Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Мешков, В. В. Соколов, Гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 1, 51–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:09:13

© 2011 г.

А. Г. Мешков*, В. В. Соколов†

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЯМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Приводится полный список нелинейных однополевых гиперболических уравнений, обладающих интегрируемыми x - и y -симметриями третьего порядка. Список содержит как уравнения типа синус-Гордон, так и уравнения, линеаризуемые дифференциальными подстановками.

Ключевые слова: высшие симметрии, уравнения типа синус-Гордон, уравнения Ливиллевого типа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Симметричный подход к классификации интегрируемых уравнений в частных производных (см. обзоры [1]–[3] и ссылки в них) основан на существовании у интегрируемых уравнений высших инфинитезимальных симметрий и/или законов сохранения. Этот подход особенно эффективен для эволюционных уравнений с одной пространственной переменной. В частности, все интегрируемые уравнения вида

$$u_t = u_3 + F(u_2, u_1, u), \quad u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \quad (1.1)$$

были найдены в работах [4], [5]. Списку из работы [4] эквивалентен следующий список интегрируемых уравнений:

$$u_t = u_{xxx} + uu_x, \quad (1.2)$$

$$u_t = u_{xxx} + u^2 u_x, \quad (1.3)$$

$$u_t = u_{xxx} + u_x^2, \quad (1.4)$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2} u_x^3 + (c_1 e^{2u} + c_2 e^{-2u}) u_x, \quad (1.5)$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_x u_{xx}^2}{2(u_x^2 + 1)} + c_1 (u_x^2 + 1)^{3/2} + c_2 u_x^3, \quad (1.6)$$

*Орловский технический университет, Орел, Россия. E-mail: a_meshkov@orel.ru

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: sokolov@itp.ac.ru

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_x u_{xx}^2}{2(u_x^2 + 1)} - \frac{3}{2} \wp(u) u_x (u_x^2 + 1), \quad (1.7)$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x} + \frac{3}{2u_x} - \frac{3}{2} \wp(u) u_x^3, \quad (1.8)$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x}, \quad (1.9)$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{4u_x} + c_1 u_x^{3/2} + c_2 u_x^2, \quad c_1 \neq 0 \quad \text{или} \quad c_2 \neq 0, \quad (1.10)$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{4u_x}, \quad (1.11)$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{4} \frac{u_{xx}^2}{u_x + 1} + 3u_{xx} u^{-1} (\sqrt{u_x + 1} - u_x - 1) - \\ - 6u^{-2} u_x (u_x + 1)^{3/2} + 3u^{-2} u_x (u_x + 1)(u_x + 2), \quad (1.12)$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{4} \frac{u_{xx}^2}{u_x + 1} - 3 \frac{u_{xx}(u_x + 1) \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} + 3 \frac{u_{xx} \sqrt{u_x + 1}}{\operatorname{sh} u} - \\ - 6 \frac{u_x (u_x + 1)^{3/2} \operatorname{ch} u}{\operatorname{sh}^2 u} + 3 \frac{u_x (u_x + 1)(u_x + 2)}{\operatorname{sh}^2 u} + u_x^2 (u_x + 3), \quad (1.13)$$

$$u_t = u_{xxx} + 3u^2 u_{xx} + 3u^4 u_x + 9u u_x^2, \quad (1.14)$$

$$u_t = u_{xxx} + 3u u_{xx} + 3u^2 u_x + 3u_x^2, \quad (1.15)$$

$$u_t = u_{xxx}. \quad (1.16)$$

Здесь $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ и c_1, c_2, g_2, g_3 – произвольные постоянные.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Уравнения (1.2)–(1.10) интегрируемы методом обратной задачи рассеяния, в то время как уравнения (1.11)–(1.15) линеаризуемы (S - и C -интегрируемы соответственно по терминологии Калоджеро).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Уравнение (1.8) эквивалентно относительно преобразования вида $u \rightarrow \phi(u)$ уравнению Кричевера–Новикова

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{u_{xx}^2 + Q}{u_x},$$

а уравнение (1.7) – уравнению Калоджеро–Дегаспериса

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2} Q'' u_x + \frac{3}{8} \frac{((Q - u_x^2)_x)^2}{u_x (Q - u_x^2)}.$$

Здесь $Q = c_4 u^4 + c_3 u^3 + c_2 u^2 + c_1 u + c_0$ – произвольный многочлен.

Класс уравнений (1.1) допускает следующие преобразования:

$$u \rightarrow \varphi(u), \quad (1.17)$$

$$x \rightarrow x + ct, \quad F \rightarrow F - cu_1, \quad (1.18)$$

$$x \rightarrow ax, \quad t \rightarrow a^3 t, \quad F(u, u_1, u_2) \rightarrow a^{-3} F(u, au_1, a^2 u_2). \quad (1.19)$$

Кроме того, некоторые подклассы допускают дополнительные точечные преобразования. Если функция F не зависит от u , то допустимым является преобразование

$$u \rightarrow u + c_1 x + c_2 t, \quad F(u_1, u_2) \rightarrow F(u_1 - c_1, u_2) + c_2 \quad (1.20)$$

Если функция F однородна веса 1: $F(\lambda u, \lambda u_1, \lambda u_2) = \lambda F(u, u_1, u_2)$, то мы имеем следующее допустимое преобразование:

$$u \rightarrow u e^{at+bx}. \quad (1.21)$$

Два уравнения вида (1.1), связанные преобразованиями (1.17)–(1.21), называются *эквивалентными*. Поскольку симметричный подход является чисто алгебраическим, функция φ и постоянные a, b, c, c_1, c_2 предполагаются комплекснозначными. Так, например, мы не различаем уравнения $u_t = u_{xxx} - u_x^3$ и $u_t = u_{xxx} + u_x^3$.

Приведенный выше список (1.2)–(1.16) полон с точностью до преобразований (1.17)–(1.21).

