Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Новый подход к фазовым переходам, термодинамике и гидродинамике, *ТМФ*, 2010, том 165, номер 3, 543–567

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6591>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:35:47

© 2010 г.

В. П. Маслов*

НОВЫЙ ПОДХОД К ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДАМ, ТЕРМОДИНАМИКЕ И ГИДРОДИНАМИКЕ

Рассмотрен новый подход к термодинамике и гидродинамике. При низких температурах фазовый переход He^3 и He^4 в сверхтекучее состояние трактуется как переход в полуклассический неголономный жидкий кристалл.

Ключевые слова: распределение Бозе–Эйнштейна, бозе-конденсат, фактор сжимаемости, сверхтекучесть, жидкий кристалл.

Посвящается памяти В. Л. Гинзбурга

1. БОЗЕ-КОНДЕНСАТ КАК ЯВЛЕНИЕ В ГУМАНИТАРНЫХ НАУКАХ

Ранее [1] мы разбирали пример, когда герой романа М. А. Булгакова “Мастер и Маргарита” Коровьев разбрасывал купюры в варьете. Число зрителей соответствует числу частиц N , а количество купюр $\mathcal{E}$ с точностью до некоторой нормировки соответствует энергии. Коровьев раскидывал $\mathcal{E}$ купюр-червонцев по N зрителям, и мы должны определить вероятность того, что некоторое количество зрителей получат хотя бы по одному червонцу, а кто-то не получит их совсем. Вопрос об обосновании теории вероятностей – один из важнейших вопросов. Великий математик Анри Пуанкаре, который с 32 лет заведовал кафедрой теории вероятностей и математической физики в Парижском университете, посвятил главу XI книги “О науке” [2] исчислению вероятностей. Он дает стандартное определение вероятности как отношения числа случаев, благоприятствующих данному событию, к полному числу возможных случаев и приводит контрпример к такому определению вероятности. Пуанкаре пишет, что это определение нужно дополнить фразой “при условии, что эти случаи равновероятны”, и отмечает, что мы вернулись на круги своя: определили вероятность через вероятность. Так что задача прежде всего состоит в том, чтобы

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

определить, какие случаи наиболее естественно считать равновероятными¹⁾. “Нам надо искать”, – пишет Пуанкаре, – “математическую мысль там, где она осталась чистой, т. е. в арифметике” ([2], с. 13). Мы так и поступили.

Знаменитая задача арифметики (теории чисел) – это разложение целого числа $\mathcal{E}$ на сумму слагаемых, например

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 3 = 3 + 1 + 1 = 4 + 1 = 5, \quad (1)$$

всего семь возможностей, если от перестановки слагаемых сумма не зависит. Если разложение случайно (см. [2], гл. IV “Случайность”), то все варианты равновозможны, и естественно именно их и считать равновероятными: вероятность любого варианта равна $1/7$.

Если зрителей не более N (в варьете имеется N кресел, но, возможно, не на всех сидят зрители), то в зависимости от соотношения $\mathcal{E}$ и N в вероятности происходит скачок – фазовый переход. Действительно, при $N = 1$ и $N = \mathcal{E}$, каковы бы ни были N и $\mathcal{E}$, случай (вариант) только один – его вероятность при большом $\mathcal{E}$ очень мала. Значит, существует такое N_{cr} (необязательно единственное), при котором число случаев (вариантов) разложения $\mathcal{E}$ на N_{cr} слагаемых максимально.

Если $N < N_{\text{cr}}$, то максимальная вероятность получения зрителем хотя бы одной купюры будет в том случае, когда все N кресел в варьете заполнены зрителями. При $N > N_{\text{cr}}$ максимальное число вариантов отвечает случаю $N = N_{\text{cr}}$. Это число N_{cr} было вычислено Эрдешем в работе [5]. Оно равно

$$N_{\text{cr}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\sqrt{\pi^2/6}} \ln \mathcal{E} (1 + o(1)). \quad (2)$$

Значит, более вероятно, что зрители сверх числа N_{cr} совсем не получают купюр. Заметим, что ноль отсутствовал в исходном разложении (1).

ПРИМЕР. Предположим, что у Коровьева есть $\mathcal{E} = 1000000$ купюр и в зале находятся $N = 10000$ зрителей. Согласно теории чисел и вышеприведенным соотношениям только 1000 зрителей получают купюры в том или ином количестве. Остальные 9000 зрителей не получают ни одной купюры и, допустим, умрут от голода.

Тогда эта ситуация совершенно аналогична ситуации бозе-конденсата в статистической физике бозонов. В физической литературе, как правило, отмечается, что бозе-конденсата в двумерном случае не существует. Физик Темперли [6] заметил связь бозе-распределения с указанной задачей теории чисел. Однако эта и другие работы, тем более что бозе-конденсата они не затрагивали, утонули в общем хоре физиков (и их учебников), привыкших к мысли, что бозе-конденсата в двумерном случае нет. Крупнейший физик Я. И. Френкель писал ([7], с. 63): “К однообразию и постоянству мы легко привыкаем, перестаем его замечать. Привычное кажется нам естественным, понятным, непривычное – неестественным и непонятным... В сущности говоря, мы не можем понять, а можем только привыкнуть”.

¹⁾Пуанкаре подробно останавливается на парадоксе Бертрана. Как мы отмечали в работе [3], рассуждения, относящиеся к флюидам, приведенные в этой работе, наталкиваются на тот же парадокс и, следовательно, являются чисто эвристическими. В работе [4], рассматривая только дискретный случай, мы избегаем парадокса Бертрана.

Общее глобальное асимптотическое распределение, приводящее, в частности, к формуле (2), было впервые получено автором [1], [3]. Оно показывает, как распределены числа натурального ряда в разложении числа $\mathcal{E}$ на N слагаемых. Это распределение имеет смысл лишь при очень больших $\mathcal{E}$ и N , причем в слабом и вероятностном смысле.

Исходные известные тождества для приведенной задачи имеют вид

$$\sum_{i=0}^{\infty} N_i = N, \quad \sum_{i=0}^{\infty} iN_i = \mathcal{E}. \quad (3)$$

Эти соотношения соответствуют физическим соотношениям вида

$$\sum N_i = N, \quad \sum \varepsilon_i N_i = \mathcal{E}, \quad (4)$$

где N_i – число частиц на i -м уровне энергии, а ε_i – дискретные наборы энергий. Если рассматривается нерелятивистский случай, когда гамильтониан системы H равен $p^2/2m$, где p – импульс, то задаче (3) с точностью до постоянных множителей соответствует двумерный случай.

Трехмерному случаю $D = 3$ отвечает следующая задача теории чисел:

$$\sum N_i = N, \quad \sum \frac{(i+2)!}{i!6} N_i = \mathcal{E}. \quad (5)$$

При этом при всех топологических размерностях, больших нуля, существует бозе-конденсат. Однако чем меньше размерность, тем оценка хуже. Для вероятности бозе-конденсата оценки приведены в работе [1].

Э. Шредингер в знаменитой популярной философской книге “Что такое жизнь?” [8] отмечает, что статистические законы, имеющие место при $N \rightarrow \infty$, где N – число частиц, справедливы с точностью не более, чем до $\sqrt{N}$. В связи с этим мы выскажем следующую несколько измененную гипотезу о правиле Шредингера, которое он формулирует как “закон природы”. Если некоторое число частиц, молекул, генов в хромосоме равно N , то получить статистическую закономерность можно с точностью не более, чем $O(\sqrt{N \ln N})$. Математический смысл этой гипотезы состоит в том, что улучшить оценку, приведенную в [9] (формула (7)), невозможно. Лучше такой оценки по Шредингеру добиться нельзя. Автор также не может получить лучшей оценки и в теоремах о распределении в теории чисел. Для размерности 1 это лишь $o(N)$. Однако есть и положительный момент в столь грубой оценке. Следующее замечание позволяет перенести результаты на дробные размерности. Это является важнейшим обобщением для всей последующей концепции.

Естественно вместо числа вариантов (решений) соотношений (3) и (5) рассматривать их логарифм по основанию 2 (энтропия Хартли). Тогда оказывается, что логарифмы числа решений задачи (3) и (5) и задачи

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} N_i &= N, & \sum_{i=0}^{\infty} iN_i &\leq \mathcal{E}, \\ \sum N_i &= N, & \sum \frac{(i+2)!}{i!6} N_i &\leq \mathcal{E} \end{aligned} \quad (6)$$

совпадают по модулю указанной точности. Иначе говоря, в той теории, которую мы строим, разности энтропий этих двух задач различаются не более, чем на $\sqrt{N \ln N}$, а это и означает, что разность “удельных” энтропий мала при $N \rightarrow \infty$.

Это соображение позволяет обобщить приведенную теорию чисел на нецелые размерности. Мы рассмотрим выражения вида

$$\sum \frac{\Gamma(d+i)}{\Gamma(i+1)\Gamma(d+1)} N_i \leq \mathcal{E}, \quad (7)$$

$$\sum N_i = N, \quad (8)$$

где $d = D/2$, и число решений, удовлетворяющих неравенству (7) и равенству (8), при нецелом D (размерность Хаусдорфа, фрактальная размерность).

Совпадение неразличимых вариантов типа $(4+1, 1+4)$ с полностью различными, такими как в статистике Больцмана, теории информации Шеннона, теории колмогоровской сложности и в гиббсовском ансамбле, имеет место лишь при $N = 1$ и $N = \mathcal{E}$. Но в силу того, что точность в наших асимптотических формулах, как говорилось выше, не может быть лучше, чем $\sqrt{N}$, то в лучшем случае можно говорить, что совпадение имеет место при $N \approx \sqrt{N}$ и N между $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} - \sqrt{N}$.

