Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Х. Расулов, Существенный спектр одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 1, 95–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:08:39

© 2011 г.

Т. Х. Расулов^{*†}

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, АССОЦИИРОВАННОГО С СИСТЕМОЙ ТРЕХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

Рассматривается модельный оператор H , ассоциированный с системой трех частиц на ν -мерной решетке, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов. Выделяются каналные операторы, и через их спектры описываются местоположение и структура существенного спектра оператора H . Для собственных функций оператора H получен аналог уравнения Фаддеева.

Ключевые слова: модельный оператор, нелокальный потенциал, класс Гильберта–Шмидта, уравнения Фаддеева, существенный спектр, каналный оператор.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию существенного спектра непрерывных и дискретных операторов Шредингера посвящены многие работы (см., например, [1]–[3] и [4]–[7] соответственно). В частности, в работе [5] доказано, что существенный спектр трехчастичного дискретного оператора Шредингера состоит из объединения не более чем конечного числа отрезков даже в том случае, когда соответствующий двухчастичный дискретный оператор Шредингера имеет бесконечное число собственных значений.

Обычно в физической литературе используются “локальные” потенциалы, т. е. операторы умножения на функцию. Однако потенциалы, которые строятся, например, в теории псевдопотенциала [8], оказываются нелокальными и представляют собой, в том числе для периодического оператора, сумму локального потенциала и некоторого конечномерного.

В настоящей работе рассматривается модельный оператор H , ассоциированный с системой трех частиц на ν -мерной решетке, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов, где роль двухчастичного дискретного оператора Шредингера играет модель Фридрихса (см., например, работу [6]). Отметим, что оператор H можно рассматривать как некомпактное возмущение оператора, исследованного в работах [6], [7], [9]. Выделены каналные операторы. Местоположение

^{*}Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан. E-mail: rth@mail.ru

[†]Институт математики университета Берна, Берн, Швейцария.
E-mail: tulkin.rasulov@math.unibe.ch

и структура существенного спектра оператора H описаны через спектры канальных операторов. Более того, доказано, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более чем пяти отрезков. Получен аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H . Отметим, что появление двухчастичных ветвей по обе стороны трехчастичной ветви существенного спектра H (см. ниже теорему 2.3) играет важную роль при изучении конечности или бесконечности частей дискретного спектра, расположенных там, а также на лакунах существенного спектра.

Следует отметить, что двухчастичная и трехчастичная ветви существенного спектра трехчастичного непрерывного оператора Шредингера [1]–[3] представляют собой полубесконечные прямые и пересекаются. В рассматриваемой нами ситуации в отличие от непрерывного случая такие ветви существенного спектра оператора H заполняют отрезки конечной длины, и они могут не пересекаться, т.е. возникает лакуна. Поэтому необходимо изучать ветви существенного спектра по обе стороны трехчастичной ветви, от которой зависит существование двустороннего эффекта Ефимова. В работах [4]–[7], [9] доказано, что рассматриваемые решетчатые операторы не имеют частей существенного и дискретного спектров правее трехчастичной ветви. В этих работах изучение расположения существенного спектра основано на монотонности определителя Фредгольма модели Фридрихса. В данном случае в отличие от предыдущих работ определитель Фредгольма не монотонен, и метод исследования основан на числе собственных значений модели Фридрихса (см. ниже леммы 3.2–3.4).

Структура работы следующая. В разделе 2 модельный оператор рассматривается как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и формулируются основные результаты работы. В разделе 3, пользуясь разложением в прямой операторный интеграл, изучение спектральных свойств канальных операторов сводится к изучению спектральных свойств модели Фридрихса. В разделе 4 получен аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H . Раздел 5 посвящен доказательству основных результатов настоящей работы.

2. МОДЕЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbf{T}^\nu \equiv (-\pi; \pi]^\nu$ – ν -мерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $L_2(\mathbf{T}^\nu)$ и $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbf{T}^\nu$ и $(\mathbf{T}^\nu)^2$ соответственно.

Рассмотрим модельный оператор H , действующий в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$ по формуле

$$H = H_0 - V_1 - V_2,$$

где операторы H_0 и V_α , $\alpha = 1, 2$, определяются как

$$(H_0 f)(p, q) = w(p, q) f(p, q),$$

$$(V_1 f)(p, q) = \int v_1(q, s) f(p, s) ds, \quad (V_2 f)(p, q) = \int v_2(p, s) f(s, q) ds.$$

Здесь функция $v_\alpha(\cdot, \cdot)$, $\alpha = 1, 2$, имеет вид

$$v_\alpha(p, q) = v_{\alpha 1}(p)v_{\alpha 1}(q) - v_{\alpha 2}(p)v_{\alpha 2}(q), \quad \alpha = 1, 2,$$

а $v_{ij}(\cdot)$, $i, j = 1, 2$, и $w(\cdot, \cdot)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbf{T}^\nu$ и $(\mathbf{T}^\nu)^2$ соответственно. Здесь и далее интеграл без указания пределов означает интегрирование по всей области изменения переменных.

При этих предположениях оператор H является ограниченным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$.

Отметим, что в работах [10], [11] изучены нелокальные потенциалы с вырожденным ядром вида

$$\mathcal{V}(p, q) = - \sum_{i=1}^n f_i(p)g_i(q),$$

рассматриваемые как модели, ассоциированные с системой нескольких частиц, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов. Например, одним из нелокальных потенциалов является потенциал Гаусса, ядро которого для одночастичного случая имеет вид

$$\mathcal{V}(p, q) = -\mu e^{-\beta(p^2+q^2)/2}, \quad \mu, \beta > 0.$$

Так как двухчастичные уравнения Шредингера легко разрешимы для нелокальных взаимодействий, их часто используют в ядерной физике и в многочастичных проблемах. Они также систематически используются вместе с уравнениями Фаддеева для систем трех частиц. Основная характеристика этих уравнений состоит в том [11], что частично-волновая t -матрица имеет ту же простую форму и может быть продолжена простым способом: наиболее важная характеристика в ядерной физике и в уравнениях Фаддеева.