Класс скалярных гиперболических уравнений

$$u_{xy} = \Psi(u, u_x, u_y) \quad (1.22)$$

допускает следующие преобразования:

$$1) \quad x \leftrightarrow y; \quad 2) \quad u \rightarrow \phi(u); \quad 3) \quad x \rightarrow \alpha x; \quad 4) \quad y \rightarrow \beta y; \quad 5) \quad u \rightarrow \lambda u. \quad (1.23)$$

В общем случае преобразования предполагаются комплекснозначными. Если Ψ не зависит от u , то у нас есть дополнительное преобразование

$$u \rightarrow u + \gamma x + \delta y. \quad (1.24)$$

Если $\Psi(\lambda u, \lambda u_x, \lambda u_y) = \lambda \Psi(u, u_x, u_y)$, то допустимо преобразование

$$u \rightarrow u e^{ax+by}. \quad (1.25)$$

Неоднородные уравнения Даламбера $u_{xy} = \mu$, $\mu = \text{const}$, допускают преобразование

$$u \rightarrow u + cxy. \quad (1.26)$$

Два уравнения вида (1.22) называются *эквивалентными*, если они связаны преобразованиями (1.23)–(1.26).

Для интегрируемых скалярных гиперболических уравнений вида (1.22) симметричный подход постулирует существование как x -симметрий

$$u_t = A(u, u_x, u_{xx}, \dots), \quad (1.27)$$

так и y -симметрий

$$u_\tau = B(u, u_y, u_{yy}, \dots). \quad (1.28)$$

Для хорошо известного интегрируемого уравнения синус-Гордон¹⁾

$$u_{xy} = c_1 e^u + c_2 e^{-u} \quad (1.29)$$

¹⁾Мы не делаем различия между уравнениями синус-Гордон и sh-Гордон.

простейшие высшие x - и y -симметрии задаются формулами

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2} u_x^3, \quad u_\tau = u_{yyy} - \frac{1}{2} u_y^3.$$

Эти эволюционные уравнения сами являются интегрируемыми (частный случай уравнения (1.5)).

Общая классификация уравнений (1.22), обладающих высшими симметриями, оказалась чрезвычайно сложной задачей, которая не решена до сих пор. Некоторые важные частные результаты были получены в работах [6]–[8]. В общем случае все три функции Ψ , A , B должны быть найдены из условий совместности для уравнений (1.22), (1.27) и (1.28). Однако если функции A и B каким-либо образом заданы, нетрудно проверить, существует ли соответствующая функция Ψ , и найти ее.

Для того чтобы описать все интегрируемые уравнения (1.22) типа синус-Гордон, мы предполагаем (см. ниже раздел 3), что симметрии (1.27) и (1.28) являются *интегрируемыми* эволюционными уравнениями вида

$$u_t = u_{xxx} + F(u, u_x, u_{xx}), \quad u_\tau = u_{yyy} + G(u, u_y, u_{yy}). \quad (1.30)$$

Мы берем одно за другим уравнения из списка (1.2)–(1.16) в качестве x -симметрии и находим все уравнения (1.22) с такой x -симметрией. Затем в каждом случае мы находим соответствующую y -симметрию, если она существует. В разделе 2 мы приводим все полученные таким образом гиперболические уравнения с x - и y -симметриями (1.30).

Интегрируемые гиперболические уравнения могут быть разделены на два класса в соответствии с существованием или отсутствием x - и y -интегралов (см. ниже раздел 3). Рассмотрим, например, уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = e^u.$$

Легко проверить, что функция

$$P = u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2$$

не зависит от y (т. е. является только функцией от x) для любого решения $u(x, y)$ уравнения Лиувилля. Аналогично функция

$$Q = u_{yy} - \frac{1}{2} u_y^2$$

не зависит от x .

Функция $w(x, y, u, u_y, u_{yy}, \dots)$, не зависящая от x на любом решении (1.22), называется x -интегралом этого уравнения. y -Интегралы определяются аналогично. Уравнение (1.22) называется уравнением лиувиллевого типа (или уравнением, интегрируемым по Дарбу), если оно обладает нетривиальными x - и y -интегралами. Некоторые из гиперболических уравнений, найденных в разделе 2, являются уравнениями лиувиллевого типа.

В противоположность уравнению Лиувилля, уравнение синус-Гордон (1.29) не имеет x - или y -интегралов для ненулевых значений постоянных c_i . Существует

два типа уравнений, не имеющих интегралов. Уравнения первого типа можно свести к линейному уравнению Клейна–Гордона $u_{xy} = cu$, $c \neq 0$, дифференциальными подстановками или точечными преобразованиями. Уравнения второго типа, не имеющие интегралов, не допускают линеаризующих подстановок. Такие уравнения с симметриями третьего порядка можно назвать уравнениями типа синус–Гордон. Эти уравнения интегрируются методом обратной задачи рассеяния и, с нашей точки зрения, наиболее интересны. Они фигурируют в списке теоремы (см. ниже раздел 2) под номерами (2.1)–(2.5). Отметим, что уравнения (2.2)–(2.5) связаны с уравнением (2.1) дифференциальными подстановками [8]–[10].

2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЯМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ТЕОРЕМА. *Предположим, что u - и y -симметрии гиперболического уравнения вида (1.22) с точностью до преобразований (1.17)–(1.21) принадлежат списку (1.2)–(1.16). Тогда с точностью до преобразований (1.23)–(1.26) это уравнение принадлежит следующему списку:*

$$u_{xy} = ae^u + be^{-u}, \quad (2.1)$$

$$u_{xy} = f(u)\sqrt{u_x^2 + 1}, \quad f'' = cf, \quad (2.2)$$

$$u_{xy} = \sqrt{u_x} \sqrt{u_y^2 + 1}, \quad (2.3)$$

$$u_{xy} = \sqrt{u_x^2 + 1} \sqrt{u_y^2 + 1}, \quad (2.4)$$

$$u_{xy} = \sqrt{\wp(u) - \mu} \sqrt{u_x^2 + 1} \sqrt{u_y^2 + a}, \quad (2.5)$$

$$u_{xy} = 2uu_x, \quad (2.6)$$

$$u_{xy} = 2u_x \sqrt{u_y}, \quad (2.7)$$

$$u_{xy} = u_x \sqrt{u_y^2 + 1}, \quad (2.8)$$

$$u_{xy} = \sqrt{u_x u_y}, \quad (2.9)$$

$$u_{xy} = \frac{u_x(u_y + a)}{u}, \quad a \neq 0, \quad (2.10)$$

$$u_{xy} = (ae^u + be^{-u})u_x, \quad (2.11)$$

$$u_{xy} = u_y \eta \operatorname{sh}^{-1} u (\eta e^u - 1), \quad (2.12)$$

$$u_{xy} = \frac{2u_y \eta}{\operatorname{sh} u} (\eta \operatorname{ch} u - 1), \quad (2.13)$$

