Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Васильев, А. В. Забродин, Самоподобные решения задачи лапласовского роста в полуплоскости, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 1, 28–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6593>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:39:51

© 2011 г.

Д. В. Васильев*, А. В. Забродин*[†]

САМОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛАПЛАСОВСКОГО РОСТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Исследован вариант задачи лапласовского роста в верхней полуплоскости с нулевым поверхностным натяжением. С помощью метода зависящих от времени конформных отображений найдено семейство самоподобных точных решений, которые выражаются в терминах гипергеометрической функции.

Ключевые слова: лапласовский рост, интегрируемые системы, конформные отображения, гармонические моменты.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе найдены некоторые самоподобные точные решения задачи о лапласовском росте в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ [1]. Напомним постановку задачи. Пусть γ – гладкая кривая в $\mathbb{H}$ без самопересечений, начинающаяся в точке $x_- \in \mathbb{R}$ и заканчивающаяся в точке $x_+ \in \mathbb{R}$ (предполагается, что $x_- \leq x_+$). Область, ограниченную данной кривой и отрезком $[x_-, x_+]$, обозначим через B (в работе [1] такие области были названы “толстыми разрезами”). Пусть кривая $\gamma = \gamma(T)$ эволюционирует с течением времени T согласно закону Дарси:

$$V_n(z) = \frac{1}{2} \partial_n \phi(z), \quad z \in \gamma. \quad (1.1)$$

Здесь ∂_n – нормальная производная на границе (нормальный вектор направлен наружу области B), $V_n(z)$ – нормальная скорость в точке $z \in \gamma$, а ϕ – единственная гармоническая функция в $\mathbb{H} \setminus B$ такая, что $\phi = 0$ на γ и лучах $[-\infty, x_-]$, $[x_+, +\infty]$, лежащих на действительной прямой; $\phi(z) = \text{Im } z + o(1)$ при $\text{Im } z \rightarrow +\infty$.

Как показано в работе [1], процесс роста хорошо определен, если углы $\alpha_{\pm}$ между кривой γ и действительной осью в точках $x_{\pm}$ являются острыми. В этом случае углы $\alpha_{\pm}$ и точки $x_{\pm}$ не изменяются с течением времени.

Сравнение такой постановки задачи с обычным лапласовским ростом в верхней полуплоскости показывает, что условия на функцию ϕ очень похожи: в стандартной

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

[†]Институт биохимической физики им. Н. М. Эммануэля РАН, Москва, Россия.

E-mail: zabrodin@itep.ru

постановке $\phi = 0$ на бесконечном контуре, проходящем от левой до правой бесконечности, а при $\operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$ функция $\phi \sim \operatorname{Im} z$. Важное различие состоит в том, что только конечная часть линии уровня $\phi = 0$, лежащая выше действительной оси, движется по закону Дарси. При этом оставшаяся часть контура, состоящая из лучей действительной оси, остается неподвижной, хотя на этих лучах градиент ϕ отличен от нуля.

Часто удобно рассматривать растущую область B как верхнюю половину области $D = B \cup \bar{B}$, симметричной относительно действительной оси, с границей $\Gamma = \gamma \cup \bar{\gamma}$. Здесь $\bar{B}$ – область в нижней полуплоскости, полученная из B комплексным сопряжением $z \rightarrow \bar{z}$. В дальнейшем мы будем называть такие области *симметричными*. Таким образом, мы можем расширить задачу (1.1) на всю плоскость “с помощью отражения”, т. е. положив

$$V_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \partial_n \phi(z), & z \in \gamma, \\ -\frac{1}{2} \partial_n \phi(z), & z \in \bar{\gamma}, \end{cases}$$

где ϕ – такая гармоническая функция в $\mathbb{C} \setminus D$, что $\phi(\bar{z}) = -\phi(z)$; $\phi = 0$ на Γ ; $\phi(z) = \operatorname{Im} z + o(1)$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$.

2. ФОРМУЛИРОВКА В ТЕРМИНАХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Мы применим обычный для задач с подвижными границами прием и переформулируем нашу задачу в терминах зависящего от времени конформного отображения на некоторую стандартную область из области $\mathbb{C} \setminus D(T)$, где нужно решить уравнение Лапласа (или в терминах обратного отображения). В нашем случае есть два выделенных выбора стандартной области – верхняя полуплоскость и внешность единичного круга.

2.1. Верхняя полуплоскость. Этот выбор является естественным, если мы рассматриваем первоначально поставленную задачу в верхней полуплоскости, не распространяя ее на нижнюю полуплоскость с помощью отражения. Пусть $p(z)$ – конформное отображение из $\mathbb{H} \setminus B$ (в “физической” z -плоскости) в $\mathbb{H}$ (в “математической” p -плоскости). Это отображение схематически показано на рис. 1. Мы нормируем отображение условием на ряд Лорана функции $p(z)$ на бесконечности (“гидродинамическая” нормировка):

$$p(z) = z + \frac{u_1}{z} + \sum_{k=2}^{\infty} u_k z^{-k}, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

С учетом данной нормировки отображение единственно. Верхняя часть границы (кривая γ) отображается в интервал $[p_-, p_+]$ на действительной оси, а лучи на действительной оси, лежащие вне B , отображаются на лучи $[-\infty, p_-]$ и $[p_+, \infty]$. Следовательно, все коэффициенты u_k – действительные числа. Первый коэффициент u_1 называется *емкостью* области B . Он всегда положителен. Нам также потребуется

Рис. 1. Конформное отображение $p(z)$. Также показан зеркальный образ области B в нижней полуплоскости.