Положим

$$w_1(p, q) = w(p, q), \quad w_2(p, q) = w(q, p).$$

Далее предположим, если не оговорено противное, что число α принимает значения 1 и 2.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ соответственно спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Для формулировки основных результатов работы наряду с оператором H рассмотрим также ограниченный и самосопряженный оператор H_α , действующий в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$ по формуле

$$H_\alpha = H_\alpha^0 - V_\alpha, \quad (H_\alpha^0 f)(p, q) = w_\alpha(p, q)f(p, q),$$

и оператор (модель Фридрихса) $h_\alpha(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, действующий в $L_2(\mathbf{T}^\nu)$ как

$$h_\alpha(p) = h_\alpha^0(p) - v_\alpha, \quad (2.1)$$

где операторы $h_\alpha^0(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, и v_α определяются по правилам

$$(h_\alpha^0(p)f)(q) = w_\alpha(p, q)f(q), \quad (v_\alpha f)(q) = \int v_\alpha(q, s)f(s) ds.$$

Оператор возмущения v_α оператора $h_\alpha^0(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, является самосопряженным двумерным оператором. Из известной теоремы Вейля [1] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(p))$ оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, совпадает с существенным спектром оператора $h_\alpha^0(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$. Известно, что $\sigma_{\text{ess}}(h_\alpha^0(p)) = [m_\alpha(p); M_\alpha(p)]$, где числа $m_\alpha(p)$ и $M_\alpha(p)$ определяются равенствами

$$m_\alpha(p) = \min_{q \in \mathbf{T}^\nu} w_\alpha(p, q), \quad M_\alpha(p) = \max_{q \in \mathbf{T}^\nu} w_\alpha(p, q).$$

Из последних двух фактов следует, что $\sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(p)) = [m_\alpha(p); M_\alpha(p)]$.

Пусть $\mathbf{C}$ – комплексная плоскость. При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^\nu$ определим регулярную в $\mathbf{C} \setminus [m_\alpha(p); M_\alpha(p)]$ функцию

$$\Delta_\alpha(p; z) = \Delta_\alpha^{(1)}(p; z) \Delta_\alpha^{(2)}(p; z) + (\Delta_\alpha^{(3)}(p; z))^2$$

(детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $h_\alpha(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$), где

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^{(1)}(p; z) &= 1 - \int \frac{v_{\alpha 1}^2(s) ds}{w_\alpha(p, s) - z}, & \Delta_\alpha^{(2)}(p; z) &= 1 + \int \frac{v_{\alpha 2}^2(s) ds}{w_\alpha(p, s) - z}, \\ \Delta_\alpha^{(3)}(p; z) &= \int \frac{v_{\alpha 1}(s) v_{\alpha 2}(s) ds}{w_\alpha(p, s) - z}. \end{aligned}$$

Тогда имеет место равенство (см. ниже лемму 3.1)

$$\sigma_{\text{disc}}(h_\alpha(p)) = \{z \in \mathbf{C} \setminus [m_\alpha(p), M_\alpha(p)] : \Delta_\alpha(p; z) = 0\}, \quad p \in \mathbf{T}^\nu.$$

Положим

$$\begin{aligned} m &= \min_{p, q \in \mathbf{T}^\nu} w(p, q), & M &= \max_{p, q \in \mathbf{T}^\nu} w(p, q), \\ \sigma_{\text{two}}(H_\alpha) &= \bigcup_{p \in \mathbf{T}^\nu} \sigma_{\text{disc}}(h_\alpha(p)), & \sigma_{\text{three}}(H_\alpha) &= [m; M]. \end{aligned}$$

Спектр оператора H_α описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для спектра оператора H_α имеет место равенство*

$$\sigma(H_\alpha) = \sigma_{\text{two}}(H_\alpha) \cup \sigma_{\text{three}}(H_\alpha).$$

Теперь сформулируем результат, который описывает местоположение существенного спектра оператора H .

ТЕОРЕМА 2.2. *Существенный спектр оператора H совпадает с объединением спектров операторов H_1 и H_2 , т. е. $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$. Более того, множество $\sigma_{\text{ess}}(H)$ представляет собой объединение не более чем пяти отрезков.*

Очевидно, что операторы H_1 и H_2 выбраны единственным образом из оператора H в силу свойства разложимости в прямой операторный интеграл (см. ниже раздел 3).

Согласно теореме 2.2 операторы H_1 и H_2 обладают характеристическим свойством канального оператора соответствующего оператора Шредингера (см., например, работы [4], [5]). По этой причине мы назовем их канальными операторами, соответствующими оператору H . Заметим, что канальные операторы H_1 и H_2 имеют более простую структуру, чем H , и поэтому теорема 2.2 играет важную роль при дальнейших исследованиях спектра оператора H .

Положим

$$\sigma_{\text{two}}(H) = \sigma_{\text{two}}(H_1) \cup \sigma_{\text{two}}(H_2), \quad \sigma_{\text{three}}(H) = \sigma_{\text{three}}(H_1).$$

Введем теперь новые подмножества существенного спектра оператора H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множества $\sigma_{\text{two}}(H)$ и $\sigma_{\text{three}}(H)$ называются соответственно двухчастичной и трехчастичной ветвями существенного спектра оператора H .

Далее предположим, что $\nu = 3$, и сформулируем следующее условие для дальнейших рассуждений. Необходимое утверждение приводится в соответствующих размерностях без комментариев.

ОСНОВНОЕ УСЛОВИЕ. Функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет невырожденный минимум (максимум) в точках $(p_{\min}^{(i)}, q_{\min}^{(i)})$, $i = \overline{1, n}$, $1 \leq n < \infty$ ($(p_{\max}^{(j)}, q_{\max}^{(j)})$, $j = \overline{1, m}$, $1 \leq m < \infty$) шестимерного тора.

