Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Веревкин, Преобразование Эйлера–Дарбу для уравнения Фоккера–Планка, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 1, 68–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6596>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:18:27

© 2011 г.

И. В. Вережкин*

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЙЛЕРА–ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА

Построено преобразование Эйлера–Дарбу для уравнения Фоккера–Планка. В качестве примера приведены решения уравнения Фоккера–Планка с заданными начальными-краевыми условиями.

Ключевые слова: уравнение Фоккера–Планка, преобразование Эйлера–Дарбу.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из эффективных способов построения решений заданного дифференциального уравнения является сведение его к изученному уравнению. В групповом анализе дифференциальных уравнений для этих целей используется понятие точечного преобразования, переводящего одно уравнение в другое [1]. Некоторые результаты группового анализа уравнения Фоккера–Планка (ФП), а также более подробные ссылки содержатся в книге [2]. При другом подходе используется известное преобразование Дарбу [3], которое позволяет строить решения уравнений, стартуя с известных уравнений. В монографии [4] описан класс линейных дифференциальных уравнений с частными производными и преобразования Эйлера–Дарбу (ЭД), переводящие решения одного уравнения в решения преобразованного уравнения того же типа. В настоящей работе мы строим преобразования ЭД для уравнения ФП.

Уравнение ФП описывает эволюцию плотности вероятности изучаемой системы во времени и широко применяется при анализе стохастических процессов в естественных науках, а также является основным уравнением теории непрерывных марковских процессов [5]–[8].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы выписываем прямое и противоположное преобразования ЭД, высшие преобразования ЭД и обсуждаем обобщение на многомерный случай. Примеры решений, удовлетворяющих начальным-краевым условиям, и их построение приведены в разделе 3. В разделе 4 подводятся итоги.

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия.
E-mail: vverigor@mail.ru

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭД ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФП

В одномерном случае уравнение ФП имеет следующий вид [5]:

$$u_t = (Fu)_{xx} + (Gu)_x \quad (1)$$

(здесь и далее $f_x = f' = \partial f / \partial x$). Коэффициенты G и F суть функции от x , которые могут быть любыми с единственным физическим ограничением $F(x) > 0$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Преобразование ЭД, заданное соотношением*

$$v(x, t) = \left(G + F' + F \frac{w_x}{w} \right) \left(u_x - \frac{w_x}{w} u \right), \quad (2)$$

переводит решения уравнения (1) в решения уравнения

$$v_t = (Fv)_{xx} + (G_1 v)_x, \quad (3)$$

где

$$G_1 = G + F' + 2F(\ln P)_x, \quad (4)$$

$$P = \frac{w}{Fw_x + (F' + G)w}, \quad (5)$$

а функция $w(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(Fw)_{xx} + (Gw)_x + cw = 0, \quad c \in \mathbb{R}^1. \quad (6)$$

Теорема 1 является частным случаем теоремы 4 (см. ниже).

Если известны k решений $w_1, \dots, w_k$ уравнения (6) для различных $c_1, \dots, c_k$, то можно построить преобразование ЭД порядка k .

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $w_1, \dots, w_k$ – решения уравнения (6), соответствующие различным постоянным $c_1, \dots, c_k$. Тогда преобразование*

$$u_k = \frac{W(H_1, \dots, H_k)}{W(w_1, \dots, w_k)} \frac{W(u, w_1, \dots, w_k)}{W(w_1, \dots, w_k)} \quad (7)$$

переводит решения уравнения (1) в решения уравнения

$$(u_k)_t = (Fu_k)_{xx} + (G_k u_k)_x. \quad (8)$$

Здесь $H_i = Fw'_i + (F' + G)w_i$, а $W(f_1, \dots, f_k)$ – определитель Вронского для функций $f_1, \dots, f_k$. При этом коэффициент задается формулой

$$G_k = G + kF' + 2F(\ln P)_x, \quad (9)$$

где $P = W(w_1, \dots, w_k) / W(H_1, \dots, H_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость теоремы вытекает из следующих двух фактов. Первый связан с возможностью преобразования уравнения (1) в так называемое обратное уравнение ФП [6]

$$z_t = Fz_{xx} + \tilde{G}z_x \quad (10)$$

при помощи точечного преобразования $z = ue^{\int dx (F' + G)/F}$, при этом связь коэффициентов задается соотношением $\tilde{G} = -G$.