Было бы весьма полезно составить компьютерные программы для оценки в процентах оценить этих интервалов (как когда-то были составлены таблицы логарифмов). Это было бы полезно в самых разных областях науки, где числа N и $\mathcal{E}$ не столь велики, как в классической статистической физике, например в мезоскопической физике, нанофизике, генетике и биологии.

Распределение, которое отвечает этой задаче теории чисел для размерности $d_0 > 2$, соответствует распределению Бозе–Эйнштейна при $N \leq N_{\text{ср}}$. Именно, определим константы μ и β , “сопряженные” N и $\mathcal{E}$, из соотношений

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i+1)(i+2)}{2(e^{\beta(i-\mu)} - 1)}, \quad (9)$$

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i+1)(i+2)}{2(e^{\beta(i-\mu)} - 1)}. \quad (10)$$

Тогда распределение принимает вид распределения Бозе–Эйнштейна [10], в котором $V = 1$. В общем случае при $d > 2$

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i q_i}{e^{\beta(i-\mu)} - 1}, \quad (11)$$

где

$$q_i = \frac{\Gamma(i+d)}{\Gamma(d)\Gamma(i+1)}, \quad N = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{e^{\beta(i-\mu)} - 1}. \quad (12)$$

Распределение имеет вид

$$N_i \sim \frac{q_i}{e^{\beta(i-\mu)} - 1}. \quad (13)$$

При этом оценка (см. [11]) для $d_0 \geq 2$ соответствует $\sqrt{N \ln N}$. При $d \leq 1$ (т.е. при $D \leq 2$) добавляется член, который мал при $d_0 > 1$. Этот член имеет вид

в формулах (11)–(13)

$$- \frac{Nq_i}{e^{\beta N(i-\mu)} - 1}. \quad (14)$$

Этот дополнительный член позволяет получить N_{cr} при $d_0 > 0$, т.е. для любой размерности, большей нуля.

Параметр μ в распределениях (12)–(14) в теории чисел мы будем называть *дифференцией*, поскольку при $\mu \rightarrow \infty$ происходит переход к статистике Больцмана и энтропии Шеннона, а параметр $T = 1/\beta$ – *подвижностью*.

При размерности $D \geq 4$ может быть вычислен и следующий член асимптотики, который приводит к поправке к закону Стефана–Больцмана [12].

В одномерном случае (т.е. на прямой) величина N_{cr} вычисляется по формуле

$$N_{\text{cr}} = \frac{W^2}{4} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{W}} \right)^2, \quad (15)$$

где

$$W = (2\mathcal{E})^{1/3} \left(\int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} d\xi}{e^\xi - 1} \right)^{-1/3} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{e\xi^2 - 1} \right) d\xi > 0. \quad (16)$$

Это важно в задачах о нанотрубках в физике и для так называемой проблемы Варинга в теории чисел.

2. КЛАСТЕРИЗАЦИЯ И УМЕНЬШЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ КАК АЛЬТЕРНАТИВА БОЗЕ-КОНДЕСАТА И РЕШЕНИЕ ПАРАДОКСА ГИББСА

Классические частицы, если мы исследуем их плотность, т.е. число частиц в единице объема, так же как и купоры, теряют свою индивидуальность и, следовательно, подчиняются этой же статистике теории чисел. Перемена мест между ними не сказывается на плотности. В этом смысле исчезает парадокс Гиббса, связанный с энтропией. Сам великий Пуанкаре пытался решить эту проблему: модель идеального газа, предложенная Пуанкаре, приводит к возрастанию энтропии, если убрать перегородку, разделяющую газ на два подобъема [13]. Поскольку это ему не удалось математически, то он обратился к логике в философии. Через всю книгу Пуанкаре [2] проходит мысль о том, как примирить две несовместимые физические теории и, в частности, объяснить философски парадокс Гиббса.

Всю свою философию Пуанкаре строит так, чтобы оправдать это противоречие. В частности, он пишет: “Если физик констатирует противоречие между двумя теориями, одинаково дорогими ему, он иногда говорит: не станем об этом беспокоиться; пусть промежуточные звенья цепи скрыты от нас – мы будем крепко держать ее концы. Этот аргумент, напоминающий доводы запутавшегося богослова, был бы смешон, если бы физическим теориям приписывался тот смысл, какой им придают профаны (фр. *profane*). Тогда в случае противоречия по меньшей мере одна из них должна была бы быть признана ложной. Это не необходимо, если искать в них только то, что следует искать. Может случиться, что и та и другая теория выражают действительные отношения, а противоречие лежит лишь в символах, в которые мы обрядили реальность” ([2], с. 104).

В политике, в идеологии такие противоречия можно вдолбить в головы, как полагал Френкель (см. приведенное выше его высказывание из работы [7]), но в математической физике действительно одна из теорий должна быть признана ложной и никакими потусторонними символами это не устранить ни такому *profane*, каким является автор, ни такому гению, каким является Пуанкаре. И нужно честно сказать: модель газа в зеркальном параллелепипеде, которую предложил Пуанкаре, неверна²⁾.

Числа $\mathcal{E}$ и N большие, однако если $\mathcal{E}$ сравнительно мало, то та схема, которую мы ранее рассматривали, что либо часть зрителей $N_{\text{dead}} = N - \text{const} \cdot \sqrt{\mathcal{E}} \ln \mathcal{E}$ умерли при $N \gg \sqrt{\mathcal{E}}$, либо они объединились в группы (кластеры), например в группы по 10 человек в примере из раздела 1, и потом как-то разделили купюры, полученные членами группы, чтобы никто не умер.

Здесь группы (кластеры) надо поделить на два класса – те, которые сидят близко друг от друга и при образовании группы установили “голономные связи”, и те, которые увидели друг друга издали (например, зрители разного пола), приглянулись друг другу (противоположный цвет волос, например) и образовали пару (димер), а затем уже полученную одним из них купюру вместе проели. Будем говорить, что они образовали неголономную связь³⁾. Таковы куперовские пары в теории сверхпроводимости, они образуют пары частицы с противоположными спинами и импульсами.

Возникает естественный жизненный вопрос: а устойчивы ли эти соединения?

Придется на этом месте сделать отступление и привести известную модель человека, которую описали математик (Винер) и физик (Френкель). Винер писал, что статуя человека неустойчива – она упадет, если не соорудить постамент. Живой же человек стоит без постамента и, как говорил Френкель, управляет собой, как жонглер вертикально стоящим шестом. Положение, как говорил Френкель, неустойчивое, но достаточно метастабильное. Только в старости человек начинает ходить с палочкой. Устойчивое состояние – смерть.

Точно так же и в приведенном “экономическом” примере, чтобы выжить, всем надо объединяться и жонглировать неустойчивой системой, приводя ее в метастабильное состояние.

Применив к классическим частицам распределение Бозе–Эйнштейна, а для размерностей ≤ 1 то же распределение с поправкой автора [1], [3], мы заменяем бозеконденсат объединением частиц в кластеры. При этом никто “не умирает”, т. е. число зрителей (частиц) сохраняется. Этот факт существенно упрощает распределение.

Пока бозе-распределение считалось чисто квантовым, вводилось так называемое обменное взаимодействие между формально невзаимодействующими гамильтонианами. Но поскольку мы рассматриваем бозе-распределение как *распределение классических частиц* (это один из основных моментов, к которому физики не привыкли), то очевидно, что для двух гамильтонианов, скобка Пуассона между которыми равна нулю, бозе-распределения не перемножаются. Это означает, что аддитивность энергии и ее всевозможные обобщения (белый шум, винеровский процесс и их комбинации) слишком сужают реальную теорию вероятностей. Именно из-за этого недоразумения (см. [14]) и возникло распределение Гиббса–Максвелла–Больцмана. Гиббс, избегая парадокса, ввел понятие гиббсовского ансамбля.

²⁾ Это следует из работы Козлова [13], показавшего, что в модели Пуанкаре энтропия возрастает, если убрать перегородку в параллелепипеде.

³⁾ Этот термин мы берем из теоретической механики лишь для аналогии.

Отметим, что, как только возникает значение N_{cr} , выше которого должен появиться бозе-конденсат согласно старой теории Бозе–Эйнштейна, в новой теории автора возникает пара – димер. Кроме того, чем больше частиц (или людей) объединяются, тем в большей степени уменьшается число степеней свободы.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ БЕЗ БОЗЕ-КОНДЕНСАТА

При $d_0 > 1$ определяем размерность

$$N(d_0) = N_{\text{cr}}, \quad (17)$$

точнее

$$\frac{\zeta(d_0)}{(d_0 \zeta(d_0 + 1))^{d_0/(d_0+1)}} \mathcal{E}^{d_0/(d_0+1)} = N_{\text{cr}}, \quad (18)$$

где $d_0 = D/2$, D – размерность в физических уравнениях Бозе–Эйнштейна, т. е. трехмерный случай $D = 3$, $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана.

При этом в распределении Бозе–Эйнштейна при $N > N_{\text{cr}}$ вместо бозе-конденсата возникает уменьшение размерности $d < d_0$ согласно закону (27)–(30). Однако при $N > N_{\text{max}}$, вообще говоря, должен возникать бозе-конденсат. Как мы увидим ниже, такого явления в теории классических частиц не возникает.