Если выполняется данное условие, то из непрерывности функции $v_{\alpha i}(\cdot)$, $i = 1, 2$, на $\mathbf{T}^3$ вытекает, что существуют конечные интегралы

$$\int \frac{v_{\alpha i}(s)v_{\alpha j}(s) ds}{w_{\alpha}(p, s) - m}, \quad \int \frac{v_{\alpha i}(s)v_{\alpha j}(s) ds}{w_{\alpha}(p, s) - M}, \quad i, j = 1, 2, \quad p \in \mathbf{T}^3.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что при каждом $p \in \mathbf{T}^3$ существуют конечные пределы

$$\lim_{z \rightarrow m-0} \Delta_{\alpha}(p; z) = \Delta_{\alpha}(p; m), \quad \lim_{z \rightarrow M+0} \Delta_{\alpha}(p; z) = \Delta_{\alpha}(p; M);$$

следовательно, функции $\Delta_{\alpha}(\cdot; m)$ и $\Delta_{\alpha}(\cdot; M)$ являются непрерывными на $\mathbf{T}^3$.

Обозначим

$$\begin{aligned} a_{\alpha} &= \min\{\sigma_{\text{two}}(H_{\alpha}) \cap (-\infty; m]\}, & b_{\alpha} &= \max\{\sigma_{\text{two}}(H_{\alpha}) \cap (-\infty; m]\}, \\ c_{\alpha} &= \min\{\sigma_{\text{two}}(H_{\alpha}) \cap [M; +\infty)\}, & d_{\alpha} &= \max\{\sigma_{\text{two}}(H_{\alpha}) \cap [M; +\infty)\}. \end{aligned}$$

Следующая теорема описывает структуру спектра оператора H_{α} .

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть выполняется основное условие. Предположим, что:

- 1) $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{\alpha}(p; m) \geq 0$; тогда:
 - а) $\sigma(H_{\alpha}) = [m; M]$, если $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{\alpha}(p; M) \geq 0$;
 - б) $\sigma(H_{\alpha}) = [m; M] \cup [c_{\alpha}; d_{\alpha}]$, $c_{\alpha} > M$, если $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{\alpha}(p; M) < 0$;
- 2) $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{\alpha}(p; m) < 0$; тогда:
 - а) $\sigma(H_{\alpha}) = [a_{\alpha}; b_{\alpha}] \cup [m; M]$, $b_{\alpha} < m$, если $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{\alpha}(p; M) \geq 0$;
 - б) $\sigma(H_{\alpha}) = [a_{\alpha}; b_{\alpha}] \cup [m; M] \cup [c_{\alpha}; d_{\alpha}]$, $b_{\alpha} < m$ и $c_{\alpha} > M$, если $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{\alpha}(p; M) < 0$.

Отметим, что теоремы 2.2 и 2.3 вместе описывают местоположение и структуру существенного спектра.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Класс функций $v_{ij}(\cdot)$, $i, j = 1, 2$, и $w(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2.3, является непустым (см. ниже лемму 3.5).

3. НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ H_α И $H_\alpha(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$

В этом разделе исследование спектральных свойств оператора канала H_α с использованием разложения в прямой операторный интеграл сводится к изучению спектральных свойств модели Фридрихса $h_\alpha(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, которая определена формулой (2.1). Описывается дискретный спектр оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$.

Можно легко проверить, что оператор H_1 (H_2) коммутирует с любым оператором умножения на ограниченную функцию $u_1(p)$ ($u_2(q)$) в $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$.

Из разложения в прямой интеграл пространства $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$

$$L_2((\mathbf{T}^\nu)^2) = \int \oplus L_2(\mathbf{T}^\nu) dp \quad (3.1)$$

следует, что оператор H_α разлагается в прямой операторный интеграл

$$H_\alpha = \int \oplus h_\alpha(p) dp,$$

где оператор $h_\alpha(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, определен формулой (2.1). Отметим, что в разложении (3.1) под знаком прямого интеграла стоят одинаковые слои.

Установим связь между собственными значениями оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, и нулями функции $\Delta_\alpha(p; \cdot)$. Верна следующая лемма.

ЛЕММА 3.1. *При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^\nu$ число $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(p))$ является собственным значением оператора $h_\alpha(p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\alpha(p; z) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть число $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(p))$ – собственное значение оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathbf{T}^\nu$, и пусть $f \in L_2(\mathbf{T}^\nu)$ – соответствующая собственная функция, т. е., уравнение

$$w_\alpha(p, q)f(q) - \int [v_{\alpha 1}(q)v_{\alpha 1}(s) - v_{\alpha 2}(q)v_{\alpha 2}(s)]f(s) ds = zf(q) \quad (3.2)$$

имеет ненулевое решение $f \in L_2(\mathbf{T}^\nu)$.

Заметим, что для любых $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(p))$ и $q \in \mathbf{T}^\nu$ имеет место соотношение $w_\alpha(p, q) - z \neq 0$, $p \in \mathbf{T}^\nu$. Тогда из уравнения (3.2) для f имеем

$$f(q) = \frac{v_{\alpha 1}(q)C_\alpha^{(1)} - v_{\alpha 2}(q)C_\alpha^{(2)}}{w_\alpha(p, q) - z}, \quad (3.3)$$

где

$$C_\alpha^{(i)} = \int v_{\alpha i}(s)f(s)ds, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Подставляя выражение (3.3) в равенство (3.4) получим, что уравнение (3.2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{aligned} \left(1 - \int \frac{v_{\alpha 1}^2(s) ds}{w_{\alpha}(p, s) - z}\right) C_{\alpha}^{(1)} + \int \frac{v_{\alpha 1}(s)v_{\alpha 2}(s) ds}{w_{\alpha}(p, s) - z} C_{\alpha}^{(2)} &= 0, \\ - \int \frac{v_{\alpha 1}(s)v_{\alpha 2}(s) ds}{w_{\alpha}(p, s) - z} C_{\alpha}^{(1)} + \left(1 + \int \frac{v_{\alpha 2}^2(s) ds}{w_{\alpha}(p, s) - z}\right) C_{\alpha}^{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

имеет ненулевое решение $(C_{\alpha}^{(1)}, C_{\alpha}^{(2)}) \in \mathbf{C}^2$, т. е. когда $\Delta_{\alpha}(p; z) = 0$, где $\mathbf{C}^2$ – декартов квадрат множества $\mathbf{C}$. Лемма доказана.