обратное отображение $z(p)$. Оно может быть представлено в виде обратного ряда Лорана

$$z(p) = p - \frac{u_1}{p} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k p^{-k}, \quad |p| \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

с действительными коэффициентами a_k , связанными с u_k полиномиальными соотношениями. Ряд сходится при достаточно больших $|p|$.

Из сказанного ясно, что гармоническая функция $\text{Im } p(z)$ удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на $\phi(z)$, следовательно, $\phi(z) = \text{Im } p(z)$. Легко видеть, что $\partial_n \text{Im } p(z) = |p'(z)|$ на γ , следовательно, закон Дарси может быть записан в виде $V_n(z) = |p'(z)|/2$.

Принцип симметрии Шварца позволяет распространить эту формулировку задачи на всю плоскость следующим образом: функция $z(p)$ может быть аналитически продолжена на нижнюю полуплоскость как $\overline{z(\bar{p})}$. Аналитически продолженная функция конформно отображает комплексную плоскость с разрезом по действительной оси от p_- до p_+ на внешность симметричной области $D = B \cup \bar{B}$. Соответственно, обратная функция $p(z)$ удовлетворяет соотношениям $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ и $\partial_n \text{Im } p(z) = -|p'(z)|$ на $\bar{\gamma}$. Эволюция всего замкнутого контура $\Gamma = \gamma \cup \bar{\gamma}$ может быть единообразно описана законом $V_n(z) = |p'(z)|/2$ для любого $z \in \Gamma$.

Отображение $z(p)$ играет ключевую роль во вложении задачи в бездисперсионную иерархию Кадомцева–Петвиашвили, которое было найдено в работе [1]. При этом данная параметризация оказывается довольно неудобной для нахождения явных решений. Это связано с тем, что симметричным образом достроенная область в математической плоскости сингулярна (плоскость с разрезом) и, более того, зависит от времени. Существует другой выбор стандартной области, менее естественный с точки зрения интегрируемых систем, но более подходящий для нахождения явных решений.

2.2. Внешность единичного круга. В данном случае удобно с самого начала работать с симметричным образом достроенной областью. Пусть $f(w)$ – конформное

отображение из внешности единичного круга во внешность симметричной области D такое, что $f(\infty) = \infty$ и $f'(\infty) = r > 0$; таким образом, ряд Лорана в бесконечности имеет вид $f(w) = rw + u_0 + O(1/w)$, и все его коэффициенты действительны. Коэффициент r называется (внешним) конформным радиусом области D . Связь с ранее рассмотренным конформным отображением такова: пусть $w(z)$ – обратная функция к $f(w)$, тогда

$$p(z) = r \left(w(z) + \frac{1}{w(z)} \right) + u_0, \quad r = \frac{p_+ - p_-}{4}, \quad u_0 = \frac{p_+ + p_-}{2}.$$

Перепишем закон Дарси в виде динамического уравнения относительно функции $f(w) = f(w, T)$. Для этого нам потребуется кинематическое соотношение, которое можно вывести непосредственно. Пусть $z(\sigma, T) = x(\sigma, T) + iy(\sigma, T)$ – произвольная параметризация контура, здесь σ – монотонно возрастающая функция длины дуги. Тогда

$$V_n = \frac{d\sigma}{dl} (\partial_T x \cdot \partial_\sigma y - \partial_T y \cdot \partial_\sigma x) = \frac{1}{2i} \frac{d\sigma}{dl} (\partial_T \bar{z} \cdot \partial_\sigma z - \partial_T z \cdot \partial_\sigma \bar{z}), \quad (2.3)$$

где $dl = |dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ – линейный элемент вдоль контура. Примем соглашение, что скорость $V_n(z)$ положительна, когда контур в окрестности точки z движется вправо относительно направления возрастания σ . Положим $\sigma = -i \ln w$, $z = f(w, T)$, $\bar{z} = f(1/\bar{w}, T)$, тогда из кинематической формулы получим

$$V_n(f(w)) = \frac{1}{2i} \frac{dw}{|df(w)|} (\partial_T f(1/w) \cdot \partial_w f(w) - \partial_T f(w) \cdot \partial_w f(1/w)), \quad |w| = 1.$$

С другой стороны, из закона Дарси следует, что

$$V_n(f(w)) = \frac{1}{2} \frac{|dp/dw|}{|df/dw|}, \quad |w| = 1.$$

Приравнявая правые части двух равенств для $V_n(f(w))$ и используя соотношение $dp/dw = r(1 - 1/w^2)$, получим уравнение

$$w \partial_w f(w) \cdot \partial_T f(1/w) - w \partial_w f(1/w) \cdot \partial_T f(w) = r|w - 1/w|, \quad |w| = 1. \quad (2.4)$$

Данное уравнение является основным динамическим уравнением задачи, сформулированной в терминах конформных отображений.

Полезно сравнить полученное уравнение с уравнением лапласовского роста во всей плоскости (т.е. без условия, что ϕ обращается в нуль на действительной оси) с тем же самым источником на бесконечности. В этом случае динамика с необходимостью разрушит зеркальную симметрию, следовательно, функцию $f(1/w)$ необходимо заменить на $\bar{f}(1/w) \equiv f(1/\bar{w})$. При этом правая часть уравнения также должна быть заменена на $-ir(w - 1/w)$.