$$u_{xy} = \frac{2\xi \eta}{\operatorname{sh} u} ((\xi \eta + 1) \operatorname{ch} u - \xi - \eta), \quad (2.14)$$

$$u_{xy} = u^{-1} u_y \eta (\eta - 1) + cu \eta (\eta + 1), \quad (2.15)$$

$$u_{xy} = 2u^{-1}u_y\eta(\eta - 1), \quad (2.16)$$

$$u_{xy} = 2u^{-1}\xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1), \quad (2.17)$$

$$u_{xy} = u^{-1}u_xu_y - 2u^2u_y, \quad (2.18)$$

$$u_{xy} = u^{-1}u_x(u_y + a) - uu_y, \quad (2.19)$$

$$u_{xy} = \sqrt{u_y} + au_y, \quad (2.20)$$

$$u_{xy} = cu. \quad (2.21)$$

Здесь $\wp$ – функция Вейерштрасса: $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$; $\xi = \sqrt{u_y + 1}$, $\eta = \sqrt{u_x + 1}$; a, b, c, g_2, g_3 – произвольные постоянные, μ – корень уравнения $4\mu^3 - g_2\mu - g_3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если первое из уравнений (1.30) является x -симметрией для уравнения (1.22), то выполнено условие

$$\frac{d^2}{dx dy}(u_{xxx} + F) = \frac{\partial \Psi}{\partial u_x} \frac{d}{dx}(u_{xxx} + F) + \frac{\partial \Psi}{\partial u_y} \frac{d}{dy}(u_{xxx} + F) + \frac{\partial \Psi}{\partial u}(u_{xxx} + F), \quad (2.22)$$

где d/dx и d/dy – полные производные. Исключая все смешанные производные в силу (1.22), приходим к определяющему соотношению, которое должно выполняться тождественно относительно переменных $u, u_y, u_x, u_{xx}, u_{xxx}$. Сравнивая коэффициенты при u_{xxx} в этом соотношении, получаем

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + 3 \frac{d}{dx} \frac{\partial \Psi}{\partial u_x} = 0. \quad (2.23)$$

Если некоторое уравнение из списка (1.2)–(1.16) выбрано в качестве x -симметрии, то функция F известна, и определяющее соотношение может быть расщеплено также и по u_{xx} .

Например, пусть уравнение (1.7) является x -симметрией для (1.22). Тогда расщепление соотношения (2.23) по u_{xx} дает

$$\begin{aligned} (u_x^2 + 1)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_x^2} - u_x(u_x^2 + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial u_x} + (u_x^2 - 1)\Psi &= 0, \\ (u_x^2 + 1) \left(\Psi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_x \partial u_y} + u_x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial u_x} \right) - u_x^2 \frac{\partial \Psi}{\partial u} - u_x \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial u_y} &= 0. \end{aligned}$$

Общее решение этой системы задается формулой

$$\Psi = \sqrt{u_x^2 + 1} (g(u, u_y) + C \ln(u_x + \sqrt{u_x^2 + 1})).$$

Подставляя это выражение в условие (2.22) и находя коэффициент при u_{xxx}^3 , получаем $C = 0$ и, следовательно,

$$\Psi = g(u, u_y) \sqrt{u_x^2 + 1}. \quad (2.24)$$

Расщепляя условие (2.22) относительно u_{xx} и u_x , находим, что оно эквивалентно системе, состоящей из выражения (2.24) и уравнений

$$\begin{aligned} g \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial u_y} - \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial u_y} &= 0, & \wp'(u) u_y &= 2 \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial u_y}, \\ g^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u_y^2} + g \left(\frac{\partial g}{\partial u_y} \right)^2 - 3g\wp + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$. Так как $\wp' \neq 0$, имеем $g_u \neq 0$ и $g_{u_y} \neq 0$. Из первых двух уравнений (2.25) следует, что $g = \sqrt{\wp(u) - \mu} \sqrt{u_y^2 + a}$, где μ и a – постоянные интегрирования. Третье уравнение эквивалентно алгебраическому уравнению $4\mu^3 - g_2\mu - g_3 = 0$ для μ . Таким образом, мы получили уравнение (2.5).

Для доказательства теоремы мы выполняем подобные вычисления для каждого уравнения из списка (1.2)–(1.16), взятого в качестве x -симметрии. Для уравнений (1.2), (1.4) и (1.8) соответствующего гиперболического уравнения не существует. Напротив, уравнение (1.12) является x -симметрией для нескольких различных гиперболических уравнений. Действительно, вычисляя в этом случае коэффициент при u_{xx} в соотношении (2.23), мы получаем

$$2(u_x + 1)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u_x^2} - (u_x + 1) \frac{\partial \Psi}{\partial u_x} + \Psi = 0,$$

откуда следует $\Psi = f_1(u, u_y)(u_x + 1) + f_2(u, u_y)\sqrt{u_x + 1}$. Подставляя это выражение в (2.23), получаем

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial f_1}{\partial u_y} - 1 \right) \left(u^2 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_y} - 3u f_1 + 2u_y \right) &= 0, \\ u^2 \left(f_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_y} + \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) - 2u f_1 + 2u_y &= 0, \\ f_2 &= 2f_1 - \frac{2}{u} u_y - u f_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_y}. \end{aligned}$$

Если первый множитель в первом уравнении равен нулю, мы приходим к (2.15). Если равен нулю второй множитель, мы находим, что

$$f_1 = \frac{2u_y \sqrt{au_y + 1}}{u(1 + \sqrt{au_y + 1})},$$

где a – постоянная. Случай $a \neq 0$ соответствует (2.17), в то время как $a = 0$ приводит к уравнению (2.15) с $c = 0$. Предельный переход $a \rightarrow \infty$ дает нам уравнение (2.16).