Для любого ограниченного самосопряженного оператора A , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, обозначим через $\mathcal{H}_A(z)$ такое подпространство, что $(Af, f) < \lambda \|f\|^2$ для любого $f \in \mathcal{H}_A(z)$, и положим

$$N(\lambda, A) = \sup_{\mathcal{H}_A(z)} \dim \mathcal{H}_A(z).$$

Число $N(\lambda, A)$ равно бесконечности, если $\lambda > \min \sigma_{\text{ess}}(A)$; если число $N(\lambda, A)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора A , меньших λ , с учетом кратности.

ЛЕММА 3.2. *Для любого $p \in \mathbf{T}^{\nu}$ оператор $h_{\alpha}(p)$ может иметь не более одного простого собственного значения, лежащего левее $m_{\alpha}(p)$ и правее $M_{\alpha}(p)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем оператор $v_{\alpha i}$, $i = 1, 2$, действующий в $L_2(\mathbf{T}^{\nu})$ как

$$(v_{\alpha i}f)(q) = v_{\alpha i}(q) \int v_{\alpha i}(s)f(s) ds, \quad i = 1, 2.$$

Тогда оператор v_{α} можно записать в виде $v_{\alpha} = v_{\alpha 1} - v_{\alpha 2}$. Положим $h_{\alpha}^{(1)} = h_{\alpha}^0 - v_{\alpha 1}$. Так как оператор $v_{\alpha i}$, $i = 1, 2$, неотрицательный, можно легко показать, что $h_{\alpha}(p) \geq h_{\alpha}^{(1)}(p)$ и, следовательно,

$$\mathcal{H}_{h_{\alpha}(p)}(z) \subset \mathcal{H}_{h_{\alpha}^{(1)}(p)}(z), \quad z \leq m_{\alpha}(p).$$

Это означает, что

$$N(z, h_{\alpha}(p)) \leq N(z, h_{\alpha}^{(1)}(p)), \quad z \leq m_{\alpha}(p). \quad (3.5)$$

Так как определитель Фредгольма $\Delta_{\alpha}^{(1)}(p; \cdot)$ оператора $h_{\alpha}^{(1)}(p)$ монотонно убывает на полуоси $(-\infty, m_{\alpha}(p))$, то $N(m_{\alpha}(p), h_{\alpha}^{(1)}(p)) \leq 1$; следовательно, в силу неравенства (3.5) верно $N(m_{\alpha}(p), h_{\alpha}(p)) \leq 1$. Это означает, что для любого $p \in \mathbf{T}^{\nu}$ оператор $h_{\alpha}(p)$ может иметь не более чем одно простое собственное значение, лежащее левее $m_{\alpha}(p)$.

Аналогично можно показать, что $N(-M_{\alpha}(p), -h_{\alpha}(p)) \leq 1$. Лемма доказана.

Следующая лемма описывает множество собственных значений оператора $h_{\alpha}(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, на $(-\infty, m)$.

ЛЕММА 3.3. Пусть выполняется основное условие. Тогда:

1) если $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_\alpha(p; m) \geq 0$, то для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h_\alpha(p)$ не имеет собственных значений на $(-\infty, m)$;

2) если $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_\alpha(p; m) < 0$, то для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h_\alpha(p)$ имеет единственное простое собственное значение на $(-\infty, m)$.

Лемма 3.3 доказывается аналогично следующей лемме, которая описывает множество собственных значений оператора $h_\alpha(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, на $(M, +\infty)$.

ЛЕММА 3.4. Пусть выполняется основное условие. Тогда:

1) если $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_\alpha(p; M) \geq 0$, то для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h_\alpha(p)$ не имеет собственных значений на $(M, +\infty)$;

2) если $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_\alpha(p; M) < 0$, то для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h_\alpha(p)$ имеет единственное простое собственное значение на $(M, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_\alpha(p; M) \geq 0$. Тогда для любого $p \in \mathbf{T}^3$ имеет место неравенство $\Delta_\alpha(p; M) \geq 0$. Из непрерывности функции $\Delta_\alpha(p; \cdot)$ на $[M, \infty)$ и равенства

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \Delta_\alpha(p; z) = 1 \quad (3.6)$$

следует, что функция $\Delta_\alpha(p; \cdot)$ не имеет нулей на (M, ∞) или имеет по крайней мере два (с учетом кратности) нуля на (M, ∞) . Во втором случае по лемме 3.1 оператор $h_\alpha(p)$ имеет по крайней мере два (с учетом кратности) собственных значения на (M, ∞) . Это противоречит утверждению леммы 3.2. Таким образом, для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h_\alpha(p)$ не имеет собственных значений на (M, ∞) . Здесь мы использовали также тот факт, что число $z_0 \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h_\alpha(p))$ является n -кратным собственным значением $h_\alpha(p)$ тогда и только тогда, когда число z_0 является n -кратным нулем функции $\Delta_\alpha(p; \cdot)$ [12].

2) Пусть $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_\alpha(p; M) < 0$. Тогда для любого $p \in \mathbf{T}^3$ имеет место неравенство $\Delta_\alpha(p; M) < 0$. В силу равенства (3.6) функция $\Delta_\alpha(p; \cdot)$ при всех $p \in \mathbf{T}^3$ имеет единственный простой нуль на (M, ∞) или имеет по крайней мере три (с учетом кратности) нуля на (M, ∞) . Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что возможен только первый случай, который в силу леммы 3.1 означает, что при всех $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h_\alpha(p)$ имеет единственное простое собственное значение на $(M, +\infty)$. Лемма 3.4 доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть $w(\cdot, \cdot)$ – любая функция, удовлетворяющая основному условию. Предположим, что $v_{\alpha i}(p) = \sqrt{\mu_{\alpha i}} \hat{v}_{\alpha i}(p)$, $\mu_{\alpha i} > 0$, $i = 1, 2$, такое, что функция $\hat{v}_{\alpha i}(\cdot)$, $i = 1, 2$, непрерывна на $\mathbf{T}^3$ с компактным носителем $\Omega_{\alpha i} \subset \mathbf{T}^3$ и $\Omega_{\alpha 1} \cap \Omega_{\alpha 2} = \emptyset$.