Для нахождения точных решений важен случай, когда на некотором интервале времен T функцию $f(w, T)$ можно аналитически продолжить через единичную окружность так, чтобы она была аналитична не только во внешности единичного круга, но и в несколько большей области, захватывающей его границу. Заметим, однако, что такое аналитическое продолжение невозможно через точки $w = \pm 1$,

являющиеся прообразами двух угловых точек, следовательно, в них $f(w)$ не аналитична. Предполагая, что она аналитична в остальных точках единичного круга, мы можем аналитически продолжить уравнение (2.4) следующим образом:

$$w\partial_w f(w) \cdot \partial_T f(1/w) - w\partial_w f(1/w) \cdot \partial_T f(w) = \begin{cases} -ir(w - 1/w), & \text{Im } w > 0, \\ ir(w - 1/w), & \text{Im } w < 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Заметим, что аналитические продолжения в верхнюю и нижнюю полуплоскости различаются.

3. ФОРМУЛИРОВКА В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИИ ШВАРЦА

Известно [2], что стандартная задача лапласовского роста во всей плоскости может быть проинтегрирована в терминах функции Шварца. Для аналитических контуров функция Шварца $S(z)$ определена как аналитическое продолжение функции $\bar{z}$ с контура. Другими словами, функция Шварца кривой Γ – это такая аналитическая функция $S(z)$, что $\bar{z} = S(z)$ для $z \in \Gamma$ (подробности см. в [3]). В случае кривой, зависящей от времени, функция Шварца также зависит от времени: $S = S(z, T)$.

В нашей задаче контур $\gamma \cup \bar{\gamma}$ не аналитичен, так как он обязательно содержит два излома в точках x_- , x_+ . Тем не менее, если контур γ аналитичен, то его функция Шварца (также обозначаемая через $S(z)$) хорошо определена в полосе, толщина которой стремится к нулю в окрестности концов кривой $x_{\pm}$. Таким образом, $\bar{z} = S(z)$ для $z \in \gamma$ или, что тоже самое, $\bar{z} = \bar{S}(\bar{z})$ для $z \in \bar{\gamma}$. Последняя формула означает, что $\bar{S}(z) = \overline{S(\bar{z})}$ – функция Шварца для комплексно-сопряженной кривой $\bar{\gamma}$. Таким образом, можно ожидать, что наша задача интегрируется с помощью двух (равноправных) функций Шварца $S(z)$ и $\bar{S}(z)$. Ниже, исключительно для краткости, будем называть пару $(S(z), \bar{S}(z))$ функцией Шварца кусочно-аналитического контура $\Gamma = \gamma \cup \bar{\gamma}$. В математической w -плоскости функция Шварца позволяет связать функции $f(w)$ и $f(1/w)$ в областях, где они обе аналитичны:

$$f(w) = \begin{cases} \bar{S}(f(1/w)), & \text{Im } w > 0, \\ S(f(1/w)), & \text{Im } w < 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Заметим, что второе равенство (при $\text{Im } w < 0$) получается из первого с помощью комплексного сопряжения.

В полной аналогии с задачей лапласовского роста на всей плоскости процесс (1.1) в верхней полуплоскости определяется уравнением $i\partial_T S = \partial_z p$. Распиряя его на всю плоскость с помощью отражения (комплексного сопряжения), для всех $z \in \mathbb{C} \setminus D(T)$ получим

$$\begin{aligned} i\partial_T S(z, T) &= \partial_z p(z, T), & \text{Im } z > 0, \\ i\partial_T \bar{S}(z, T) &= -\partial_z p(z, T), & \text{Im } z < 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Данные соотношения удобно переписать в терминах кусочно-аналитической функции

$$M(z) = \begin{cases} i(S(z) - z), & \text{Im } z > 0, \\ -i(\bar{S}(z) - z), & \text{Im } z < 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

введенной в статье [1]. По построению эта функция является аналитическим продолжением функции $2|\operatorname{Im} z|$ с контура Γ . Эквивалентным образом запишем $S(z) = z - iM(z)$ для $\operatorname{Im} z > 0$ и $\bar{S}(z) = z + iM(z)$ для $\operatorname{Im} z < 0$ или, на математической w -плоскости,

$$f(w) = \begin{cases} f(1/w) + iM(f(1/w)), & \operatorname{Im} w > 0, \\ f(1/w) - iM(f(1/w)), & \operatorname{Im} w < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

В терминах функции $M = M(z, T)$ динамическое уравнение (3.2) принимает вид

$$\partial_T M(z, T) = \partial_z p(z, T). \quad (3.5)$$

Заметим, что функция $\partial_z p(z, T)$ голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus D(T)$ и имеет разложение $\partial_z p(z, T) = 1 + O(1/z^2)$ в бесконечности.

Функция $M(z)$ единственным образом разлагается как $M(z) = M_+(z) - M_-(z)$, где функция M_+ аналитична в D , а M_- аналитична в $\mathbb{C} \setminus D$ и равна нулю в бесконечности. Это разложение задается интегралом типа Коши:

$$M_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{M(z')}{z' - z} dz' = \frac{1}{\pi i} \oint_{\partial D} \frac{|\operatorname{Im} z'|}{z' - z} dz', \quad z \in D \quad (3.6)$$

(и таким же интегралом для $M_-(z)$ с z , лежащим вне D). Функция M_+ аналитична всюду в D и согласно нашему предположению может быть аналитически продолжена через дуги γ и $\bar{\gamma}$ везде, за исключением их концов на действительной оси, в которых она имеет особенности. Покажем, что $M_+(z)$ является производящей функцией для интегралов движения нашей задачи. Действительно, вычислив ее производную по времени, получим

$$\partial_T M_+(z) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\partial D} \frac{\operatorname{sign}(\operatorname{Im} z') V_n(z')}{z - z'} |dz'| \quad (3.7)$$

(подробнее см. в [1]). Подставляя $V_n(z) = |p'(z)|/2$ и замечая, что $dp(z)$ чисто действительно на Γ , получим

$$\partial_T M_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{dp(z')}{z' - z} = 1.$$

Здесь ненулевой вклад дает только вычет в бесконечности, так как $p'(z)$ голоморфна вне D , а z находится внутри D . Таким образом, приходим к важному уравнению

$$\partial_T M_+(z, T) = 1, \quad (3.8)$$

позволяющему получить бесконечный набор интегралов движения, разлагая $M_+(z)$ в ряд по z .

