpha_i \alpha_j} \right) \cdot \delta \left(\sum_i \alpha_i - 2Q \right). \quad (2.1)$$

Дельта-функция должна появиться в правой части после интегрирования по нулевым модам, мы же вводим этот фактор как *правило отбора*, конкретное для модели свободного поля. Рассмотрим сначала случай $Q = 0$.

Тензор энергии-импульса есть оператор

$$T(z) \equiv \frac{1}{2} :(\partial\phi)^2(z):, \quad (2.2)$$

он удовлетворяет условию

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{1}{2z_{12}^4} + \frac{1}{z_{12}^2} : \partial\phi(z_1)\partial\phi(z_2) : =$$

$$= \frac{c}{2z_{12}^4} + \frac{2}{z_{12}^2} T(z_2) + \frac{1}{z_{12}} \partial T(z_2) + \sum_{k \geq 0} \frac{z_{12}^k}{(k+2)!} : \partial^{k+1}\phi \partial\phi(z_2) :, \quad (2.3)$$

в данном случае центральный заряд c равен единице. Составляющие тензора энергии-импульса, операторы Вирасоро L_k , действуют на экспоненту следующим образом:

$$T(z_1) : e^{\alpha\phi(z_2)} : \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z_{12}^{k+2}} : (L_k e^{\alpha\phi})(z_2) : = \frac{\alpha^2/2}{z_{12}^2} : e^{\alpha\phi(z_2)} : +$$

$$+ \frac{1}{z_{12}} : \alpha \partial\phi(z_1) e^{\alpha\phi(z_2)} : + : T(z_1) e^{\alpha\phi(z_2)} : = \frac{\alpha^2}{2z_{12}^2} : e^{\alpha\phi(z_2)} : + \frac{1}{z_{12}} : (\partial e^{\alpha\phi})(z_2) : +$$

$$+ : \left(\frac{(\partial\phi)^2}{2} + \alpha \partial^2\phi \right) e^{\alpha\phi(z_2)} : + \sum_{k > 0} z_{12}^k : \left(\frac{\partial^k T}{k!} + \frac{\alpha \partial^{k+2}\phi}{(k+1)!} \right) e^{\alpha\phi(z_2)} :. \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} &= \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} = \\
 &= \text{Diagram 6} = \frac{1}{2} \left(\text{Diagram 7} - \text{Diagram 8} \right)
 \end{aligned}$$

The diagrams represent nested and overlapping circles with labels m and n inside them, illustrating the manipulation of contours in the calculation of the commutator.

Вычисление коммутатора при помощи процедуры перестановки контуров.

Из (2.3) следует, что операторы Вирасоро образуют *алгебру Вирасоро* (*алгебру Ли*) с коммутационными соотношениями

$$[L_m, L_n] = \frac{m(m^2 - 1)}{12} \delta_{n+m, 0} + (m - n) L_{n+m}. \quad (2.5)$$

Их можно получить следующим образом: если мы подействуем операторами в некоторой точке z_3 , то по определению L_k из (2.4)

$$\begin{aligned}
 [L_m, L_n] &= \oint_{z_2+z_3} z_{13}^{m+1} T(z_1) dz_1 \oint_{z_3} z_{23}^{n+1} T(z_2) dz_2 - \\
 &\quad - \oint_{z_2+z_3} z_{13}^{n+1} T(z_1) dz_1 \oint_{z_3} z_{23}^{m+1} T(z_2) dz_2,
 \end{aligned}$$

где контур интегрирования для оператора, действующего первым, находится внутри контура для оператора, действующего потом. Теперь, если мы в первом члене протянем один контур через другой, то получим (см. рисунок)

$$\begin{aligned}
 [L_m, L_n] &= \left(\oint_{z_3} z_{13}^{m+1} T(z_1) dz_1 \oint_{z_1+z_3} z_{23}^{n+1} T(z_2) dz_2 - \right. \\
 &\quad \left. - \oint_{z_2+z_3} z_{13}^{n+1} T(z_1) dz_1 \oint_{z_3} z_{23}^{m+1} T(z_2) dz_2 \right) + \\
 &\quad + \oint_{z_3} z_{23}^{n+1} T(z_2) dz_2 \oint_{z_2} z_{13}^{m+1} T(z_1) dz_1 = \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{z_3} dz_2 \oint_{z_2} (z_{13}^{m+1} z_{23}^{n+1} - z_{13}^{n+1} z_{23}^{m+1}) T(z_1) dz_1 T(z_2) = \\
 &= \frac{1}{2} \oint_{z_3} dz_2 \oint_{z_2} (z_{13}^{m+1} z_{23}^{n+1} - z_{13}^{n+1} z_{23}^{m+1}) \left(\frac{1}{2z_{12}^4} + \frac{2T(z_2)}{z_{12}^2} + \frac{\partial T(z_2)}{z_{12}} \right) dz_1,
 \end{aligned}$$

где самая первая скобка обращается в нуль (достаточно переобозначить переменные $z_1 \leftrightarrow z_2$, чтобы увидеть это). Второй интеграл несет в себе лишь вклад членов из (2.3), которые сингулярны в точке z_{12} . Удобнее переписать его через антисимметричное выражение. Правая часть соотношения (2.5) теперь является прямым следствием интегрирования по z_1 .

3. СВОБОДНОЕ ПОЛЕ С ЗАРЯДОМ $c \neq 1$

Модифицируем немного свободную теорию, введя $Q \neq 0$ в (2.1). Это приведет к изменению тензора энергии-импульса,

$$T(z) \equiv \frac{1}{2} :(\partial\phi)^2(z): + Q \partial^2\phi(z),$$

который теперь удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} T(z_1)T(z_2) &= \frac{1-12Q^2}{2} \cdot \frac{1}{z_{12}^4} + 2Q \frac{\partial\phi(z_1) - \partial\phi(z_2)}{z_{12}^3} + \frac{1}{z_{12}^2} : \partial\phi(z_1)\partial\phi(z_2) : = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z_{12}^4} + \frac{2}{z_{12}^2} T(z_2) + \frac{1}{z_{12}} \partial T(z_2) + \\ &+ \sum_{k \geq 0} z_{12}^k \left(\frac{1}{(k+2)!} : \partial^{k+1}\phi \partial\phi(z_2) : + \frac{2Q}{(k+3)!} \partial^{k+4}\phi \right). \end{aligned}$$

Действие составляющих тензора на экспоненты тоже изменится:

$$\begin{aligned} T(z_1) : e^{\alpha\phi(z_2)} : &= \frac{\alpha(\alpha-2Q)}{2z_{12}^2} : e^{\alpha\phi(z_2)} : + \frac{1}{z_{12}} : \alpha\partial\phi(z_1) e^{\alpha\phi(z_2)} : + \\ &+ : T(z_1) e^{\alpha\phi(z_2)} : = \frac{(\alpha-Q)^2 - Q^2}{2z_{12}^2} : e^{\alpha\phi(z_2)} : + \frac{1}{z_{12}} : (\partial e^{\alpha\phi})(z_2) : + \\ &+ : \left(\frac{(\partial\phi)^2}{2} + (\alpha+Q)\partial^2\phi \right) e^{\alpha\phi(z_2)} : + \sum_{k>0} z_{12}^k : \left(\frac{\partial^k T}{k!} + \frac{\alpha\partial^{k+2}\phi}{(k+1)!} \right) e^{\alpha\phi(z_2)} :. \end{aligned}$$

Сдвиг правила отбора $\sum_i \alpha_i = 2Q$ на “вакуумный заряд” $2Q$ и “улучшение” тензора энергии-импульса диктуются условием, что двойной коррелятор

$$\langle : e^{\alpha_1\phi(z_1)} : : e^{\alpha_2\phi(z_2)} : \rangle = z_{12}^{\alpha_1\alpha_2} = z_{12}^{-2\Delta_{\alpha_1}}$$

выражается через общую размерность

$$\Delta_{\alpha_1} = \frac{(\alpha_1 - Q)^2 - Q^2}{2} = \frac{(\alpha_2 - Q)^2 - Q^2}{2} = \Delta_{\alpha_2}$$

двух экспоненциальных операторов. Отметим, что оператор вакуумного заряда $: e^{-2Q\phi} :$ имеет ненулевую размерность.

Алгебра Вирасоро также изменилась:

$$[L_m, L_n] = \frac{1-12Q^2}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0} + (m-n)L_{n+m}.$$

К сожалению, в свободной теории нет общепринятого способа введения нормировок. Два часто встречающихся способа, помимо приведенного выше, – это умножение на i : $\phi \longrightarrow i\phi$, $\alpha \longrightarrow i\alpha$ и/или умножение на $\sqrt{2}$: $\alpha \longrightarrow \sqrt{2}\alpha$ и $Q \longrightarrow \sqrt{2}Q$ (поле ϕ остается неизменным в этом случае, а специальный параметр $D \longrightarrow 8D$, он определен ниже в формуле (9.24) и в сноске 3). При изучении конформных теорий

поля *самих по себе* выбранная нами нормировка более удобна, поскольку позволяет избежать лишних множителей $\sqrt{2}$ в большинстве формул. Но нормировка с $\sqrt{2}$ более физична, она обычно используется в приложениях конформной теории к другим научным дисциплинам. В частности, при использовании нашей нормировки в соотношении АГТ появится множитель $\sqrt{2}$: $Q = \epsilon\sqrt{2}$, поэтому в статьях [19], [21], где проводится проверка гипотезы АГТ, сделан иной выбор. Взамен там появляется множитель $\sqrt{2}$ в экспонентах для примарных полей.

В настоящей статье мы придерживаемся нормировки, описанной формулами данного раздела.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ КОРРЕЛЯТОРОВ В МОДЕЛИ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ

Четырехточечный коррелятор может быть посчитан двумя различными способами: или прямо, или путем двойного применения операторного разложения. Например,

$$\begin{aligned} \langle \partial\phi(z_1)\partial\phi(z_2)\partial\phi(z_3)\partial\phi(z_4) \rangle &= \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \frac{1}{z_{13}^2 z_{24}^2} + \frac{1}{z_{14}^2 z_{23}^2} \stackrel{\text{теорема Вика}}{=} \\ &\stackrel{\text{теорема Вика}}{=} \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \frac{1}{z_{24}^4} \left(\frac{1}{(1 + z_{12}/z_{24} - z_{34}/z_{24})^2} + \frac{1}{(1 + z_{12}/z_{24})^2 (1 - z_{34}/z_{24})^2} \right) = \\ &= \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \frac{1}{z_{24}^4} \left(2 - \frac{4z_{12}}{z_{24}} + \frac{4z_{34}}{z_{24}} + \frac{6z_{12}^2}{z_{24}^2} - \frac{10z_{12}z_{34}}{z_{24}^2} + \frac{6z_{34}^2}{z_{12}^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Вместе с тем

$$\begin{aligned} \langle \partial\phi(z_1)\partial\phi(z_2)\partial\phi(z_3)\partial\phi(z_4) \rangle &= \langle (\partial\phi(z_1)\partial\phi(z_2))(\partial\phi(z_3)\partial\phi(z_4)) \rangle = \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{z_{12}^2} + :\partial\phi(z_1)\partial\phi(z_2): \right) \left(\frac{1}{z_{34}^2} + :\partial\phi(z_3)\partial\phi(z_4): \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \sum_{k,l \geq 0} \frac{z_{12}^k z_{34}^l}{k!l!} \langle : \partial^{k+1}\phi\partial\phi(z_2) : : \partial^{l+1}\phi\partial\phi(z_4) : \rangle \stackrel{\text{теорема Вика}}{=} \\ &\stackrel{\text{теорема Вика}}{=} \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \sum_{k,l \geq 0} \frac{z_{12}^k z_{34}^l}{k!l!} \frac{(k+l+1)! + (k+1)!(l+1)!}{z_{24}^{2+k+l}}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle : e^{\alpha_1\phi(z_1)} : : e^{\alpha_2\phi(z_2)} : : e^{\alpha_3\phi(z_3)} : : e^{\alpha_4\phi(z_4)} : \rangle &= \\ &= z_{12}^{\alpha_1\alpha_2} z_{13}^{\alpha_1\alpha_3} z_{14}^{\alpha_1\alpha_4} z_{23}^{\alpha_2\alpha_3} z_{24}^{\alpha_2\alpha_4} z_{34}^{\alpha_3\alpha_4} = \\ &= z_{12}^{\alpha_1\alpha_2} z_{34}^{\alpha_3\alpha_4} z_{24}^{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4)} \left(1 + \frac{z_{12}}{z_{24}} \right)^{\alpha_1\alpha_4} \left(1 - \frac{z_{34}}{z_{24}} \right)^{\alpha_3\alpha_4} \left(1 + \frac{z_{12}}{z_{24}} - \frac{z_{34}}{z_{24}} \right)^{\alpha_1\alpha_3} = \\ &= z_{12}^{\alpha_1\alpha_2} z_{34}^{\alpha_3\alpha_4} z_{24}^{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4)} \left(1 + \alpha_1(\alpha_3 + \alpha_4) \frac{z_{12}}{z_{24}} - \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{z_{34}}{z_{24}} + \dots \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \langle : e^{\alpha_1\phi(z_1)} : : e^{\alpha_2\phi(z_2)} : : e^{\alpha_3\phi(z_3)} : : e^{\alpha_4\phi(z_4)} : \rangle &= \\ &= z_{12}^{\alpha_1\alpha_2} z_{34}^{\alpha_3\alpha_4} \langle : e^{\alpha_1\phi(z_1) + \alpha_2\phi(z_2)} : : e^{\alpha_3\phi(z_3) + \alpha_4\phi(z_4)} : \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= z_{12}^{\alpha_1 \alpha_2} z_{34}^{\alpha_3 \alpha_4} \left\langle : \left(1 + z_{12} \alpha_1 \partial \phi + \frac{z_{12}^2}{2} ((\alpha_1 \partial \phi)^2 + \alpha_1 \partial^2 \phi) + \dots \right) e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \phi(z_2)} : \times \right. \\
 &\quad \times : \left(1 + z_{34} \alpha_3 \partial \phi + \frac{z_{34}^2}{2} ((\alpha_3 \partial \phi)^2 + \alpha_3 \partial^2 \phi) + \dots \right) e^{(\alpha_3 + \alpha_4) \phi(z_4)} : \left. \right\rangle = \\
 &= z_{12}^{\alpha_1 \alpha_2} z_{34}^{\alpha_3 \alpha_4} z_{24}^{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)} \left(1 + \alpha_1(\alpha_3 + \alpha_4) \frac{z_{12}}{z_{24}} - \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{z_{34}}{z_{24}} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

В общей конформной теории нет прямого способа найти многоточечные корреляторы, поэтому остается только второй путь: последовательное применение операторного разложения. Эта процедура позволяет выразить произвольный коррелятор через структурные константы операторного разложения и парные корреляторы или одновременно через парные и тройные корреляторы. Но в этом случае корреляторы представляются в виде бесконечных сумм по промежуточным состояниям, поэтому желательно знать общие формулы для двойных и тройных корреляторов.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Голоморфная конформная теория поля является прямым обобщением свободной полевой модели, где теорема Вика заменяется операторным разложением, и правило отбора исчезает. Понятие коррелятора заменяется двумя другими: линейной и билинейной формами на пространстве операторов. Алгебра Вирасоро вводится как специальное условие эрмитовости билинейной формы. В полной конформной теории имеются также дополнительные правила, позволяющие склеить голоморфную и антиголоморфную части в глобально определенные модулярно-инвариантные корреляторы, но мы не занимаемся здесь этой творческой и изысканной стороной вопроса.

Операторное разложение является произведением в ассоциативном кольце вершинных операторов:

$$V_1(z_1)V_2(z_2) = \sum_{\tilde{\beta}} \frac{C_{12}^{\tilde{\beta}}}{z_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_{\tilde{\beta}}}} V_{\tilde{\beta}}(z_2). \quad (5.1)$$

Далее, действие линейной формы, которую мы рассматриваем как голоморфный коррелятор и обозначаем угловыми скобками, дает

$$\langle V_1(z_1)V_2(z_2)V_{\tilde{\gamma}}(z_4) \rangle = \sum_{\tilde{\beta}} \frac{C_{12}^{\tilde{\beta}}}{z_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_{\tilde{\beta}}}} \langle V_{\tilde{\beta}}(z_2)V_{\tilde{\gamma}}(z_4) \rangle \quad (5.2)$$

и

$$\begin{aligned}
 \langle V_1(z_1)V_2(z_2)V_3(z_3)V_4(z_4) \rangle &= \langle (V_1(z_1)V_2(z_2)) (V_3(z_3)V_4(z_4)) \rangle = \\
 &= \sum_{\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}} \frac{C_{12}^{\tilde{\beta}} C_{34}^{\tilde{\gamma}}}{z_{12}^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_{\tilde{\beta}}} z_{34}^{\Delta_3 + \Delta_4 - \Delta_{\tilde{\gamma}}}} \langle V_{\tilde{\beta}}(z_2)V_{\tilde{\gamma}}(z_4) \rangle.
 \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений, очевидно, получается из голоморфной части коррелятора в полной конформной теории и может быть использовано для выражения структурных констант C через двойные и тройные корреляторы (ниже для краткости мы называем голоморфные корреляторы просто корреляторами), которые можно подставить во второе соотношение и получить искомую формулу для четырехточечного коррелятора.