Если возвратиться к фокусу Коровьева, то после увеличения числа частиц, $N > 2N_{\text{cr}}$, для того чтобы не образовывался бозе-конденсат, уже объединения в пары недостаточно, должны появляться тримеры и кластеры большого числа частиц.

Это означает существенное вмешательство статистики Больцмана и энтропии Шеннона, поскольку димеры, мономеры и тримеры *различимы* между собой. Комбинаторный момент этого процесса достаточно прост, поэтому точное соотношение двух статистик может быть посчитано на компьютере.

Наличие N_{max} при $\mu \rightarrow -\infty$ означает полную “победу” шенноновской энтропии. Мы получаем благородный газ из стеклянной пыли (гидродинамика такой пыли изучена в [15]), когда большинство его частиц различимы между собой. Именно у благородных газов нет предпочтений между димерами, тримерами и т. д. Поэтому термодинамика благородных газов хорошо моделирует эту смесь статистик – статистики Бозе–Эйнштейна и статистики Больцмана, здесь возникает замечательно простой закон смеси статистик. У более сложных молекул такое “предпочтение” возможно. Тогда эта смесь уже существенно зависит еще от одного параметра N_{max} при $\mu \rightarrow -\infty$. Этот закон называется Zeno line. Его впервые открыл в частном случае русский ученый Бачинский.

Это позволяет найти функцию $d(N, d_0)$ при $N > N_{\text{cr}}$.

4. О БАЗИСНЫХ ВЕЛИЧИНАХ В ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ. ТЕМПЕРАТУРА КАК ЭНЕРГИЯ В УСТОЙЧИВОЙ ТОЧКЕ ПОКОЯ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ПАР (ИЗОТРОПНАЯ ТЕОРИЯ ЧАСТИЦ В СРЕДЕ СО СЛАБОЙ ВЯЗКОСТЬЮ)

Вопрос о базисных величинах в физике, как считал Релей, относится к логике и философии, и он прагматически рассматривал температуру как независимую величину. Д. Рябушинский возражал ему, полагая, что первичной является усредненная кинетическая энергия молекул, характеризующаяся размерностями длины, массы

и времени⁴⁾. Выражая устойчивое значение энергии в задаче рассеяния через температуру [4], мы, таким образом, решаем этот вопрос в пользу точки зрения Рябушинского. И это один из принципиальных моментов приведенной автором концепции.

Из раздела 2 следует, что фазовый переход в бозе-конденсат в нашей концепции заменяется на образование самого маленького кластера – пары, т. е. димера. В газе навстречу друг другу с достаточно большого расстояния с начальной энергией, равной разности начальных скоростей в квадрате, деленной на $2m$, летят пары частиц. Потенциал взаимодействия между ними обозначим $\Phi(r_1 - r_2)$. В случае, если малой вязкости нет, они разлетятся по законам стандартной задачи рассеяния. Но в нашем случае есть малая вязкость, которая образована отталкивающимися при столкновении частицами, подобно тому, как это происходит в уравнении Больцмана, обобщенном Боголюбовым. Если же есть притягивающая часть взаимодействия, то именно она может способствовать образованию димера.

Чтобы увязать образование димера с задачей рассеяния, необходимо задачу вращения двух частиц друг относительно друга по эллипсу увязать с начальными данными рассеивающихся частиц. Прежде всего мы рассмотрим, как это принято в молекулярной физике, изотропию газа: сколько частиц газа летят друг на друга.

Обычное рассуждение в молекулярной физике включает предположение о симметрии среднего движения молекул по всем шести направлениям. Следовательно, навстречу друг другу движется $1/12$ часть всех частиц. Таких направлений три, поэтому сталкивается $1/4$ часть всех молекул.

Для исходных рассеивающихся частиц задается энергия E и прицельный параметр B . Момент M , как и энергия E , сохраняется. Как известно,

$$M^2 = B^2 E. \quad (19)$$

Выразив энергию E , получим для притяжения

$$E = \frac{(mv^2)/2 + \Phi(r)}{1 - B^2/r^2} \quad (20)$$

в области, где $r \leq B$.

Одетый или “термический” потенциал $\Psi(r)$ является притягивающим. Кроме того, поскольку объем V является большим параметром, если $\Psi(r) = \Psi(ar^2/V)$, где a – эффективный радиус, разложить по $1/V$, то получим

$$\Psi\left(\frac{ar^2}{V}\right) = C_1 + \frac{C_2 ar^2}{V} + O\left(\frac{1}{V^2}\right). \quad (21)$$

Разлагая

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 = \frac{(r_1 - r_2)^2}{2} + \frac{(r_1 + r_2)^2}{2}, \quad (22)$$

мы можем, подобно тому, как это было сделано в [17], произвести разделение переменных в двухчастичной задаче и прийти к задаче рассеяния для пары частиц и к задаче их совместного движения (для $r_1 + r_2$). Тогда в задаче рассеяния к потенциалу взаимодействия Леннарда-Джонса добавится притягивающий квадратичный потенциал $-C_2 \rho r^2$ (перевернутая парабола), $\rho = a/V$.

⁴⁾ Дискуссия между Релеем и Рябушинским была опубликована в журнале “Nature” [16].

Спектр Колмогорова получен из соображений изотропии и размерности. Мы применяем соображения размерности и в термодинамике, рассматривая задачу рассеяния и связывая устойчивые значения энергии с температурой.

В полученной таким образом задаче рассеяния, как правило, имеются две точки покоя – устойчивая $E_{\min}$ и неустойчивая $E_{\max}$. Их отношение является безразмерной величиной. В термодинамике безразмерной величиной является $Z = PV/NT$, где P – давление, N – число частиц, T – температура, и в силу того, что устойчивая точка покоя по смыслу отвечает температуре, то соотношение

$$Z = \frac{PV}{NT} = \frac{E_{\min}}{E_{\max}}$$

позволяет нам построить на графике T , $\rho = N/V$ кривые $Z = \text{const}$.

Кривая при $Z = 1$ называется *Zeno line* (или *парабола Бачинского*), а геометрическое место точек начала кривых при $Z = \text{const}$ при $B \rightarrow \infty$ – *бинодалью*.

Теория размерностей, которую мы здесь применяем, безусловно, связана с подобием, а значит, с теорией групп. Однако, как утверждал Колмогоров, который применил подобную же концепцию к хаосу турбулентных пульсаций, строгий подход к его теории с точки зрения математической логики невозможен. Тем не менее этот подход более строг, чем всевозможные эвристические способы замкнуть цепочку уравнений Рейнольдса, в том отношении, что исходит из простых и единообразных постулатов [18]. Точно так же и вириальные разложения в цепочках Боголюбова и в теории ансамбля Гиббса, множество способов замыкания уравнений Орнштейна–Цернике в зависимости от их соответствия с тем или иным экспериментом, опровержение авторами [19] гипотезы Марка Каца вообще не приводят к математическому обоснованию этих методов.

В математическом эксперименте по моделированию молекулярной динамики методом Монте-Карло используются мощные компьютеры, на которых проводится счет в течение двух недель. Флуктуационные трудности вблизи критических точек не позволяют определить их с достаточной степенью точности. Счет по тем аналитическим формулам, которые следуют из теории размерностей, может быть проведен для заданного потенциала взаимодействия на домашнем компьютере в течение часа. Это позволяет поставить обратную задачу – уточнение потенциала, отвечающего данному газу или смеси газов – в частности, задачу нахождения класса потенциалов, отвечающих экспериментальному углу наклона *Zeno line* (см. рис. 2 в работе [20]).

5. НОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

Для размерности ≥ 3 распределение в теории чисел связано с распределением, которое в квантовой физике называется распределением Бозе–Эйнштейна. Отличие лишь в том, что при этих размерностях распределение в теории чисел умножается еще на важную величину – объем V . Производная по V отвечает в термодинамике давлению, которое, очевидно, уже не содержит прямой зависимости от объема V и, значит, точно совпадает с распределением в теории чисел. В этом месте в распределении Бозе–Эйнштейна есть еще один “прокол”. Он, видимо, был связан с

тем, что в пределе при большом химическом потенциале должен был возникнуть идеальный газ. Это верно, разумеется, однако в идеальном газе не только $\mu \rightarrow \infty$, но и давление мало. Поэтому эту “дырку” в распределении Бозе–Эйнштейна также необходимо “заштопать”, что мы и сделали в работах [21], [22].

Пусть $V_{\max}$ – то значение объема, при котором с указанной заранее точностью происходит совпадение энтропии теории чисел (обобщающей энтропию Бозе–Эйнштейна) с энтропией Шеннона. Положим при $T = T_{\text{cr}}$

$$\begin{aligned} \varphi(V) &= \int_V^{V_{\max}} \sqrt{V_{\max}^2 - x^2} dx + V_{\max} \quad \text{при } V \leq V_{\max}, \\ \varphi(V) &= V \quad \text{при } V \geq V_{\max}. \end{aligned} \quad (23)$$

Например, на эту функцию мы можем умножить бозе-распределение, вместо умножения на V .

Исходя из формулы для Zeno line можно найти точки, в которых изохоры пересекаются с Zeno line. Исходя из этого и альтернативы бозе-конденсата в виде уменьшения степеней свободы, т. е. уменьшения размерности, можно однозначно определить функцию $\varphi_\gamma(V)$, на которую нужно умножить распределение теории чисел, чтобы получить распределение классических частиц.

Новое распределение по импульсам и координатам зависит от температуры и плотности как от параметров.