В случае общего положения, когда $x_- \neq x_+$, можно разложить $M_+(z)$ в ряд Тейлора в точке на действительной оси, лежащей внутри D на интервале (x_-, x_+) . Выбрав координаты так, что $x_- < 0 < x_+$, можно разложить ее в начале координат:

$$M_+(z) = T + \sum_{k=2}^{\infty} k T_k z^{k-1}. \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.8) видно, что коэффициенты T_k , $k \geq 2$, сохраняются: $\partial_T T_k = 0$. Они являются гармоническими моментами области $\mathbb{H} \setminus \mathbb{B}$, определенными следующим образом:

$$T_k = \frac{1}{\pi i k} \oint_{\mathbb{D}} |\operatorname{Im} z| z^{-k} dz = \frac{2}{\pi k} \int_{\mathbb{H} \setminus \mathbb{B}} \operatorname{Im}(z^{-k}) d^2 z, \quad k \geq 2. \quad (3.10)$$

Можно также рассмотреть вырожденные конфигурации с $x_- = x_+ = 0$. В этом случае функция $M_+(z) - T$ также сохраняется, но ее нельзя представить в виде ряда Тейлора в нуле, вследствие чего моменты (3.10) плохо определены.

4. САМОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ

Самоподобные решения характеризуются свойством

$$f(w, T) = r(T)f(w), \quad (4.1)$$

которое означает, что эволюция по времени является растяжением в плоскости z . Вследствие того что эволюция оставляет неподвижными точки $x_{\pm}$, самоподобные решения существуют только тогда, когда $x_- = x_+ = 0$. Это является вырожденным случаем, упоминавшимся ранее. Точные самоподобные решения задачи лапласовского роста в радиальной постановке и внутри сектора были изучены в работах [4]–[9].

4.1. Общие соотношения.

Дифференциальное уравнение для $f(w)$. Подставляя самоподобный анзац (4.1) в (2.5), видим, что переменные разделяются: $r(T) = T/A$ и

$$w \partial_w f(w) \cdot f(1/w) - w \partial_w f(1/w) \cdot f(w) = A \begin{cases} -i(w - 1/w), & \operatorname{Im} w > 0, \\ i(w - 1/w), & \operatorname{Im} w < 0, \end{cases}$$

где A – постоянная. Последнее равенство может рассматриваться как соотношение для вронскиана дифференциального уравнения второго порядка вида

$$A_2(w)\psi'' + A_1(w)\psi' + A_0(w)\psi = 0.$$

Если ψ_1, ψ_2 – два линейно независимых решения, то их вронскиан $W = \psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1'$ удовлетворяет соотношению

$$\partial_w \ln W(w) = -\frac{A_1(w)}{A_2(w)}.$$

В нашем случае $W = \pm iA(1 - 1/w^2)$ и

$$\partial_w \ln W = \frac{1}{w+1} + \frac{1}{w-1} - \frac{2}{w}$$

(заметим, что это выражение одинаково для обеих полуплоскостей), а функции $f(w)$ и $f(1/w)$ – два решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$f'' - \left(\frac{1}{w+1} + \frac{1}{w-1} - \frac{2}{w} \right) f' + \tilde{V}(w)f = 0 \quad (4.2)$$

Рис. 2. Угловая точка в начале координат.

с пока неопределенной функцией $\tilde{V}(w)$ или уравнения

$$w^2 \partial_w^2 f - \frac{2w}{w^2 - 1} \partial_w f + V(w)f = 0 \quad (4.3)$$

(здесь $V(w) = w^2 \tilde{V}(w)$).

Требование, что $f(1/w)$ является вторым решением уравнения (4.3), приводит к соотношению $V(1/w) = V(w)$, а из поведения на бесконечности $f(w) = w + O(1)$ следует, что $V(w) = O(1/w^2)$. Более точно, если $f(w) = w + a_0 + a_1/w + O(1/w^2)$, то с помощью простого вычисления можно получить, что $V(w) = 2(1 - a_1)/w^2 + O(1/w^3)$. Далее, $f(w)$ регулярна вне единичного круга (за исключением простого полюса на бесконечности) и $V(1/w) = V(w)$, следовательно, $V(w)$ может иметь сингулярности только на единичной окружности. Доказательство аналогично случаю самоподобного лапласовского роста в клине [6]. Предположим, например, что V имеет полюс в некоторой точке ξ вне единичного круга. Тогда этот полюс можно было бы скомпенсировать, только наложив условие $f(\xi) = 0$, что в свою очередь означало бы, что ξ на самом деле лежит на единичной окружности. Действительно, если 0 – образ такой точки w , что $|w| \geq 1$, то эта точка является сингулярной граничной точкой, следовательно, ее прообраз лежит на единичной окружности.