Положим

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha 1}^{(1)} &= \min_{p \in \mathbf{T}^3} \left(\int_{\Omega_{\alpha 1}} \frac{\hat{v}_{\alpha 1}^2(s) ds}{w_\alpha(p, s) - m} \right)^{-1}, & \mu_{\alpha 1}^{(2)} &= \max_{p \in \mathbf{T}^3} \left(\int_{\Omega_{\alpha 1}} \frac{\hat{v}_{\alpha 1}^2(s) ds}{w_\alpha(p, s) - m} \right)^{-1}, \\ \mu_{\alpha 2}^{(1)} &= \min_{p \in \mathbf{T}^3} \left(\int_{\Omega_{\alpha 2}} \frac{\hat{v}_{\alpha 2}^2(s) ds}{M - w_\alpha(p, s)} \right)^{-1}, & \mu_{\alpha 2}^{(2)} &= \max_{p \in \mathbf{T}^3} \left(\int_{\Omega_{\alpha 2}} \frac{\hat{v}_{\alpha 2}^2(s) ds}{M - w_\alpha(p, s)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случаи:

а) $0 < \mu_{\alpha 1} \leq \mu_{\alpha 1}^{(1)}, 0 < \mu_{\alpha 2} \leq \mu_{\alpha 2}^{(1)}$,

б) $0 < \mu_{\alpha 1} \leq \mu_{\alpha 1}^{(1)}, \mu_{\alpha 2} > \mu_{\alpha 2}^{(2)}$,

в) $\mu_{\alpha 1} > \mu_{\alpha 1}^{(2)}, 0 < \mu_{\alpha 2} \leq \mu_{\alpha 2}^{(1)}$,

г) $\mu_{\alpha 1} > \mu_{\alpha 1}^{(2)}, \mu_{\alpha 2} > \mu_{\alpha 2}^{(2)}$.

Если выполняются условия “а”, “б”, “в”, “г”, то выполняются и условия 1а, 1б, 2а, 2б в утверждении теоремы 2.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Отметим, что примерами рассмотренных в лемме 3.5 функций $w(\cdot, \cdot)$ и $\hat{v}_{\alpha i}(\cdot)$, $i = 1, 2$, являются следующие:

$$w(p, q) = \varepsilon(p) + 4\varepsilon\left(\frac{1}{2}(p+q)\right) + \varepsilon(q), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^{(i)}),$$

$$p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbf{T}^3,$$

$$\hat{v}_{\alpha 1}(p) = \begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^3 (\cos p^{(i)} - \cos 1), & \text{если } p \in B_1(0), \\ 0, & \text{если } p \in \mathbf{T}^3 \setminus B_1(0), \end{cases}$$

$$\hat{v}_{\alpha 2}(p) = \begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^3 (\cos p^{(i)} + \cos 1), & \text{если } p \in B_1(\bar{\pi}), \\ 0, & \text{если } p \in \mathbf{T}^3 \setminus B_1(\bar{\pi}). \end{cases}$$

Здесь $B_1(p_0) = \{p \in \mathbf{T}^3 : |p - p_0| \leq 1\}$, $p_0 \in \mathbf{T}^3$. Видно, что функция $w(\cdot, \cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $(0, 0) \in (\mathbf{T}^3)^2$ и максимум в точке $(\bar{\pi}, \bar{\pi}) \in (\mathbf{T}^3)^2$, $\bar{\pi} = (\pi, \pi, \pi) \in \mathbf{T}^3$, т. е. $n = m = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5. Сначала отметим, что при наложенных на функции $\hat{v}_{\alpha i}(\cdot)$, $i = 1, 2$, условиях имеет место равенство $\Delta_{\alpha}(p; z) = \Delta_{\alpha}^{(1)}(p; z)\Delta_{\alpha}^{(2)}(p; z)$. Докажем лемму для случая (в); остальные утверждения доказываются аналогично.

Пусть $\mu_{\alpha 1} > \mu_{\alpha 1}^{(2)}, 0 < \mu_{\alpha 2} \leq \mu_{\alpha 2}^{(1)}$. Тогда

$$\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{\alpha}(p; m) \leq \max_{p \in \mathbf{T}^3} \left(1 - \mu_{\alpha 1} \int_{\Omega_{\alpha 1}} \frac{\hat{v}_{\alpha 1}^2(s) ds}{w_{\alpha}(p, s) - m} \right) \max_{p \in \mathbf{T}^3} \left(1 + \mu_{\alpha 2} \int_{\Omega_{\alpha 2}} \frac{\hat{v}_{\alpha 2}^2(s) ds}{w_{\alpha}(p, s) - m} \right).$$

В последнем неравенстве второй множитель, стоящий в правой части, положителен при любом $\mu_{\alpha 2} > 0$. Так как $\mu_{\alpha 1} > \mu_{\alpha 1}^{(2)}$, то первый множитель отрицателен, т. е. $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{\alpha}(p; m) < 0$. Точно так же показывается, что при любых $\mu_{\alpha 1} > 0$ и $0 < \mu_{\alpha 2} \leq \mu_{\alpha 2}^{(1)}$ имеет место $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{\alpha}(p; M) \geq 0$. Лемма доказана.

4. АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА H

В этом разделе мы получим аналог системы интегральных уравнений Фаддеева для собственных функций оператора H , который играет важную роль при исследовании спектра этого оператора. Часть наших построений и рассуждений аналогичны тем, что содержатся в работе [13], и в этих случаях мы ограничиваемся соответствующей ссылкой.