Альтернативное представление возникает, если мы остановимся, разложив лишь произведение первых двух операторов:

$$\begin{aligned} \langle V_1(z_1)V_2(z_2)V_3(z_3)V_4(z_4) \rangle &= \langle (V_1(z_1)V_2(z_2)) V_3(z_3)V_4(z_4) \rangle = \\ &= \frac{1}{z_{12}^{\Delta_1+\Delta_2}} \sum_{\tilde{\beta}} z_{12}^{\Delta_{\tilde{\beta}}} C_{12}^{\tilde{\beta}} \langle V_{\tilde{\beta}}(z_2)V_3(z_3)V_4(z_4) \rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Это выражение можно значительно упростить путем специального выбора точек z_i . Положив $z_1 = 1$, $z_2 = 0$ и $z_4 = \infty$, мы избегаем зависимости от z в (5.2):

$$\langle V_1(1)V_2(0)V_{\tilde{\gamma}}(\infty) \rangle = \sum_{\tilde{\alpha}} C_{12}^{\tilde{\beta}} \langle V_{\tilde{\beta}}(0)V_{\tilde{\gamma}}(\infty) \rangle. \quad (5.4)$$

Аналогично, положив $z_1 = x$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ и $z_4 = \infty$, мы получаем из (5.3)¹⁾:

$$\langle V_1(x)V_2(0)V_3(1)V_4(\infty) \rangle = x^{-\Delta_1-\Delta_2} \sum_{\tilde{\beta}} x^{\Delta_{\tilde{\beta}}} C_{12}^{\tilde{\beta}} \langle V_{\tilde{\beta}}(0)V_3(1)V_4(\infty) \rangle. \quad (5.5)$$

Введем теперь скалярное произведение в пространстве вершинных операторов и определим *матрицу Шаповалова*, заданную равенством

$$H_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \equiv \langle V_{\tilde{\alpha}} | V_{\tilde{\beta}} \rangle. \quad (5.6)$$

Чтобы определение было корректным, мы полагаем, что операторы в произведении берутся в определенной точке, в нашем случае в точке $z = 0$, тогда H становится просто числовой матрицей с комплексными элементами. Мы установим остальные требования для скалярного произведения в разделе 6, в частности, из них будет следовать, что матрица Шаповалова имеет блочно-диагональный вид,

$$\Delta_{\tilde{\alpha}} \neq \Delta_{\tilde{\beta}} \implies H_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = 0. \quad (5.7)$$

Блоки матрицы Шаповалова, как правило, являются конечномерными. В этом случае матрица может быть легко обращена, если взять скалярное произведение выражения (5.1) в точках $z_1 = 1$ и $z_2 = 0$ с $V_{\tilde{\alpha}}$,

$$\bar{\Gamma}_{12;\tilde{\alpha}} \equiv \langle V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1)V_2(0) \rangle \stackrel{(19)}{=} \sum_{\tilde{\beta}} C_{12}^{\tilde{\beta}} \langle V_{\tilde{\alpha}} | V_{\tilde{\beta}} \rangle = \sum_{\tilde{\beta}} C_{12}^{\tilde{\beta}} H_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}. \quad (5.8)$$

¹⁾Отметим, что корреляторы в обеих частях равенства (5.5) ведут себя одинаково, как $\Lambda^{-2\Delta_4}$, когда аргумент Λ оператора $V_4(\Lambda)$ стремится к бесконечности. Можно умножить обе части равенства на $\Lambda^{2\Delta_4}$ и взять предел, чтобы сделать корреляторы хорошо определенными. То же самое касается равенства (5.4), только поправочный множитель в нем равен $\Lambda^{2\Delta_{\tilde{\gamma}}}$.

Это позволяет нам представить структурные константы в виде

$$C_{12}^{\check{\beta}} = \sum_{\check{\alpha}} \bar{\Gamma}_{12;\check{\alpha}} (H^{-1})^{\check{\alpha}\check{\beta}}. \quad (5.9)$$

Если теперь ввести сходное обозначение для трехточечной функции в (5.4),

$$\Gamma_{\check{\beta}34} \equiv \langle V_{\check{\beta}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle,$$

то из (5.5) можно получить следующее соотношение:

$$K_{1234}(x) \equiv \langle V_1(x) V_2(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle = x^{-(\Delta_1 + \Delta_2)} \sum_{\check{\alpha}, \check{\beta}} x^{\Delta_{\check{\alpha}}} \bar{\Gamma}_{12;\check{\alpha}} (H^{-1})^{\check{\alpha}\check{\beta}} \Gamma_{\check{\beta}34}. \quad (5.10)$$

Отметим, что обозначенные схожим образом функции $\bar{\Gamma}$ и Γ определены совершенно разными способами и имеют мало отношения друг к другу, по крайней мере априори. Однако, если принять во внимание симметрию Вирасоро, то эти две трехточечные функции становятся очень похожими.

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВИРАСОРО

Симметрия Вирасоро конформной теории поля позволяет классифицировать вершинные операторы в терминах теории представлений Вирасоро. Каждый оператор $V_{\check{\alpha}}$ принадлежит некоторому модулю Верма, т.е. получается при действии операторов Вирасоро L_n с $n < 0$ на старший вес, называемый в контексте конформной теории примарным полем:

$$V_{\check{\alpha}} = \dots L_{-k_2} \dots L_{-k_1} V_{\alpha} = \prod_k^{\leftarrow} L_{-k}^{n_k} V_{\alpha} = L_{-Y} V_{\alpha},$$

где Y – диаграмма Юнга или целое упорядоченное разбиение $Y = \{k_1 \geq k_2 \geq \dots\}$ размера $|Y| = k_1 + k_2 + \dots$. Соответственно $\check{\alpha} = (\alpha, Y)$, где α обозначает различные примарные поля, а Y – различные потомки. Симметрия Вирасоро полностью фиксирует всю зависимость от Y в корреляторах. Разные конформные модели отличаются набором примарных полей и зависимостью корреляторов от α . Существенная часть исследований конформной теории поля посвящена вырожденным модулям Верма, т.е. случаям, когда существуют нулевые векторы (которые являются признаком *рациональной* конформной модели). Мы здесь не касаемся этих проблем.

Основное требование к скалярному произведению (5.6) – совместимость с симметрией Вирасоро в следующем смысле:

$$\langle L_{-n} V_{\check{\alpha}} | V_{\check{\beta}} \rangle = \langle V_{\check{\alpha}} | L_n V_{\check{\beta}} \rangle, \quad (6.1)$$

т.е. операторы Вирасоро эрмитовы. Соответственно, для функции $\bar{\Gamma}$ имеем

$$\begin{aligned} \langle L_{-n} V_{\check{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= \left\langle V_{\check{\alpha}} \left| \oint_{0+1} x^{n+s-1} dx T(x) V_1(1) V_2(0) \right. \right\rangle = \\ &= \oint_1 \frac{x^{n+s-1} dx}{(x-1)^{k+s}} \langle V_{\check{\alpha}} | (L_k V_1)(1) V_2(0) \rangle + \oint_0 \frac{x^{n+s-1} dx}{x^{k+s}} \langle V_{\check{\alpha}} | V_1(1) (L_k V_2)(0) \rangle, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где контур интегрирования охватывает обе точки $z = 0$, $z = 1$ и $s = 2$ для алгебры Вирасоро. Используя операторное разложение тензора энергии-импульса и вершинные операторы, можно выразить $\Gamma_{12;(\alpha,Y)}$ через $\Gamma_{12;\alpha}$.

Аналогично можно выразить $\Gamma_{(\beta,Y)34}$ через $\Gamma_{\beta34}$, используя свойство, что помещенный в трехточечную функцию тензор энергии-импульса имеет сингулярности только в окрестности трехвершинных операторов:

$$\begin{aligned} \langle (L_{-n} V_{\tilde{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= \oint_0 \frac{dx}{x^{n-s+1}} \langle T(x) V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle = \\ &= - \oint_1 \frac{dx}{x^{n-s+1} (x-1)^{k+s}} \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) (L_k V_3)(1) V_4(\infty) \rangle + \\ &+ (-1)^s \oint_{\infty} \frac{x^{k-s} dx}{x^{n-s+1}} \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) (L_k V_4)(\infty) \rangle. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Последние интегралы в правых частях (6.2) и (6.3) дают вклад только при $k = n$, первые интегралы могут содержать несколько членов. Если V_1 , V_2 , V_3 и V_4 являются примарными полями, как мы будем предполагать всюду ниже, то

$$\bar{\Gamma}_{12;(\alpha,Y)} = \bar{\gamma}_{12;\alpha}(Y) C_{12;\alpha}, \quad \Gamma_{(\beta,Y)34} = \gamma_{\beta34}(Y) C_{\beta34},$$

где $C_{12;\alpha} \equiv \bar{\Gamma}_{12;(\alpha,0)} = C_{12}^{\beta} H_{\alpha\beta}$ и аналогично для $C_{\beta34}$. Матрица Шаповалова обычно определена так, чтобы $H_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, тогда $C_{12;\alpha} = C_{12}^{\alpha}$ (обычно ее также полагают равной $C_{\alpha12}$).

В действительности для алгебры Вирасоро трехточечные функции γ , как известно, эквивалентны,

$$\bar{\gamma}_{12;\alpha}^{\text{Vir}}(Y) = \gamma_{\alpha12}^{\text{Vir}}(Y), \quad (6.4)$$

но это свойство не сохраняется для более сложных киральных алгебр (см. ниже).

Для двух примарных полей V_{α} и V_{β} матрица Шаповалова

$$H_{(\alpha,Y),(\beta,Y')} = \langle L_{-Y} V_{\alpha} | L_{-Y'} V_{\beta} \rangle = \langle V_{\alpha} | L_Y L_{-Y'} V_{\beta} \rangle = \delta_{|Y|,|Y'|} Q_{\alpha\beta}(Y, Y') H_{\alpha\beta} \quad (6.5)$$

обращается в нуль для $|Y| \neq |Y'|$, поскольку примарные поля аннигилируются положительными генераторами Вирасоро, $L_n V_{\alpha} = 0$, $n > 0$. В формуле (6.5) δ -фактор в точности отвечает соотношению (5.7), которое мы используем в настоящей статье.

В результате мы получаем голоморфную четырехточечную функцию (5.10):

$$K_{1234}(x) = x^{-(\Delta_1 + \Delta_2)} \sum_{\alpha, \beta} x^{\Delta_{\alpha}} (C_{12;\alpha} H_{\alpha\beta}^{-1} C_{\beta34}) B_{1234}^{\alpha\beta}(Y|x),$$

где *конформный блок*

$$B_{1234}^{\alpha\beta}(Y|x) = \sum_{|Y|=|Y'|} x^{|Y|} \bar{\gamma}_{12;\alpha}(Y) Q_{\alpha\beta}^{-1}(Y, Y') \gamma_{\beta34}(Y'). \quad (6.6)$$

7. РАСШИРЕННАЯ КОНФОРМНАЯ АЛГЕБРА

Некоторые модели, имеющие бесконечно много (конечное число) примарных полей Вирасоро, могут иметь расширенную петлевую симметрию, которая контролирует, полностью или частично, зависимость от бесконечного (конечного) числа оставшихся индексов α , обозначающих примарные поля Вирасоро. Такая симметрия называется расширенной конформной или киральной алгеброй, и алгебра Вирасоро – всегда ее часть, но конформная алгебра может быть больше. Известным примером является широко распространенная алгебра токов в модели Весса–Зумина–Виттена–Новикова, но нам нужно что-то немного более сложное, так как, например, теория r свободных полей не полностью контролируется симметрией Вирасоро, соответствующая киральная алгебра есть W_{r+1} .

Имея киральную алгебру, можно ввести соответствующие примарные поля. Один модуль Верма расширенной киральной алгебры может содержать бесконечно много примарных полей Вирасоро, и новые конформные блоки будут тогда суммой бесконечного числа конформных блоков Вирасоро²⁾. Элементы модуля Верма теперь обозначены обобщенными диаграммами Юнга $\mathcal{U}$, которые зависят от частного выбора алгебры. Многие формулы из раздела 6 остаются такими же, если операторы L заменяются генераторами киральной алгебры, Y заменяется на $\mathcal{U}$, и градуировка s изменяется соответственно в (6.2) и (6.3). Важное различие, однако, заключается в том, что в киральной алгебре обычно недостаточно свести всё к корреляторам свободных полей. Пока не будут наложены дополнительные ограничения, начальные данные в любой конкретной конформной модели должны содержать, например, все тройные вершины вида $\langle (W_{-1}^k V_\alpha) V_1 V_2 \rangle$ в случае алгебры W_3 . Следовательно, аналог соотношения (6.4) даже не может быть написан в таком виде, и обе вершины $\bar{\Gamma}$ и Γ должны быть посчитаны отдельно.

8. ПРИМЕРЫ ТРЕХТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ

8.1. $\bar{\Gamma}$ -вершины.

8.1.1. Генераторы Вирасоро, уравнение (6.2). Для примарных полей V_1 при $s = 2$ из (6.2) мы получаем

$$\begin{aligned} \langle \underline{L_{-n} V_\alpha} | V_1(1) V_2(0) \rangle &= (n+1) \Delta_1 \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ \langle V_\alpha | \underline{(L_{-1} V_1)}(1) V_2(0) \rangle + \langle V_\alpha | V_1(1) \underline{(L_n V_2)}(0) \rangle. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Для удобства чтения формул подчеркнуты места, где генератор Вирасоро действует на вершинные операторы.

²⁾По сути, в большинстве конформных моделей физические корреляторы являются суммами билинейных комбинаций голоморфных и антиголоморфных конформных блоков, т. е. нет взаимно однозначного соответствия между конформным блоком и коррелятором. Это означает, что сумма голоморфных конформных блоков не имеет смысла. Важное утверждение о соотношении между голоморфной и билинейной суммами получается из теории суперструн (NSR-струны и гетеротической струны) и GSO-проекции [22], [23].

Если V_1 не является примарным полем, следует добавить еще члены в правую часть:

$$\begin{aligned} \langle \underline{L_{-n}V_{\tilde{\alpha}}}|V_1(1)V_2(0) \rangle &= \sum_{k>0} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \langle V_{\tilde{\alpha}}|\underline{(L_kV_1)(1)}V_2(0) \rangle + \\ &+ (n+1)\Delta_1 \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)V_2(0) \rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}}|\underline{(L_{-1}V_1)(1)}V_2(0) \rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)\underline{(L_nV_2)(0)} \rangle, \end{aligned} \quad (8.2)$$

которые, однако, обращаются в нуль при $n = 0$.

Если V_2 – примарное поле, то для всех $n > 0$ имеем $L_nV_2 = 0$, и из (8.1) следует

$$\langle V_{\tilde{\alpha}}|\underline{(L_{-1}V_1)(1)}V_2(0) \rangle = (\Delta_{\tilde{\alpha}} - \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)V_2(0) \rangle \quad (8.3)$$

и

$$\boxed{\langle \underline{L_{-n}V_{\tilde{\alpha}}}|V_1(1)V_2(0) \rangle = (\Delta_{\tilde{\alpha}} + n\Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)V_2(0) \rangle, \quad n > 0,} \quad (8.4)$$

где мы также использовали, что $L_0V_{\tilde{\alpha}} = \Delta_{\tilde{\alpha}}V_{\tilde{\alpha}}$ и $L_0V_2 = \Delta_2V_2$. Отметим, что равенство (8.3) остается верным, когда V_1 не обязательно является примарным полем, что, в свою очередь, неверно для (8.4). Отметим также, что нет ограничений на $V_{\tilde{\alpha}}$ в (8.4), в частности нет необходимости, чтобы поле $V_{\tilde{\alpha}}$ было примарным. Если $V_{\tilde{\alpha}} = L_{-Y}V_{\alpha}$, то $\Delta_{\tilde{\alpha}} = \Delta_{\alpha} + |Y|$, и мы получаем из (8.4) для $Y = \{k_1 \geq k_2 \geq \dots\}$ и $L_Y = \dots L_{-k_2} \dots L_{-k_1}$ соотношение

$$\boxed{\langle \underline{L_YV_{\alpha}}|V_1(1)V_2(0) \rangle = \langle V_{\alpha}|V_1(1)V_2(0) \rangle \prod_i \left(\Delta_{\alpha} + k_i\Delta_1 - \Delta_2 + \sum_{j<i} k_j \right),} \quad (8.5)$$

которое было недавно использовано при проверке соотношения АГТ в случае $U(2)$ в работе [19].