Здесь мы не будем изучать вопрос о наиболее общем виде сингулярностей на единичном круге, разрешенных для функции $V(w)$, и ограничимся случаем рациональной функции $V(w)$. Предположим, что граница испытывает излом с углом θ , когда точка w ,двигающаяся по единичной окружности, проходит через точку $\xi \neq \pm 1$ (см. рис. 2), тогда в окрестности ξ конформное отображение имеет вид $f(w) \propto (w - \xi)^{\theta/\pi}$ (при этом мы предполагаем, что граница может быть не гладкой только в начале координат, т.е. $f(\xi) = 0$). Подставляя асимптотику в уравнение (4.3), получим

$$V(w) = \frac{(\theta/\pi)(1 - \theta/\pi)\xi^2}{(w - \xi)^2} (1 + O(w - \xi)), \quad w \rightarrow \xi. \quad (4.4)$$

Заметим, что главная часть одинакова для углов θ и $\pi - \theta$. Ясно, что точно такой же полюс с тем же θ находится в комплексно-сопряженной точке $\bar{\xi}$. Полюсы в точках $\xi = \pm 1$ должны рассматриваться отдельно. В этом случае

$$V(w) = \frac{4(\theta/\pi)(1 - \theta/\pi)}{(w \mp 1)^2} (1 + O(w \mp 1)), \quad w \rightarrow \pm 1, \quad (4.5)$$

где через θ теперь обозначен угол между действительной осью и ближайшим куском границы, выходящим из начала координат.

Подытожим свойства функции $V(w)$:

- а) $V(w)$ – рациональная функция переменной w такая, что $V(w) = V(1/w)$;
- б) единственными особенностями $V(w)$ являются полюсы второго порядка на единичной окружности с главной частью, задаваемой соотношениями (4.4), (4.5);
- в) $V(w) = O(1/w^2)$ при $w \rightarrow \infty$.

В ряде случаев эти условия позволяют однозначно зафиксировать вид $V(w)$ (см. примеры ниже). Для нахождения конформного отображения $f(w)$ необходимо решить уравнение (4.3), выбрать решение, удовлетворяющее условию $f(w) = w + O(1)$ при $w \rightarrow \infty$, и проверить, что отображение на самом деле конформно, т.е. что $f'(w) \neq 0$ для всех w вне единичного круга. В действительности достаточно проверить, что если φ меняется от 0 до 2π , то $f(e^{i\varphi})$ обходит границу D ровно один раз против часовой стрелки (принцип аргумента, см., например, книгу [10]). В самом деле, число нулей аналитической функции $f'(w)$ вне единичного круга дается интегралом $-(1/2\pi) \oint_{|w|=1} d \arg f'(w)$ (более точно, чтобы регуляризовать возможные особенности в прообразах угловых точек, необходимо рассматривать интеграл $-(1/2\pi) \oint_{|w|=e^\epsilon} d \arg f'(w)$ при $\epsilon \rightarrow +0$.) С другой стороны, так как f осуществляет конформное отображение в окрестности единичного круга, нормальный вектор к границе при отображении поворачивается на угол $\arg f'(w)$, т.е. $\arg f'(w) = \phi(f(w)) - \arg w$, где ϕ – угол между нормальным вектором к границе, направленным наружу области D , и действительной осью. Из этого ясно, что $\arg f'(w)$ не меняется, когда w делает полный оборот вдоль единичной окружности, и, следовательно, $f'(w)$ не может обратиться в нуль вне единичной окружности.

Вид функции $M_+(z)$. Для конформного отображения $p(z, T)$ самоподобие означает, что $p(z, T) = r(T)p(z/r(T))$, и аналогичное равенство справедливо для M -функции: $M(z, T) = r(T)M(z/r(T))$. Подставляя это выражение в (3.5), мы получим, что $\dot{r} = 1/A$, т.е. $r = T/A$, и

$$M(z) - zM'(z) = Ap'(z).$$

Функция $M(z)$ здесь является M -функцией области с конформным радиусом $r = 1$, т.е. при $T = A$. Проинтегрировав обе части равенства по границе с ядром Коши, получим следующее условие на M_+ :

$$M_+(z) - zM'_+(z) = A$$

с общим решением $M_+(z) = cz + A$, или

$$M_+(z, T) = cz + T, \quad (4.6)$$

где c – произвольное действительное число. Важно отметить, что в рассматриваемом случае область D состоит по крайней мере из двух несвязных кусков с границами, пересекающимися в начале координат; таким образом, постоянная c может быть разной в разных кусках области D .

4.2. Примеры.

Однолепестковое решение. Простейшим примером является однолепестковая конфигурация, растущая в верхней полуплоскости, симметричная относительно мнимой оси (рис. 3). Пусть α – угол между касательной в начале координат и действи-

Рис. 3. Однолепестковое решение (а) и двухлепестковое решение (б). Также показаны отражения лепестков в нижней полуплоскости.