Вычисления для оставшихся x -симметрий из списка, за исключением уравнения Шварца–Кортевега–де-Фриза (Шварца–КдФ) (1.9), очень похожи, и мы не будем их здесь приводить.

Рассмотрим уравнение Шварца–КдФ (1.9). Это уравнение является исключительным, поскольку существует широкий класс гиперболических уравнений с x -симметрией (1.9). Из уравнений этого класса мы находим все те, которые обладают y -симметрией.

Легко проверить, что уравнение

$$u_{xy} = f(u, u_y)u_x \quad (2.26)$$

имеет симметрию

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x} + q(u)u_x^3 \quad (2.27)$$

при условии

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_y} \right)^2 f + 2qf + q'u_y = 0. \quad (2.28)$$

Функция $q(u)$ может быть нормирована подходящим преобразованием $u \rightarrow \varphi(u)$, но мы предпочитаем использовать такие преобразования для приведения y -симметрии к одному из уравнений (1.2)–(1.15). Здесь и далее при ссылках на список мы подразумеваем замену $y \rightarrow x$, $\tau \rightarrow t$ в y -симметриях.

Любая из y -симметрий имеет вид

$$u_\tau = u_3 + A_2(u, u_1)u_2^2 + A_1(u, u_1)u_2 + A_0(u, u_1), \quad u_n = \frac{\partial^n u}{\partial u_y^n}.$$

Уравнение (2.23) при $x \leftrightarrow y$ эквивалентно соотношениям

$$\begin{aligned} 3 \frac{\partial^2 f}{\partial u_y^2} + 2 \frac{\partial(fA_2)}{\partial u_y} + 2 \frac{\partial A_2}{\partial u} &= 0, \\ 3u_y \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u_y} + 3f \frac{\partial f}{\partial u_y} + 2A_2u_y \frac{\partial f}{\partial u} + f \frac{\partial A_1}{\partial u_y} + 2A_2f^2 + \frac{\partial A_1}{\partial u} &= 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Уравнения (2.28) и (2.22) приводят к дополнительным ограничениям, налагаемым на функции f и q .

Для симметрий (1.2)–(1.5) мы имеем $A_1 = A_2 = 0$, и уравнения (2.29) дают $f = u_y g(u) + h(u)$, $gh = 0$, $g' + g^2 = 0$. В случае $g \neq 0$ мы получаем уравнение (2.10) с $a = 0$. Для $g = 0$ из условия (2.28) следует, что $q' = 0$ и $f'' + 2qf = 0$. Если $q \neq 0$, то без ограничения общности мы выбираем $q = -1/2$ и приходим к уравнению (2.11). В случае $g = 0$, $q = 0$ мы получаем уравнение (2.6).

Для симметрий (1.6) и (1.7) имеем $A_1 = 0$, $A_2 = -(3/2)u_y(u_y^2 + 1)^{-1}$. Из (2.28) и (2.29) следует, что $f = h(u)u_x \sqrt{u_y^2 + 1}$, $h'' = 2h(h^2 + c_0)$, $q = c_0 - (3/2)h^2$. Если $h' = 0$, то мы полагаем $h = 1$ и получаем уравнение (2.8). В случае $h' \neq 0$ мы получаем $h = \sqrt{\wp - \mu}$, $q = -(3/2)\wp$. Соответствующее гиперболическое уравнение задается формулой (2.5) с $x \leftrightarrow y$ и $a = 0$.

Для симметрий (1.8) и (1.9) $A_2 = -(3/2)u_y^{-1}$, $A_1 = 0$. Из соотношений (2.29) следует, что $f = g(u)u_y$. Таким образом, мы получили уравнение $u_{xy} = g(u)u_x u_y$. Обе x - и y -симметрии этого уравнения имеют вид (2.27), где

$$q = Ce^{-2 \int g(u) du} - g' - \frac{1}{2}g^2.$$

Это уравнение сводится к уравнению Даламбера $\bar{u}_{xy} = 0$ преобразованием

$$\bar{u} = \int du e^{-\int g(u) du}.$$

Для симметрий (1.10) и (1.11) имеем $A_2 = -(3/4)u_y^{-1}$, $A_1 = 0$. Из условий (2.28), (2.29) вытекает, что $f = g(u)u_y + C\sqrt{u_y}$, $gC = 0$, $qC = 0$, $g' + g^2 = 0$, $q' + 2qg = 0$. Если $C \neq 0$, то $q = g = 0$. Выбирая $C = 2$, мы получаем уравнение (2.7). Если $C = 0$, то $g = u^{-1}$, $q = c_0 u^{-2}$ и мы приходим к уравнению (2.10) с $a = 0$.

Если y -симметрия имеет вид (1.12), то из условий (2.28), (2.29) следует, что $f = ku^{-1}(u_y + 1 - \sqrt{u_y + 1})$, $(k-1)(k-2) = 0$, $q = 3(2-k)/(8u^2)$. Если $k = 1$, мы получаем уравнение (2.15) при $c = 0$, а случай $k = 2$ приводит к (2.16). В обоих случаях подразумевается перестановка $x \leftrightarrow y$.

В случае y -симметрии (1.13) система уравнений (2.28), (2.29) имеет два решения, которые соответствуют уравнениям (2.12) и (2.13) с перестановкой $x \leftrightarrow y$.

Симметрия (1.14) приводит к уравнению (2.18) с точностью до $x \leftrightarrow y$.

Симметрия (1.15) соответствует уравнению

$$u_{xy} = \frac{u_x u_y}{u + a} - (u + a)u_x.$$

Сдвиг $u \rightarrow u - a$ сводит его к частному случаю уравнения (2.19) с точностью до $x \leftrightarrow y$.

Рассматривая линейную x -симметрию (1.16), мы получаем уравнение (2.10) с произвольным параметром a , уравнение (2.21) и

$$u_{xy} = au_x + f(u_y - au), \quad (2.30)$$

где f удовлетворяет некоторому нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка. Требование существования y -симметрии приводит к (2.20).