Второй факт основан на результатах работы [9], согласно которым преобразование ЭД

$$z_k = \frac{W(z, h_1, \dots, h_k)}{W(h'_1, \dots, h'_k)} \quad (11)$$

переводит решения уравнения (10) в решения уравнения

$$(z_k)_t = F(z_k)_{xx} + \tilde{G}_k(z_k)_x, \quad (12)$$

где

$$\tilde{G}_k = \tilde{G} + kF' + 2F\partial_x \left(\ln \frac{W(h'_1, \dots, h'_k)}{W(h_1, \dots, h_k)} \right), \quad (13)$$

а функции h_i являются решениями уравнения $F(h_i)_{xx} + \tilde{G}(h_i)_x + ch_i = 0$, где $c \in \mathbb{R}^1$.

Уравнение (12) с помощью преобразования

$$u_k = z_k e^{-\int dx (F' - \tilde{G}_k)/F} \quad (14)$$

переводится в уравнение (8). Зная связь функций u и z , u_k и z_k , а также h_i и w_i , имеющую тот же вид $h_i = w_i e^{\int dx (F' + G)/F}$, нетрудно из выражений (11), (13) и (14) получить формулы (7) и (9), используя простые свойства определителей.

Преобразование ЭД, переводящее уравнение (3) в уравнение (1), будем называть противоположным преобразованием (2). Результат построения противоположного преобразования содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть задано преобразование ЭД, переводящее решения уравнения (1) в решения уравнения (3). Тогда преобразование ЭД, задаваемое соотношением

$$u(x, t) = \left(G_1 + F' + F \frac{w'_1}{w_1} \right) \left(v_x - \frac{w'_1}{w_1} v \right), \quad (15)$$

переводит решения уравнения (3) в решения уравнения (1), если

$$w_1 = \frac{1}{Fw} \left(\frac{w_x}{w} + \frac{F' + G}{F} \right) e^{-\int dx G/F}, \quad (16)$$

где G_1 и P определяются формулами (4) и (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия того, что преобразования (2) и (15) являются противоположными, имеют вид

$$G_1 = G + F' + 2F(\ln P)_x, \quad G = G_1 + F' + 2F(\ln P_1)_x, \quad (17)$$

где функция P_1 задается выражением

$$P_1 = \frac{w_1}{Fw'_1 + (F' + G_1)w_1}.$$

Совместное решение уравнений (17) с учетом соотношения $(Fw_x + (F' + G)w)_x = -cw$ приводит к функции w_1 , имеющей вид (16).

Например, уравнение $v_t = a^2 v_{xx} + (G_1 v)_x$, где коэффициент G_1 задается выражениями (22) или (32) (см. ниже), противоположным преобразованием сводится к уравнению теплопроводности; при этом с точки зрения групповой классификации указанные уравнения не являются эквивалентными [2].

Отметим, что композиция прямого и противоположного преобразований ЭД в общем случае не является тождественным преобразованием (что и объясняет применение нестандартной терминологии). Вместе с тем наличие противоположного преобразования (15) позволяет разбить множество уравнений ФП на классы эквивалентности относительно преобразований ЭД.

Преобразование ЭД может быть использовано для построения решений многомерных уравнений ФП некоторого частного вида. Для выяснения вида многомерного уравнения ФП, следуя работе [9], обобщим теорему 1.