тельной осью, тогда приведенные в предыдущем пункте условия на функцию $V(w)$ однозначно фиксируют ее:

$$V(w) = \frac{16\alpha}{\pi} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \frac{w^2}{(w^2 - 1)^2}. \quad (4.7)$$

После подстановки $w = e^x$, $f(w) = \operatorname{sh}^{1/2} x \cdot \psi(x)$ уравнение (4.3) принимает вид

$$\psi'' + \frac{\gamma(1-\gamma)}{\operatorname{sh}^2 x} \psi = \frac{1}{4} \psi, \quad (4.8)$$

где

$$\gamma = \frac{2\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2}. \quad (4.9)$$

Его решение с требуемыми условиями на бесконечности дается формулой

$$\psi(x) = e^{x/2} (1 - e^{-2x})^\gamma {}_2F_1 \left(\gamma, \gamma - 1/2; 1/2; e^{-2x} \right).$$

Гипергеометрическая функция с такими параметрами может быть выражена через элементарные функции:

$${}_2F_1 \left(\gamma, \gamma - 1/2; 1/2; z^2 \right) = \frac{1}{2} [(1+z)^{-2\gamma} + (1-z)^{-2\gamma}]. \quad (4.10)$$

Для $f(w)$ мы, следовательно, получим

$$f(w) = \frac{1}{2} \sqrt{w^2 - 1} \left((1 - 1/w)^\gamma (1 + 1/w)^{1-\gamma} + (1 + 1/w)^\gamma (1 - 1/w)^{1-\gamma} \right). \quad (4.11)$$

При $\gamma = 0$ ($\alpha = \pi/4$) данное решение переходит в $f(w) = \sqrt{w^2 - 1}$ из работы [1]. Граница такой области является лемниской Бернулли, задаваемой уравнением

Рис. 4. Однолепестковые решения при разных α .

$(x^2 + y^2)^2 = 2(y^2 - x^2)$ в декартовых координатах или уравнением $r^2 = -2 \cos 2\theta$ в полярных (см. рис. 4, пунктирная линия). Используя принцип аргумента, можно показать, что $f'(w) \neq 0$ при $|w| \geq 1$ для всех γ , лежащих между $-1/2$ и $1/2$, т. е. мы получили непрерывное семейство однолепестковых самоподобных решений с углами $0 \leq \alpha < \pi/2$. Примеры для $\alpha = \pi/8$ и $\alpha = 3\pi/8$ также показаны на рис. 4.

Вывод однолепесткового решения с помощью интегрального уравнения. Приведенный выше результат также может быть получен другим способом: с использованием вытекающего из свойств M -функции интегрального уравнения для конформного отображения $f(w)$. Функция M_+ однолепесткового решения имеет только один разрез, совпадающий со всей действительной осью. Вследствие соотношения (4.6) скачок функции M_+ на разрезе должен быть линейной функцией. Коэффициент можно определить путем анализа локального поведения в начале координат. Действительно, пусть $e^{i\theta(z)} = dz/|dz|$ — единичный тангенциальный вектор к кривой в точке z , представленный как комплексное число. Тогда по определению функции Шварца $S'(z) = e^{-2i\theta(z)}$ для z , лежащих на кривой в верхней полуплоскости, и $\bar{S}'(z) = e^{-2i\theta(z)}$ для z , лежащих на кривой в нижней полуплоскости. Эти формулы позволяют вычислить скачок функции M' , равный скачку функции M'_+ на действительной оси. Используя (3.3), найдем

$$[M'] := M'_{\text{up}} - M'_{\text{down}} = \frac{(2 - S'_{\text{up}} - \bar{S}'_{\text{down}})}{i} = \frac{2 - e^{-2i\alpha} - e^{2i\alpha}}{i} = -4i \sin^2 \alpha.$$

Таким образом, в верхней полуплоскости $M_+ = -2iz \sin^2 \alpha + A$, а в нижней полуплоскости $M_+ = 2iz \sin^2 \alpha + A$.

Используя формулу (3.1), мы можем выразить сумму значений функции $f(w)$ на противоположных берегах разреза, проходящего от -1 до 1 в w -плоскости. Положим

$\{f(w)\} = f(w + i0) + f(w - i0)$, тогда

$$\{f(w)\} = 2f(1/w) + i[M_+(f(1/w))] = (2 - 4\sin^2 \alpha)f(1/w) = 2\cos 2\alpha \cdot f(1/w),$$

где использовано соотношение

$$[M_+(f(w))] = M_+(f(w + i0)) - M_+(f(w - i0)) = -4i\sin^2 \alpha \cdot f(w).$$

Мы получили уравнение

$$\{f(w)\} = 2\cos 2\alpha \cdot f(1/w), \quad w \in [-1, 1], \quad (4.12)$$

определяющее конформное отображение. Данное уравнение может быть преобразовано в интегральное. Для этого воспользуемся подстановкой

$$g(w) = \frac{f(w)}{\sqrt{w^2 - 1}},$$

позволяющей перейти от среднего значения функции f на разрезе к скачку функции g . Мы выбираем ветвь квадратного корня так, чтобы функция $\sqrt{w^2 - 1} = w\sqrt{1 - 1/w^2}$ была нечетной функцией вне единичного круга. Из симметрии лепестка вытекает условие $f(-w) = -f(w)$; таким образом, $g(-w) = g(w)$. В терминах функции g уравнение (4.12) принимает вид

$$[g(w)] = -2i\cos 2\alpha \frac{g(1/w)}{w}, \quad w \in [-1, 1]. \quad (4.13)$$

Функция g аналитична всюду в w -плоскости за исключением двух точек ветвления $w = \pm 1$. При этом скачок на разрезе $[-1, 1]$ задается формулой (4.13). Принимая во внимание, что $g(\infty) = 1$, мы можем представить эту функцию в виде интеграла типа Коши вдоль разреза:

$$g(w) = 1 - \frac{2i\cos 2\alpha}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{g(1/x)}{x(x-w)} dx.$$

В результате, используя тот факт, что g – четная функция, мы приходим к интегральному уравнению

$$g(w) = 1 - \frac{2\cos 2\alpha}{\pi} \int_0^1 \frac{g(1/x)}{x^2 - w^2} dx. \quad (4.14)$$

Мы знаем, что $f(w) \propto (w - 1)^{2\alpha/\pi}$ в окрестности $w = 1$, и, следовательно, ищем решение, ведущее себя, как $g(w) \propto (w - 1)^{(2\alpha/\pi) - 1/2}$, в окрестности $w = 1$ и аналогично в окрестности $w = -1$. Заметим, что показатель степени совпадает с γ в (4.9).