8.1.2. $W^{(3)}$ -генераторы, уравнение (6.2). Аналогично для $W^{(3)}$ -генератора при $s = 3$ и примарных полей V_1 и V_2 уравнение (6.2) означает, что

$$\begin{aligned} \langle \underline{W_{-n}V_{\tilde{\alpha}}}|V_1(1)V_2(0) \rangle &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} w_1 \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)V_2(0) \rangle + \\ &+ (n+2) \langle V_{\tilde{\alpha}}|\underline{(W_{-1}V_1)(1)}V_2(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\tilde{\alpha}}|\underline{(W_{-2}V_1)(1)}V_2(0) \rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)\underline{(W_nV_2)(0)} \rangle, \end{aligned} \quad (8.6)$$

где w_i – собственное значение оператора W_0 на примарном поле V_i . Исключая из этой системы $\langle W_{-2}V_1 \rangle$,

$$\langle V_{\tilde{\alpha}}|\underline{(W_{-2}V_1)(1)}V_2(0) \rangle = (\hat{w}_{\tilde{\alpha}} - w_1 - w_2) \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)V_2(0) \rangle - 2 \langle V_{\tilde{\alpha}}|\underline{(W_{-1}V_1)(1)}V_2(0) \rangle,$$

получаем

$$\boxed{\langle \underline{W_{-n}V_{\tilde{\alpha}}}|V_1(1)V_2(0) \rangle = \left(\hat{w}_{\tilde{\alpha}} + \frac{n(n+3)}{2} w_1 - w_2 \right) \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)V_2(0) \rangle +} \quad (8.7)$$

$$+ n \langle V_{\tilde{\alpha}}|\underline{(W_{-1}V_1)(1)}V_2(0) \rangle, \quad n > 0.$$

Правую часть этого равенства также можно выразить через $W_{-1}V_2$ вместо $W_{-1}V_1$:

$$\begin{aligned} \langle \underline{W_{-n}V_{\tilde{\alpha}}}|V_1(1)V_2(0)\rangle &= (n+1)\left(\widehat{w}_{\tilde{\alpha}} + \frac{n}{2}w_1 - w_2\right)\langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)V_2(0)\rangle + \\ &+ n\langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)\underline{(W_{-1}V_2)(0)}\rangle, \quad n > 0. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Здесь мы использовали соотношение

$$\langle \underline{W_{-1}V_{\tilde{\alpha}}}|V_1(1)V_2(0)\rangle = (\widehat{w}_{\tilde{\alpha}} - w_1 - w_2)\langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)V_2(0)\rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)\underline{(W_{-1}V_2)(0)}\rangle. \quad (8.9)$$

Отличие от случая алгебры Вирасоро заключается в том, что теперь справа мы имеем две структуры.

На самом деле все еще сложнее. Действительно, соотношения (8.7) и (8.8) написаны в слегка символическом виде, который имеет прямое значение только для примарного поля V_{α} . В противном случае то, что обозначено как $\widehat{w}_{\tilde{\alpha}}V_{\tilde{\alpha}} \equiv W_0V_{\tilde{\alpha}}$, не пропорционально $V_{\tilde{\alpha}}$: по этой причине мы помечаем шляпкой $w_{\tilde{\alpha}}$. К примеру, уже для самых первых потомков $L_{-1}V_{\alpha}$ и $W_{-1}V_{\alpha}$

$$\begin{aligned} \widehat{w}_{\alpha, L_{-1}}L_{-1}V_{\alpha} &\equiv W_0(L_{-1}V_{\alpha}) = w_{\alpha}(L_{-1}V_{\alpha}) + 2(W_{-1}V_{\alpha}), \\ \widehat{w}_{\alpha, W_{-1}}W_{-1}V_{\alpha} &\equiv W_0(W_{-1}V_{\alpha}) = w_{\alpha}(W_{-1}V_{\alpha}) + \frac{9D}{2}(L_{-1}V_{\alpha}) \end{aligned}$$

являются комбинациями двух разных потомков (определение D смотри в (9.24) и в сноске 3 ниже). Это усложняет написание для (8.7) общей итерационной формулы, подобной (8.5).

Если V_1 и/или V_2 не являются примарными полями, то в (8.6) должны быть удержаны дополнительные члены. Мы приводим лишь один пример полной формулы, где ни $V_{\tilde{\alpha}}$, ни V_1 , ни V_2 не предполагаются примарными:

$$\begin{aligned} \langle \underline{W_{-1}V_{\tilde{\alpha}}}|V_1(1)V_2(0)\rangle &= \langle \underline{W_0V_{\tilde{\alpha}}}|V_1(1)V_2(0)\rangle + 2\langle V_{\tilde{\alpha}}|(\underline{W_0V_1})(1)V_2(0)\rangle - \\ &- \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)\underline{(W_0V_2)(0)}\rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}}|(\underline{W_{-1}V_1})(1)V_2(0)\rangle + \\ &+ \langle V_{\tilde{\alpha}}|(\underline{W_1V_1})(1)V_2(0)\rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)\underline{(W_1V_2)(0)}\rangle. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Для трех примарных полей три первых члена в правой части объединяются в выражение $w_{\alpha} + 2w_1 - w_2$, а последние два члена исчезают, что воспроизводит (8.7) при $n = 1$.

8.2. Г-вершины.

8.2.1. *Генераторы Вирасоро, уравнение (6.3).* Для примарных полей V_3 и V_4 и для $s = 2$ можно получить из (6.3), что

$$\begin{aligned} \langle (\underline{L_{-n}V_{\tilde{\alpha}}})(0)V_3(1)V_4(\infty)\rangle &= (n-1)\Delta_3\langle V_{\tilde{\alpha}}(0)V_3(1)V_4(\infty)\rangle - \\ &- \langle V_{\tilde{\alpha}}(0)\underline{(L_{-1}V_3)(1)V_4(\infty)}\rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}}(0)V_3(1)\underline{L_{-n}V_4(\infty)}\rangle. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Положив $n > 0$ и исключив

$$\langle V_{\tilde{\alpha}}(0)\underline{(L_{-1}V_3)(1)V_4(\infty)}\rangle = -(\Delta_{\tilde{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4)\langle V_{\tilde{\alpha}}(0)V_3(1)V_4(\infty)\rangle \quad (8.12)$$

из конечной системы, имеем следующее равенство:

$$\langle \underline{(L_{-n} V_{\tilde{\alpha}})(0)} V_3(1) V_4(\infty) \rangle = (\Delta_{\tilde{\alpha}} + n\Delta_3 - \Delta_4) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle, \quad n > 0, \quad (8.13)$$

т. е. точно такое же соотношение, как (8.4). Следовательно, имеем также

$$\begin{aligned} \langle \underline{(L_{-Y} V_{\alpha})(0)} V_3(1) V_4(\infty) \rangle = \\ = \langle V_{\alpha}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \prod_i (\Delta_{\alpha} + k_i \Delta_3 - \Delta_4 + \sum_{j < i} k_j), \quad n > 0, \end{aligned} \quad (8.14)$$

и это подтверждает соотношение (6.4) для киральной алгебры Вирасоро. Более того, из (8.11) при $n < 0$ и (8.12) следует, что

$$\langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) \underline{L_{-n} V_4(\infty)} \rangle = (\Delta_4 + n\Delta_3 - \Delta_{\tilde{\alpha}}) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle, \quad n > 0.$$

Отметим, что знаки в аналогичных уравнениях (8.3) и (8.12) различны. Как и (8.3), уравнение (8.12) (но не (8.13)!) остается верным, когда V_1 является любым потомком, а не только примарным полем.

8.2.2. $W^{(3)}$ -генераторы, уравнение (6.3). Аналогично, для $W^{(3)}$ -генератора и примарных полей V_3 и V_4 , уравнение (6.3) при $s = 3$ означает, что

$$\begin{aligned} \langle \underline{(W_{-n} V_{\tilde{\alpha}})(0)} V_3(1) V_4(\infty) \rangle = & -\frac{(n-2)(n-1)}{2} w_3 \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\ & + (n-2) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) \underline{(W_{-1} V_3)(1)} V_4(\infty) \rangle - \\ & - \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) \underline{(W_{-2} V_3)(1)} V_4(\infty) \rangle - \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) \underline{(W_n V_4)(\infty)} \rangle. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Исключая $\langle W_{-2} V_3 \rangle$ из этой системы, взятой при $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) \underline{(W_{-2} V_3)(1)} V_4(\infty) \rangle = & -(\hat{w}_{\tilde{\alpha}} + w_3 + w_4) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\ & - 2 \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) \underline{(W_{-1} V_3)(1)} V_4(\infty) \rangle, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \langle \underline{(W_{-n} V_{\tilde{\alpha}})(0)} V_3(1) V_4(\infty) \rangle = & \left(\hat{w}_{\tilde{\alpha}} - \frac{n(n-3)}{2} w_3 + w_4 \right) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\ & + n \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) \underline{(W_{-1} V_3)(1)} V_4(\infty) \rangle, \quad n > 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Правую часть последнего равенства можно выразить через $W_{-1} V_4$ вместо $W_{-1} V_3$:

$$\begin{aligned} \langle \underline{(W_{-n} V_{\tilde{\alpha}})(0)} V_3(1) V_4(\infty) \rangle = & (n+1) \left(\hat{w}_{\tilde{\alpha}} - \frac{n}{2} w_3 + w_4 \right) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\ & - n \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) \underline{(W_{-1} V_4)(\infty)} \rangle, \quad n > 0; \end{aligned} \quad (8.17)$$

теперь мы использовали равенство

$$\begin{aligned} \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) \underline{(W_{-1} V_3)(1)} V_4(\infty) \rangle = & (\hat{w}_{\tilde{\alpha}} - 2w_3 + w_4) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\ & - \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) \underline{(W_{-1} V_4)(\infty)} \rangle. \end{aligned}$$

Сравнение с (8.7) и (8.8) показывает, что нет ясной замены соотношения (6.4), которое имеет простой вид только для потомков Вирасоро. Отметим также, что если использовать (8.15), чтобы выразить $\langle W_{-n}V_4 \rangle$ при $n > 0$, то можно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \langle V_{\check{\alpha}}(0)V_3(1)\underline{(W_{-n}V_4)(\infty)} \rangle &= \left(w_4 - \frac{n(n+3)}{2}w_3 + \widehat{w}_{\check{\alpha}} \right) \langle V_{\check{\alpha}}(0)V_3(1)V_4(\infty) \rangle - \\ &\quad - n \langle V_{\check{\alpha}}(0)\underline{(W_{-1}V_3)(1)}V_4(\infty) \rangle, \quad n > 0, \end{aligned}$$

которое очень похоже на (8.7).

Аналог равенства (8.10) для трех любых (не обязательно примарных) операторов имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \underline{(W_{-1}V_{\check{\alpha}})(0)}V_3(1)V_4(0) \rangle &= \langle \underline{(W_0V_{\check{\alpha}})(0)}V_3(1)V_4(0) \rangle + \langle V_{\check{\alpha}}(0)\underline{(W_0V_3)(1)}V_4(0) \rangle + \\ &\quad + \langle V_{\check{\alpha}}(0)V_3(1)\underline{(W_0V_4)(0)} \rangle + \langle V_{\check{\alpha}}(0)\underline{(W_{-1}V_3)(1)}V_4(0) \rangle - \\ &\quad - \langle V_{\check{\alpha}}(0)V_3(1)\underline{(W_1V_4)(0)} \rangle. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Для трех примарных полей первые три члена комбинируются в $w_{\alpha} + w_3 + w_4$, а последний исчезает, что воспроизводит формулу (8.16) при $n = 1$. Отметим, что, в отличие от (8.10), во второй строке (8.18) нет члена $\langle V_{\check{\alpha}}(0)(W_1V_3)(1)V_4(0) \rangle$: это специфика нашего ограничения $n = 1$ в данном примере.

9. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЙ В СВОБОДНЫХ ПОЛЯХ

Теперь мы повторим несколько абстрактные вычисления предыдущего раздела в модели свободных полей, где все операторы могут быть явно определены, а их корреляторы явно вычислены. Это поможет нам проиллюстрировать формулы, а также проверить их правильность. Кроме того, мы ограничиваемся обсуждением конкретных корреляторов с W -оператором, которые были найдены выше. Поскольку мы не идем дальше алгебры $W^{(3)}$, нам надо будет рассматривать, самое большее, два свободных поля. Наше последнее ограничение относится к центральному заряду: $c = 2$, т.е. $\vec{Q} = 0$. Формулы и так довольно длинные даже в этом случае, и дальнейшее перегружение сделает бессмысленной их иллюстративную функцию. Произвольное значение Q появляется только в наших иллюстрациях корреляторов потомков Вирасоро с одним свободным полем. Все обобщения совершенно непосредственны.

9.1. Правило декомпозиции (5.5). Начнем с уравнения (5.5). Исходное утверждение заключается в том, что для $\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4 = 0$ коррелятор

$$\begin{aligned} x^{-\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_2} \langle :e^{\vec{\alpha}_1\vec{\phi}(x)} : :e^{\vec{\alpha}_2\vec{\phi}(0)} : :e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : :e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle &\sim (1-x)^{\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_3} = \\ &= 1 - (\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_3)x + \frac{(\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_3)(\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_3 - 1)}{2}x^2 + \dots \end{aligned} \quad (9.1)$$

может быть также разложен с помощью формулы (5.1):

$$\langle :e^{\vec{\alpha}_1\vec{\phi}(x)+\vec{\alpha}_2\vec{\phi}(0)} : :e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : :e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle = \langle :e^{(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)\vec{\phi}(0)} : :e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : :e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle +$$

$$\begin{aligned}
& + x \langle : (\vec{\alpha}_1 \partial \vec{\phi}) e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} : : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle + \\
& + \frac{x^2}{2} \langle : ((\vec{\alpha}_1 \partial \vec{\phi})^2 + \vec{\alpha}_1 \partial^2 \vec{\phi}) e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} : : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle + \dots, \quad (9.2)
\end{aligned}$$

и далее выражен в базисе Вирасоро или базисе W -алгебры:

$$\begin{aligned}
& \langle : e^{\vec{\alpha}_1 \vec{\phi}(x) + \vec{\alpha}_2 \vec{\phi}(0)} : : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle = \\
& = \frac{C_{\alpha_1 \alpha_2}^\alpha}{\alpha_1 \alpha_2} \langle : e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} : : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle + \\
& + x \frac{C_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha, L-1}}{\alpha_1 \alpha_2} \langle (L_{-1} : e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} :) : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle + \\
& + C_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha, W-1} \langle (W_{-1} : e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} :) : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle + \\
& + x^2 \frac{C_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha, L-2}}{\alpha_1 \alpha_2} \langle (L_{-2} : e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} :) : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle + \\
& + C_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha, L_{-1}^2} \langle (L_{-1}^2 : e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} :) : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle + \\
& + C_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha, L-1 W-1} \langle (L_{-1} W_{-1} : e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} :) : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle + \\
& + C_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha, W-2} \langle (W_{-2} : e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} :) : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle + \\
& + C_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha, W_{-1}^2} \langle (W_{-1}^2 : e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}(0)} :) : e^{\vec{\alpha}_3 \vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4 \vec{\phi}(\infty)} : \rangle + \dots. \quad (9.3)
\end{aligned}$$

В этом разделе наша задача заключается в том, чтобы показать в деталях, как соотносятся между собой эти разложения. Это важно, поскольку свободные поля предоставляют редкий пример, когда не только второе разложение (9.3), но и первое разложение (9.1) известны, и можно увидеть, как сложная формула (9.3) позволяет воспроизвести простой ответ (9.1), порядок за порядком в разложении по x .

9.1.1. *Вклад на первом уровне в случае одного свободного поля с зарядом $s = 1$.* Когда мы имеем только одно поле ϕ , очень просто обращаться с членами первого уровня: только подчеркнутые члены дают вклад в (9.3), и, поскольку

$$(\alpha_1 \partial \phi) e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \phi(0)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\partial e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \phi})(0),$$

структурная константа в этом случае равна

$$C_{\alpha_1 \alpha_2}^{(\alpha, L-1)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \delta_{\alpha, \alpha_1 + \alpha_2}. \quad (9.4)$$

Здесь есть правило отбора, специфичное для модели свободного поля $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Теперь посчитаем тройную вершину $\gamma_{\alpha \alpha_3 \alpha_4}(L_{-1})$. Из общей формулы для тройного коррелятора примарных полей,

$$\langle V(z) V_3(z_3) V_4(z_4) \rangle \sim \frac{1}{(z - z_3)^{\Delta + \Delta_3 - \Delta_4} (z - z_4)^{\Delta + \Delta_4 - \Delta_3} z_{34}^{\Delta_3 + \Delta_4 - \Delta}},$$

взяв производную по z , получим

$$\begin{aligned}
\langle (\partial V)(z) V_3(z_3) V_4(z_4) \rangle &= -\langle V(z) V_3(z_3) V_4(z_4) \rangle \left(\frac{\Delta + \Delta_3 - \Delta_4}{z - z_3} + \frac{\Delta + \Delta_4 - \Delta_3}{z - z_4} \right) \Big|_{z_4 \rightarrow \infty} \rightarrow \\
&\rightarrow -\frac{\Delta + \Delta_3 - \Delta_4}{z - z_3} \langle V(z) V_3(z_3) V_4(z_4) \rangle \Big|_{z=0, z_3=1} \rightarrow (\Delta + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V(z) V_3(z_3) V_4(z_4) \rangle,
\end{aligned}$$

что прекрасно согласуется с (8.4),

$$\gamma_{\alpha\alpha_3\alpha_4}(L_{-1}) = \Delta + \Delta_3 - \Delta_4.$$

Следовательно, соответствие двух частей равенства (5.5) в этом частном случае подразумевает, что

$$-\alpha_1\alpha_3 = \sum_{\alpha} C_{\alpha_1\alpha_2}^{(\alpha, L_{-1})} \gamma_{\alpha\alpha_3\alpha_4}(L_{-1}) = \frac{\alpha_1(\Delta_{\alpha_1+\alpha_2} + \Delta_3 - \Delta_4)}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (9.5)$$

Если подставить $\Delta_{\alpha} = \alpha^2/2$, получим

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha_1+\alpha_2} + \Delta_3 - \Delta_4 &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2}{2} = \frac{(\alpha_3 + \alpha_4)^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2}{2} = \\ &= \alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4). \end{aligned} \quad (9.6)$$

В первом равенстве в (9.6) использовалось правило отбора для свободной теории: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Применяя это правило еще раз, можно получить (9.5), что является проверкой.