ТЕОРЕМА 4. *Преобразование ЭД*

$$v(x, t) = \left(G + F' + F \frac{w_x}{w} \right) \left(u_x - \frac{w_x}{w} u \right)$$

переводит решения уравнения

$$(Fu)_{xx} + (Gu)_x = \hat{B}u \quad (18)$$

в решения уравнения

$$(Fv)_{xx} + (G_1 v)_x = \hat{B}v, \quad (19)$$

где $\hat{B}$ – дифференциальный оператор по переменным $y_1, \dots, y_n$ вида

$$\hat{B} = \sum_{|\alpha| > 0}^N b_\alpha(y) \partial_y^\alpha,$$

$\partial_y^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial_{y_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{y_n}^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – целочисленный мультииндекс, коэффициент G_1 задан в (4), а функция w удовлетворяет дифференциальному уравнению (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения: $v = \hat{L}u = (u_x + su)/P$ и

$$\begin{aligned} \hat{A}u &= Fu_{xx} + (G + 2F')u_x + (G' + F'')u, \\ \hat{A}_1u &= F_1u_{xx} + (G_1 + 2F'_1)u_x + (G'_1 + F''_1)u. \end{aligned}$$

Тогда исходные уравнения (18) и (19) запишутся как $\hat{A}u = \hat{B}u$ и $\hat{A}_1v = \hat{B}v$. Второе уравнение можно переписать с учетом введенных обозначений в следующей форме: $\hat{A}_1\hat{L}u = \hat{B}\hat{L}u$. Так как операторы $\hat{B}$ и $\hat{L}$ коммутируют, последнее уравнение приводится к виду $\hat{A}_1\hat{L}u - \hat{L}\hat{A}u = 0$. Левая часть последнего уравнения является

полиномом относительно u_{xxx} , u_{xx} , u_x , u . Коэффициенты при этих величинах должны быть равны нулю. Собирая подобные члены при u_{xxx} и u_{xx} , получаем $F_1 = F$ и $G_1 = G + F' + 2F(\ln P)_x$ соответственно. Приравнявая к нулю коэффициенты при u_x , u , с учетом найденных F_1 и G_1 получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{P}Fs' + \frac{1}{P}F's + \left(\frac{P'}{P^2}\right)'F - \frac{P'}{P^2}F' - \frac{1}{P}F'' - \frac{P'}{P^2}G - \frac{1}{P}G' &= 0, \\ \frac{1}{P}Fs'' + \frac{1}{P}(3F' + G) + \left[\left(\frac{P'}{P^2}\right)'F - \frac{P'}{P^2}F' + \frac{1}{P}F'' - \frac{P'}{P^2}G\right]s - \\ - \frac{1}{P}(G'' + F''') &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что при $P = w/(Fw_x + (F' + G)w)$ и $s = -w_x/w$ уравнения (20) сводятся к равенству

$$[Fw_{xx} + (G + 2F')w_x + (G' + F'')w]_x - \frac{w_x}{w}[Fw_{xx} + (G + 2F')w_x + (G' + F'')w] = 0,$$

которое удовлетворяется тождественно при условии, что функция w удовлетворяет уравнению (6).

Условие теоремы 4 подсказывает, каким образом можно строить решения многомерных уравнений ФП, имеющих вид $u_t = (F_{ij}(x)u)_{x_i x_j} + (G_i(x)u)_{x_i}$, где F_{ij} – матрица, а $x = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор независимых переменных. Для этого коэффициент F_{ij} должен быть диагональной матрицей, а диагональные элементы F_{ii} и соответствующие функции G_i могут зависеть только от переменной x_i . Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пусть исходным уравнением будет трехмерное уравнение диффузии

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad a \in \mathbb{R}^1. \quad (21)$$

Перепишем это уравнение в виде $u_t - a^2(u_{yy} + u_{zz}) = a^2u_{xx}$ или, в наших обозначениях, $\hat{B}u = a^2u_{xx}$. Тогда, совершая преобразование ЭД по переменной x , получим преобразованное уравнение $v_t - a^2(v_{yy} + v_{zz}) = a^2v_{xx} + (G_1(x)v)_x$.