Более детальная информация о каждом уравнении списка содержится в приложениях.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Гиперболические уравнения вида (1.22), имеющие как x -, так и y -интегралы, были описаны в работе [8]. В частности, было показано, что всякое такое уравнение обладает высшими как x -, так и y -симметриями, содержащими произвольные функции. Хотя не все эти симметрии являются интегрируемыми эволюционными уравнениями, среди них имеются интегрируемые симметрии.

Существуют интегрируемые уравнения, имеющие только y -интегралы (или только x -интегралы). Пример такого уравнения дает (2.5) с $a = 0$, а именно уравнение

$$u_{xy} = \xi'(u)u_y\sqrt{u_x^2 + 1}, \quad (3.1)$$

где $\xi'(u) = \sqrt{\wp - \mu}$, которое имеет y -интеграл первого порядка

$$I = (u_x + \sqrt{u_x^2 + 1})e^{-\xi}$$

и не имеет x -интегралов для невырожденной функции Вейерштрасса. Отметим, что та же самая формула дает y -интеграл для уравнения (3.1) с произвольной функцией ξ .

В некотором смысле уравнения (1.22), обладающие интегралами, сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Если мы ищем уравнения (1.22), интегрируемые методом обратной задачи рассеяния, мы должны сосредоточиться на интегрируемых уравнениях (1.22), не имеющих интегралов. Имеется два класса таких уравнений. Первый состоит из уравнения Клейна–Гордона $u_{xy} = cu$, $c \neq 0$, и уравнений, связанных с ним дифференциальными подстановками или точечными преобразованиями. Симметрии таких уравнений S -интегрируемы в терминологии Калоджеро.

Второй класс интегрируемых гиперболических уравнений, не имеющих интегралов, состоит из уравнений, не приводящихся к линейному виду дифференциальными подстановками или точечными преобразованиями. Этот наиболее интересный класс содержит уравнения, допускающие только S -интегрируемые высшие симметрии. Такие уравнения могут рассматриваться как S -интегрируемые гиперболические уравнения.

На первый взгляд анзац (1.30) кажется весьма ограничительным, если мы хотим описать все S -интегрируемые уравнения (1.22). Вопрос первый: почему только уравнения третьего порядка выбираются в качестве симметрий? Мы можем оправдать это следующим образом. Все известные S -интегрируемые иерархии эволюционных уравнений (1.27) содержат уравнения либо третьего, либо пятого порядка. Для полиномиальных иерархий это не наблюдение, а строгое утверждение [11]. Поэтому достаточно рассмотреть гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка (уравнения типа синус–Гордон) и уравнения с симметриями пятого порядка (уравнения типа Цицейки). В настоящий момент известны следующие S -интегрируемые уравнения типа Цицейки [8], [12]:

$$u_{xy} = c_1 e^u + c_2 e^{-2u}, \quad (3.2)$$

$$u_{xy} = S(u)f(u_x)g(u_y), \quad (3.3)$$

$$u_{xy} = h(u)g(u_y), \quad h'' = 0, \quad (3.4)$$

где

$$(f + 2u_x)^2(u_x - f) = 1, \quad (g + 2u_y)^2(u_y - g) = 1, \quad (S' - 2S^2)^2(S' + S^2) = c.$$

Мы планируем рассмотреть уравнения типа Цицейки в отдельной статье.

Вопрос второй: почему мы ограничиваемся симметриями $u_t = u_{xxx} + F(u, u_x, u_{xx})$ вместо симметрий общего вида

$$u_t = \Phi(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})? \quad (3.5)$$

Основной причиной этого является следующее утверждение (см. работу [13]). Предположим, что уравнение (3.5) является симметрией для уравнения (1.22). Тогда

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\partial \Phi(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})}{\partial u_{xxx}} \right) = 0.$$

Поэтому, если мы предполагаем, что (1.22) не имеет нетривиальных интегралов, то

$$\frac{\partial \Phi(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})}{\partial u_{xxx}} = \text{const}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Симметрии, интегралы и дифференциальные подстановки

В настоящем разделе содержится дополнительная информация об уравнениях из списка (2.2)–(2.21). Приводятся интегрируемые симметрии третьего порядка, x -интегралы $J(u, u_y, u_{yy}, \dots)$, y -интегралы $I(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ и в некоторых случаях общее решение.

Уравнение (2.1). И x -, и y -симметрия имеют вид (1.5), где $c_1 = c_2 = 0$. Если $ab \neq 0$, то мы имеем уравнение типа синус-Гордон. Имеется следующее вырождение: $u_{xy} = e^u$ – уравнение Лиувилля. Его интегрируемые симметрии имеют тот же вид, что и для уравнения синус-Гордон. Интегралы приведены во введении. Общее решение

$$u(x, y) = \ln \left(\frac{2f'(x)g'(y)}{(f(x) + g(y))^2} \right)$$

было найдено Лиувиллем в 1853 г.

Уравнение (2.2). Симметрии имеют следующий вид:

$$u_t = u_{xxx} - \frac{c}{2} u_x^3 - \frac{3}{2} f^2(u) u_x, \quad u_\tau = u_{yyy} - \frac{3u_y u_{yy}^2}{2(u_y^2 + 1)} - \frac{c}{2} u_y^3.$$

Формула (2.2) описывает два неэквивалентных уравнения типа синус-Гордон:

- а) $u_{xy} = u\sqrt{u_x^2 + 1}$;
 б) $u_{xy} = \sin u\sqrt{u_x^2 + 1}$.

Она описывает также и два уравнения типа Лиувилля:

- в) $u_{xy} = \sqrt{u_x^2 + 1}$; интегралы:

$$I = \frac{u_{xx}}{\sqrt{u_x^2 + 1}}, \quad J = u_{yy} - u;$$

подстановка $I = f'(x)$ приводит к общему решению

$$u = \int \operatorname{sh}(y + f(x)) dx + g(y);$$

- г) $u_{xy} = e^u\sqrt{u_x^2 + 1}$; интегралы:

$$I = \frac{u_{xx}}{\sqrt{u_x^2 + 1}} - \sqrt{u_x^2 + 1}, \quad J = u_{yy} - \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} e^{2u},$$

общее решение имеет вид

$$u(x, y) = \ln \left(\frac{-\varphi(x)g'(y)}{(g(y) + h(x))[\varphi(x) + f(x)(g(y) + h(x))]} \right),$$

$$\varphi(x) = \exp \left(\int \frac{f(x)}{4f'(x)} dx \right), \quad h(x) = \int \frac{f'(x)\varphi(x)}{f^2(x)} dx.$$

Уравнение (2.3). x -Симметрия имеет вид (1.10), где $c_1 = 0$, $c_2 = -3/4$; y -симметрия имеет вид (1.6), где $c_1 = c_2 = 0$. Уравнение S -интегрируемо.