Это пример явного вычисления, проверяющий общую формулу для тройных вершин. Отметим, что при этой проверке были важны детали модели, особенно правила отбора (сохранение заряда). Это так, потому что мы явно вычислили все корреляторы, что возможно только в данной модели, со всеми ее специфическими свойствами. Соотношения (5.5) и (8.4), которые мы хотим проиллюстрировать, модельно независимы, следовательно, наше рассмотрение может лишь проверить их, но не доказать. Доказательство (вывод) было проведено в предыдущем разделе, оно, напротив, немного более абстрактно.

Теперь перейдем к обобщениям этого примера. Они могут происходить в трех направлениях: $Q \neq 0$, более высокий уровень потомков (размер диаграммы Юнга) и несколько свободных полей и, значит, расширенные киральные алгебры. Мы сделаем только один шаг в каждом направлении.

9.1.2. Вклад на первом уровне в случае одного свободного поля с зарядом $s \neq 1$. Это обобщение тривиально. Все формулы остаются такими же, как и в случае $s = 1$, кроме формулы для размерностей $\Delta_{\alpha} = ((\alpha - Q)^2 - Q^2)/2$ и правила отбора $\alpha + \alpha_3 + \alpha_4 = 2Q$. Отметим, что другое правило отбора, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, остается прежним. Вместо (9.6) можно получить

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha} + \Delta_3 - \Delta_4 &= \Delta_{2Q-\alpha_3-\alpha_4} + \Delta_3 - \Delta_4 = \\ &= \frac{(\alpha_3 + \alpha_4 - Q)^2 + (\alpha_3 - Q)^2 - (\alpha_4 - Q)^2 - Q^2}{2} = \\ &= \alpha_3(\alpha_3 + \alpha_4 - 2Q) = -\alpha_3 = -\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Подстановка (9.5) в (9.7) превращает последнее в тождество.

9.1.3. Вклад на втором уровне в случае одного свободного поля с зарядом $s = 1$. На этом уровне есть два независимых оператора: $:(\partial\phi)^2 e^{\alpha\phi}:$ и $:\partial^2\phi e^{\alpha\phi}:$. Мы хотим, однако, использовать другой базис для линейного разложения операторов на втором уровне, который образован $L_{-2}:e^{\alpha\phi}:$ и $L_{-1}^2:e^{\alpha\phi}:$. Чтобы использовать этот базис, надо найти, как оператор L_{-1}^2 действует на $:e^{\alpha\phi}:$. Это следует из операторного разложения

$$\begin{aligned} T(x)(L_{-1}:e^{\alpha\phi}:)(0) &= \frac{1}{2}:(\partial\phi)^2(x)::\alpha\partial\phi e^{\alpha\phi}(0): = \\ &= \frac{\alpha^2}{2x^3}:e^{\alpha\phi}(0): + \frac{\alpha^3 + 2\alpha}{2x^2}:\partial\phi e^{\alpha\phi}(0): + \frac{\alpha}{x}:(\partial^2\phi + \alpha(\partial\phi)^2)e^{\alpha\phi}(0): + \dots \end{aligned}$$

Собирая члены с разными степенями x , получим, что

$$\begin{aligned} L_1 L_{-1}:e^{\alpha\phi}: &= \frac{\alpha^2}{2}:e^{\alpha\phi}: = \Delta_\alpha:e^{\alpha\phi}:, \\ L_0 L_{-1}:e^{\alpha\phi}: &= \frac{\alpha^3 + 2\alpha}{2}:\partial\phi e^{\alpha\phi}(0): = (\Delta_\alpha + 1)L_{-1}:e^{\alpha\phi}:, \\ L_{-1}^2:e^{\alpha\phi}: &= :(\alpha\partial^2\phi + (\alpha\partial\phi)^2)e^{\alpha\phi}: = \partial^2:e^{\alpha\phi}:, \end{aligned}$$

т.е. $L_1 V_\alpha$ имеет размерность $\Delta_\alpha + 1$, и L_{-1}^2 действует на V_α как вторая производная. Оба вывода верны не только для примарных полей и не только для модели свободных полей. Мы также знаем, что согласно (2.4)

$$L_{-2}:e^{\alpha\phi}: = :\left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \alpha\partial^2\phi\right)e^{\alpha\phi}:.$$

Возвращаясь к (9.2), на втором уровне можем записать представление

$$\frac{1}{2}(\alpha_1^2(\partial\phi)^2 + \alpha_1\partial^2\phi) = C_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha, L_{-2}}\left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \alpha\partial^2\phi\right) + C_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha, L_{-1}^2}(\alpha\partial^2\phi + \alpha^2(\partial\phi)^2),$$

это означает, что

$$C_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha, L_{-2}} = \frac{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha)}{1 - 2\alpha^2}, \quad C_{\alpha_1, \alpha_2}^{\alpha, L_{-1}^2} = \frac{\alpha_1(2\alpha_1\alpha - 1)}{4\alpha^3 - 2\alpha}. \quad (9.8)$$

На следующем шаге понадобятся соответствующие тройные вершины γ :

$$\begin{aligned} \langle (L_{-2}:e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{\phi}(0)}:):e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)}::e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)}:\rangle &= \\ &= \left(\frac{\alpha_3^2}{2} - \alpha_3\alpha\right)\langle :e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{\phi}(0)}::e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)}::e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)}:\rangle, \\ \langle (L_{-1}^2:e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{\phi}(0)}:):e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)}::e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)}:\rangle &= \\ &= ((\alpha_3\alpha)^2 - \alpha_3\alpha)\langle :e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)\vec{\phi}(0)}::e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)}::e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)}:\rangle. \end{aligned}$$

Теперь у нас есть всё, чтобы проверить, используя (9.3), условие согласования между формулами (9.1) и (9.2) на втором уровне:

$$\frac{(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_3 - 1)}{2} = \frac{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha)}{1 - 2\alpha^2}\left(\frac{\alpha_3^2}{2} - \alpha_3\alpha\right) + \frac{\alpha_1(2\alpha_1\alpha - 1)}{4\alpha^3 - 2\alpha}((\alpha_3\alpha)^2 - \alpha_3\alpha),$$

что действительно верно, так как $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

9.1.4. Вклад на первом уровне в случае двух свободных полей с зарядом $c = 2$. В случае нескольких полей величина $(\vec{\alpha}_1 \partial \vec{\phi}) e^{(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2) \vec{\phi}}$ более не является производной от экспоненциального примарного поля. Уже на первом уровне нужно ее разложить в несколько операторов потомков. В случае двух полей, при $r = 2$, положим $\vec{\alpha} \vec{\phi}(z) = \alpha \phi_1(z) + \beta \phi_2(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} T(x) : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}(0)} : &= \frac{1}{2} : ((\partial \phi_1)^2(x) + (\partial \phi_2)^2(x)) : : e^{(\alpha \phi_1 + \beta \phi_2)(0)} : = \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2x^2} : e^{(\alpha \phi_1 + \beta \phi_2)(0)} : + \frac{1}{x} : (\alpha \partial \phi_1 + \beta \partial \phi_2) e^{(\alpha \phi_1 + \beta \phi_2)(0)} : + \\ &+ : \left(\frac{1}{2} (\partial \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial \phi_2)^2 + \alpha \partial^2 \phi_1 + \beta \partial^2 \phi_2 \right) e^{(\alpha \phi_1 + \beta \phi_2)(0)} : + O(x). \end{aligned} \quad (9.9)$$

В то же время по определению операторов Вирасоро, действующих на операторы в точке $z = 0$,

$$T(x) : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}(0)} : = \sum_k \frac{1}{x^{k+2}} L_k : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}(0)} :. \quad (9.10)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} L_n : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}} : &= 0, \quad n > 0, \\ L_0 : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}} : &= \Delta_{\alpha, \beta} : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}} : = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}} :, \\ L_{-1} : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}} : &= : (\alpha \partial \phi_1 + \beta \partial \phi_2) e^{(\alpha \phi_1 + \beta \phi_2)} :, \\ L_{-2} : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}} : &= : \left(\frac{1}{2} (\partial \phi_1)^2 + \frac{1}{2} (\partial \phi_2)^2 + \alpha \partial^2 \phi_1 + \beta \partial^2 \phi_2 \right) e^{(\alpha \phi_1 + \beta \phi_2)} :. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Однако уже на первом уровне не получается полный базис, достаточный для того, чтобы разложить произвольный оператор $: (A \partial \phi_1 + B \partial \phi_2) e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}} :$, только частное направление $B/A = \beta/\alpha$ в этом двумерном пространстве отвечает оператору, пропорциональному $L_{-1} : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}} :$. Второй вектор базиса, $W_{-1} : e^{\vec{\alpha} \vec{\phi}} :$, получается в результате действия $W^{(3)}$ -оператора. Поскольку мы рассматриваем случай только двух полей, других W -операторов нет, и мы просто обозначаем его $W(z)$. Для оператора $W^{(2)}(z)$ у нас уже есть специальное обозначение – тензор энергии-импульса есть не что иное, как $W^{(2)}(z) = T(z)$.

Оператор $W(z)$ кубичен по производным полей $\partial \phi(z)$, и имеется дополнительное требование обращения в нуль наиболее сингулярного члена в его операторном разложении с $T(z)$. Тензор энергии-импульса $T(z)$ инвариантен относительно $SO(2)$ -вращений поля $\vec{\phi}$, и эта свобода вращений должна быть фиксирована для однозначного определения оператора $W(z)$. Мы требуем, чтобы оператор $W(z)$ был симметричен относительно замены $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$ и, следовательно, антисимметричен относительно замены $\phi_1 \rightarrow -\phi_1$. Это означает, что $W = (\partial \phi_1)^3 + h \partial \phi_1 (\partial \phi_2)^2$ с единственным неопределенным параметром h . Операторное разложение имеет вид

$$T(z)W(0) = \frac{3+h}{z^4} \partial \phi_1(0) + \dots,$$

и дополнительно требуется, чтобы наиболее сингулярный член с z^{-4} отсутствовал, или, иными словами, чтобы $W(z)$ был примарным полем алгебры Вирасоро. Из этого следует, что $h = -3$,

$$W(z) = W^{(3)}(z) \equiv (\partial\phi_1)^3 - 3\partial\phi_1(\partial\phi_2)^2 = \partial\phi_1((\partial\phi_1)^2 - 3(\partial\phi_2)^2) \quad (9.12)$$

и

$$T(z)W(0) = \frac{3W(0)}{z^2} + \frac{\partial W(0)}{z} + \dots, \quad (9.13)$$

так что конформная размерность оператора $W(z)$ равна 3.

Аналог формулы (9.9) для W -оператора имеет вид

$$\begin{aligned} W(x):e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)}: &= \frac{\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)}{x^3}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)}: + \\ &+ \frac{1}{x^2}:(3(\alpha^2 - \beta^2)\partial\phi_1 - 6\alpha\beta\partial\phi_2)e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(0)}: + \\ &+ \frac{1}{x}:(3(\alpha(\partial\phi_1)^2 - 2\beta\partial\phi_1\partial\phi_2 - \alpha(\partial\phi_2)^2 + \\ &+ (\alpha^2 - \beta^2)\partial^2\phi_1 - 2\alpha\beta\partial^2\phi_2)e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}: + O(1). \end{aligned}$$

Компоненты (гармоники) W -оператора определяются полностью аналогично генераторам Вирасоро в (9.10):

$$W(x):e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)}: = \sum_k \frac{1}{x^{k+3}} W_k :e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)}:,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} W_n :e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: &= 0, \quad n > 0, \\ W_0 :e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: &= w_{\alpha,\beta} :e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) :e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:, \\ W_{-1} :e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: &= :3((\alpha^2 - \beta^2)\partial\phi_1 - 2\alpha\beta\partial\phi_2)e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}:, \\ W_{-2} :e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: &= :3(\alpha(\partial\phi_1)^2 - 2\beta\partial\phi_1\partial\phi_2 - \alpha(\partial\phi_2)^2 + \\ &+ (\alpha^2 - \beta^2)\partial^2\phi_1 - 2\alpha\beta\partial^2\phi_2)e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}:. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Комбинируя подходящие строки в (9.11) и (9.14), можно получить, что на первом уровне

$$\begin{aligned} :\partial\phi_1 e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}: &= \frac{1}{3(\alpha^2 - \beta^2)}(6\alpha L_{-1} + W_{-1}):e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}:, \\ :\partial\phi_2 e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}: &= \frac{1}{3\beta(\alpha^2 - \beta^2)}(3(\alpha^2 - \beta^2)L_{-1} - \alpha W_{-1}):e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}:, \end{aligned}$$

так что оператор, который появляется на первом уровне в (9.2), может быть представлен как

$$:(\vec{\alpha}_1\partial\vec{\phi})e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}: = \left(\frac{6\alpha\beta\alpha_1 + 3(\alpha^2 - \beta^2)\beta_1}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)}L_{-1} + \frac{\alpha_1\beta - \alpha\beta_1}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)}W_{-1} \right) :e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}:.$$

Таким образом, мы вычислили первые две структурные константы в (9.3), в добавление к тривиальной константе $C_{\alpha_1\alpha_2}^\alpha = 1$:

$$C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, L_{-1}} = \frac{6\alpha\beta\alpha_1 + 3(\alpha^2 - \beta^2)\beta_1}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)}, \quad C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, W_{-1}} = \frac{\alpha_1\beta - \alpha\beta_1}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)}. \quad (9.15)$$

Так как мы также знаем явные выражения для $L_{-1} : e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} :$ и $W_{-1} : e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}} :$, можно явно вычислить трехточечные функции:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(L_{-1}) &\equiv \langle (L_{-1} : e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} :) : e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle \stackrel{(9.11)}{=} \\ &\stackrel{(9.11)}{=} \langle : (\vec{\alpha} \partial \vec{\phi}) e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} : : e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle = \\ &= -(\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3) \langle : e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} : : e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle \end{aligned} \quad (9.16)$$

и

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(W_{-1}) &\equiv \langle (W_{-1} : e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} :) : e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle \stackrel{(9.14)}{=} \\ &\stackrel{(9.14)}{=} \langle : (3(\alpha^2 - \beta^2)\partial\phi_1 - 6\alpha\beta\partial\phi_2) e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} : : e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle = \\ &= -(3(\alpha^2 - \beta^2)\alpha_3 - 6\alpha\beta\beta_3) \langle : e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} : : e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Здесь мы учли тот факт, что спаривание с оператором в бесконечности приводит к дополнительному фактору $(0 - \infty)$ в знаменателе, и, следовательно, им можно пренебречь. Спаривание с оператором в точке $z_3 = 1$ дает фактор $(z - z_3)^{-1} = -1$, ответственный за знак минус в формулах (9.16), (9.17). Таким образом,

$$\begin{aligned} \gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(L_{-1}) &= -(\alpha\alpha_3 + \beta\beta_3), \\ \gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(W_{-1}) &= 3(-(\alpha^2 - \beta^2)\alpha_3 + 2\alpha\beta\beta_3). \end{aligned} \quad (9.18)$$

Эти формулы находятся в согласии с (8.13) и (8.16) соответственно, что может служить проверкой общих выражений. Действительно, из (8.13) следует

$$\gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(L_{-1}) = \Delta_{\vec{\alpha}} + \Delta_{\vec{\alpha}_3} - \Delta_{\vec{\alpha}_4} = \frac{(\vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4)^2 + \vec{\alpha}_3^2 - \vec{\alpha}_4^2}{2} = \vec{\alpha}_3(\vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4) = -\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3, \quad (9.19)$$

где было дважды использовано правило отбора $\vec{\alpha} + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4 = \vec{0}$. Подобным образом

$$\begin{aligned} \gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(W_{-1}) &\stackrel{(9.18)}{=} 3(-(\alpha^2 - \beta^2)\alpha_3 + 2\alpha\beta\beta_3) \stackrel{(8.13)}{=} \\ &\stackrel{(8.13)}{=} w_{\vec{\alpha}} + w_{\vec{\alpha}_3} + w_{\vec{\alpha}_4} + 3((\alpha_3^2 - \beta_3^2)\alpha - 2\alpha_3\beta_3\beta). \end{aligned}$$

Последнее равенство на самом деле является тождеством при условии $\vec{\alpha} + \vec{\alpha}_3 + \vec{\alpha}_4 = 0$, а последняя скобка в правой части является прямым аналогом функции (9.17) для другого положения оператора W_{-1} , который также может быть явно вычислен в теории свободных полей:

$$\begin{aligned} &\langle : e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} : (W_{-1} : e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} :) : e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle \stackrel{(9.14)}{=} \\ &\stackrel{(9.14)}{=} \langle : e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} : : (3(\alpha_3^2 - \beta_3^2)\partial\phi_1 - 6\alpha_3\beta_3\partial\phi_2) e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle = \\ &= (3(\alpha_3^2 - \beta_3^2)\alpha - 6\alpha_3\beta_3\beta) \langle : e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)} : : e^{\vec{\alpha}_3\vec{\phi}(1)} : : e^{\vec{\alpha}_4\vec{\phi}(\infty)} : \rangle. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Как и в (9.17), вклад дает только спаривание между операторами в точках $z = 0$ и $z_3 = 1$. На этот раз производная берется по z_3 , следовательно, нет общего знака минус.