Zeno line отвечает фокальной точке на лагранжевом многообразии. Для определения этой точки достаточно точности $o(1/V)$, т. е. Zeno line определяется двумя членами разложения термического (одетого, экранированного) потенциала относительно малого параметра $1/V$.

Следовательно, зависимость распределения по импульсам частиц со значениями на двумерном лагранжевом многообразии, отвечающем термодинамическим параметрам T , P , S , ρ , определяется лишь двумя первыми членами вириального разложения термического потенциала $\Psi(ar^2/V)$. Одетый потенциал, как известно, входит как аддитивная добавка к химическому потенциалу μ . Поэтому окончательное распределение по импульсам и координатам будет иметь вид формулы, приведенной в работе [21], в которой нужно переобозначить $\mu = \tilde{\mu} + \Psi(ar^2/V) = \tilde{\mu} - C_1 - C_2(ar^2/V) + O(1/V^2)$, $\tilde{\mu}$ – новый химический потенциал. Наше распределение, таким образом, зависит от классического гамильтониана вида

$$H = \frac{p^2}{2m} + \Psi\left(\frac{ar^2}{V}\right). \quad (24)$$

Если $H = H_1 + H_2$ и $\{H_1, H_2\} = 0$ ($\{\cdot, \cdot\}$ – скобка Пуассона), то распределения при $H = H_1$ и при $H = H_2$ отвечает двум независимым событиям. В отличие от квантового случая, так называемого “обменного взаимодействия” в этом случае нет.

Распределение, отвечающее $H = H_1 + H_2$, не равно произведению распределений, отвечающих H_1 и H_2 . Следовательно, условие аддитивности энергии не выполняется.

**6. ПОТЕНЦИАЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛЕННАРДА-ДЖОНСА
И ПОТЕНЦИАЛЫ, БЛИЗКИЕ К НЕМУ**

Закон соответственных состояний Ван-дер-Ваальса устанавливает соответствие между различными газами. Наиболее точные расчеты получаются с помощью методов молекулярной динамики, которые требуют большого машинного времени. Кроме того, эти методы требуют знания потенциала взаимодействия между частицами.

Мы здесь установим закон соответствия заданного потенциала взаимодействия с картиной на диаграмме $\rho-T$, где ρ – плотность, T – температура, с помощью классической задачи рассеяния. Это показано нами в работе [23].

Принцип изотропии (симметрии по всем направлениям) является одним из ключевых принципов молекулярной физики. Он также должен быть строго сформулирован математически, как принцип изотропии в теории турбулентности Колмогорова, условия Борна–Кармана в теории кристалла (проблема конечности объема кристалла), особенно в связи с бурным развитием компьютерной молекулярной динамики, подобной компьютерной анизотропной турбулентности [24], [25].

В задаче рассеяния в качестве потенциала взаимодействия рассматривают потенциал Леннарда-Джонса

$$\Phi(r', r'') = 4\varepsilon \left(\frac{a^{12}}{\|r' - r''\|^{12}} - \frac{a^6}{\|r' - r''\|^6} \right), \quad r = r' - r'', \tag{25}$$

где ε – энергия глубины ямы, a – эффективный радиус, $\|r' - r''\|$ – расстояние между двумя частицами с радиус-векторами r', r'' . В двухчастичной задаче при отсутствии внешнего потенциала задача приводится к одномерной радиально-симметричной.

Минимальное значение фактора сжимаемости Z для данного ρ равно $Z_{\min} = E_{\min}/E_{\max}|_{B=B_{\max}}$. Значение Z на бинодали равно $Z = 1 - Z_{\min}$. При $Z_{\min} = 0.8\varepsilon$ и $\rho = 0$ оно соответствует температуре Бойля. Как известно, точка на бинодали, соответствующая $Z_{\min}$ для значения $\rho = 0$, отвечает абсолютному нулю. Чтобы получить бинодаль, мы должны приравнять $\rho_1 Z_1 = \rho_2 Z_2$ на диаграмме, изображенной на рис. 1а:

$$B_{\max} = \infty, \quad \text{при } C_2 \neq 0, \quad Z \geq 0.29.$$

Температура и давление почти не меняются на интервале от $Z_{cr} = 0.296$ до $Z = (3/2)Z_{cr}$. В результате получается кривая, изображенная на рис. 1а (см. (27), (28)).

В таблице приведены данные, отвечающие полученной диаграмме (для $B = 100$ в “молекулярных” значениях). Отметим расхождение основных безразмерных соотношений, полученных по данными молекулярной динамики, с теоретическими соотношениями, полученными из цепочки ББККИ и n -частичного распределения Гиббса.

Z_{cr}	ρ_{cr}/ρ_B	T_{cr}/T_B
0.29	0.273	0.36
0.308	0.285	0.38
0.375	0.333	0.296

В верхней строчке таблицы указаны теоретические значения для Z_{cr} , ρ_{cr}/ρ_B и T_{cr}/T_B , полученные автором, во второй строчке – значения этих же величин

Рис. 1. Кривая $Z(\rho)$ от точки $Z = 0.17$ до точки $Z_{\text{cr}} = 0.29$ идет по тонкой кривой, а далее – по жирной; штриховая линия – гипербола, $\rho_B = 0.246$ (а). При $Z < 0.17$ жидкость практически несжимаема: в $(\rho-T)$ -диаграмме этот отрезок выглядит, как гипербола $(\rho/\rho_B)(1 - \rho/\rho_B) = (T/T_B)(1 - T/T_B)$. Изотермы в области жидкой фазы (б). Гипотетическая λ -точка в жидкой фазе отвечает $Z \sim 0$, $P \sim 0$. При $Z = 1$ прямые утыкаются согласно параболе Бачинского (см. ниже рис. 3).

по последним данным молекулярной динамики и теоретической физики для потенциала Леннарда-Джонса, в третьей строчке – значения, полученные из уравнения Ван-дер-Ваальса, которое является эмпирическим и даже “более эмпирическим”, чем приведенный в этом разделе закон соответствия.

Для отношения T_{cr}/T_B в различных справочниках приводятся разные данные, поскольку определить T_B весьма сложно: молекулярная динамика не дает значения T_B . В физической литературе выводится потенциал взаимодействия для благородных газов – это потенциал Леннарда-Джонса. Поэтому интересно сравнить данные, полученные на основе приведенного принципа соответствия, с соответствующими значениями для газов.

Значение Z_{cr} очень точно определяется из эксперимента, оно равно 0.29 для благородных газов, азота, кислорода, пропана. Значение ρ_{cr}/ρ_B (отношение ρ_{cr} к ρ_B , т. е. ко всей длине отрезка по ρ , где Zeno line пересекает ось абсцисс, см. рис. 2) в приведенном автором принципе соответствия совпадает с соответствующими значениями для воды, аргона, ксенона, криптона, этилена и ряда других газов.

При $C_2 = 0$ значение Z_{min} , получаемое при $\mu = 0$, имеет вид

$$Z_{\text{min}} = \frac{\varphi'_\gamma(V)}{\varphi_\gamma(V)} \frac{\zeta(d+1)}{\zeta(d)}, \quad (26)$$

где ζ – функция Римана, $\gamma = 0.4$. Для любого $Z \leq 1$ имеем

$$Z = \frac{\varphi'_\gamma(V)}{\varphi_\gamma(V)} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+2)} \frac{\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\gamma+1} d\varepsilon}{e^{\varepsilon-\kappa}-1}}{\int_0^\infty \frac{\varepsilon^\gamma d\varepsilon}{e^{\varepsilon-\kappa}-1}} = \frac{\varphi'_\gamma(V)}{\varphi_\gamma(V)} \Psi(\kappa), \quad \kappa = \frac{\mu}{T}, \quad \varphi'_\gamma(V) = \frac{\partial \varphi}{\partial V}, \quad (27)$$

Рис. 2. Бинодаль и Zeno line.

где Γ – гамма-функция. При $\kappa = 0$ получаем (26). Далее мы находим $\mu(T, V)$ как функцию от V из условия

$$\frac{\varphi'_\gamma(V)}{\varphi_\gamma(V)} \Psi(\kappa) = 1, \quad \kappa = \kappa(V).$$

С другой стороны, при $Z = 1$ выполняется парабола Бачинского, следующая из наклона Zeno line. Следовательно, зависимости $P(T)$, $T(\rho)$, $P(\rho)$ известны: $P(T)$ – парабола Бачинского, $T(\rho)$ – гипербола, $P(\rho)$ – парабола.

Найдем P согласно исправленному распределению Бозе-Эйнштейна:

$$P = \frac{\varphi'_\gamma(V) T^{\gamma+2}}{\Gamma(\gamma+2)} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\gamma+1} d\varepsilon}{e^{-\kappa} e^\varepsilon - 1}, \quad (28)$$

где значение $\kappa = \kappa(V)$ определено в (27) через $\varphi_\gamma(V)$ и $\varphi'_\gamma(V)$. Отсюда из параболы Бачинского $P(\rho)$ ($\rho = 1/V$) мы однозначно получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого рода для функции $\varphi_\gamma(V)$. Константа находится из условия $\varphi_\gamma(V)/V \rightarrow 1$ при $V \rightarrow \infty$ (переход в идеальный газ; ср. [17], рис. 1а – жирная кривая).

Значение функций $\varphi_\gamma(V)$ мы получили выше при $Z \leq 0.17$ (рис. 16). На гиперболе $Z = \rho_{\text{cr}}/\rho$ значение функции $\varphi(V)$ было вычислено в [17].