Пусть $L_2^{(2)}(\mathbf{T}^\nu)$ – гильбертово пространство двухкомпонентных вектор-функций $f = (f_1, f_2)$, $f_\alpha \in L_2(\mathbf{T}^\nu)$, $\alpha = 1, 2$. При каждом $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H)$ вводим блочно-операторные матрицы $A(z)$ и $K(z)$, действующие в пространстве $L_2^{(4)}(\mathbf{T}^\nu) = L_2^{(2)}(\mathbf{T}^\nu) \oplus L_2^{(2)}(\mathbf{T}^\nu)$ по формулам

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_1(z) & 0 \\ 0 & A_2(z) \end{pmatrix}, \quad K(z) = \begin{pmatrix} 0 & K_2(z) \\ K_1(z) & 0 \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $A_\alpha(z)$ и $K_\alpha(z)$ также являются блочно-операторными матрицами, действующими в пространстве $L_2^{(2)}(\mathbf{T}^\nu)$:

$$A_\alpha(z) = \begin{pmatrix} A_{11}^{(\alpha)}(z) & A_{12}^{(\alpha)}(z) \\ A_{21}^{(\alpha)}(z) & A_{22}^{(\alpha)}(z) \end{pmatrix}, \quad K_\alpha(z) = \begin{pmatrix} K_{11}^{(\alpha)}(z) & K_{12}^{(\alpha)}(z) \\ K_{21}^{(\alpha)}(z) & K_{22}^{(\alpha)}(z) \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_{ij}^{(\alpha)}(z): L_2(\mathbf{T}^\nu) \rightarrow L_2(\mathbf{T}^\nu)$, $i, j = 1, 2$, $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H)$, – оператор умножения на функцию $a_{ij}^{(\alpha)}(p; z)$:

$$a_{11}^{(\alpha)}(p; z) = \Delta_\alpha^{(1)}(p; z), \quad a_{12}^{(\alpha)}(p; z) = -a_{21}^{(\alpha)}(p; z) = \Delta_\alpha^{(3)}(p; z), \\ a_{22}^{(\alpha)}(p; z) = \Delta_\alpha^{(2)}(p; z),$$

а операторы $K_{ij}^{(\alpha)}(z): L_2(\mathbf{T}^\nu) \rightarrow L_2(\mathbf{T}^\nu)$, $i, j = 1, 2$, $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H)$, – интегральные операторы с ядрами $K_{ij}^{(\alpha)}(p, s; z)$ (s – переменная интегрирования):

$$K_{11}^{(1)}(p, s; z) = K_{11}^{(2)}(s, p; z) = \frac{v_{11}(p)v_{21}(s)}{w_2(p, s) - z}, \\ K_{12}^{(1)}(p, s; z) = -K_{21}^{(2)}(s, p; z) = -\frac{v_{12}(s)v_{21}(p)}{w_2(p, s) - z}, \\ K_{21}^{(1)}(p, s; z) = -K_{12}^{(1)}(s, p; z) = \frac{v_{11}(s)v_{22}(p)}{w_2(p, s) - z}, \\ K_{22}^{(1)}(p, s; z) = K_{22}^{(2)}(s, p; z) = -\frac{v_{12}(p)v_{22}(s)}{w_2(p, s) - z}.$$

Заметим, что при каждом $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H)$ операторы $K_{ij}^{(\alpha)}(z)$, $i, j = 1, 2$, принадлежат классу Гильберта–Шмидта, следовательно, $K(z)$ является компактным оператором.

ЛЕММА 4.1. *При каждом $z \in \mathbf{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ является ограниченным и обратимым; обратный оператор $A^{-1}(z)$ определен формулой*

$$A^{-1}(z) = \begin{pmatrix} A_1^{-1}(z) & 0 \\ 0 & A_2^{-1}(z) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A_\alpha^{-1}(z) = \begin{pmatrix} B_{11}^{(\alpha)}(z) & B_{12}^{(\alpha)}(z) \\ B_{21}^{(\alpha)}(z) & B_{22}^{(\alpha)}(z) \end{pmatrix}.$$

Здесь $B_{ij}^{(\alpha)}(z): L_2(\mathbf{T}^\nu) \rightarrow L_2(\mathbf{T}^\nu)$, $i, j = 1, 2$, $z \in \mathbf{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ – оператор умножения на функцию $b_{ij}^{(\alpha)}(p; z)$:

$$\begin{aligned} b_{11}^{(\alpha)}(p; z) &= \frac{a_{22}^{(\alpha)}(p; z)}{\Delta_\alpha(p; z)}, & b_{12}^{(\alpha)}(p; z) &= -\frac{a_{12}^{(\alpha)}(p; z)}{\Delta_\alpha(p; z)}, \\ b_{21}^{(\alpha)}(p; z) &= -\frac{a_{21}^{(\alpha)}(p; z)}{\Delta_\alpha(p; z)}, & b_{22}^{(\alpha)}(p; z) &= \frac{a_{11}^{(\alpha)}(p; z)}{\Delta_\alpha(p; z)}. \end{aligned}$$

Лемма 4.1 доказывается аналогично соответствующей лемме из работы [13].

Так как при каждом $z \in \mathbf{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ обратим, то для таких z мы определим оператор вида

$$T(z) = A^{-1}(z)K(z) = \begin{pmatrix} 0 & A_1^{-1}(z)K_2(z) \\ A_2^{-1}(z)K_1(z) & 0 \end{pmatrix}.$$

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $T(z)$.

ЛЕММА 4.2. Число $z \in \mathbf{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $T(z)$ имеет собственное значение, равное единице, и их кратности совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathbf{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ – собственное значение оператора H и $f \in L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$ – соответствующая собственная функция, т. е. уравнение $Hf = zf$, или уравнение

$$\begin{aligned} (w(p, q) - z)f(p, q) - \int [v_{11}(q)v_{11}(s) - v_{12}(q)v_{12}(s)]f(p, s) ds - \\ - \int [v_{21}(p)v_{21}(s) - v_{22}(p)v_{22}(s)]f(s, q) ds = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

имеет нетривиальное решение $f \in L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$.