Повторяя последовательно процедуру по переменным y и z , получим следующее преобразованное трехмерное уравнение ФП:

$$h_t = a^2(h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}) + (G_1(x)h)_x + (G_2(y)h)_y + (G_3(z)h)_z,$$

при этом вид коэффициентов G_i зависит от выбранного решения соответствующего уравнения (6).

3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФП

Используя результаты раздела 2, построим решение одномерного уравнения ФП, удовлетворяющее заданным начально-краевым условиям.

В качестве “затравочного” уравнения возьмем уравнение диффузии $u_t = a^2u_{xx}$. Пусть в уравнении (6) константа $c = 0$. Тогда $w = c_1 + c_2x$. Для коэффициента G_1 формула (4) дает

$$G_1 = \frac{2a^2c_2}{c_1 + c_2x}, \quad (22)$$

а преобразованное уравнение принимает вид

$$v_t = a^2 v_{xx} + (G_1 v)_x. \quad (23)$$

Потребуем, чтобы искомое решение данного уравнения удовлетворяло следующим начально-краевым условиям:

$$v(x, 0) = \delta(x - x_0), \quad (24)$$

$$v(x, t) = 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (25)$$

$$a^2 v_x + G_1 v = 0, \quad x = 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (26)$$

$$v(x, t) = 0, \quad x < 0. \quad (27)$$

Данные условия предполагают поиск решения уравнения (23) на полубесконечной прямой $x > 0$, ограниченной в точке $x = 0$ непроницаемой стенкой [6].

Для решения поставленной задачи переформулируем условия (24)–(26) для уравнения диффузии так, чтобы решение $u(x, t)$, удовлетворяющее переформулированным условиям, при подстановке в формулу (2) давало функцию $v(x, t)$, удовлетворяющую нужным условиям. Требуемыми условиями для функции $u(x, t)$ будут следующие:

$$a^2 \frac{w_x}{w} \left(u_x - \frac{w_x}{w} u \right) \Big|_{t=0} = \delta(x - x_0), \quad (28)$$

$$a^2 \left(\frac{w_x}{w} u_{xx} - \frac{w_{xx}}{w} u_x \right) \Big|_{\substack{x=0, \\ x \rightarrow \infty}} = 0, \quad (29)$$

Условиям (28) и (29) соответствуют соотношения (24) и (26). Выполнение остальных условий проверяется непосредственно после построения функции $v(x, t)$.

Сначала рассмотрим задачу Коши для уравнения (28). Как хорошо известно, решение уравнения диффузии с начальными условиями дается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-(x-\xi)^2/4a^2 t} d\xi. \quad (30)$$

Для выполнения условия (28) необходимо потребовать, чтобы функция $u_0(x)$ удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$a^2 \frac{w_x}{w} \left(u'_0 - \frac{w_x}{w} u_0 \right) = \delta(x - x_0). \quad (31)$$

Решением этого уравнения является функция

$$u_0 = \frac{c_1 + c_2 x}{a^2 c_2} \theta(x - x_0),$$

где $\theta(x - x_0)$ – функция Хевисайда.

Теперь рассмотрим краевые условия (29) в точке $x = 0$. Для этого запишем решение (30) как

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty [u_0(\xi)e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} + u_0(-\xi)e^{-(x+\xi)^2/4a^2t}] d\xi.$$

Учтем, что $w_{xx} = 0$, тогда условие (29) принимает вид

$$u_{xx}|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \frac{1}{2t} \int_0^\infty e^{-\xi^2/4a^2t} \xi[u'_0(\xi) - u'_0(-\xi)] d\xi = 0.$$

Положим $u'_0(\xi) = u'_0(-\xi)$. Тогда $u_0(-\xi) = -u_0(\xi)$, и функция $u(x, t)$, удовлетворяющая краевому условию (29), равна