Наконец, можно скомбинировать (9.15) и (9.18) и получить

$$C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, L^{-1}} \gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(L_{-1}) + C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, W^{-1}} \gamma_{\vec{\alpha}\vec{\alpha}_3\vec{\alpha}_4}(W_{-1}) = -(\alpha\alpha_3 + \beta\beta_3) \frac{6\alpha\beta\alpha_1 + 3(\alpha^2 - \beta^2)\beta_1}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)} + \\ + 3(-(\alpha^2 - \beta^2)\alpha_3 + 2\alpha\beta\beta_3) \frac{\alpha_1\beta - \alpha\beta_1}{3\beta(3\alpha^2 - \beta^2)} = -\alpha_1\alpha_3 - \beta_1\beta_3 = -\vec{\alpha}_1\vec{\alpha}_3$$

тождественно по α и β и в согласии с (9.1).

9.1.5. *Переход к $c \neq 2$.* Мы не повторяем вычисления полностью в этом случае, поскольку это не дает ничего нового. Важными являются деформации операторов:

$$T = \frac{(\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2}{2} + Q\partial^2\phi_2, \\ W = \partial\phi_1((\partial\phi_1)^2 - 3(\partial\phi_2)^2) - \frac{3Q}{2}(\partial\phi_1\partial^2\phi_2 + 3\partial\phi_2\partial^2\phi_1) - \frac{3Q^2}{2}\partial^3\phi_2.$$

Центральный заряд равен $c = 2(1 - 6Q^2)$, и операторное разложение (9.13) не меняется. Далее,

$$T(x):e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)}: = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2Q\beta}{2x^2}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}(0)}: + \frac{1}{x}:(\partial e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}})(0): + \\ + \sum_{k \geq 0} x^k:\left(\frac{\partial^k T}{k!} + \frac{\vec{\alpha}\partial^{k+2}\vec{\phi}}{(k+1)!}\right)e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}(z_2):,$$

так что

$$L_n:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = 0, \quad n > 0, \\ L_0:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = \Delta_{\alpha,\beta}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2Q\beta}{2}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = \frac{\alpha^2 + \tilde{\beta}^2 - Q^2}{2}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:, \\ L_{-1}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = :(\alpha\partial\phi_1 + \beta\partial\phi_2)e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}:, \\ L_{-2}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = : \left(\frac{1}{2}(\partial\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial\phi_2)^2 + \alpha\partial^2\phi_1 + (\beta + Q)\partial^2\phi_2 \right) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}:, \\ L_{-1}^2:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = (\alpha^2(\partial\phi_1)^2 + 2\alpha\beta\partial\phi_1\partial\phi_2 + \beta^2(\partial\phi_2)^2 + \alpha\partial^2\phi_1 + \beta\partial^2\phi_2)e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}, \\ L_{-3}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = : \left(\partial\phi_1\partial^2\phi_1 + \partial\phi_2\partial^2\phi_2 + \frac{\alpha}{2}\partial^3\phi_1 + \left(\frac{\beta}{2} + Q\right)\partial^3\phi_2 \right) e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}:.. \quad (9.21)$$

Аналогично имеем

$$W_n:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = 0, \quad n > 0, \\ W_0:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = w_{\alpha,\beta}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 + 6Q\beta - 3Q^2):e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = \alpha(\alpha^2 - 3\tilde{\beta}^2):e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:, \\ W_{-1}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: = :3\left(\left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{1}{2}Q\beta\right)\partial\phi_1 - \frac{1}{2}\alpha(4\beta - 3Q)\partial\phi_2\right)e^{(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)}:, \quad (9.22)$$

$$W_{-2}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:=3(\alpha(\partial\phi_1)^2-2\beta\partial\phi_1\partial\phi_2-\alpha(\partial\phi_2)^2+ \\ +(\alpha^2-\beta^2-Q\beta)\partial^2\phi_1-\alpha(2\beta-Q)\partial^2\phi_2)e^{(\alpha\phi_1+\beta\phi_2)}:.$$

Часто удобно использовать сдвинутые переменные $\tilde{\beta} = \beta - Q$, где оба собственных значения простые:

$$\Delta = \frac{\alpha^2 + \tilde{\beta}^2 - Q^2}{2}, \quad w = \alpha(\alpha^2 - 3\tilde{\beta}^2).$$

В этом случае правило отбора (закон сохранения) в n -точечном корреляторе экспонент имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i = (2-n)Q.$$

Повторное применение W -оператора дает

$$W_1 W_{-1}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:=9(\alpha^2+\beta^2-2Q\beta)\left(\alpha^2+\beta^2-2Q\beta+\frac{3Q^2}{4}\right):e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:= \\ =\frac{9D\Delta}{2}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:=\frac{9D}{2}L_0:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:.$$
 (9.23)

Здесь

$$D=4\left(\alpha^2+\beta^2-2Q\beta+\frac{3Q^2}{4}\right)=8\left(\Delta_{\alpha,\beta}+\frac{3Q^2}{8}\right)$$
 (9.24)

является специальным числом³⁾ в теории алгебры $W^{(3)}$. Далее,

$$W_0 W_{-1}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:=3\alpha(\alpha^2-3\beta^2+6Q\beta-3Q^2)\times \\ \times\left((\alpha^2-\beta^2+\frac{1}{2}Q\beta)\partial\phi_1-2\alpha\left(\beta-\frac{3Q}{4}\right)\partial\phi_2\right)+ \\ +18\left(\alpha^2+\beta^2-2Q\beta+\frac{3Q^2}{4}\right)(\alpha\partial\phi_1+\beta\partial\phi_2):e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:= \\ =\left(wW_{-1}+\frac{9D}{2}L_{-1}\right):e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:,$$
 (9.25)

где D – это то же число (9.24), которое появилось в (9.23). В действительности соотношения (9.23) и (9.25) остаются верными в общей теории с $W^{(3)}$ -симметрией:

$$W_0 W_{-1} \longrightarrow wW_{-1} + \frac{9D}{2}L_{-1}, \quad W_1 W_{-1} \longrightarrow \frac{9D}{2}L_0,$$
 (9.26)

³⁾Множитель 8 в определении D связан с нашим выбором нормировки для $\vec{\alpha}$. В альтернативной нормировке, принятой также в работе [21], с α и Q умноженными на $\sqrt{2}$, в то время как W и w одновременно делятся на $\sqrt{8}$, вместо (9.24) получится

$$D=\varkappa\left(\Delta-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{5}, \quad \varkappa=\left(1-\frac{15Q^2}{4}\right)^{-1}, \quad c=2(1-12Q^2).$$

В этом случае зависящий от $\varkappa$ множитель также включен в определение $W^{(3)}$ -оператора: $W \rightarrow \sqrt{\varkappa}W$, так что собственные значения двух операторов равны $\Delta = \alpha^2 + \tilde{\beta}^2 - Q^2$ и $w = \sqrt{\varkappa}\alpha(\alpha^2 - 3\tilde{\beta}^2)$. При таком выборе $D = \Delta$, когда $Q = 0$ и $c = 2$. Это также естественно с точки зрения соотношений АГТ – в этой нормировке Q совпадает с параметром $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ функций Некрасова, $Q = \epsilon$.

где стрелка означает, что соотношение верно, если операторы действуют на примарные состояния. Наконец,

$$\begin{aligned} L_{-1}W_{-1}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: &= 3\left(\alpha\left(\alpha^2-\beta^2+\frac{1}{2}Q\beta\right)(\partial\phi_1)^2 - \right. \\ &- \left(\alpha^2+\beta^2\right)\beta - \frac{Q}{2}(3\alpha^2+\beta^2)\Big)\partial\phi_1\partial\phi_2 - \\ &- \frac{1}{2}\alpha\beta(4\beta-3Q)(\partial\phi_2)^2 + (\alpha^2-\beta^2+\frac{1}{2}Q\beta)\partial^2\phi_1 - \\ &- \frac{1}{2}\alpha(4\beta-3Q)\partial^2\phi_2\Big):e^{(\alpha\phi_1+\beta\phi_2)}: = \partial(W_{-1}:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{9}W_{-1}^2:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}: &= \left(\alpha^2-\beta^2+\frac{1}{2}Q\beta\right)\left(\alpha^2-\beta^2+1+\frac{1}{2}Q\beta\right)(\partial\phi_1)^2 - \\ &- \left(4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2-1)+Q\alpha(-3\alpha^2+5\beta^2+3)-\frac{3}{2}Q^2\alpha\beta\right)\partial\phi_1\partial\phi_2 + \\ &+ \left(4\alpha^2\beta^2-\alpha^2+\beta^2-Q\beta\left(6\alpha^2+\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{4}Q^2\alpha^2\right)(\partial\phi_2)^2 + \\ &+ \left(2\alpha(\alpha^2+\beta^2)-Q\alpha\beta-\frac{3}{4}Q^2\alpha\right)\partial^2\phi_1 + \\ &+ \left(2\beta(\alpha^2+\beta^2)-\frac{1}{2}Q(\alpha^2+7\beta^2)+\frac{5}{4}Q^2\beta\right)\partial^2\phi_2:e^{\vec{\alpha}\vec{\phi}}:. \end{aligned}$$

Вычисление корреляторов этих операторов с экспонентами проводится совершенно непосредственно – вместо производных полей просто подставляются соответствующие степени α -параметров из аналогичных экспонент. Итак, можно легко проверить, что соотношения из раздела 8 действительно воспроизводятся в теории свободных полей.

9.2. $\bar{\Gamma}$ -вершины, структурные константы и матрица Шаповалова. Перейдем теперь к обсуждению $\bar{\Gamma}$ -вершин. На этот раз проверка более сложная – в свободной теории непосредственно определены только структурные константы C . Они связаны с $\bar{\Gamma}$ -вершинами при помощи матрицы Шаповалова, которая, однако, гораздо очень хорошо изучена. Она зависит только от α -параметров промежуточных состояний. Более того, в свободной теории ее определитель (определитель Каца) замечательно факторизуется согласно известному правилу $\alpha = m\alpha_+ + n\alpha_-$, которое лежит в основе подхода к построению конформных блоков на основе экранирующих операторов. Как мы упоминали в разделе 1, этот предмет имеет прямое отношение к гипотезе АГТ [15], но мы оставляем его вне настоящего обсуждения.

Наши общие формулы для $\bar{\Gamma}$ -вершин связаны со структурными константами, вычисленными в п. 9.1, через матрицу Шаповалова H . Следовательно, для того чтобы сравнить соотношения (8.4), (8.5) и (8.7) с (9.4), (9.8) и (9.15), нужны также явные выражения для H . К счастью, это простая часть проблемы – матрицу Шаповалова довольно легко вычислять, зная коммутационные соотношения в киральной алгебре.

9.2.1. *Одно поле, первый уровень.* Это очень простой случай. Матрица имеет размер 1×1 , и ее единственный элемент равен

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}V_\alpha | L_{-1}V_\alpha \rangle &\stackrel{(6.1)}{=} \langle V_\alpha | L_1 L_{-1}V_\alpha \rangle \stackrel{(2.5)}{=} \langle V_\alpha | (L_{-1}L_1 + 2L_0)V_\alpha \rangle \stackrel{(9.11)}{=} \\ &\stackrel{(9.11)}{=} 2\Delta_\alpha \langle V_\alpha | V_\alpha \rangle = 2\Delta_\alpha H_{\alpha\alpha} = 2\Delta_\alpha. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Здесь и в последующем мы полагаем $H_{\alpha\alpha} \equiv \langle V_\alpha | V_\alpha \rangle = 1$, поскольку это общий множитель во всех формулах. Теперь с учетом базового соотношения (5.8) и явно вычисленных структурных констант (9.4) в модели свободных полей получим, что в этой модели

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}) &= C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, L_{-1}} \langle L_{-1}V_\alpha | L_{-1}V_\alpha \rangle \stackrel{(9.4), (9.27)}{=} \\ &\stackrel{(9.4), (9.27)}{=} \frac{\alpha_1}{\alpha} \delta_{\alpha, \alpha_1 + \alpha_2} \cdot \frac{2\alpha(\alpha - 2Q)}{2} = \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Q) \end{aligned}$$

в полном согласии с соотношением (8.4), которое предсказывает в этом случае

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}) &= \Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2 \Big|_{\alpha=\alpha_1+\alpha_2} = \\ &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1^2 - 2Q\alpha_1 - (\alpha_2^2 - 2Q\alpha_2)}{2} = \\ &= \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Q). \end{aligned} \quad (9.28)$$

9.2.2. *Проверка соотношения (8.3).* Можно также проверить в свободных полях важное соотношение (8.3). Возьмем $V_1 = :e^{\alpha_1\phi}:$ и $V_2 = :e^{\alpha_2\phi}:$. Тогда $L_{-1}V_1 = : \alpha_1 \partial \phi e^{\alpha_1\phi} : = \partial V_1$, и операторное разложение (5.1) в этом случае имеет простой вид:

$$\begin{aligned} : \alpha_1 \partial \phi e^{\alpha_1\phi}(z) : : e^{\alpha_2\phi(0)} : &= z^{\alpha_1\alpha_2-1} (\alpha_1\alpha_2 : e^{(\alpha_1+\alpha_2)\phi(0)} : + \\ &+ z : \alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2) \partial \phi e^{(\alpha_1+\alpha_2)\phi(0)} : + \dots). \end{aligned} \quad (9.29)$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части (9.29) изначально было равно $\alpha_1\alpha_2 : e^{(\alpha_1\phi(z) + \alpha_2\phi(0))} :$, и при его разложении по степеням z все члены ряда отличны от нуля, а член порядка z также приобретает поправку. Положив также $V_\alpha = :e^{\alpha\phi}:$ при $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, так что $L_{-1}V_\alpha = \alpha : \partial \phi e^{\alpha\phi} :$, мы получаем

$$(L_{-1}V_1)(z)V_2(0) = z^{\alpha_1\alpha_2-1} \left(\alpha_1\alpha_2 V_\alpha(0) + z \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} L_{-1}V_\alpha(0) + \dots \right)$$

и

$$\langle V_{\bar{\alpha}} | (L_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle = \alpha_1\alpha_2 \langle V_{\bar{\alpha}} | V_\alpha(0) \rangle + \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} \langle V_{\bar{\alpha}} | L_{-1}V_\alpha(0) \rangle + \dots$$

Поскольку операторы в правой части берутся в точке 0, матричные элементы – это матричные элементы матрицы Шаповалова, которые мы уже знаем до первого уровня. Подставляя V_α и $L_{-1}V_\alpha$ в $V_{\bar{\alpha}}$, мы получаем

$$\langle V_{\bar{\alpha}} | (L_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle = \alpha_1\alpha_2 \delta_{\alpha, \alpha_1 + \alpha_2},$$

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}V_\alpha | (L_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle &= \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} \langle L_{-1}V_\alpha | L_{-1}V_{\alpha_1 + \alpha_2} \rangle \stackrel{(9.27)}{=} \\ &\stackrel{(9.27)}{=} \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} 2\Delta_\alpha \delta_{\alpha, \alpha_1 + \alpha_2}, \end{aligned}$$

причем коэффициенты в правых частях этих двух соотношений равны

$$\alpha_1\alpha_2 = \Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1^2 - 2Q\alpha_1 + \alpha_2^2 - 2Q\alpha_2}{2} \quad (9.30)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1(1 + \alpha_1\alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} ((\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2)) &= (1 + \alpha_1\alpha_2)\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Q) \stackrel{(9.30), (9.28)}{=} \\ &\stackrel{(9.30), (9.28)}{=} (\Delta_\alpha + 1 - \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) = \\ &= (\Delta_{\alpha, L_{-1}} - \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned} \quad (9.31)$$

соответственно, в полном согласии с (8.3). Произведение двух членов во второй строчке (9.31) возникает из-за того, что (8.3) является рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}V_\alpha | (L_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle &\stackrel{(8.3)}{=} (\Delta_{\alpha, L_{-1}} - \Delta_1 - \Delta_2) \langle L_{-1}V_\alpha | V_1(1)V_2(0) \rangle \stackrel{(8.4)}{=} \\ &\stackrel{(8.4)}{=} (\Delta_{\alpha, L_{-1}} - \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_\alpha | V_1(1)V_2(0) \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что все знаки в этих формулах абсолютно критичны для того, чтобы можно было провести вычисление в свободных полях – это иллюстрация того, как свободные поля используются при проверке (8.4) и (8.3).