Отрезок ($Z = 0.17$, $Z = 0.29$) содержит новую переменную $\gamma < 0.2$. Функция $\varphi_\gamma(V)$ теперь также зависит от γ . Поэтому два условия на $Z_{\min}$ (интервал тонкой кривой (рис. 1а) и значение $\varphi_\gamma(V)$ при $Z = 1$) в силу тех же зависимостей на $Z = 1$, о которых упоминалось выше, позволяет точно определить изотермы (на рис. 3 это сделано приближенно). Из значения $Z_{\min}(\rho)$ на тонкой кривой рис. 1а (при правильном параметре $B \gg 1$) мы получаем зависимость γ от переменной V , $\gamma = \gamma(V)$, из уравнения

$$\frac{\varphi'_\gamma(V)}{\varphi_\gamma(V)} \Psi_\gamma(0) = Z_{\min} \left(\frac{1}{V} \right). \quad (29)$$

Кривая $\gamma(V)$ отвечает состоянию флюидов, отделяющему флюиды от состояния “жидкость–газ” (см. рис. 3). Это решение $\gamma(V)$ согласуется с $\kappa(V, \gamma(V))$ и с усло-

виями $Z = 1$,

$$\Psi_\gamma(\kappa) = \frac{\Psi_\gamma(0)}{Z_{\min}(1/V)}, \quad (30)$$

а также с $T(\rho)$, $P(\rho)$ и $T(P)$. При $Z = 1$ удобнее выразить все величины через температуру согласно гиперболе $T(\rho)$. В этом случае будут играть роль T_{cr} и P_{cr} .

Таким образом, оказывается, что помимо вычисления Zeno line самым важным отрезком кривой $1 - Z_{\min}$ является отрезок от $Z = 0.29$ до $Z = 0.17$. Только этот отрезок позволяет определить функцию $\varphi_\gamma(V)$, необходимую для описания одночастичного распределения по p и q для случая взаимодействия Леннарда-Джонса.

Ван-дер-ваальсовское притяжение вида a/r^6 есть главный член асимптотики при $r \rightarrow \infty$. Из эксперимента следует, что на меньших расстояниях может существовать и член вида

$$\frac{b}{r^4} e^{-\gamma r^2}. \quad (31)$$

Следовательно, при достаточно малых γ он может давать дополнительный вклад. Поскольку приведенный метод теории размерностей позволяет дать аналитические формулы для бинодали и Zeno line, то из сравнения с экспериментом для Z_{cr} мы можем подсчитать величину параметра b .

Естественно, что спин-спиновое взаимодействие для He^3 , которое отсутствует в случае He^4 , должно дать большой вклад в указанный выше член. Действительно, для потенциала Леннарда-Джонса Z_{cr} дает значение 0.29, что совпадает с экспериментальными значениями для благородных газов. Это значение ниже, чем для He^4 ($Z_{\text{cr}} = 0.30$), и еще ниже, чем для He^3 ($Z_{\text{cr}} = 0.32$). Мы подсчитаем параметр b для этого случая в качестве примера обратной задачи, о которой говорилось выше.

Приведем подробные вычисления для определения фактора сжимаемости и построения Zeno line. Рассмотрим потенциал

$$E(r) = \frac{-\alpha r^4 + r^2 U(r)}{B^2 - r^2}, \quad (32)$$

его первая производная

$$E'(r) = \frac{r(2B^2 U(r) + r(2\alpha r(-2B^2 + r^2) + (B^2 - r^2)U'(r)))}{(B^2 - r^2)^2}, \quad (33)$$

вторая производная

$$E''(R) = \frac{1}{(B^2 - r^2)^3} (2(B^4 + 3B^2 r^2)U(r) + r(-2\alpha r(6B^4 - 3B^2 r^2 + r^4) + 4(B^4 - B^2 r^2)U'(r) + r^2(B^2 - r^2)^2 U''(r))). \quad (34)$$

Отсюда получаем уравнение шестой степени

$$(B^2 - r^2)^2 (-8B^2 U(r) + r(2B^2 U'(r) + r^2 U'(r) + 2B^2 r U''(r) - r^3 U''(r))) = 0.$$

Его решение имеет вид

$$B = \sqrt{-\frac{-r^3 U'(r) + r^4 U''(r)}{-8U(r) + 2r U'(r) + 2r^2 U''(r)}}. \quad (35)$$

Подставляя значение $B(r)$ в (31), находим $E(\alpha)$ – Zeno line. Затем, полагая $B = 100$, находим значения первой производной. Приравниваем ее нулю и находим отношение $(E_{max} - E_{min})/E_{max}$.

На рис. 2 при $T = T_{cr}$ в точке максимума бинодали $Z = Z_{cr}$ и при $Z \geq Z_{cr}$ определяется $T_{cr}(Z, \rho/\rho_{cr}) = T_{cr} = 1$ в приведенных координатах, $T_r = T/T_{cr}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку при $T_r = 1$ имеем $Z = PV/R = P/\rho$, то условие $T_{cr}(Z, \rho) = 1$ определяет не только зависимость $Z(P)$, но и зависимость $P(V)$, а тем самым при $Z \geq Z_{cr}$

$$\varphi(V) = \int^V P(V) dV + \text{const.} \quad (36)$$

Подсчет обратной задачи позволяет найти значение константы в формуле (25) для He^3 . При $b = a^4/30$ получается, что значение $Z_{cr} = 0.32$.

7. УЧЕТ ЭНТРОПИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ $\varphi_\gamma(V)$

Рассмотрим потенциал Ω_γ для распределения Бозе–Эйнштейна при $\gamma = (d-1)/2$, где d – фрактальная размерность. Потенциал Ω_γ при размерности $d = 2\gamma + 2$ имеет вид

$$\Omega_\gamma^{\text{id}} = \left\{ \frac{\pi^{1+\gamma} T^{2+\gamma} \varphi_\gamma(V)}{\Gamma(2+\gamma)} \int_0^\infty \xi^{1+\gamma} \left(\frac{1}{e^{(\xi-\kappa)} - 1} - \frac{N}{e^{(\xi-\kappa)N} - 1} \right) d\xi \right\}, \quad \kappa = \frac{\mu}{T}, \quad (37)$$

отсюда

$$P = \frac{\partial \Omega_\gamma^{\text{id}}}{\partial V}, \quad N = \frac{\partial \Omega_\gamma^{\text{id}}}{\partial \mu}, \quad S = \frac{\partial \Omega_\gamma^{\text{id}}}{\partial T}. \quad (38)$$

При $\gamma > 0$ второй член в формуле (36) может быть отброшен (он стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$). В частности,

$$S = \frac{\partial \Omega_\gamma^{\text{id}}}{\partial T} = N((\gamma + 2)Z(\gamma, \kappa) - \kappa). \quad (39)$$

Пусть $\gamma = \gamma_0$ – точка, в которой происходит конденсат. На изохоре, исходящей из точки конденсата $T_r = 1$, $P_r = 1$ ($P_r = P/P_{cr}$), где $\kappa = 0$, при $\gamma < \gamma_0$ в силу возрастания энтропии по γ при $\gamma \leq \gamma_0$ в точке $\gamma = \gamma_0$ происходит фазовый переход второго рода (излом, см. рис. 3 работы [23]), и далее при $\gamma = \gamma_0$ изохора меняется от $\kappa = 0$ до $\kappa = -\infty$ [26].

Произведем преобразование поворота для потенциала Ω около точки V_γ/R , отвечающей точке возникновения конденсата и $P = 1$ (см. рис. 4 работы [23]). Подберем угол поворота и преобразование так, чтобы после поворота при $Z = 1$ совпадение с точками

$$\tilde{P} = c \frac{R}{V} \left(1 - \frac{cR}{4bV} \right)$$

при $\rho = R/V_\gamma$ и $\rho = 1$ было точным, а при $\rho < 1$ продолжим кривую $Z = 1$ идеальным газом и все изотермы соответственно продолжим прямыми отрезками, проходящими в точку $\tilde{Z} = 1$, $\tilde{P} = 0$ (преобразование подобия).

При $\tilde{Z} < Z_\gamma = V_\gamma/R$, оставляя преобразование (23), мы совершаем лишь поворот при каждом $\tilde{Z} = \tilde{V}/R$, $\tilde{P} = 1$ так, чтобы попасть точно на прямую $\tilde{Z} = 1$ в соответствующую Zeno line точку $\tilde{P}$.

Рис. 3. Изотермы для $T_r > 1$. Штриховыми линиями изображены теоретические изотермы, в которых учитывается только поворот.

Оказывается, что, даже если мы не делаем преобразование, отвечающее (23), совпадение с экспериментальными изотермами достаточно хорошее (см. рис. 3). Если производить не только поворот, но и сжатие, то согласно (29), (30) это существенно его улучшает.

По изохорам рис. 3 работы [23] строятся изотермы при $T < T_{cr}$. На рис. 6 работы [23] определенное с помощью поворота давление P уже учитывает эффект поверхностного натяжения. Поскольку плотность в сосуде, где происходит переход в критическое состояние, равна $10/3$, то точки на изотерме, отвечающие переходу газ-жидкость, находятся однозначно из условия, что суммарная плотность ("вес") равна $10/3$.