Так как $z \notin \sigma_{\text{three}}(H)$, для f из уравнения (4.1) имеем

$$f(p, q) = \frac{v_{11}(q)g_1^{(1)}(p) - v_{12}(q)g_2^{(1)}(p) + v_{21}(p)g_1^{(2)}(q) - v_{22}(p)g_2^{(2)}(q)}{w(p, q) - z}, \quad (4.2)$$

где

$$g_\alpha^{(1)}(p) = \int v_{1\alpha}(s)f(p, s) ds, \quad g_\alpha^{(2)}(p) = \int v_{2\alpha}(s)f(s, p) ds. \quad (4.3)$$

Подставляя выражение (4.2) в равенство (4.3), получим, что система уравнений

$$\begin{aligned}
 & \Delta_1^{(1)}(p; z)g_1^{(1)}(p) + \Delta_3^{(1)}(p; z)g_2^{(1)}(p) = \\
 & = v_{21}(p) \int \frac{v_{11}(s)g_1^{(2)}(s)}{w_1(p, s) - z} ds - v_{22}(p) \int \frac{v_{11}(s)g_2^{(2)}(s)}{w_1(p, s) - z} ds, \\
 & - \Delta_3^{(1)}(p; z)g_1^{(1)}(p) + \Delta_2^{(1)}(p; z)g_2^{(1)}(p) = \\
 & = v_{21}(p) \int \frac{v_{12}(s)g_1^{(2)}(s)}{w_1(p, s) - z} ds - v_{22}(p) \int \frac{v_{12}(s)g_2^{(2)}(s)}{w_1(p, s) - z} ds, \\
 & \Delta_1^{(2)}(p; z)g_1^{(2)}(p) + \Delta_3^{(2)}(p; z)g_2^{(2)}(p) = \\
 & = v_{11}(p) \int \frac{v_{21}(s)g_1^{(1)}(s)}{w_2(p, s) - z} ds - v_{12}(p) \int \frac{v_{21}(s)g_2^{(1)}(s)}{w_2(p, s) - z} ds, \\
 & - \Delta_3^{(2)}(p; z)g_1^{(2)}(p) + \Delta_2^{(2)}(p; z)g_2^{(2)}(p) = \\
 & = v_{11}(p) \int \frac{v_{22}(s)g_1^{(1)}(s)}{w_2(p, s) - z} ds - v_{12}(p) \int \frac{v_{22}(s)g_2^{(1)}(s)}{w_2(p, s) - z} ds,
 \end{aligned}$$

или уравнение

$$A(z)g = K(z)g, \quad g = (g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)}) \in L_2^{(4)}(\mathbf{T}^\nu), \quad (4.4)$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение (4.1) имеет нетривиальное решение и линейные подпространства, порожденные решениями уравнений (4.1) и (4.4), имеют одинаковые размерности.

По лемме 4.1 при каждом $z \in \mathbf{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ обратим; следовательно, уравнение $g = A^{-1}(z)K(z)g$, т. е. уравнение $g = T(z)g$, имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение (4.4) имеет нетривиальное решение. Здесь также линейные подпространства, порожденные решениями уравнений (4.4) и $g = T(z)g$, имеют одинаковые размерности. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Заметим, что уравнение $T(z)g = g$ обычно называется аналогом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H .

Видно, что при каждом $z < \min(\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ является положительным и, следовательно, существует его положительный квадратный корень $A^{-1/2}(z)$. Для таких z определим оператор $\hat{T}(z) = A^{-1/2}(z)K(z)A^{-1/2}(z)$, являющийся симметризованным вариантом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H .

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 4.2 и устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $\hat{T}(z)$.

ЛЕММА 4.3. Число $z < \min(\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $\hat{T}(z)$ имеет собственное значение, равное единице, и их кратности совпадают.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В этом разделе, пользуясь утверждениями разделов 3 и 4, а также критерием Вейля и теоремой о спектре разложимых операторов, мы докажем основные результаты работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Применяя теорему о спектре разложимых операторов и учитывая равенства

$$\sigma(h_\alpha(p)) = \sigma_{\text{disc}}(h_\alpha(p)) \cup [m_\alpha(p); M_\alpha(p)], \quad \bigcup_{p \in \mathbf{T}^\nu} [m_\alpha(p); M_\alpha(p)] = [m; M],$$

мы приходим к утверждению теоремы 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Сначала докажем, что $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. С этой целью множество $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$ перепишем в виде

$$\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) = \sigma_{\text{two}}(H_1) \cup \sigma_{\text{two}}(H_2) \cup \sigma_{\text{three}}(H_1).$$

Включение $\sigma_{\text{three}}(H_1) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$ доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [14].

Пусть I_1 , I_2 и $\mathcal{I}$ – единичные операторы в $L_2(\mathbf{T}^\nu)$, $L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$ и $L_2^{(4)}(\mathbf{T}^\nu)$ соответственно.

Сперва докажем, что $\sigma_{\text{two}}(H_1) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Для этого удобно воспользоваться критерием Вейля, т. е. достаточно построить последовательность ортонормированных векторов $\{f_n\} \subset L_2((\mathbf{T}^\nu)^2)$, для которых $\|(H - z_0 I_2)f_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ означает норму в соответствующих пространствах. Пусть $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H_1)$ – произвольная точка. Тогда по лемме 3.1 существует точка $p_0 \in \mathbf{T}^\nu$ такая, что $z_0 \in \sigma_{\text{disc}}(h_1(p_0))$. Следовательно, существует ненулевая функция $\psi \in L_2(\mathbf{T}^\nu)$ такая, что

$$(h_1(p_0) - z_0 I_1)\psi = 0. \quad (5.1)$$

Положим

$$f_n(p, q) = \frac{\chi_{V_n}(p)}{\sqrt{\mu(V_n(p_0))}} \frac{\psi(q)}{\|\psi\|},$$

где $\chi_{V_n}(\cdot)$ – характеристическая функция множества

$$V_n(p_0) = \left\{ p \in \mathbf{T}^\nu : \frac{1}{n+1} < |p - p_0| < \frac{1}{n} \right\},$$

$\mu(V_n(p_0))$ – лебегова мера множества $V_n(p_0)$.