Сначала рассмотрим случай положительной γ . После подстановки $g(w) = (1 - 1/w^2)^\gamma G(1/w^2)$, используя то, что $g(\pm 1) = 0$ (при положительных γ), приходим к уравнению

$$(1 - x)^{\gamma-1} G(x) = \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^1 \frac{t^{-1/2}(1 - t)^{\gamma-1} G(t)}{1 - xt} dt. \quad (4.15)$$

Сравнив его с уравнением (42) из работы [9], можно немедленно выписать решение

$$G(t) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \gamma, \gamma - 1/2 \\ 1/2 \end{matrix}; t \right),$$

являющееся той же функцией, что и (4.10). Отображение $f(w)$ задается явной формулой (4.11). Прямая подстановка показывает, что функция $g(w) = f(w)/\sqrt{w^2 - 1}$ удовлетворяет интегральному уравнению (4.14) как для положительных, так и для отрицательных γ , $|\gamma| < 1/2$.

Двухлепестковое решение. Далее мы рассмотрим двухлепестковую конфигурацию, растущую в верхней полуплоскости и симметричную относительно мнимой оси (рис. 36).

Положим угол между двумя лепестками равным 2β . Очевидно, что этот угол удовлетворяет условию $0 < \beta < \pi/2 - \alpha$. Теперь функция $V(w)$ имеет четыре двойных полюса. Два из них расположены в точках $w = \pm 1$. Симметрия требует, чтобы два других полюса находились в точках $w = \pm i$. В данном случае функция $V(w)$ вновь однозначно определяется тремя условиями, приведенными в п. 4.1:

$$V(w) = \frac{16\alpha}{\pi} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \frac{w^2}{(w^2 - 1)^2} - \frac{8\beta}{\pi} \left(1 - \frac{2\beta}{\pi} \right) \frac{w^2}{(w^2 + 1)^2}. \quad (4.16)$$

Заметим, что эта функция также соответствует углу $\pi/2 - \beta$. Та же подстановка $w = e^x$, $f(w) = \text{sh}^{1/2} x \cdot \psi(x)$, что и выше, приводит уравнение (4.3) к виду

$$\psi'' + \frac{\gamma(1 - \gamma)}{\text{sh}^2 x} \psi - \frac{\delta(1 - \delta)}{\text{ch}^2 x} \psi = \frac{1}{4} \psi, \quad (4.17)$$

где γ – та же, что и в уравнении (4.9), а $\delta = 2\beta/\pi$. Дальнейшей заменой переменных

$$\psi = 2 \text{sh}^\gamma x \cdot \text{ch}^{1/2 - \gamma} x \cdot F \left(\frac{1}{\text{ch}^2 x} \right), \quad t = \frac{1}{\text{ch}^2 x},$$

уравнение приводится к стандартному гипергеометрическому виду

$$t(1 - t)F_{tt} + \left(\frac{1}{2} - (1 + \gamma)t \right) F_t - \frac{1}{16} ((2\gamma + 2\delta - 1)(2\gamma - 2\delta + 1)) F = 0. \quad (4.18)$$

Оно имеет два линейно независимых решения:

$$F^{(1)}(t) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} (2\gamma + 2\delta - 1)/4, (2\gamma - 2\delta + 1)/4 \\ 1/2 \end{matrix}; t \right),$$

$$F^{(2)}(t) = t^{1/2} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} (2\gamma + 2\delta + 1)/4, (2\gamma - 2\delta + 3)/4 \\ 3/2 \end{matrix}; t \right).$$

Для функции ψ первое решение дает

$$\psi(x) = \text{sh}^\gamma x \cdot \text{ch}^{1/2 - \gamma} x \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} (2\gamma + 2\delta - 1)/4, (2\gamma - 2\delta + 1)/4 \\ 1/2 \end{matrix}; \text{ch}^{-2} x \right).$$

Переходя к функции $f(w)$ и к исходным углам α, β , имеем

$$f(w) = w(1 - 1/w^2)^{2\alpha/\pi}(1 + 1/w^2)^{1-2\alpha/\pi} \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{(\alpha + \beta)/\pi - 1/2, (\alpha - \beta)/\pi}{1/2}; \frac{4}{(w + 1/w)^2}\right). \quad (4.19)$$

Симметрия требует, чтобы конформное отображение было нечетной функцией переменной w . Функция, задаваемая равенством (4.19), действительно нечетная, в то время как второе решение $F^{(2)}$ приводит к четной функции. Используя принцип аргумента, мы видим, что при $0 < \beta < \alpha < \pi/2$ у производной $f'(w)$ нет нулей во внешности единичного круга. Таким образом, функция $f(w)$, задаваемая формулой (4.19), является конформным отображением для двухлепесткового решения.