9.2.3. *Одно поле, второй уровень.* На втором уровне матрица Шаповалова имеет размер 2×2 , ее элементы суть

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}^2 V_\alpha | L_{-1}^2 V_\alpha \rangle &\stackrel{(6.1)}{=} \langle V_\alpha | L_1^2 L_{-1}^2 V_\alpha \rangle \stackrel{(2.5)}{=} \langle V_\alpha | (L_1 L_{-1} L_1 L_{-1} + 2L_1 L_0 L_{-1}) V_\alpha \rangle = \\ &= \langle V_\alpha | (2L_1 L_{-1} \Delta_\alpha + 2L_1 L_{-1} + 2L_1 L_{-1} \Delta_\alpha) V_\alpha \rangle \stackrel{(9.11)}{=} \\ &\stackrel{(9.11)}{=} 8\Delta_\alpha^2 + 4\Delta_\alpha \langle V_\alpha | V_\alpha \rangle = 8\Delta_\alpha^2 + 4\Delta_\alpha, \quad (9.32) \\ \langle L_{-2} V_\alpha | L_{-2} V_\alpha \rangle &\stackrel{(6.1)}{=} \langle V_\alpha | L_2 L_{-2} V_\alpha \rangle \stackrel{(2.5)}{=} \left\langle V_\alpha \left| \left(L_{-2} L_2 + \frac{1}{2} - 6Q^2 + 4L_0 \right) V_\alpha \right. \right\rangle \stackrel{(9.11)}{=} \\ &\stackrel{(9.11)}{=} \frac{1}{2} - 6Q^2 + 4\Delta_\alpha, \\ \langle L_{-1}^2 V_\alpha | L_{-2} V_\alpha \rangle &= \langle L_{-2} V_\alpha | L_{-1}^2 V_\alpha \rangle \stackrel{(6.1)}{=} \langle V_\alpha | L_1 L_1 L_{-2} V_\alpha \rangle \stackrel{(2.5)}{=} 3 \langle V_\alpha | L_1 L_{-1} V_\alpha \rangle = 6\Delta_\alpha. \end{aligned}$$

Используя это выражение и формулы для структурных констант, обобщающие (9.8) на случай $c \neq 1$, можно вычислить $\bar{\Gamma}$ -вершины:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-2}) &= C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, L_{-2}} \langle L_{-2} V_\alpha | L_{-2} V_\alpha \rangle + C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, L_{-1}^2} \langle L_{-2} V_\alpha | L_{-1}^2 V_\alpha \rangle = \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{2\alpha(\alpha + Q) - 1} \left(\frac{1}{2} + 4\alpha(\alpha - 2Q) - 6Q^2 \right) + \\ &\quad + \frac{\alpha_1(2\alpha_1(\alpha + Q) - 1)}{2\alpha(2\alpha(\alpha + Q) - 1)} \cdot 6 \frac{\alpha(\alpha - 2Q)}{2} = \frac{\alpha_1}{2} (3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6Q) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}^2) &= C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha,L_{-2}} \langle L_{-1}^2 V_\alpha | L_{-2} V_\alpha \rangle + C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha,L_{-1}^2} \langle L_{-1}^2 V_\alpha | L_{-1}^2 V_\alpha \rangle = \\
 &= \frac{\alpha_1\alpha_2}{2\alpha(\alpha+Q)-1} \cdot 6 \frac{\alpha(\alpha-2Q)}{2} + \\
 &\quad + \frac{\alpha_1(2\alpha_1(\alpha+Q)-1)}{2\alpha(2\alpha(\alpha+Q)-1)} \cdot 4 \frac{\alpha(\alpha-2Q)}{2} \left(2 \frac{\alpha(\alpha-2Q)}{2} + 1 \right) = \\
 &= \alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1Q + 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Q),
 \end{aligned}$$

что согласуется с соотношением (8.4), которое дает в этом случае

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-2}) &= \Delta_\alpha + 2\Delta_1 - \Delta_2 \Big|_{\alpha=\alpha_1+\alpha_2} = \\
 &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2) + 2\alpha_1^2 - 4Q\alpha_1 - (\alpha_2^2 - 2Q\alpha_2)}{2} = \\
 &= \frac{\alpha_1}{2}(3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6Q)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}^2) &= (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2 + 1) \Big|_{\alpha=\alpha_1+\alpha_2} = \\
 &= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1^2 - 2Q\alpha_1 - (\alpha_2^2 - 2Q\alpha_2)}{2} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2Q(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_1^2 - 2Q\alpha_1 - (\alpha_2^2 - 2Q\alpha_2)}{2} + 1 \right) = \\
 &= \alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1Q + 1)(\alpha_1 + \alpha_2 - 2Q).
 \end{aligned}$$

9.2.4. Два поля, первый уровень. В этом случае матрица Шаповалова также имеет размер 2×2 , но, конечно, существенно отличается от (9.32). Более того, в этом случае для ее вычисления понадобятся коммутационные соотношения для W -алгебры. Результат имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 2\Delta & 3w \\ 3w & \frac{9D\Delta}{2} \end{pmatrix}.$$

Снова можно вычислять $\bar{\Gamma}$ -вершины, используя эту матрицу и обобщая формулы (9.15) на случай $c \neq 2$:

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}) &= C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha,L_{-1}} \langle L_{-1} V_\alpha | L_{-1} V_\alpha \rangle + C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha,W_{-1}} \langle L_{-1} V_\alpha | W_{-1} V_\alpha \rangle = \\
 &= \frac{-4\alpha_1\alpha\beta + 3\alpha_1\alpha Q - 2\beta_1\alpha^2 + 2\beta_1\beta^2 - \beta_1Q\beta}{-6\alpha^2\beta + 3\alpha^2Q + 2\beta^3 - Q\beta^2} \cdot 2 \frac{\alpha(\alpha-2Q)}{2} + \\
 &\quad + \frac{2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)}{3(-6\alpha^2\beta + 3\alpha^2Q + 2\beta^3 - Q\beta^2)} (3\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 + 6Q\beta - 3Q^2)) = \\
 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 - 2Q\beta - 2Q\beta_1 + 2Q\beta_2}{2},
 \end{aligned}$$

что согласуется с (8.4):

$$\bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(L_{-1}) \stackrel{(44)}{=} \Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2 \stackrel{\alpha=\alpha_1+\alpha_2}{=} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2 - 2Q\beta - 2Q\beta_1 + 2Q\beta_2}{2}.$$

В то же время вторая вершина позволяет вычислить коррелятор $\langle V_{\tilde{\alpha}}|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle$. Действительно, из матрицы Шаповалова и структурных констант мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha_1\alpha_2;\alpha}(W_{-1}) &= C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, L_{-1}} \langle W_{-1}V_\alpha | L_{-1}V_\alpha \rangle + C_{\alpha_1\alpha_2}^{\alpha, W_{-1}} \langle W_{-1}V_\alpha | W_{-1}V_\alpha \rangle = \\ &= \frac{-4\alpha_1\alpha\beta + 3\alpha_1\alpha Q - 2\beta_1\alpha^2 + 2\beta_1\beta^2 - \beta_1Q\beta}{-6\alpha^2\beta + 3\alpha^2Q + 2\beta^3 - Q\beta^2} \cdot 3\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2 + 6Q\beta - 3Q^2) + \\ &+ \frac{2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)}{3(-6\alpha^2\beta + 3\alpha^2Q + 2\beta^3 - Q\beta^2)} \frac{9\alpha(\alpha - 2Q)}{4} \left(8 \frac{\alpha(\alpha - 2Q)}{2} + 3Q^2 \right) = \\ &= \frac{6\alpha_1\alpha^2 - 12\beta_1\beta\alpha - 6\beta^2\alpha_1 - 18\alpha_1Q^2 + 15Q\alpha\beta_1 + 21Q\alpha_1\beta}{2} = \\ &= w + 2w_1 - w_2 + \frac{3}{2}\alpha\beta_1Q - 6\alpha_1\beta_1Q - 6\beta\beta_1\alpha_1 + \\ &+ 9\alpha_1\beta_1^2 + \frac{9}{2}\alpha_1\beta Q + 3\alpha\alpha_1^2 - 3\alpha_1^3 - 3\alpha\beta_1^2 = \\ &= w - w_1 - w_2 + (3(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\alpha - 6\alpha_1\beta_1\beta) + \frac{3}{2}Q(\alpha\beta_1 + 8\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta - 6\alpha_1Q). \end{aligned}$$

Теперь с помощью (8.7) и (8.9) получаем

$$\begin{aligned} \langle V_{\tilde{\alpha}}|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle &= 3 \left[\frac{\alpha\beta_1Q}{2} - 2\alpha_1\beta_1Q - 2\beta\beta_1\alpha_1 + 3\alpha_1\beta_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2}\alpha_1\beta Q + \alpha\alpha_1^2 - \alpha_1^3 - \alpha\beta_1^2 \right] \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)V_2(0)\rangle, \\ \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)(W_{-1}V_2)(0)\rangle &= 3 \left[(\alpha_1^2 - \beta_1^2)\alpha - 2\alpha_1\beta_1\beta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q}{2}(\alpha\beta_1 + 8\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_1\beta - 6\alpha_1Q) \right] \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)V_2(0)\rangle. \end{aligned}$$

Последнее выражение совпадает с Γ -вершиной $\langle V_{\tilde{\alpha}}(0)(W_{-1}V_1)(1)V_2(\infty)\rangle$ в (9.20) при $Q = 0$. Для специального состояния $V_1(1)$ (см. ниже формулу (10.37))

$$\begin{aligned} \langle V_{\tilde{\alpha}}|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle &= \frac{3w_1}{2\Delta_1}(\Delta - \Delta_1 - \Delta_2), \\ \langle V_{\tilde{\alpha}}|V_1(1)(W_{-1}V_2)(0)\rangle &= -\frac{3w_1}{2\Delta_1}(\Delta + \Delta_1 - \Delta_2). \end{aligned}$$

Первое выражение находится в полном согласии с приведенной далее формулой (10.30), в то время как второе совпадает с $\langle V_{\tilde{\alpha}}(0)(W_{-1}V_1)(1)V_2(\infty)\rangle$ (см. ниже формулу (10.34)).

9.2.5. *Два поля, второй уровень.* В этом случае матрица Шаповалова гораздо более сложная (см. таблицу).

$H_\alpha(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}')$	$L_{-2}V_\alpha$	$L_{-1}^2V_\alpha$	$L_{-1}W_{-1}V_\alpha$	$W_{-2}V_\alpha$	$W_{-1}^2V_\alpha$
$L_{-2}V_\alpha$	$4\Delta + 1 - 6Q^2$	6Δ	$9w$	$6w$	$\frac{45D\Delta}{2}$
$L_{-1}^2V_\alpha$	6Δ	$4\Delta(2\Delta + 1)$	$6w(2\Delta + 1)$	$12w$	$9(3D\Delta + 2w^2)$
$L_{-1}W_{-1}V_\alpha$	$9w$	$6w(2\Delta + 1)$	$\frac{9(D\Delta^2 + D\Delta + w^2)}{+D\Delta + w^2}$	$18D\Delta$	$\frac{27Dw}{2}(2\Delta + 3)$
$W_{-2}V_\alpha$	$6w$	$12w$	$18D\Delta$	$72\Delta\left(\Delta + 1 - \frac{3Q^2}{2}\right)$	$108w\left(3\Delta + 1 - \frac{3Q^2}{4}\right)$
$W_{-1}^2V_\alpha$	$\frac{45D\Delta}{2}$	$9(3D\Delta + 2w^2)$	$\frac{27Dw}{2}(2\Delta + 3)$	$108w\left(3\Delta + 1 - \frac{3Q^2}{4}\right)$	$\frac{81}{4}D^2\Delta(2\Delta + 1) + 162(D\Delta(\Delta + 1) + 4w^2)$

Однако, используя формулы для структурных констант из п. 9.1.5, можно повторить предыдущие вычисления и в этом случае. Мы не приводим здесь формулы из-за их сложности.

Заметим, что в α -параметризации определитель матрицы Шаповалова (определитель Каца), как обычно, факторизуется:

$$\begin{aligned} \det H = & \frac{3^8}{4} \{ (4\tilde{\beta}^2 - Q^2)((\tilde{\beta} + Q)^2 - 3\alpha^2)((\tilde{\beta} - Q)^2 - 3\alpha^2) \}^2 \times \\ & \times (2\tilde{\beta}^2 + 3Q\tilde{\beta} + Q^2 - 1)(2\tilde{\beta}^2 - 3Q\tilde{\beta} + Q^2 - 1) \times \\ & \times (4 + 12\tilde{\beta}Q^3 + 6\tilde{\beta}^3Q - 6\tilde{\beta}Q - 18\alpha^2\tilde{\beta}Q - 15\alpha^2Q^2 - \\ & - 12\alpha^2 - 4\tilde{\beta}^2 - 4Q^2 - 6\alpha^2\tilde{\beta}^2 + 13\tilde{\beta}^2Q^2 + \tilde{\beta}^4 + 4Q^4 + 9\alpha^4) \times \\ & \times (4 - 12\tilde{\beta}Q^3 - 6\tilde{\beta}^3Q + 6\tilde{\beta}Q + 18\alpha^2\tilde{\beta}Q - 15\alpha^2Q^2 - \\ & - 12\alpha^2 - 4\tilde{\beta}^2 - 4Q^2 - 6\alpha^2\tilde{\beta}^2 + 13\tilde{\beta}^2Q^2 + \tilde{\beta}^4 + 4Q^4 + 9\alpha^4). \end{aligned}$$

Дальнейшие детали см. в работе [21].

10. СВОДКА ФОРМУЛ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СООТНОШЕНИЯ АГТ

10.1. Набор рекуррентных соотношений. Мы приведем здесь ряд конкретных выражений из раздела 8, которые использовались в работах [19] и [21] для изучения соотношений АГТ [15] между конформными блоками и функциями Некрасова. Эти рекуррентные соотношения прямо применимы к примарным полям и должны итерироваться при применении к потомкам. Они различаются для $\bar{\Gamma}$ - и Γ -вершин. Поля V_1, V_2, V_3, V_4 ниже предполагаются примарными относительно алгебр Вирано и алгебры $W^{(3)}$ в соответствующих формулах.

В **вирасоровском секторе** корреляторы имеют вид

$$\langle L_{-n} V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle \stackrel{(8.4)}{=} (\Delta_{\tilde{\alpha}} + n\Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle, \quad n > 0, \quad (10.1)$$

$$\langle (L_{-n} V_{\tilde{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \stackrel{(8.13)}{=} (\Delta_{\tilde{\alpha}} + n\Delta_3 - \Delta_4) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle, \quad n > 0. \quad (10.2)$$

Также полезны соотношения

$$\langle V_{\tilde{\alpha}} | (L_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle \stackrel{(8.3)}{=} (\Delta_{\tilde{\alpha}} - \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle \quad (10.3)$$

и

$$\langle V_{\tilde{\alpha}}(0) (L_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle \stackrel{(8.12)}{=} -(\Delta_{\tilde{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle, \quad (10.4)$$

которые выполняются, когда V_1 и V_3 – произвольные операторы, не обязательно примарные.