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u_0(\xi)(e^{-(x-\xi)^2/4a^2t} - e^{-(x+\xi)^2/4a^2t}) d\xi.$$

Опуская промежуточные вычисления, запишем выражение для функции $v(x, t)$ при $x > 0$:

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a\sqrt{t}} - \frac{2ac_2^2\sqrt{t}}{(c_1 + c_2x)^2} \right) e^{-(x-x_0)^2/4a^2t} + \\ & + \frac{c_2}{\sqrt{\pi}(c_1 + c_2x)} \left(\frac{x_0 - x}{2a\sqrt{t}} \right) e^{-(x-x_0)^2/4a^2t} + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{c_1 - c_2x}{c_1 + c_2x} \frac{1}{a\sqrt{t}} + \frac{2ac_2^2\sqrt{t}}{(c_1 + c_2x)^2} \right) e^{-(x+x_0)^2/4a^2t} + \\ & + \frac{c_2}{\sqrt{\pi}(c_1 + c_2x)} \left(\frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}} e^{-(x+x_0)^2/4a^2t} + \frac{2c_2}{c_1 + c_2x} \int_{(x+x_0)/2a\sqrt{t}}^\infty e^{-y^2} dy \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что условия (25) и (26) при $x \rightarrow \infty$ выполняются, а функция $v(x, t)$ нормируема.

Аналогично рассматривается случай, когда $c = -n^2$ и $w = c_1e^{nx} + c_2e^{-nx}$; при этом считаем $c_1 \neq c_2$. Тогда коэффициент G_1 согласно формуле (4) имеет вид

$$G_1 = -\frac{8a^2nc_1c_2}{c_1^2e^{2nx} - c_2^2e^{-2nx}}. \quad (32)$$

Решение уравнения (31) дается формулой

$$u_0 = \frac{\theta(x - x_0)(c_1e^{nx} + c_2e^{-nx})}{a^2n(c_1e^{nx_0} - c_2e^{-nx_0})}.$$

В точке $x = 0$ в связи с тем, что $w_{xx} \neq 0$, условие (29) имеет более сложный вид:

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \frac{1}{2t} \int_0^\infty \xi[k(u'_0(\xi) - u'_0(-\xi)) - n(u_0(\xi) - u_0(-\xi))] e^{-\xi^2/4a^2t} d\xi = 0,$$

где $k = (c_1 - c_2)/(c_1 + c_2)$. Для нахождения функции $u_0(-\xi)$ необходимо решить уравнение

$$u'_0(\xi) - u'_0(-\xi) = h(u_0(\xi) - u_0(-\xi)), \quad (33)$$

где $h = n/k$. Обозначив $\Phi(\xi) = u_0(-\xi)$, запишем это уравнение в виде $\Phi' + h\Phi = hu_0(\xi) - u_0'(\xi)$. Его решением является функция

$$\Phi(\xi) = e^{-h\xi} \left\{ \tilde{c} + \int_0^\xi e^{h\xi} [hu_0(\xi) - u_0'(\xi)] d\xi \right\}.$$

Постоянную интегрирования найдем из условия $\Phi(0) = \tilde{c} = u_0(0)$. Окончательно для $u_0(-\xi)$ находим

$$u_0(-\xi) = -u_0(\xi) + e^{-h\xi} \left\{ 2u_0(0) + 2h \int_0^\xi e^{h\xi} u_0(\xi) d\xi \right\}. \quad (34)$$