Уравнение (2.4). И x -, и y -симметрия имеют вид (1.6), где $c_1 = 0$, $c_2 = -1/2$. Уравнение S -интегрируемо.

Уравнение (2.5). x -Симметрия имеет вид (1.7), вид y -симметрии аналогичен:

$$u_\tau = u_{yyy} - \frac{3u_y u_{yy}^2}{2(u_y^2 + a)} - \frac{3}{2}\wp(u)u_y(u_y^2 + a).$$

Если $a = 0$, то эта симметрия эквивалентна (1.9).

В общем случае уравнение можно записать через функцию Якоби sn :

$$u_{xy} = \frac{1}{\operatorname{sn}(u, k)} \sqrt{u_x^2 + 1} \sqrt{u_y^2 + a}. \quad (\text{П.1})$$

Это S -интегрируемое уравнение за исключением вырожденных случаев, указанных ниже. Отметим, что формулы

$$\sqrt{\wp(u, g_2, g_3) - \mu_1} = \frac{\operatorname{cn}(u, k)}{\operatorname{sn}(u, k)}, \quad \sqrt{\wp(u, g_2, g_3) - \mu_2} = \frac{\operatorname{cn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)},$$

где μ_1 , μ_2 и μ_3 – три различных корня уравнения $4\mu^3 - g_2\mu - g_3 = 0$, приводят к двум другим формам уравнения. Эти новые с виду уравнения сводятся к (П.1) подстановками вида $(u, k) \rightarrow (\lambda u, f(k))$ (см. книгу [14], раздел 13.22).

Существуют два вырождения функции Вейерштрасса. В первом случае, когда $\wp(u) = u^{-2}$, имеем $\mu = 0$ и $\sqrt{\wp - \mu} = u^{-1}$. Во втором случае $\wp(u) = \sin^{-2} u - 1/3$, $\mu = -1/3$ и $\sqrt{\wp - \mu} = \sin^{-1} u$. Имеем:

а) уравнение $u_{xy} = u^{-1} \sqrt{u_x^2 + 1} \sqrt{u_y^2 + a}$ C -интегрируемо, интегралы имеют вид

$$I = \frac{u_{xx}}{\sqrt{u_x^2 + 1}} + \frac{1}{u} \sqrt{u_x^2 + 1}, \quad J = \frac{u_{yy}}{\sqrt{u_y^2 + a}} + \frac{1}{u} \sqrt{u_y^2 + a};$$

общее решение дается формулой

$$u(x, y) = \sqrt{f(x) + g(y)} \left(- \int \frac{dx}{f'(x)} - a \int \frac{dy}{g'(y)} \right)^{1/2};$$

б) уравнение $u_{xy} = (\sin u)^{-1} \sqrt{u_x^2 + 1} \sqrt{u_y^2 + a}$ C -интегрируемо, интегралы имеют вид

$$I = \frac{u_{xx}}{\sqrt{u_x^2 + 1}} + \operatorname{ctg} u \sqrt{u_x^2 + 1}, \quad J = \frac{u_{yy}}{\sqrt{u_y^2 + a}} + \operatorname{ctg} u \sqrt{u_y^2 + a};$$

общее решение получается при помощи подстановки

$$u(x, y) = \arcsin \sqrt{1 - \Phi^2(x, y)},$$

которая приводит уравнения (2.5), $I = f(x)$ и $J = g(y)$ к более простому виду; если $a = 0$, то решение имеет вид

$$\Phi(x, y) = \frac{h(x) + g(y)}{f(x)}, \quad h(x) = \int \sqrt{f'^2 - f^2} dx;$$

при $a \neq 0$ растяжение y дает $a = 1$, и решение записывается в виде

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} \exp(v(x) + w(y))(\xi(x) + \eta(y))^2 - \operatorname{ch}(v(x) - w(y)),$$

где все функции выражаются через две произвольные функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ при помощи квадратур:

$$v_x = \operatorname{ch} \varphi(x), \quad \xi_x = e^{-v(x)} \operatorname{sh} \varphi(x), \quad w_y = \operatorname{ch} \psi(y), \quad \eta_y = e^{-w(y)} \operatorname{sh} \psi(y);$$

в) для $a = 0$, $u_{xy} = f(u)u_y \sqrt{u_x^2 + 1}$, где $f(u) = \sqrt{\wp(u) - \mu}$, существует y -интеграл

$$I = (u_x + \sqrt{u_x^2 + 1})e^{-\xi(u)}, \quad \xi(u) = \int f(u) du;$$

интегрированием по y уравнение приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению $u_x = \operatorname{sh}[h(x) + \xi(u)]$.

Все оставшиеся уравнения C -интегрируемы. Некоторые из них имеют два интеграла и интегрируются в явном виде, другие не имеют интегралов и связаны с линейным уравнением Клейна–Гордона.