Приведем преобразование поворота:

$$P' = 1 + \alpha P + \beta V, \quad V' = -\beta P + \alpha V, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Находим потенциал $\alpha\Psi = V' dP'$. Отсюда, подставляя V' и P' , получаем

$$(-\beta P + \alpha V)(\alpha P + \beta V) = V dP + d\left[\frac{\alpha\beta}{2}(V^2 - P^2) - \beta^2 PV\right],$$

$$\Psi = \Omega + \frac{\alpha\beta}{2}(V^2 - P^2) - \beta^2 PV$$

или

$$\Psi = \Omega(P', V') + \frac{\alpha\beta}{2}(V'^2 - P'^2) - \beta^2 P' V',$$

$$[-\beta P + \beta + (\alpha V - 0.3\alpha)](\alpha dP + \beta dV) = \frac{\alpha\beta}{2}(V^2 - P^2) - \beta^2 PV + \alpha\beta P - 0.3\alpha\beta V.$$

Ниже точки конденсата при $P = 1$ угол поворота зависит от V_γ/R для $\gamma < \gamma_0$. Это достаточно сложное преобразование. Тем не менее, поскольку оно происходит в плоскости $\tilde{P}, \tilde{V}/R$, оно не затрагивает координат $T, S/R$ и сохраняет лагранжевость (т.е. сохраняет дифференциальную форму уравнения состояния), так как в двумерном фазовом пространстве любое гладкое преобразование сохраняет лагранжевость, а координаты $T, S/R$ остаются неизменными. Важно, что S/R остается логарифмом от числа возможных вариантов.

Теперь перейдем к проецированию полученного двумерного многообразия в шестимерном пространстве на четырехмерное фазовое пространство.

Равенство $N = \text{const}$ вырезает из трехмерного лагранжева многообразия двумерную поверхность. Имеет место групповое свойство: величины V и S при изменении N в k раз изменяются в k раз. Отсюда следует, что это многообразие цилиндрическое. Поэтому его можно проецировать вдоль μ и N из шестимерного фазового пространства в четырехмерное, где явным действием, определяющим лагранжево многообразие, будет потенциал Гиббса $\Phi = N\mu(P, T)$.

Поскольку $N = \text{const} = R$, то это равенство вырезает двумерное цилиндрическое (в силу группового свойства) многообразие, зависящее от параметра $d = 2\gamma + 2$. Проецируя его вдоль N и μ , мы получаем двумерное многообразие в четырехмерном фазовом пространстве $P, V/R, T, S/R$.

Выразив μ как функцию от P и T : $\mu = \mu(P, T)$, мы получим потенциал $\Phi = R\mu(P, T)$ и соотношения $V = \partial\Phi/\partial P, S = \partial\Phi/\partial T$. Таким образом, возникает потенциал типа потенциала Гиббса $R\mu(P, T)$, определяющий лагранжево многообразие, неоднозначно проецируемое на плоскости P, T .

Аналогично предыдущему можно спроецировать полученное после поворотов лагранжево многообразие в преобразованных по V и P координатах вдоль μ и N на четырехмерное фазовое пространство. Поскольку от порядка преобразования координат P, V проецирование не зависит, это означает, что это же преобразование мы производим после проецирования.

Известен эксперимент, когда маленькая капля соединяется капилляром с большой и постепенно схлопывается, так как давление в маленькой капле больше, чем в большой. Таким образом, давление испытывает фазовый переход вместе с объемом вопреки представлениям стандартной термодинамики. Эти представления — лишь приближения по некоторым малым параметрам, как и все представления, упомянутые в работе [27].

Отметим, что значение $V = 0.17$ отвечает последней предельной точке, к которой стремятся все $V > 0.17$. Эта точка является фокусом, поэтому “квантование” термодинамики туннельным каноническим оператором [15] сильно “размывает” эту точку.

8. ГИДРОДИНАМИКА ФЛЮИДОВ

Гамильтониан, описывающий притяжение пар, как указано в разделе 6 (формула (32)), имеет вид

$$E(p - p', x - x') = \frac{||p - p'||^2 / (2m) + U(||x - x'||)}{1 - B^2 / ||x - x'||^2}, \quad ||x - x'|| \leq B,$$

где параметр B есть функция от T и ρ в силу изложенного в разделе 6.

Поскольку новое распределение нам известно, то мы можем написать и значение среднего гамильтониана (среднего поля)

$$H_{T,\rho}(p, q) = \int E_{T,\rho}(p - p', x - x') \sigma_{T,\rho}(p', x') dp' dx'.$$

Отвечающее этому среднему гамильтониану уравнение Лиувилля имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{T,\rho}(p, q, t)}{\partial t} = \{H_{T,\rho}(p, q, t), \sigma_{T,\rho}(p, q, t)\}, \quad (40)$$

где

$$H_{T,\rho}(p, q, t) = \int E_{T,\rho}(p - p', x - x') \sigma_{T,\rho}(p', x', t) dp' dx'. \quad (41)$$

Оно существенно отличается от известного уравнения Власова, приводящего к “оде-тому” потенциалу. Здесь “одет” весь гамильтониан⁵⁾. Соображения, которые приводил Власов относительно образования кристаллов, необходимо перенести на эти новые уравнения среднего поля.

Система уравнений (40), (41) сохраняет лагранжевость, т. е. если начальное условие есть δ -функция на лагранжевом многообразии, то в момент t решение системы (40), (41) будет также δ -функцией на лагранжевом многообразии.

Для члена, отвечающего отталкиванию (вязкости), т. е. при

$$||x - x'|| \geq B, \quad B = B(T, \rho), \quad (42)$$

при выполнении ряда гипотез, сформулированных Боголюбовым в работе [28] между формулами (9.27) и (9.28), справедлива формула Боголюбова (9.28) указанной работы. В частном случае она отвечает уравнению Больцмана.

Добавление формулы Боголюбова для отталкивания к уравнению (40) дает гидродинамику флюидов. Проверить справедливость гипотез Боголюбова можно, получив при $t \rightarrow \infty$ распределения (37).

9. СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ

Как автор уже писал, для размерности $d = 3$ можно вычислить два члена асимптотики при $N \rightarrow \infty$ в задаче о разложении целого числа $\mathcal{E}$ на N слагаемых и получить, в частности, поправку к закону Стефана–Больцмана [12], [9]. Наличие фоонов в задаче о сверхтекучести для He^3 и He^4 отвечает именно этой размерности [29]. Как уже отмечалось [30], основное дисперсионное соотношение для He^4 , полученное

⁵⁾ Более точные уравнения среднего поля получаются из вторичного квантования по Шенбергу классических частиц (см. [19]).

Боголюбовым [28], в главном члене асимптотики по N имеет вид

$$\sqrt{k^2 \tilde{V}(0) + \frac{h^2 k^4}{4}},$$

где $V(r_1 - r_2)$ есть (отталкивающее) взаимодействие между молекулами.

Второй член асимптотики по N (мы называем его квазитермодинамическим) позволяет учитывать ротонны и имеет вид

$$\sqrt{k^2 \tilde{V}(k) + \frac{h^2 k^4}{4}}. \quad (43)$$

Он отвечает кривой Ландау. Для He^3 первый член равен нулю, а второй член имеет вид [31]

$$\tilde{V}(k) - \tilde{V}(0) + \frac{hk^2}{2}. \quad (44)$$

Он отвечает притяжению, а фононам соответствует добавка b/r^4 к ван-дер-ваальсовскому члену a/r^6 .

Рассмотрим сначала классическое уравнение самосогласованного поля (уравнение Власова) для функции распределения $\rho(x, p, t)$. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + p \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} - \alpha \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int V(x - \xi) \rho(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 0, \quad (45)$$

где $u(x) \in C^2$ и $V(x) \in C^2$ являются внешним потенциалом и потенциалом взаимодействия соответственно. Здесь

$$p \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left(p, \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial p} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)$$

и т. д. Для краткости мы явно не указываем скалярное произведение n векторов, если это не ведет к недопониманию. Уравнение в вариациях имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + p \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial p} - \alpha \frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int V(x - \xi) \sigma(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \\ - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial p} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int V(x - \xi) \rho(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Пусть $\Lambda^n = \{x = X(\alpha), p = P(\alpha)\}$ – инвариантное лагранжево многообразие относительно гамильтоновой системы

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int V(x - X(\alpha)) d\mu_\alpha, \quad (47)$$

так что соответствующий гамильтониан H есть константа на многообразии Λ^n

$$\frac{P^2(\alpha)}{2} + u(X(\alpha)) + \int V(X(\alpha) - X(\alpha')) d\mu_{\alpha'} = E = \text{const}, \quad (48)$$

где $\alpha \in \Lambda^n$, $d\mu_\alpha$ – инвариантная мера на Λ^n .

Пусть δ_Λ есть δ -функция на этом многообразии. Нетрудно убедиться [32], что δ_Λ удовлетворяет стационарному уравнению Власова (45) в смысле распределений.

На карте, диффеоморфно спроецированной на координатную x -плоскость, δ_Λ имеет вид

$$\delta_\Lambda = \frac{\delta(p - \nabla S)}{J},$$

где

$$S(x) = \int_{\alpha_0}^{\alpha(x)} p dx$$

есть действие на δ_Λ , а J – якобиан $|dX/d\mu_\alpha|$. В этом случае решение уравнения (46) было получено в виде

$$\sigma = f(x) \frac{\delta(p - \nabla S)}{J} + a(x) \frac{\partial}{\partial p} \frac{\delta(p - \nabla S)}{J}, \quad (49)$$

а решения для f и a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla S, \nabla f) - (\nabla, a) + (a, \nabla) \ln J &= 0, \\ \frac{\partial a}{\partial t} + (\nabla S, \nabla) a + (a, \nabla) \nabla S + \nabla \int V(x - X(\alpha)) f(X(\alpha)) d\mu_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Подставляя $a = \nabla g$, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla S, \nabla f) - \Delta g + (\nabla g, \nabla \ln J) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial t} + (\nabla S, \nabla g) + \int V(x - X(\alpha)) f(X(\alpha)) d\mu_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Это приводит при $u(x) = 0$ к дисперсионному члену Боголюбова (43), если положить $h = 0$.