Выпишем, несмотря на громоздкость, явный вид решения уравнения (23):

$$\begin{aligned} v(x, t) = & \frac{w_x}{w} \frac{1}{nw'_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{a^2 n^2 t} \left[\frac{c_1}{2a\sqrt{t}} \exp \left(- \left(\frac{x_0 - x}{2a\sqrt{t}} - an\sqrt{t} \right)^2 + nx \right) + \right. \\ & + \frac{c_2}{2a\sqrt{t}} \exp \left(- \left(\frac{x_0 - x}{2a\sqrt{t}} + an\sqrt{t} \right)^2 - nx \right) + \\ & + \left. \frac{2nc_1 c_2}{w} \left(\int_{y_1}^\infty e^{-y^2} dy - \int_{y_2}^\infty e^{-y^2} dy \right) \right] + \\ & + \frac{w_x}{w} \frac{1}{nw'_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{a^2 n^2 t} \left[\frac{c_1}{2a\sqrt{t}} \exp \left(- \left(\frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}} - an\sqrt{t} \right)^2 - nx \right) + \right. \\ & + \frac{c_2}{2a\sqrt{t}} \exp \left(- \left(\frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}} + an\sqrt{t} \right)^2 + nx \right) + \\ & + \left. \frac{2nc_1^2}{w} \int_{y_3}^\infty e^{-y^2} dy - \frac{2nc_2^2}{w} \int_{y_4}^\infty e^{-y^2} dy \right] - \\ & - \frac{w_x}{w} \frac{2h}{nw'_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{c_1}{h+n} e^{a^2 n^2 t} \left[\frac{1}{2a\sqrt{t}} \exp \left(- \left(\frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}} - an\sqrt{t} \right)^2 - nx \right) + \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{2nc_1}{w} \int_{y_3}^\infty e^{-y^2} dy \right] + \right. \\ & + \frac{c_2}{h-n} e^{a^2 n^2 t} \left[\frac{1}{2a\sqrt{t}} \exp \left(- \left(\frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}} + an\sqrt{t} \right)^2 + nx \right) - \right. \\ & - \left. \left. \frac{2nc_2}{w} \int_{y_4}^\infty e^{-y^2} dy \right] - \right. \\ & - \frac{c_1 - c_2}{n} e^{a^2 h^2 t + hx} \left[\frac{1}{2a\sqrt{t}} \exp \left(- \left(\frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t} \right)^2 \right) + \right. \\ & + \left. \left. \left(\frac{w_x}{w} - h \right) \int_{y_5}^\infty e^{-y^2} dy \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения $w'_0 = c_1 e^{nx_0} - c_2 e^{-nx_0}$, $y_1 = (x_0 - x)/(2a\sqrt{t}) - an\sqrt{t}$, $y_2 = (x_0 - x)/(2a\sqrt{t}) + an\sqrt{t}$, $y_3 = (x_0 + x)/(2a\sqrt{t}) - an\sqrt{t}$, $y_4 = (x_0 + x)/(2a\sqrt{t}) + an\sqrt{t}$, $y_5 = (x_0 + x)/(2a\sqrt{t}) + ah\sqrt{t}$.

Выполнение условий (25) и (27) при $x \rightarrow \infty$ и нормируемость функции $v(x, t)$ проверяются непосредственно.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, как, используя преобразование ЭД, можно строить последовательности точно решаемых уравнений ФП, в том числе и для многомерных уравнений определенного вида.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность О. В. Капцову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [2] В. И. Лагно, С. В. Спичак, В. И. Стогний, *Симметричный анализ уравнений эволюционного типа*, Ин-т компьютерных исследований, Москва, Ижевск, 2004.
- [3] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformation and Solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin, 1991.
- [4] О. В. Капцов, *Методы интегрирования уравнений с частными производными*, Физматлит, М., 2009.
- [5] Н. Г. Ван Кампен, *Стохастические процессы в физике и химии*, Высшая школа, М., 1990.
- [6] К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, М., 1986.
- [7] H. Risken, *The Fokker–Planck Equation. Methods of Solution and Applications*, Springer Ser. Synergetics, **18**, Springer, Berlin, 1984.
- [8] В. И. Кляцкин, *Динамика стохастических систем*, Физматлит, М., 2002.
- [9] О. В. Капцов, *Вычислительные технологии*, **12:4** (2007), 59–72.

Поступила в редакцию 14.06.2010