Уравнение (2.6). x -Симметрия имеет вид (1.9), а y -симметрия – это модифицированное уравнение КдФ $u_\tau = u_{yyy} - 6u^2u_y$. Интегралы имеют вид

$$I = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x^2}, \quad J = u_y - u^2;$$

общее решение –

$$u(x, y) = \frac{g''(y)}{2g'(y)} - \frac{g'(y)}{f(x) + g(y)}.$$

Уравнение (2.7). x -Симметрия имеет вид (1.9), а y -симметрия – (1.10), где $c_1 = 0$, $c_2 = -3$. Интегралы имеют вид

$$I = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x^2}, \quad J = \sqrt{u_y} - u;$$

общее решение –

$$u(x, y) = -\frac{g'(y)}{f(x) + g(y)} + \int \frac{(g'')^2}{4g'^2} dy.$$

Уравнение (2.8). y -Симметрия имеет вид (1.6), где $c_1 = 0$, $c_2 = -1/2$, а x -симметрия задается формулой

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x} - \frac{1}{2}u_x^3.$$

Эта симметрия приводится к (1.9) преобразованием $u \rightarrow \ln u$. Интегралы имеют вид

$$I = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x^2} - \frac{1}{2}u_x^2, \quad J = \left(u_y + \sqrt{u_y^2 + 1}\right)e^{-u};$$

общее решение –

$$u(x, y) = \ln \left[1 + \frac{g(y)}{f(x) + h(y)} \right] + \int g^{-1} \sqrt{g'^2 - g^2} dy, \quad h = -\frac{1}{2}g - \frac{1}{2} \int \sqrt{g'^2 - g^2} dy.$$

Уравнение (2.9) (уравнение Гурса). И x -, и y -симметрии имеют вид (1.11).

Уравнение приводится к уравнению Клейна–Гордона $v_{xy} = v/4$ любой из двух следующих подстановок:

$$1) \quad u_x = 4v_x^2, \quad u_y = v^2; \quad 2) \quad u_x = v^2, \quad u_y = 4v_y^2.$$

Уравнение (2.10). x -Симметрия имеет вид (1.11), а y -симметрию можно получить из (1.5) подстановкой $u \rightarrow -\ln u$, $c_2 = 0$. Кроме того, существуют следующие симметрии второго порядка:

$$u_t = u_{xx}, \quad u_\tau = u_{yy} - 2u^{-1}(u_y^2 + au_y).$$

Интегралы и общее решение:

$$I = \frac{u_{xx}}{u_x}, \quad J = \frac{u_y + a}{u}; \quad u(x, y) = \frac{f(x) - ag(y)}{g'(y)}.$$

Уравнение (2.11). x -Симметрия имеет вид (2.27), где $q = -1/2$, а y -симметрия дается формулой (1.5), где $c_1 = -(3/2)a^2$, $c_2 = -(3/2)b^2$. Интегралы имеют вид

$$I = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3u_{xx}^2}{2u_x^2} - \frac{1}{2}u_x^2, \quad J = u_y - ae^u + be^{-u}.$$

В случае $a \neq 0$ общее решение записывается в виде

$$u(x, y) = \ln g(y) + \ln \left[1 + \frac{h(y)}{f(x) - a\varphi(y)} \right], \quad \ln h = \int (ag + bg^{-1}) dy, \quad \varphi = \int gh dy;$$

если $a = 0$, то

$$u(x, y) = \ln \frac{f(x) - bg(y)}{g'(y)}.$$

Уравнение (2.12). x -Симметрия имеет вид (1.13). Существуют следующие y -симметрии:

$$u_\tau = u_{yyy} - \frac{3}{2}(3 + \operatorname{cth} u)u_y u_{yy} + \frac{1}{4}(3 \operatorname{cth}^2 u + 6 \operatorname{cth} u + 7)u_y^3, \\ u_\tau = u_{yy} - \frac{1}{2}(3 + \operatorname{cth} u)u_y^2.$$

Интегралы имеют вид

$$I = \frac{e^{-u}\eta^2 - 2\eta + e^u}{\operatorname{sh} u}, \quad J = \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{1}{2}u_y(\operatorname{cth} u + 3);$$

общее решение –

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} \ln(1 + \psi^2), \quad \psi = f(x)(g(y) + h(x)), \quad f' = f - \frac{1}{4}f^3 h'^2.$$

Уравнение (2.13). x -Симметрия имеет вид (1.13). Существуют следующие y -симметрии:

$$u_\tau = u_{yyy} - 6u_y u_{yy} \operatorname{cth} u + 2(3 \operatorname{cth}^2 u - 1)u_y^3, \quad u_\tau = u_{yy} - 2u_y^2 \operatorname{cth} u.$$

Интегралы имеют вид

$$I = \frac{\eta - e^u}{\eta - e^{-u}}, \quad J = \frac{u_{yy}}{u_y} - 2u_y \operatorname{cth} u;$$

общее решение –

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\psi + 1}{\psi - 1} \right|, \quad \psi = f(x)(g(y) + h(x)), \quad h' = -\frac{f'^2 + 4f^2}{4f^3}.$$

Уравнение (2.14). И x -, и y -симметрии имеют вид (1.13). Уравнение приводится к уравнению Клейна–Гордона $v_{xy} = v$ следующей дифференциальной подстановкой:

$$u_x = (v^{-1}v_x \operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u)^2 - 1, \quad u_y = (v^{-1}v_y \operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u)^2 - 1.$$

Уравнение (2.15). Существуют x -симметрия вида (1.12) и следующая y -симметрия:

$$u_\tau = u_{yyy} - \frac{3u_y u_{yy}}{2u} + \frac{3u_y^3}{4u^2} - \frac{3c}{4}(2uu_{yy} + 2u_y^2 - cu^2u_y).$$

Уравнение приводится к уравнению Клейна–Гордона $v_{xy} = cv$ дифференциальной подстановкой

$$u = \frac{v^2}{z}, \quad z_x = -v_x^2, \quad z_y = -cv^2.$$

Если $c = 0$, то уравнение Клейна–Гордона превращается в уравнение Даламбера, поэтому появляются два следующих интеграла:

$$I = \frac{(\eta - 1)^2}{u}, \quad J = \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_y}{2u},$$

общее решение –

$$u(x, y) = \frac{(f(x) + g(y))^2}{z(x)}, \quad z(x) = -\int f'^2(x) dx.$$

Уравнение (2.16). Имеются x -симметрия вида (1.12) и две следующие y -симметрии:

$$u_\tau = u_{yyy} - 6u^{-1}u_y u_{yy} + 6u^{-2}u_y^3, \quad u_\tau = u_{yy} - 2u^{-1}u_y^2.$$