Для того чтобы получить квазиклассическую поправку в произвольной канонической карте, нужно перейти к p -представлению относительно некоторых координат в уравнении Хартри. Это фактически эквивалентно тому, чтобы рассматривать уравнение типа Хартри [33]

$$\left[H_0 \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \int dy \psi^*(y) H_1 \left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}; y, -ih \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(y) \right] \psi(x) = \Omega \psi(x), \quad (52)$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ – комплекснозначная функция, $h > 0$, $\Omega \in \mathbb{R}$, и оператор $-ih\partial/\partial x$ действует первым, а x – вторым. Функция H_1 удовлетворяет условию $H_1(x, p_x; y, p_y) = H_1(y, p_y; x, p_x)$. Уравнение (49) является обобщением стандартного уравнения Хартри (уравнение (1) в [34], где $N = 1$). Уравнение (52) нужно рассматривать, если, например, нужно попытаться найти решение уравнения Хартри в импульсном представлении

$$\psi(x) = \int \tilde{\psi}(p) e^{(i/h)px} \frac{dp}{(2\pi h)^{n/2}}.$$

Также будем рассматривать систему в вариациях, соответствующую уравнению (52), которую можно получить следующим образом. Помимо уравнения (52) выпишем сопряженное уравнение и рассмотрим вариации обоих уравнений в предположении,

что вариации $\delta\psi = F$ и $\delta\psi^* = G$ независимы. Система в вариациях имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \left[H_0\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Omega + \int dy \psi^*(y) H_1\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}; y, -ih \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi(y) \right] F(y) + \\
 & + \int dy \left((y) H_1\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}; y, -ih \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi(x) + \right. \\
 & + \left. \psi^*(y) H_1\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}; y, -ih \frac{\partial}{\partial y}\right) F(y) \right) \psi(x) = -\beta F(x), \\
 & \left[H_0\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Omega + \int dy \psi(y) H_1\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}; y, -ih \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi^*(y) \right] G(x) + \\
 & + \int dy \left(F(y) H_1\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}; y, -ih \frac{\partial}{\partial y}\right) \psi^*(y) + \right. \\
 & + \left. \psi(y) H_1\left(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}; y, -ih \frac{\partial}{\partial y}\right) G(y) \right) \psi^*(x) = -\beta G(x).
 \end{aligned} \tag{53}$$

Уравнения (52) и (53) играют важную роль в задаче построения асимптотических решений N -частичного уравнения Шредингера при $N \rightarrow \infty$.

Например, спектр системы (53) (множество возможных значений переменной β) соответствует спектру квазичастиц. А именно, разница между энергией возбужденного состояния и энергией основного состояния задается выражением $\sum_k \beta_k n_k$, где числа $n_k \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{1, \infty}$, равные нулю, начиная с некоторого k , определяют собственные функции и собственные значения возбужденного состояния, тогда как числа $\beta_k \in \mathbb{R}$ являются собственными значениями системы (53).

В данной работе рассматриваются асимптотические решения уравнений (52) и (53) при h , стремящемся к нулю, равномерные по k .

Асимптотические решения уравнения (52) задаются каноническим оператором на лагранжевом многообразии $\Lambda^n = \{x = X(\alpha), p = P(\alpha)\}$, инвариантном относительно гамильтоновой системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x}, \tag{54}$$

где

$$H(x, p) = H_0(x, p) + \int d\mu_\alpha H_1(x, p; X(\alpha), P(\alpha)),$$

$\alpha \in \Lambda^n$ и $d\mu_\alpha$ является инвариантной мерой на Λ^n . Лагранжево многообразие лежит на поверхности $H(x, p) = \Omega$. Если карта A диффеоморфно проецируется на x -плоскость, то канонический оператор действует как умножение на $\exp\{(i/h)S(x)\}/\sqrt{J}$, где $S(x) = \int p dx$ на Λ^n и $J = Dx/D\mu_\alpha$. Мы будем искать асимптотическое решение системы уравнений (53). Без ограничения общности, можно рассмотреть случай x -карты. Действительно, чтобы получить аналогичные выражения в p -карте, нужно рассмотреть преобразования Фурье уравнений (52) и (53) и применить те же самые методы, поскольку форма уравнений остается неизменной.

Будем искать асимптотические решения уравнений (53) в x -карте в виде

$$F(x) = \tilde{f}(x)\psi(x), \quad G(x) = \tilde{g}(x)\psi^*(x), \tag{55}$$

где функции f и g , в отличие от ψ и ψ^* , стремятся к некоторому пределу при $h \rightarrow 0$. Можно рассматривать и более общий случай, полагая, что f и g являются функциями от x и $-ih\partial/\partial x$, однако в главном члене при $h \rightarrow 0$ будем иметь

$$-ih \frac{\partial}{\partial x} e^{(i/h)S} \approx \frac{\partial S}{\partial x} e^{(i/h)S}$$

и, таким образом, получим функции f и g , зависящие только от x .

Второе уравнение в системе (53) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left[H_0 \left(x, ih \frac{\partial}{\partial x} \right) + \int dy \psi(y) H_1 \left(x, ih \frac{\partial}{\partial x}; y, \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi^*(y); \tilde{g}(x) \right] \psi^*(x) + \\ & + \int dy \left\{ \psi(y) \tilde{c}(y) H_1 \left(x, ih \frac{\partial}{\partial x}; y, ih \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi^*(y) + \right. \\ & \left. + \psi(x) \left[H_1 \left(x, ih \frac{\partial}{\partial x}; y, \frac{\partial}{\partial y} \right); \tilde{g}(y) \right] \psi^*(y) \right\} \psi^*(x) = \beta \tilde{g}(x) \psi^*(x), \end{aligned} \quad (56)$$

где $[A; B] = AB - BA$ и $c(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)$. Уравнение (52) используется для вывода уравнения (56). Заметим, что все члены в левой части уравнения (52), содержащие функции $\tilde{g}$, имеют порядок $O(h)$, так как в классическом пределе коммутатор двух операторов, зависящих от x и $-ih\partial/\partial x$, равен величине $(-ih)$, умноженной на скобку Пуассона от соответствующих классических величин. Таким образом, предполагается, что функция c , так же как и собственное значение β , имеет порядок $O(h)$. Изменим масштаб этих величин следующим образом:

$$c(x) = h\tilde{c}(x), \quad \beta = h\tilde{\beta}. \quad (57)$$

Теперь можно вывести уравнение для $\tilde{g}$, $\tilde{c}$ и $\tilde{\beta}$ в главном члене по h и получить первую поправку к нему из уравнения (53), в случае $H_0(x, p_x) = p_x^2/2 + U(x)$ и $H_1(x, p_x; y, p_y) = V(x, y)$ ⁶⁾:

$$\begin{aligned} (i\nabla S \nabla - \tilde{\beta})\tilde{g} + \int V(x, X(\alpha')) \tilde{c}(X(\alpha')) d\mu_{\alpha'} + \frac{h}{2}(-\Delta\tilde{g} + \nabla \ln J \nabla \tilde{g}) &= 0, \\ (i\nabla S \nabla - \tilde{\beta})\tilde{c} - \Delta\tilde{g} + \nabla \ln J \nabla \tilde{g} - \frac{h}{2}(-\Delta\tilde{c} + \nabla \ln J \nabla \tilde{c}) &= 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Это квазиклассическая поправка к формулам (51).

Теперь свяжем полученные результаты с решением уравнения в вариациях для уравнения Власова. Пусть $\hat{\rho}$ – оператор проекцирования на функцию ψ . Его ядро – это $\tilde{\rho}(x, y) = \psi(x)\psi^*(y)$, а его символ – это $\rho(x, y) = \psi(x)\psi^*(p)e^{(i/h)px}$. Оператор $\hat{\rho}$ удовлетворяет уравнению Вигнера, которое сводится к уравнению Власова при $h \rightarrow 0$. Оператор $\hat{\sigma}$ с ядром $F(x)\psi^*(y) + \psi(x)G(y)$ имеет вид

$$\hat{\sigma} = \tilde{f}\hat{\rho} + \tilde{\rho}\tilde{g}$$

и удовлетворяет уравнению в вариациях, соответствующему уравнению Вигнера, которое сводится к уравнению Власова. Здесь $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ являются операторами умножения на функции f и g . Видно, что в квазиклассическом приближении символ

⁶⁾Уравнение для более общего случая см. в [35].

оператора σ имеет порядок $O(\hbar)$, так как $\hat{\sigma} = [\hat{\rho}; \hat{g}] + \hbar \tilde{c} \hat{\rho}$ и

$$\sigma(x, p) \simeq \hbar \left(-i \sum_{a=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial p_a}(x, p) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_a} + \tilde{c} \rho \right).$$

Поскольку ρ – это δ_Λ -функция в квазиклассическом приближении, функция σ фактически является суммой δ_Λ -функции и ее производной. Уравнения (58) согласованы с уравнениями (55) для коэффициентов при δ и δ' . Таким образом, подход, предложенный в данной работе, также позволяет получить асимптотическую формулу для σ .