Отметим, что полученная функция выглядит несколько проще, если записать ее как функцию переменной $p = w + 1/w$ в верхней полуплоскости:

$$z(p) = p(1 - 4p^{-2})^{\alpha/\pi} {}_2F_1\left(\frac{(\alpha + \beta)/\pi - 1/2, (\alpha - \beta)/\pi}{1/2}; \frac{4}{p^2}\right). \quad (4.20)$$

Аналитическое продолжение этой функции в область $|p| < 2$ дает

$$z(p) = 2\left(1 - \frac{p^2}{4}\right)^{\alpha/\pi} \left[ie^{-i\beta} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{2\beta}{\pi})}{\Gamma(\frac{\alpha-\beta}{\pi})\Gamma(1 - \frac{\alpha+\beta}{\pi})} \left(\frac{p}{2}\right)^{2\beta/\pi} \times \right. \\ \times {}_2F_1\left(\frac{(\alpha + \beta)/\pi - 1/2, (\alpha + \beta)/\pi}{2\beta/\pi + 1/2}; \frac{p^2}{4}\right) + \\ \left. + e^{i\beta} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{2\beta}{\pi} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{\pi} - \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\alpha-\beta}{\pi})} \left(\frac{p}{2}\right)^{1-2\beta/\pi} \times \right. \\ \left. \times {}_2F_1\left(\frac{(\alpha - \beta)/\pi + 1/2, (\alpha - \beta)/\pi}{3/2 - 2\beta/\pi}; \frac{p^2}{4}\right) \right]. \quad (4.21)$$

Граница двухлепестковой структуры в верхней полуплоскости дается функцией $z(p + i0)$ для $-2 < p < 2$.

В случае $\beta = \alpha$ гипергеометрическая функция в (4.20) становится тривиальной (равна 1). Соответствующее конформное отображение оказывается отображением на область с разрезами: функция $z(p) = p(1 - 4p^2)^{\alpha/\pi}$ отображает верхнюю полуплоскость на верхнюю полуплоскость, разрезанную вдоль двух прямых отрезков, начинающихся в нуле и идущих в северо-восточный и северо-западный квадранты под углом α к действительной оси. В действительности это означает, что β равно $\pi/2 - \alpha$, а не α , но, как уже отмечалось, функция (4.16) в обоих случаях совпадает.

Некоторые типичные двухлепестковые решения показаны на рис. 5. Нужно различать следующие случаи.

1. Пусть $\alpha \in (0, \pi/4)$. Тогда:

при $\beta \in (0, \alpha)$ лепестки имеют вид, изображенный на рис. 5а, при $\beta \rightarrow \alpha - 0$ они становятся очень тонкими;

при $\beta = \alpha$ лепестки вырождаются в отрезки (рис. 5б);

при $\beta \in (\alpha, \pi/2 - \alpha)$ решение не существует вследствие того, что отображение не является конформным.

Рис. 5. Двухлепестковые решения при различных α и β . Рис. 6. Однолепестковое решение при $\alpha = \pi/4$ и двухлепестковое решение при $\alpha = \pi/4$ и $\beta = \pi/50$.

2. Пусть $\alpha = \pi/4$, $\beta \in (0, \pi/4)$. Тогда функция $f(w)$ выражается через элементарные функции:

$$f(w) = (w + 1/w) \left(1 - \frac{4}{(w + 1/w)^2} \right)^{1/4} \cos \left[2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\beta}{\pi} \right) \arcsin \left(\frac{2}{w + 1/w} \right) \right];$$

типичный вид этой функции представлен на рис. 5в, решение вырождается при $\beta = \pi/4$.

3. Пусть $\alpha \in (\pi/4, \pi/2)$. Тогда:

при $\beta \in (\alpha, \pi/2)$ лепестки имеют вид, изображенный на рис. 5г;

при $\beta = \pi/2 - \alpha$ лепестки вырождаются в отрезки;

при $\beta \in (\pi/2 - \alpha, \alpha)$ решение не существует, так как отображение не является конформным.

Также отметим, что форма двухлепестковых решений при малых β становится близкой к форме однолепестковых решений с тем же α (рис. 6), что и следовало ожидать исходя из вида дифференциального уравнения.

Благодарности. Авторы хотели бы выразить благодарность П. Б. Вигману, М. Б. Минееву-Вайнштейну и Д. Хавинсону за ценные обсуждения. Эта работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 08-02-00287), Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3035.2008.2) и Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.5029). Также работа была частично поддержана РФФИ (совместные гранты № 09-02-90493-Ukr, 09-02-93105-CNRS (Д. В. Васильев) и 09-01-92437-CE_a (А. В. Забродин)).

Список литературы

- [1] A. Zabrodin, *J. Phys. A*, **42**:8 (2009), 085206, 23 pp., arXiv:0811.4054.
- [2] S. D. Howison, *European J. Appl. Math.*, **3**:3 (1992), 209–224.
- [3] P. J. Davis, *The Schwarz function and its applications*, The Carus Math. Monogr., **17**, The Math. Association of America, Buffalo, N.Y., 1974.
- [4] H. Thomé, M. Rabaud, V. Hakim, Y. Couder, *Phys. Fluids A*, **1**:2 (1989), 224–240.
- [5] M. Ben Amar, *Phys. Rev. A*, **43**:10 (1991), 5724–5727; **44**:6 (1991), 3673–3685.
- [6] Y. Tu, *Phys. Rev. A*, **44**:2 (1991), 1203–1210.
- [7] R. Combescot, *Phys. Rev. A*, **45**:2 (1992), 873–884.
- [8] I. Markina, A. Vasil'ev, *Sci. Ser. A*, **9** (2003), 33–43; *European J. Appl. Math.*, **15**:6 (2004), 781–789.
- [9] Ar. Abanov, M. Mineev-Weinstein, A. Zabrodin, *Phys. D*, **235**:1–2 (2007), 62–71, arXiv: nlin/0606068.
- [10] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*, т. 2: *Дальнейшее построение теории*, Наука, М., 1968.

Поступила в редакцию 24.05.2010