Интегралы и общее решение имеют вид

$$I = \frac{\eta - 1}{u}, \quad J = \frac{u_{yy}}{u_y} - 2\frac{u_y}{u}; \quad u(x, y) = \frac{f^2(x)}{h(x) + g(y)}, \quad h(x) = -\int f'^2(x) dx.$$

Уравнение (2.17). И x -, и y -симметрии имеют вид (1.12). Интегралы записываются в виде

$$I = \frac{u_{xx}}{\eta(\eta - 1)} - \frac{2}{u}\eta(\eta - 1), \quad J = \frac{u_{yy}}{\xi(\xi - 1)} - \frac{2}{u}\xi(\xi - 1);$$

общее решение –

$$u(x, y) = \frac{(f(x) + g(y))^2}{z(x, y)}, \quad z(x, y) = -\int f'^2(x) dx - \int g'^2(y) dy.$$

Уравнение (2.18). Существуют x -симметрия вида (1.14) и x -симметрия второго порядка $u_t = u_{xx} + 4u^2u_x + u^{-1}u_x^2$. Также существуют две следующие y -симметрии:

$$u_\tau = u_{yyy} - 9u^{-1}u_yu_{yy} + 12u^{-2}u_y^3, \quad u_\tau = u_{yy} - 3u^{-1}u_y^2.$$

Интегралы записываются в виде

$$I = \frac{u_x}{u} + u^2, \quad J = \frac{u_{yy}}{u_y} - 3\frac{u_y}{u};$$

общее решение –

$$u(x, y) = \left(\frac{f'(x)}{2(f(x) + g(y))} \right)^{1/2}.$$

Уравнение (2.19). Существует x -симметрия вида (1.15) и x -симметрия второго порядка $u_t = u_{xx} + 2uu_x$. Также существуют две следующие y -симметрии:

$$u_\tau = u_{yyy} - 3u^{-1}(2u_y + a)u_{yy} + 3au^{-2}u_y(3u_y + a) + 6u^{-2}u_y^3, \quad u_\tau = u_{yy} - 2u^{-1}u_y(u_y + a).$$

Если $a = 0$, то допускается также y -симметрия (1.9). Уравнение приводится к уравнению Клейна–Гордона $v_{xy} = -av$ следующей подстановкой:

$$u_x = \left(\frac{v_x}{v} - u \right) (u - \lambda), \quad u_y = \frac{1}{\lambda} \left(u \frac{v_y}{v} + a \right) (u - \lambda),$$

где λ – произвольный параметр.

При $a = 0$ уравнение Клейна–Гордона превращается в уравнение Даламбера, поэтому появляются два следующих интеграла:

$$I = \frac{u_x}{u} + u, \quad J = \frac{u_{yy}}{u_y} - 2\frac{u_y}{u}.$$

В этом случае имеется явное общее решение $u(x, y) = f'(x)(f(x) + g(y))^{-1}$.

Уравнение (2.20). y -Симметрия имеет вид (1.11), а x -симметрия дается формулой $u_t = u_{xxx} - (3/2)au_{xx}$. Интегралы записываются в виде

$$I = u_{xxx} - \frac{3}{2}au_{xx} + \frac{a^2}{2}u_x, \quad J = \frac{u_{yy}}{au_y + \sqrt{u_y}};$$

общее решение –

$$u(x, y) = f(x) + e^{ax} \int \left(g(y) + \frac{1 - e^{-ax/2}}{a} \right)^2 dy.$$

Здесь возможен переход к пределу $a \rightarrow 0$.

Уравнение (2.21). Допускается бесконечное множество симметрий вида $u_t = P(\partial_x, \partial_y)u$, где P – произвольный многочлен с постоянными коэффициентами. В частности, существуют x - и y -симметрии вида $u_t = P_1(\partial_x)u$ и $u_\tau = P_2(\partial_y)u$. Если $c \neq 0$, то интегралов нет, в противном случае имеются следующие простейшие интегралы: $I = u_x$, $J = u_y$.

Благодарности. Авторы благодарны А. В. Жиберу, С. Я. Старцеву и Д. К. Демскому за плодотворные дискуссии. В. В. Соколов был частично поддержан РФФИ (грант № 08-01-00440) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3472.2008.2). А. Г. Мешков был поддержан Министерством образования и науки РФ (проект 1.5.07).

Список литературы

- [1] V. V. Sokolov, A. B. Shabat, “Classification of integrable evolution equations”, *Mathematical Physics Reviews*, v. 4, Sov. Sci. Rev., Sect. C, 4, ed. S. P. Novikov, Harwood Academic, Chur, 1984, 221–280.
- [2] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, *УМН*, **42**:4(256) (1987), 3–53.
- [3] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, В. В. Соколов, “Симметричный подход к классификации интегрируемых уравнений”, *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, ред. В. Г. Бахтарьяр, В. Е. Захаров, В. М. Черноусенко, Наукова думка, Киев, 1990, 213–279.
- [4] С. И. Свинолулов, В. В. Соколов, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 86–87.
- [5] С. И. Свинолулов, В. В. Соколов, “О законах сохранения для уравнений, обладающих нетривиальной алгеброй Ли–Беклунда”, *Интегрируемые системы*, ред. А. Б. Шабат, БФ АН СССР, Уфа, 1982, 53–67.
- [6] А. В. Жибер, А. Б. Шабат, *Докл. АН СССР*, **247**:5 (1979), 1103–1107.
- [7] А. В. Жибер, А. Б. Шабат, *Докл. АН СССР*, **277**:1 (1984), 29–33.
- [8] А. В. Жибер, В. В. Соколов, *УМН*, **56**:1(337) (2001), 63–106.
- [9] С. Я. Старцев, *ТМФ*, **120**:2 (1999), 237–247.
- [10] А. Б. Борисов, С. А. Зыков, *ТМФ*, **115**:2 (1998), 199–214.
- [11] J. A. Sanders, J. P. Wang, *J. Differ. Equations*, **147**:2 (1998), 410–434.
- [12] А. Б. Борисов, С. А. Зыков, М. В. Павлов, *ТМФ*, **131**:1 (2002), 126–134.
- [13] А. В. Жибер, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 33–54.
- [14] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 3: *Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матве*, Наука, М., 1967.

Поступила в редакцию 5.07.2010