В **секторе $W^{(3)}$ -операторов** корреляторы имеют вид

$$\begin{aligned} \langle W_{-n} V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &\stackrel{(8.7)}{=} \langle W_0 V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ \left(\frac{n(n+3)}{2} w_1 - w_2 \right) \langle V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ n \langle V_{\tilde{\alpha}} | (W_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle, \quad n > 0, \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} \langle (W_{-n} V_{\tilde{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &\stackrel{(8.16)}{=} \langle (W_0 V_{\tilde{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\ &+ \left(-\frac{n(n-3)}{2} w_3 + w_4 \right) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\ &+ n \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle, \quad n > 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Также полезны два частных примера, где не предполагается, что операторы примарны:

$$\begin{aligned} \langle W_{-1} V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle &\stackrel{(8.10)}{=} \langle W_0 V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + 2 \langle V_{\tilde{\alpha}} | (W_0 V_1)(1) V_2(0) \rangle - \\ &- \langle V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) (W_0 V_2)(0) \rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}} | (W_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\tilde{\alpha}} | (W_1 V_1)(1) V_2(0) \rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) (W_1 V_2)(0) \rangle, \end{aligned} \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned} \langle (W_{-1} V_{\tilde{\alpha}})(0) V_3(1) V_4(0) \rangle &\stackrel{(8.18)}{=} \langle W_0 V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) (W_0 V_3)(1) V_4(0) \rangle + \\ &+ \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) (W_0 V_4)(0) \rangle + \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle - \\ &- \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) (W_1 V_4)(0) \rangle, \end{aligned} \quad (10.8)$$

и два соотношения, аналогичные (10.3) и (10.4):

$$\begin{aligned} \langle V_{\tilde{\alpha}} | (W_{-2} V_1)(1) V_2(0) \rangle &= (\hat{w}_{\tilde{\alpha}} - w_1 - w_2) \langle V_{\tilde{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle - \\ &- 2 \langle V_{\tilde{\alpha}} | (W_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle, \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) (W_{-2} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle &= -(\hat{w}_{\tilde{\alpha}} + w_3 + w_4) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\ &- 2 \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle. \end{aligned} \quad (10.10)$$

В действительности для вычисления конформных блоков в работе [21] использовалась частная версия этих формул. С одной стороны, они нужны только на нижних уровнях, с другой – необходимо приспособить их к наложению *специального условия* на некоторые состояния (в качестве которых мы выбираем V_1 и V_3). Это условие нужно наложить на вершинные операторы, чтобы однозначно вычислять конформные блоки, не выделяя конкретную конформную модель. В противном случае в теории с киральной алгеброй $W^{(3)}$ наши рекуррентные соотношения позволяют только свести произвольные тройные вершины к двум наборам $\langle V_\alpha | (W_{-1}^k V_1)(1) V_2(0) \rangle$ и $\langle V_\alpha(0) (W_{-1}^k V_3)(1) V_4(\infty) \rangle$, которые являются произвольными параметрами, зависящими от конкретной модели. *Специальное условие* выражает $W_{-1} V_{1,3}$ через $L_{-1} V_{1,3}$ и позволяет избавиться от неопределенности для ограниченного набора конформных блоков – m -точечные конформные блоки с $m - 2$ *специальными* внешними операторами однозначно диктуются $W^{(3)}$ -симметрией. Конечно, в данной конформной модели все конформные блоки однозначно определены, но не все они диктуются симметрией и, следовательно, трудны для вычисления, конечно, если это не модель свободных полей. В заключение раздела мы приведем рекуррентные соотношения (10.1)–(10.10) к виду, необходимому для вычислений из работы [21].

10.2. $\bar{G}$ -вершины (билинейные формы).

10.2.1. *Шесть простых случаев.* Напрямую из (10.1) и (10.5) для трех примарных полей V_α , V_1 , W_2 можно получить следующие равенства:

$$\langle L_{-1} V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle = (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle \quad (10.11)$$

и

$$\begin{aligned} \langle W_{-1} V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle = (w_\alpha + 2w_1 - w_2) \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ + \langle \underline{V_{\bar{\alpha}}} | (W_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle, \end{aligned} \quad (10.12)$$

$$\langle L_{-2} V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle = (\Delta_\alpha + 2\Delta_1 - \Delta_2) \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle, \quad (10.13)$$

и

$$\begin{aligned} \langle W_{-2} V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle = (w_\alpha + 5w_1 - w_2) \langle V_{\bar{\alpha}} | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ + 2 \langle \underline{V_{\bar{\alpha}}} | (W_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (10.14)$$

В результате двух последовательных применений формулы (10.1) получим

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}^2 V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle &= ((\Delta_\alpha + 1) + \Delta_1 - \Delta_2) \langle L_{-1} V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle = \\ &= (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2 + 1) (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (10.15)$$

После двух итераций из (10.1) и (10.12) имеем

$$\begin{aligned} \langle L_{-1}W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle &= ((\Delta_\alpha + 1) + \Delta_1 - \Delta_2) \langle W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle = \\ &= (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2 + 1) \left((w_\alpha + 2w_1 - w_2) \langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle V_{\bar{\alpha}}|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle \right). \end{aligned} \quad (10.16)$$

В последнем равенстве мы использовали тот факт, что $\Delta(W_{-1}V_\alpha) = \Delta_\alpha + 1$. Подчеркнуты $\bar{\Gamma}$ -вершины, которые отличаются от $\langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle$.

10.2.2. *Трудный случай W_{-1}^2 .* Для трех примарных полей V_α , V_1 , W_2 и для $V_{\bar{\alpha}} = W_{-1}V_\alpha$ из (10.7) немедленно получаем

$$\begin{aligned} \langle W_{-1}^2V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle &= \langle W_0W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle + 2\langle W_{-1}V_\alpha|(W_0V_1)(1)V_2(0) \rangle - \\ &\quad - \langle W_{-1}V_\alpha|V_1(1)(W_0V_2)(0) \rangle + \langle W_{-1}V_\alpha|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle + \\ &\quad + \langle W_{-1}V_\alpha|(W_1V_1)(1)V_2(0) \rangle + \langle W_{-1}V_\alpha|V_1(1)(W_1V_2)(0) \rangle = \\ &= \langle W_0W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle + (2w_1 - w_2) \langle W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle + \\ &\quad + \langle W_{-1}V_\alpha|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (10.17)$$

С первым слагаемым в правой части этого равенства можно оперировать с помощью (9.26), тогда как соотношение (10.12) применимо напрямую к второму слагаемому. К последнему слагаемому мы применим формулу (10.7), но с непримарным полем $V_1 \rightarrow W_{-1}V_1$ и примарным полем $V_{\bar{\alpha}} = V_\alpha$:

$$\begin{aligned} \langle W_{-1}V_\alpha|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle &= \\ &= \langle W_0V_\alpha|W_{-1}V_1(1)V_2(0) \rangle + 2\langle V_\alpha|(W_0W_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle - \\ &\quad - \langle V_\alpha|W_{-1}V_1(1)(W_0V_2)(0) \rangle + \langle V_\alpha|(W_{-1}^2V_1)(1)V_2(0) \rangle + \\ &\quad + \langle V_\alpha|(W_1W_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle + \langle V_\alpha|W_{-1}V_1(1)(W_1V_2)(0) \rangle = \\ &= (w_\alpha - w_2) \langle V_\alpha|W_{-1}V_1(1)V_2(0) \rangle + 2\langle V_\alpha|(W_0W_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle + \\ &\quad + \langle V_\alpha|(W_{-1}^2V_1)(1)V_2(0) \rangle + \langle V_\alpha|(W_1W_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (10.18)$$

На следующем шаге подставим W_0W_{-1} и W_1W_{-1} из (9.26). Далее, подставляя (10.18) в (10.17), получаем:

$$\begin{aligned} \langle W_{-1}^2V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle &= \frac{9D_\alpha}{2} \langle L_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle + \\ &\quad + (w_\alpha + 2w_1 - w_2) \langle W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle + (w_\alpha + 2w_1 - w_2) \langle V_\alpha|W_{-1}V_1(1)V_2(0) \rangle + \\ &\quad + 9D_1 \langle V_\alpha|(L_{-1}V_1)(1)V_2(0) \rangle + \langle V_\alpha|(W_{-1}^2V_1)(1)V_2(0) \rangle + \frac{9D_1\Delta_1}{2} \langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle. \end{aligned}$$

Остается подставить сюда соотношения (10.12), (10.11) и (10.3) и получить

$$\begin{aligned} \langle W_{-1}^2 V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle &= (w_\alpha + 2w_1 - w_2) \langle (w_\alpha + 2w_1 - w_2) V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ 2 \langle V_\alpha | (W_{-1} V_1)(1) V_2(0) \rangle + \frac{9D_\alpha}{2} (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ 9D_1 (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle + \frac{9D_1 \Delta_1}{2} \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle + \\ &+ \langle V_\alpha | (W_{-1}^2 V_1)(1) V_2(0) \rangle. \end{aligned} \quad (10.19)$$

10.3. Г-вершины (линейные формы или корреляторы).

10.3.1. *Шесть простых случаев.* Непосредственно из (10.2) и (10.6) для трех примарных полей V_α , V_1 , W_2 получаем соотношения

$$\langle (L_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle = (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \quad (10.20)$$

и

$$\begin{aligned} \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= (w_\alpha + w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\ &+ \langle V_\alpha(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle, \end{aligned} \quad (10.21)$$

$$\langle (L_{-2} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle = (\Delta_\alpha + 2\Delta_3 - \Delta_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle \quad (10.22)$$

и

$$\begin{aligned} \langle (W_{-2} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= (w_\alpha + w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\ &+ 2 \langle V_\alpha(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Дважды итерируя (10.2), имеем

$$\begin{aligned} \langle (L_{-1}^2 V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= ((\Delta_\alpha + 1) + \Delta_3 - \Delta_4) \langle L_{-1} V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle = \\ &= (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4 + 1) (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle. \end{aligned}$$

Дважды итерируя (10.2) и (10.21), получаем

$$\begin{aligned} \langle (L_{-1} W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle &= ((\Delta_\alpha + 1) + \Delta_3 - \Delta_4) \langle W_{-1} V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle = \\ &= (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4 + 1) ((w_\alpha + w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\ &+ \langle V_\alpha(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle). \end{aligned} \quad (10.24)$$

Снова в последнем уравнении мы использовали равенство $\Delta(W_{-1} V_\alpha) = \Delta_\alpha + 1$. Подчеркнуты Г-вершины, которые отличаются от $\langle V_\alpha(0) V_1(1) V_2(0) \rangle$.

10.3.2. *Трудный случай* W_{-1}^2 . Для трех примарных полей V_α , V_1 , W_2 и для $V_{\tilde{\alpha}} = W_{-1}V_\alpha$ из (10.8) немедленно следует, что

$$\begin{aligned}
 \langle (W_{-1}^2 V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle &= \\
 &= \langle (W_0 W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) (W_0 V_3)(1) V_4(0) \rangle + \\
 &\quad + \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) (W_0 V_4)(0) \rangle + \\
 &\quad + \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle - \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) (W_1 V_4)(0) \rangle = \\
 &= \langle (W_0 W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + (w_3 + w_4) \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \\
 &\quad + \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle. \tag{10.25}
 \end{aligned}$$

С первым слагаемым в правой части можно оперировать при помощи (9.26), в то время как (10.21) прямо применимо ко второму слагаемому. Чтобы преобразовать последний член, нужно применить снова (10.8), но с непримарным полем $V_1 \rightarrow W_{-1}V_1$ и примарным полем $V_{\tilde{\alpha}} = V_\alpha$:

$$\begin{aligned}
 \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle &= \\
 &= \langle W_0 V_\alpha(0) W_{-1} V_3(1) V_4(0) \rangle + \langle V_\alpha(0) (W_0 W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle + \\
 &\quad + \langle V_\alpha(0) W_{-1} V_3(1) (W_0 V_4)(0) \rangle + \langle V_\alpha(0) (W_{-1}^2 V_3)(1) V_4(0) \rangle - \\
 &\quad - \langle V_\alpha(0) V_3(1) (W_1 V_4)(0) \rangle = (w_\alpha + w_4) \langle W_0 V_\alpha(0) W_{-1} V_3(1) V_4(0) \rangle + \\
 &\quad + \langle V_\alpha(0) (W_0 W_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle + \langle V_\alpha(0) (W_{-1}^2 V_3)(1) V_4(0) \rangle. \tag{10.26}
 \end{aligned}$$

Заметим, что в правой части на один член меньше, чем в (10.18).

Следующий шаг – подставить $W_0 W_{-1}$ и $W_1 W_{-1}$ из (9.26). Тогда, подставив (10.26) в (10.25), мы имеем

$$\begin{aligned}
 \langle (W_{-1}^2 V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle &= \frac{9D_\alpha}{2} \langle L_{-1} V_\alpha(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \\
 &\quad + (w_\alpha + w_3 + w_4) \langle (W_{-1} V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle + \\
 &\quad + (w_\alpha + w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0) W_{-1} V_3(1) V_4(0) \rangle + \\
 &\quad + \frac{9D_3}{2} \langle V_\alpha(0) (L_{-1} V_3)(1) V_4(0) \rangle + \langle V_\alpha(0) (W_{-1}^2 V_3)(1) V_4(0) \rangle.
 \end{aligned}$$

Остается подставить (10.21), (10.20) и (10.4) и получить окончательное равенство:

$$\begin{aligned}
 \langle (W_{-1}^2 V_\alpha)(0) V_3(1) V_4(0) \rangle &= \\
 &= (w_\alpha + w_3 + w_4) \langle (w_\alpha + w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \\
 &\quad + 2 \langle V_\alpha(0) (W_{-1} V_3)(1) V_4(\infty) \rangle \rangle + \\
 &\quad + \frac{9D_\alpha}{2} (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_\alpha(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle - \\
 &\quad - \frac{9D_3}{2} (\Delta_{\tilde{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0) V_3(1) V_4(\infty) \rangle + \underline{\underline{\langle V_\alpha(0) (W_{-1}^2 V_3)(1) V_4(0) \rangle}}. \tag{10.27}
 \end{aligned}$$

10.4. Ограничение на специальное состояние. Если V_1 и V_3 являются *специальными состояниями* (нуль-векторами оператора W на первом уровне), которые удовлетворяют соотношениям

$$W_{-1}V_1 = \frac{3w_1}{2\Delta_1}L_{-1}V_1, \quad W_{-1}V_3 = \frac{3w_3}{2\Delta_3}L_{-1}V_3 \quad (10.28)$$

и

$$D_1\Delta_1^2 = w_1^2, \quad D_3\Delta_3^2 = w_3^2, \quad (10.29)$$

то подчеркнутые корреляторы также выражаются через $\langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle$ и $\langle V_\alpha(0)V_3(1)V_4(\infty)\rangle$.

10.4.1. $\bar{\Gamma}$ -вершины. Из определения специального состояния непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \underline{\langle V_\alpha|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle} &\stackrel{(10.28)}{=} \frac{3w_1}{2\Delta_1} \langle V_\alpha|(L_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle \stackrel{(10.3)}{=} \\ &\stackrel{(10.3)}{=} \frac{3w_1}{2\Delta_1} (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) \langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Это выражение легко подставить в (10.12), (10.14) и (10.16).

Чтобы переписать подчеркнутую дважды вершину в формуле (10.19), понадобится также использовать коммутационные соотношения

$$[W_{-1}, L_{-1}] = W_{-2} \quad (10.31)$$

и тот факт, что равенство (10.3) остается верным для первого потомка $W_{-1}V_1$. Принимая во внимание оба эти обстоятельства, получим

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\langle V_\alpha|(W_{-1}^2V_1)(1)V_2(0)\rangle}} &\stackrel{(10.28)}{=} \frac{3w_1}{2\Delta_1} \langle V_\alpha|(W_{-1}L_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle \stackrel{(10.31)}{=} \\ &\stackrel{(10.31)}{=} \frac{3w_1}{2\Delta_1} (\langle V_\alpha|(L_{-1}W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle + \langle V_\alpha|(W_{-2}V_1)(1)V_2(0)\rangle) \stackrel{(10.3), (10.9)}{=} \\ &\stackrel{(10.3), (10.9)}{=} \frac{3w_1}{2\Delta_1} (\Delta_\alpha - (\Delta_1 + 1) - \Delta_2) \underline{\langle V_\alpha|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle} + \\ &\quad + \frac{3w_1}{2\Delta_1} ((w_\alpha - w_1 - w_2) \langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle - \\ &\quad - 2 \underline{\langle V_\alpha|(W_{-1}V_1)(1)V_2(0)\rangle}) \stackrel{(10.30)}{=} \frac{3w_1}{2\Delta_1} \left((w_\alpha - w_1 - w_2) + \right. \\ &\quad \left. + (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2 - 3) \frac{3w_1}{2\Delta_1} (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) \right) \langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Подстановка (10.32) в (10.19) дает

$$\begin{aligned} \boxed{\langle W_{-1}^2V_\alpha|V_1(1)V_2(0)\rangle} &= \\ &= \left\{ (w_\alpha + 2w_1 - w_2) \left(w_\alpha + 2w_1 - w_2 + 2 \frac{3w_1}{2\Delta_1} (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9D_\alpha}{2}(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) + 9D_1(\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) + \frac{9D_1\Delta_1}{2} + \\
& + \frac{3w_1}{2\Delta_1} \left(w_\alpha - w_1 - w_2 + \right. \\
& \left. + (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2 - 3) \frac{3w_1}{2\Delta_1} (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) \right) \Big\} \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle \stackrel{(10.29)}{=} \\
& \stackrel{(10.29)}{=} \left\{ (w_\alpha + 2w_1 - w_2)^2 + \right. \\
& + \frac{3w_1}{2\Delta_1} (2(w_\alpha + 2w_1 - w_2)(\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) + w_\alpha - w_1 - w_2 + \underline{3w_1}) + \\
& + \left(\frac{3w_1}{2\Delta_1} \right)^2 (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2 - \underline{3+4})(\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) + \\
& \left. + \frac{9D_\alpha}{2}(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \right\} \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle = \\
& = \left\{ \left(w_\alpha + 2w_1 - w_2 + \frac{3w_1}{2\Delta_1}(\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) \right) \times \right. \\
& \quad \times \left(w_\alpha + 2w_1 - w_2 + \frac{3w_1}{2\Delta_1}(\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2 + 1) \right) + \\
& \quad \left. + \frac{9D_\alpha}{2}(\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \right\} \langle V_\alpha | V_1(1) V_2(0) \rangle. \tag{10.33}
\end{aligned}$$

В приведенных формулах подчеркнуты два члена, полученные после представления D_1 через w_1 и Δ_1 с помощью (10.29).