10. ПРОЦЕСС УПОРЯДОЧЕНИЯ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Однако если температура столь мала, что зрители “вмораживаются” в свои кресла и не в силах передвигаться, образуя кристалл, тогда Коровьеву оставшимся в живых надо раздать средства существования, не разбрасывая их случайным образом. Это как бы самое крайнее состояние – хаоса нет, зрители могут лишь слегка ерзать на своих креслах. Это обычное упорядоченное кристаллическое состояние. Кристалл же обладает еще симметриями.

Прежде чем рассматривать такое состояние, возможно, нужно говорить о разделении зрителей по рядам: ведь зрители в варьете располагаются по рядам, и, значит, прежде чем застыть, окоченеть, они еще могут общаться с соседями по своему ряду. Действительно, в варьете есть симметрия по рядам, и Коровьев может сначала разложить пачки купюр по рядам и затем раскидывать их в каждом ряду отдельно. Кроме того, большинство зрителей могут быть повернуты в сторону сцены, т. е. “ориентационно упорядочены”. Получается то, что в физике аналогично жидким кристаллам. Это состояние также уменьшает число степеней свободы. Кроме того, мы уже заметили, что импульсы, которые пробегают между особами разного пола и особами с разным цветом волос, могут сближать больше, чем голономная связь.

Пример неголономного двумерного кристалла. Заметим, что обычный кристалл можно считать результатом квантования конфигурационного пространства: точки в пространстве расположены в определенных местах, причем имеют место некоторые симметрии.

Рассмотрим круг, “проквантованный” по радиусу, т. е. набор эквидистантных окружностей с одним центром. В концах диаметра, соединяющего две ближние окружности, приделаны “коньки”, на которых внутренняя окружность скользит по внешней. Это неголономная связь. Чтобы образовать неголономный кристалл, “проквантуем” энергию $\int p dq = \alpha n$, где α – параметр квантования. Мы получили неголономный двумерный кристалл.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Общий случай – это симметрия (расслоение) по импульсам и координатам – также будем называть *обобщенным неголономным жидким кристаллом*.

Именно такая ситуация возникает в He^4 и He^3 при переходе в сверхтекучее состояние: расслоение на лагранжевы подмногообразия (47)–(51). При этом возникает и квазитермодинамика, как в случае поправки к закону Стефана–Больцмана. Поскольку энергия $\mathcal{E}$ уменьшается, а она при малых $\mathcal{E}$ равна $\hbar(n + 1/2) \sim N_{\text{выживших}}^3$, то здесь возникает бозе-конденсат и квантование типа Бора–Зоммерфельда, но не

более того. Только второй член асимптотики имеет место, как в случае поправки к закону Стефана–Больцмана.

Теория комплексного роста позволяет получить два члена асимптотики по N . Второй член мы назвали квазитермодинамикой. Он соответствует ротонам. Возникает при таком переходе и λ -точка [36].

Таким образом, можно сказать, что эта ситуация жидкого кристалла, в котором еще участвует главный боровский член квазиклассической асимптотики, и дальнейшие члены в принципе невозможно получить. Поэтому можно говорить, что жидкость He^4 и He^3 представляет собой квазиклассический, а не квантовый жидкий неголономный кристалл, при уменьшении температуры приближающийся к квантовому осциллятору по трансверсальным направлениям к лагранжеву расслоению. Число степеней свободы, как и в обычном кристалле, стремится к нулю. Именно, для He^4 в случае эргодичности получаем [15], [37]

$$\rho(q, p) \equiv \rho(p) = \beta \left(\frac{1}{2} |p|^2 - \frac{1}{2} p_0^2 \right), \quad \int \frac{(k, k) \tilde{V}(k)}{(\omega + (p, k))^2 - \hbar^2 \frac{(k, k)^2}{4}} \rho(p) dp = 1. \quad (59)$$

Соответственно для He^3

$$\int \frac{\tilde{V}(k) - \tilde{V}(0)}{\omega + (p, k) - \hbar(k, k)/2} \rho(p) dp = 1. \quad (60)$$

При фазовом переходе в сверхтекучее состояние, как показано в [15], мера $\rho(p) dp$ расслаивается на трехмерные лагранжевы многообразия и эргодичность переходит в колмогоровские торы (грубо говоря, переход эргодической картины в картину разделения переменных), происходит упорядочение в неголономный жидкий кристалл и возникает соотношение Боголюбова для He^4 и соотношение (41) для He^3 .

11. РАЗМЕРНОСТЬ МЕНЬШЕ 2 – НАНОСТРУКТУРЫ

Если $d < 1$ (т. е. $D < 2$), то объединение в пары или другие кластеры приводит к увеличению степеней свободы, поскольку $N_{\text{ст}}(\alpha)$ при $d < 1$ уменьшается с уменьшением D . Это означает, что во фрактальных структурах с размерностью Хаусдорфа, меньшей единицы (канторовых множествах), и объектах с беспорядочно расположенными нанопорами объединение частиц приводит к большей свободе. Если люди находятся в лабиринте, то нити, которые их связывают (нити Ариадны), помогают им выбраться на свободу. Только эти нити должны быть невидимыми – неголономными (например, они связываются по мобильному телефону).

Таким образом, изначально малая размерность (малая степень свободы) приводит к тому, что объединение отвечает увеличению степеней свободы. В нанотрубках, как показал автор, даже классические газы (например, H_2O) сверхтекучи. Если газ и жидкость находятся в системе с нанопорами, то должна возникать та же картина, которая описана в предыдущем разделе. В хаосе нанопор возникает лагранжево расслоение при температуре перехода в сверхтекучее состояние классического газа.

Благодарности. Автор приносит глубокую благодарность В. С. Воробьеву, не только проверившему все расчеты, но и сделавшему ряд полезных замечаний. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-офи_м).

Список литературы

- [1] V. P. Maslov, *Threshold levels in Economics*, arXiv:0903.4783.
- [2] А. Пукаре, *О науке*, Наука, М., 1983.
- [3] V. P. Maslov, “Dequantization, statistical mechanics, and econophysics”, *Tropical and Idempotent Mathematics*, Contemp. Math., **495**, eds. G. L. Litvinov, S. N. Sergeev, AMS, Providence, RI, 2009, 239–279.
- [4] V. P. Maslov, *Zeno-line, binodal, T- ρ diagram and clusters as a new bose-condensate bases on new global distributions in number theory*, arXiv:1007.4182.
- [5] P. Erdős, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 185–188.
- [6] H. N. V. Temperley, *Proc. Roy. Soc. A*, **199**:1058 (1949), 361–375.
- [7] В. Я. Френкель, *Яков Ильич Френкель*, Наука, М.–Л., 1966.
- [8] Э. Шредингер, *Что такое жизнь? С точки зрения физика*, Атомиздат, М., 1972.
- [9] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 77–85.
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 5: Статистическая физика*, Наука, М., 1964.
- [11] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 232–263.
- [12] В. П. Маслов, *ТМФ*, **154**:1 (2008), 207–208, arXiv:0801.0037.
- [13] В. В. Козлов, *Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре*, Современная математика, РХД, М., Ижевск, 2002.
- [14] В. П. Маслов, *ТМФ*, **161**:2 (2009), 224–242.
- [15] В. П. Маслов, *Квантование термодинамики и ультравторичное квантование*, Ин-т компьютерных исследований, М., 2001.
- [16] Rayleigh (Lord), J. W. S., *Nature*, **95**:2389 (1915), 66–68; 644; D. Riabouchinsky, *Nature*, **95** (1915), 591.
- [17] В. П. Маслов, *ТМФ*, **161**:3 (2009), 420–458.
- [18] У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова*, Фазис, М., 1998.
- [19] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, *Метод комплексного роста*, Эдиториал УРСС, М., 2000.
- [20] Е. М. Apfelbaum, V. S. Vorob’ev, *J. Phys. Chem. B*, **113**:11 (2009), 3521–3526.
- [21] V. P. Maslov, *Math. Notes*, **88**:1–2 (2010), 57–66.
- [22] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **17**:4 (2010), 400–413.
- [23] V. P. Maslov, *Math. Notes*, **87**:5–6 (2010), 728–737.
- [24] Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura, A. Uno, *Phys. Fluids*, **15**:2 (2003), L21–L24.
- [25] T. Ishihara, T. Gotoh, Y. Kaneda, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **41** (2009), 165–180.
- [26] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **17**:2 (2010), 240–250.
- [27] В. П. Маслов, *ТМФ*, **157**:1 (2008), 149–153.
- [28] Н. Н. Боголюбов, “Проблемы динамической теории в статистической физике”, *Избранные труды в трех томах. Т. 2*, Наукова думка, Киев, 1970, 99–196.
- [29] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:3 (2007), 304–318; **14**:4, 453–464; **15**:1 (2008), 98–101; **15**:2, 280–290.
- [30] V. P. Maslov, *Math. Notes*, **88**:3–4 (2010), 293–303.
- [31] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 690–708, arXiv:0710.0537.
- [32] V. P. Maslov, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, Dunod, Paris, 1972.
- [33] В. П. Маслов, “Уравнения самосогласованного поля”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **11**, ВИНТИ, М., 1978, 153–234.
- [34] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **2**:4 (1994), 527–534.
- [35] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **3**:2 (1995), 271–276.
- [36] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:2 (2009), 146–165.
- [37] В. П. Маслов, А. С. Мищенко, *Матем. сб.*, **189**:6 (1998), 85–116.