Можно легко проверить, что $\{f_n\}$ является ортонормированной системой. Покажем, что для системы $\{f_n\}$ при $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H_1)$ верно

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(H - z_0 I_2)f_n\| = 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|(H - z_0 I_2) f_n\|^2 &= \frac{1}{\|\psi\|^2} \int \frac{\chi_{V_n}(p)}{\mu(V_n(p_0))} \left[\int \left| (w(p, q) - z_0) \psi(q) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int v_1(q, s) \psi(s) ds \right|^2 dq \right] dp + \int \left| \int \frac{\chi_{V_n}(s) v_2(p, s)}{\sqrt{\mu(V_n(p_0))}} ds \right|^2 dp. \end{aligned}$$

Тогда существует число $C > 0$ такое, что второе слагаемое можно оценить через $C\mu(V_n(p_0))$, которое по построению множества $V_n(p_0)$ стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. А первое слагаемое оценим через

$$\int \frac{\chi_{V_n}(p)}{\mu(V_n(p_0))} \|h_1(p) - z_0 I_1\|^2 dp \leq \sup_{p \in V_n(p_0)} \|h_1(p) - z_0 I_1\|^2.$$

В силу равенства (5.1) оценочное выражение стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Таким образом, $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Из произвольности точки $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H_1)$ вытекает, что $\sigma_{\text{two}}(H_1) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Включение $\sigma_{\text{two}}(H_2) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$ доказывается аналогично.

Следовательно, мы доказали, что $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Теперь докажем обратное включение, а именно $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$. В силу компактности оператора $K(z)$ и ограниченности оператора $A^{-1}(z)$ получаем, что $T(z)$ – компактнозначная аналитическая функция в $\mathbf{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$. Из самосопряженности оператора H и леммы 4.2 следует, что операторнозначная функция $(\mathcal{I} - T(z))^{-1}$ существует при всех $\text{Im } z \neq 0$. Согласно аналитической теореме Фредгольма (см. книгу [1], теорема XIII.13) заключаем, что операторнозначная функция $(\mathcal{I} - T(z))^{-1}$ существует на $\mathbf{C} \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ всюду за исключением дискретного множества S , где она имеет вычеты конечного ранга. Это означает, что $\sigma(H) \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2))$ состоит только из изолированных точек, которые могут иметь предельные точки только в граничных точках множества $\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$. Отсюда имеем, что $\sigma(H) \setminus (\sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)) \subset \sigma(H) \setminus \sigma_{\text{ess}}(H)$, т. е. $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \sigma(H_1) \cup \sigma(H_2)$.

В силу леммы 3.2 для любого $p \in \mathbf{T}^\nu$ оператор $h_\alpha(p)$ имеет не более чем по одному простому собственному значению, лежащему левее m_α и правее M_α . Тогда в силу теоремы о спектре разложимых операторов из определения множества $\sigma_{\text{two}}(H_\alpha)$ вытекает, что оно состоит из объединения не более чем двух отрезков, которые расположены в обеих частях множества $\sigma_{\text{three}}(H)$. Следовательно, множество $\sigma_{\text{ess}}(H)$ состоит из объединения не более чем пяти отрезков. Теорема 2.2 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_\alpha(p; m) \geq 0$. Тогда из леммы 3.3 вытекает, что для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h_\alpha(p)$ не имеет собственных значений, лежащих левее m . В силу определения множества $\sigma_{\text{two}}(H_\alpha)$ имеем, что

$$\sigma_{\text{two}}(H) \cap (-\infty, m) = \emptyset.$$

(а) Пусть $\min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_\alpha(p; M) \geq 0$. Аналогично можно показать, что

$$\sigma_{\text{two}}(H_\alpha) \cap (M, \infty) = \emptyset.$$

Теоремы 2.1 и 2.2 завершают доказательство части (а) теоремы 2.3.

(б) Пусть $\max_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_\alpha(p; M) < 0$. В силу леммы 3.4 для любого $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h_\alpha(p)$ имеет единственное простое собственное значение $E_\alpha(p) > M$. Так как функции $v_{\alpha i}(\cdot)$, $i = 1, 2$, и $w_\alpha(\cdot, \cdot)$ непрерывны в своих областях определения, то функция $E_\alpha(\cdot)$, сопоставляющая элементу $p \in \mathbf{T}^3$ собственное значение $E_\alpha(p)$, также непрерывна на компактном множестве $\mathbf{T}^3$. Отсюда вытекает, что множество значений $\text{Im } E_\alpha$ функции $E_\alpha(\cdot)$ есть отрезок $\text{Im } E_\alpha = [c_\alpha; d_\alpha]$, где $c_\alpha > M$. Из определения множества $\sigma_{\text{two}}(H_\alpha)$ следует, что

$$\sigma_{\text{two}}(H_\alpha) \cap (M, \infty) = [c_\alpha; d_\alpha], \quad c_\alpha > M.$$

Учитывая теоремы 2.1 и 2.2, получим доказательство части (б) теоремы 2.3.

Остальные утверждения теоремы 2.3 доказываются аналогично. Теорема доказана.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность Г. М. Жислину и рецензенту за ценные и полезные замечания. Работа поддержана Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) (грант № TR368/6-1).

Список литературы

- [1] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 4: *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [2] Г. М. Жислин, Труды ММО, **9**, 1960, 81–120.
- [3] W. Hunziker, *Helv. Phys. Acta*, **39** (1966), 451–462.
- [4] С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, *ТМФ*, **135**:3 (2003), 478–503.
- [5] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Math. Nachr.*, **280**:7 (2007), 699–716, arXiv: math-ph/0312050.
- [6] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:4 (2007), 377–387.
- [7] S. Albeverio, S. N. Lakaev, R. Kh. Djumanova, *Rep. Math. Phys.*, **63**:3 (2009), 359–380.
- [8] В. Хейне, М. Коэн, Д. Уэйр, *Теория псевдопотенциала*, Мир, М., 1973.
- [9] Т. Х. Расулов, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 34–44.
- [10] R. L. Hall, *J. Phys. A*, **39**:4 (2006), 903–912, arXiv: math-ph/0512079.
- [11] K. Chadani, R. Kobayashi, *J. Phys. A*, **38**:5 (2005), 1133–1145, arXiv: math-ph/0409018.
- [12] Ж. И. Абдуллаев, *Узб. матем. журн.*, 1996, № 1, 3–10.
- [13] Т. Х. Расулов, *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 12, 59–69.
- [14] Ю. Х. Эшкабилов, *ТМФ*, **149**:2 (2006), 228–243.

Поступила в редакцию 16.05.2010,
после доработки 16.06.2010