10.4.2. Г-вершины. Прямо из определения (10.28) специальных состояний получаем

$$\begin{aligned}
\underline{\langle V_{\tilde{\alpha}}(0)(W_{-1}V_3)(1)V_4(\infty) \rangle} &= \frac{3w_3}{2\Delta_3} \langle V_{\tilde{\alpha}}(0)(L_{-1}V_3)(1)V_4(\infty) \rangle \stackrel{(10.4)}{=} \\
&\stackrel{(10.4)}{=} -\frac{3w_3}{2\Delta_3} (\Delta_{\tilde{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0)V_3(1)V_4(\infty) \rangle. \tag{10.34}
\end{aligned}$$

Это выражение легко подставить в (10.21), (10.23) и (10.24).

Перепишем подчеркнутую дважды вершину в (10.27). Для этого нам придется использовать коммутационные соотношения (10.31) и тот факт, что равенство (10.4) остается верным для первого потомка $W_{-1}V_1$. С учетом этого получаем

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\langle V_\alpha(0)(W_{-1}^2V_3)(1)V_4(0) \rangle}} &\stackrel{(10.28)}{=} \frac{3w_3}{2\Delta_3} \langle V_\alpha(0)(W_{-1}L_{-1}V_3)(1)V_4(0) \rangle \stackrel{(10.31)}{=} \\
&\stackrel{(10.31)}{=} \frac{3w_3}{2\Delta_3} (\langle V_\alpha(0)(L_{-1}W_{-1}V_3)(1)V_4(0) \rangle + \langle V_\alpha(0)(W_{-2}V_3)(1)V_4(0) \rangle) \stackrel{(10.4), (10.10)}{=} \\
&\stackrel{(10.4), (10.10)}{=} -\frac{3w_3}{2\Delta_3} (\Delta_\alpha + (\Delta_3 + 1) - \Delta_4) \underline{\langle V_\alpha(0)(W_{-1}V_3)(1)V_4(0) \rangle} - \\
&\quad - \frac{3w_3}{2\Delta_3} ((\hat{w}_{\tilde{\alpha}} + w_3 + w_4) \langle V_{\tilde{\alpha}}(0)V_3(1)V_4(\infty) \rangle +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\langle V_{\check{\alpha}}(0)(W_{-1}V_3)(1)V_4(\infty)\rangle \stackrel{(10.34)}{=} \frac{3w_3}{2\Delta_3} \left(-(\hat{w}_{\check{\alpha}} + w_3 + w_4) + \right. \\
& \left. + (\Delta_{\alpha} + \Delta_3 - \Delta_4 + 3) \frac{3w_3}{2\Delta_3} (\Delta_{\check{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) \right) \langle V_{\check{\alpha}}(0)V_3(1)V_4(\infty)\rangle. \quad (10.35)
\end{aligned}$$

Подстановка (10.35) в (10.27) дает

$$\begin{aligned}
& \boxed{\langle (W_{-1}^2 V_{\alpha})(0)V_3(1)V_4(0)\rangle} = \\
& = \left\{ w_{\alpha} + w_3 + w_4 \left(w_{\alpha} + w_3 + w_4 - 2 \frac{3w_3}{2\Delta_3} (\Delta_{\check{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) \right) + \right. \\
& \quad + \frac{9D_{\alpha}}{2} (\Delta_{\alpha} + \Delta_3 - \Delta_4) - \frac{9D_3}{2} (\Delta_{\check{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) + \\
& \quad + \frac{3w_3}{2\Delta_3} \left(-(w_{\alpha} + w_3 + w_4) + \right. \\
& \quad \left. + (\Delta_{\alpha} + \Delta_3 - \Delta_4 + 3) \frac{3w_3}{2\Delta_3} (\Delta_{\check{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) \right) \left. \right\} \langle V_{\alpha}(0)V_3(1)V_4(\infty)\rangle \stackrel{(10.29)}{=} \\
& \stackrel{(10.29)}{=} \left\{ (w_{\alpha} + w_3 + w_4)^2 - \frac{3w_3}{2\Delta_3} (2(w_{\alpha} + w_3 + w_4)(\Delta_{\alpha} + \Delta_3 - \Delta_4) + \right. \\
& \quad + w_{\alpha} + w_3 + w_4) + \left(\frac{3w_3}{2\Delta_3} \right)^2 (\Delta_{\alpha} + \Delta_3 - \Delta_4 + 3 - 2)(\Delta_{\check{\alpha}} + \Delta_3 - \Delta_4) + \\
& \quad \left. + \frac{9D_{\alpha}}{2} (\Delta_{\alpha} + \Delta_3 - \Delta_4) \right\} \langle V_{\alpha}(0)V_3(1)V_4(\infty)\rangle = \\
& = \left\{ \left(w_{\alpha} + w_3 + w_4 - \frac{3w_3}{2\Delta_3} (\Delta_{\alpha} + \Delta_3 - \Delta_4) \right) \times \right. \\
& \quad \times \left(w_{\alpha} + w_3 + w_4 - \frac{3w_3}{2\Delta_3} (\Delta_{\alpha} + \Delta_3 - \Delta_4 + 1) \right) + \\
& \quad \left. + \frac{9D_{\alpha}}{2} (\Delta_{\alpha} + \Delta_3 - \Delta_4) \right\} \langle V_{\alpha}(0)V_3(1)V_4(\infty)\rangle. \quad (10.36)
\end{aligned}$$

10.5. Тест в свободных полях. Теперь можно представить заключительную проверку этих формул: подходят ли формулы (9.1) и (9.3) для этого ограниченного набора состояний со специальными значениями $\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_3$. Для этого нужно скомбинировать наши выражения для $\bar{\Gamma}$, Q и Γ и подставить частные *специальные* значения для $\vec{\alpha}_1$ и $\vec{\alpha}_3$. Имеется по шесть специальных значений для $\vec{\alpha}_1$ и для $\vec{\alpha}_3$, определенных как нули определителя Каца $\det Q$. В явном виде они равны $\vec{\alpha}_{\text{спес}} = (\alpha, Q \pm Q/2)$ или $\vec{\alpha}_{\text{спес}} = (\alpha, Q \pm (\alpha\sqrt{3} \pm Q))$ с произвольным α . Таким образом, для 36 комбинаций специальных значений мы получаем 36 возможностей для $\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_3$ появиться в разложении (9.1). Если $Q = 0$, существуют только три возможности: $\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_3 = \alpha_1 \alpha_3$, $\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_3 = 4\alpha_1 \alpha_3$, $\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_3 = -2\alpha_1 \alpha_3$. В действительности при $Q \neq 0$ также не все из этих шести значений соответствуют *специальным векторам*: условие

$$0 = \left(W_{-1} - \frac{3w_{\alpha}}{2\Delta_{\alpha}} L_{-1} \right) V_{\alpha} \stackrel{(9.21), (9.22)}{=} :3 \left(\left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{1}{2} Q \beta - \alpha \frac{w}{2\Delta} \right) \partial \phi_1 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-2\alpha\beta + \frac{3}{2}Q\alpha - \beta\frac{w}{2\Delta} \right) \partial\phi_2 \Big) e^{\alpha\phi_1 + \beta\phi_2} : = \\
& = \frac{3}{2\Delta} \left(\beta - \frac{Q}{2} \right) (3\alpha^2 - \beta^2) : ((\beta - 2Q)\partial\phi_1 - \alpha\partial\phi_2) e^{\alpha\phi_1 + \beta\phi_2} :
\end{aligned}$$

приводит к более существенным ограничениям:

$$\vec{\alpha}_{\text{spec}} = (\alpha, Q/2) \quad \text{или} \quad \vec{\alpha}_{\text{spec}} = (\alpha, \pm\alpha\sqrt{3}); \quad (10.37)$$

в результате остается только половина состояний, и только такие дополнительно ограниченные специальные значения должны быть включены в проверку при $Q \neq 0$. Вычисление коррелятора (9.3) несколько более трудоемкое. Однако оно замечательно воспроизводит разложение (9.1) во всех девяти случаях при произвольных значениях Q . Это не доказывает, но тестирует рекуррентные соотношения, и тест дает положительный результат.

10.6. Альтернативный выбор специальных состояний. Поучительно также рассмотреть случай, когда специальные состояния – это V_2 и V_4 . На первом уровне мы можем использовать соотношения (8.8) и (8.17):

$$\begin{aligned}
& \langle W_{-1}V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle \stackrel{(8.8)}{=} (2w_\alpha + w_1 - 2w_2) \langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle + \langle V_\alpha|V_1(1)W_{-1}V_2(0) \rangle \stackrel{(10.28)}{=} \\
& \stackrel{(10.28)}{=} (2w_\alpha + w_1 - 2w_2) \langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle + \frac{3w_2}{2\Delta_2} \langle V_\alpha|V_1(1)L_{-1}V_2(0) \rangle \stackrel{(8.2)}{=} \\
& \stackrel{(8.2)}{=} (2w_\alpha + w_1 - 2w_2) \langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle - \frac{3w_2}{2\Delta_2} \langle V_\alpha|V_1(1)L_{-1}V_2(0) \rangle \stackrel{(8.3)}{=} \\
& \stackrel{(8.3)}{=} \left(2w_\alpha + w_1 - 2w_2 - \frac{3w_2}{2\Delta_2} (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) \right) \langle V_\alpha|V_1(1)V_2(0) \rangle
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& \langle (W_{-1}V_\alpha)(0)V_3(1)V_4(\infty) \rangle \stackrel{(62)}{=} (2w_\alpha - w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0)V_3(1)V_4(\infty) \rangle - \\
& - \langle V_\alpha(0)V_3(1)(W_{-1}V_4)(\infty) \rangle \stackrel{(170)}{=} \\
& \stackrel{(170)}{=} (2w_\alpha - w_3 + w_4) \langle V_\alpha(0)V_3(1)V_4(\infty) \rangle - \frac{3w_4}{2\Delta_4} \langle V_\alpha(0)V_3(1)(L_{-1}V_4)(\infty) \rangle \stackrel{(54),(55)}{=} \\
& \stackrel{(54),(55)}{=} \left(2w_\alpha - w_3 + w_4 + \frac{3w_4}{2\Delta_4} (\Delta_\alpha - \Delta_3 - \Delta_4) \right) \langle V_\alpha(0)V_3(1)V_4(\infty) \rangle.
\end{aligned}$$

В результате получаем равенство

$$\begin{aligned}
& \frac{9D_\alpha\Delta_\alpha}{2} (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2)(\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4) - \\
& - 3w_\alpha (\Delta_\alpha + \Delta_1 - \Delta_2) \left(2w_\alpha - w_3 + w_4 + \frac{3w_4}{2\Delta_4} (\Delta_\alpha - \Delta_3 - \Delta_4) \right) - \\
& - 3w_\alpha \left(2w_\alpha + w_1 - 2w_2 - \frac{3w_2}{2\Delta_2} (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) \right) (\Delta_\alpha + \Delta_3 - \Delta_4) + \\
& + 2\Delta_\alpha \left(2w_\alpha + w_1 - 2w_2 - \frac{3w_2}{2\Delta_2} (\Delta_\alpha - \Delta_1 - \Delta_2) \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(2w_\alpha - w_3 + w_4 + \frac{3w_4}{2\Delta_4} (\Delta_\alpha - \Delta_3 - \Delta_4) \right) = \\ & = -18(D_\alpha \Delta_\alpha^2 - w_\alpha^2)(\alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3) = 9(D_\alpha \Delta_\alpha^2 - w_\alpha^2)(-2\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_3) \end{aligned} \quad (10.38)$$

с условием, что на векторы $\vec{\alpha}_2$ и $\vec{\alpha}_4$ наложены правила отбора свободной теории, в дополнение к условиям специальости, подобным (10.28). Соотношение (10.38) в точности то, что требуется условиями согласования между (9.3) и (9.1).

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье мы вывели и затем проверили в рамках свободной теории ряд формул для универсальных частей тройных вершин в алгебре Вирасоро и алгебре $W^{(3)}$. Формулы для алгебры Вирасоро элементарны и хорошо известны, в то время как их обобщение на W -алгебру более трудоемкое, а ответы менее элегантны. Эти формулы важны, среди прочего, для изучения соотношений АГТ между конформными блоками и функциями Некрасова, и мы привели ряд конкретных выражений, которые использовались в работах [19] и [21] с этой целью. Как упоминалось в разделе 1, если рассматривать соотношение АГТ на уровне оригинальных интегралов Некрасова, оно выглядит очень естественным в конформной теории, особенно с точки зрения свободной теории. Можно надеяться, что гипотеза АГТ оживит интерес к почти прекратившемуся изучению конформных блоков и W -симметрий. Кроме того, настоящий обзор может служить введением в конформную часть гипотезы АГТ, подчеркивающим некоторые аспекты теории, важные при изучении гипотезы АГТ, но представленные неполно в существующей литературе по конформным теориям.

Благодарности. Мы благодарим за гостеприимный прием и поддержку проф. Т. Томараса и Институт теоретической и вычислительной физики университета Крита, где была сделана часть настоящей работы. Работа частично поддержана Российским федеральным агентством по атомной энергии и РФФИ (гранты № 07-02-00878 (А. Д. Миронов), 08-02-00287 (С. А. Миронов)), 07-02-00645 (А. Ю. Морозов) и 07-01-00526 (А. А. Морозов). Работа А. Д. Миронова и А. Ю. Морозова была частично поддержана грантом FP7-REGPOT-1 (Crete HEP Cosmo 228644), объединенными грантами 09-02-90493-Ukr, 09-02-93105-CNRS, 09-01-92440-CE, 09-02-91005-ANF, INTERREG IIIA (Greece-Cyprus) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3035.2008.2). Работа С. А. Миронова и А. А. Морозова была частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3036.2008.2).

Список литературы

- [1] А. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ*, **12**:11 (1970), 538–541; *ЖЭТФ*, **66** (1974), 23–42.
- [2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [3] A. B. Zamolodchikov, *Comm. Math. Phys.*, **96**:3 (1984), 419–422.
- [4] Ал. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **73**:1 (1987), 103–110.
- [5] V. I. S. Dotsenko, V. A. Fateev, *Nucl. Phys. B*, **240**:3 (1984), 312–348.
- [6] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:2 (1982), 47–63.
- [7] А. Б. Замолодчиков, *ТМФ*, **65**:3 (1985), 347–359.

- [8] V. A. Fateev, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **280** (1987), 644–660.
- [9] V. A. Fateev, S. L. Lukyanov, *Internat. J. Modern Phys. A*, **3**:2 (1988), 507–520.
- [10] H. Sonoda, *Nucl. Phys. B*, **311**:2 (1988), 401–416.
- [11] G. Moore, N. Seiberg, *Comm. Math. Phys.*, **123**:2 (1989), 177–254.
- [12] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, M. Olshanetsky, S. Shatashvili, *Internat. J. Modern Phys. A*, **5**:13 (1990), 2495–2589; A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov, *Nucl. Phys. B*, **328**:3 (1989), 664–676.
- [13] А. Б. Замолодчиков, Ал. Б. Замолодчиков, *Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах*, МЦНМО, М., 2009.
- [14] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer, New York, 1997.
- [15] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv: 0906.3219.
- [16] N. Wyllard, *JHEP*, **11** (2009), 002, 22 pp., arXiv: 0907.2189.
- [17] N. A. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2003), 831–864; N. Nekrasov, A. Okounkov, “Seiberg–Witten theory and random partitions”, *The Unity of Mathematics*, Progr. Math., **244**, eds. P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer, Birkhäuser, Boston, MA, 2006, 525–596, arXiv: hep-th/0306238.
- [18] A. Mironov, A. Morozov, *JHEP*, **02** (2009), 024, 52 pp., arXiv: 0807.2843; A. Mironov, A. Morozov, S. Natanzon, *Complete set of cut-and-join operators in Hurwitz–Kontsevich theory*, arXiv: 0904.4227.
- [19] А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, А. Ю. Морозов, *ТМФ*, **164**:1 (2010), 3–27, arXiv: 0907.3946.
- [20] D. Gaiotto, *Asymptotically free $N = 2$ theories and irregular conformal blocks*, arXiv: 0908.0307.
- [21] A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **680**:2 (2009), 188–194, arXiv: 0908.2190; *Nucl. Phys. B*, **825**:1–2 (2010), 1–37, arXiv: 0908.2569.
- [22] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory. V. 1: Introduction*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987; v. 2: *Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology*; F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive, *Nucl. Phys. B*, **122**:2 (1977), 253–290; A. A. Belavin, V. G. Knizhnik, *Phys. Lett. B*, **168**:3 (1986), 201–206; A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **184**:2–3 (1987), 171–176; 177–183.
- [23] A. Morozov, *JHEP*, **05** (2008), 086, 27 pp.; arXiv: 0804.3167.