Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лосяков, Эволюция N -частичного состояния в модели БКШ, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 1, 110–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:14:00

© 2011 г.

В. В. Лосяков^{*†}

ЭВОЛЮЦИЯ N -ЧАСТИЧНОГО СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛИ БКШ

Получена точная схема описания динамики N -частичного состояния в модели БКШ, аналогичная процедуре Гельфанда–Яглома для нахождения амплитуды перехода гармонического осциллятора с частотой, зависящей от времени. Найден многочастичный спектр и собственные функции гамильтониана БКШ в пределе объема системы, стремящегося к бесконечности.

Ключевые слова: модель БКШ, фиксированное число частиц, формула Гельфанда–Яглома, многочастичный спектр.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель БКШ была предложена в 1957 г. Бардином, Купером и Шриффером [1] для микроскопического объяснения явления сверхпроводимости. Этим ее роль в теоретической физике не ограничилась. Через некоторое время модель БКШ стала одной из базовых моделей квантовой теории поля для исследования такого вопроса, как унитарно-неэквивалентные представления в этой теории [2]. Как квантовая теория поля, описывающая физическую систему с бесконечным числом степеней свободы в бесконечном объеме, модель БКШ при некоторых предположениях оказалась асимптотически точно решаемой (см. об этом ниже). На языке статистической физики это означает, что мы хорошо знаем свойства этой модели в рамках большого канонического распределения Гиббса, и этого вполне достаточно для описания макроскопически объемных сверхпроводников. Однако в последнее время развитие экспериментальных методов в физике конденсированного состояния привело к возможности изучения парных корреляций в физических системах, содержащих сотни (иногда десятки) атомов [3]. Это заставило переоценить роль большого канонического распределения Гиббса при изучении таких систем [4]–[7] и стимулировало исследования объектов, содержащих достаточно большое, но принципиально конечное число частиц в конечном объеме. Следует отметить, что такие исследования проводились и ранее при изучении влияния парных (“сверхпроводящих”) корреляций

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.

E-mail: losyakov@lpi.ru

на свойства ядерного вещества [8]. В этом направлении были получены существенные результаты [9]. Ричардсон [9] нашел формально точное решение модели БКШ в предположении о специальном виде межэлектронного взаимодействия. Несмотря на это, детальность современных экспериментов вновь возродила интерес к указанным вопросам.

Наше рассмотрение модели БКШ будет проводиться в рамках квантово-механического описания. Число степеней свободы нашей системы конечно. Все ее представления унитарно-эквивалентны, энергетический спектр не зависит от температуры. Мы получим точную схему описания динамики N -частичного состояния в модели БКШ, аналогичную процедуре Гельфанда–Яглома [10] для нахождения амплитуды перехода гармонического осциллятора с частотой, зависящей от времени. Также мы проиллюстрируем, как проявляются особенности квантово-полевой модели БКШ при квантово-механическом описании.

2. МОДЕЛЬ БКШ

Модель БКШ описывается гамильтонианом вида

$$\hat{H} = \sum_{m \in \mathbb{S}} \varepsilon_m \hat{a}_m^+ \hat{a}_m - \frac{1}{V} \sum_{m, n \in \mathbb{S}} V_{m, n} \hat{a}_m^+ \hat{a}_{-m}^+ \hat{a}_{-n} \hat{a}_n, \quad (1)$$

в котором операторы рождения $\hat{a}_m^+$ и уничтожения $\hat{a}_m$ электрона в состоянии m подчиняются антикоммутационным соотношениям

$$[\hat{a}_m^+, \hat{a}_n]_+ = \delta_{m, n}, [\hat{a}_m^+, \hat{a}_n^+]_+ = [\hat{a}_m, \hat{a}_n]_+ = 0.$$

Состояния m устроены таким образом, что для каждого из них существует состояние $-m$, обращенное по времени (например, для объемного сверхпроводника $m = \{\vec{p}, s_z\}$, т.е. состояние характеризуется импульсом $\vec{p}$ электрона и проекцией его спина на некоторую выделенную ось $s_z = \pm 1/2$, при этом $-m = \{-\vec{p}, -s_z\}$). Множество всех таких состояний мы обозначим $\mathbb{S} = \{m\}$.

В дальнейшем мы будем также считать, что спектр одночастичных возбуждений невозмущенной взаимодействием системы ε_m удовлетворяет соотношению $\varepsilon_m = \varepsilon_{-m}$.

Кроме того, мы ограничимся случаем, когда матричный элемент взаимодействия пар $V_{m, n}$ представим в виде произведения

$$V_{m, n} = \lambda_m \lambda_n, \quad \lambda_m = -\lambda_{-m}.$$

В члене, описывающем взаимодействие в гамильтониане, явно выделен объем системы V . Для объемного сверхпроводника суммирование по состояниям можно заменить интегрированием:

$$\sum_{m \in \mathbb{S}} \rightarrow V \sum_{s_z} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3}.$$

Модель БКШ относится к классу асимптотически точно решаемых моделей [11]. Это означает следующее свойство такой модели. Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$\hat{h} = \sum_{m \in \mathbb{S}} (\varepsilon_m - \mu) \hat{a}_m^+ \hat{a}_m - \Delta \sum_{m \in \mathbb{S}} \lambda_m \hat{a}_m^+ \hat{a}_{-m}^+ - \bar{\Delta} \sum_{m \in \mathbb{S}} \lambda_m \hat{a}_{-m} \hat{a}_m + V \bar{\Delta} \Delta, \quad (2)$$

причем постоянные μ и Δ определяются как решения системы уравнений

$$\frac{1}{V} \text{Sp} \left(e^{-\beta \hat{h}} \sum_{m \in \mathbb{S}} \lambda_m \hat{a}_{-m} \hat{a}_m \right) = \Delta,$$

$$\text{Sp}(e^{-\beta \hat{h}} \hat{N}) = N, \quad \hat{N} = \sum_{m \in \mathbb{S}} \hat{a}_m^+ \hat{a}_m,$$

где β – обратная температура, N – число частиц в системе.

Так как гамильтониан (2) квадратичен по ферми-переменным, можно вычислить свободную энергию системы, описываемую таким гамильтонианом:

$$F_h = -\frac{1}{\beta} \ln \text{Sp}(e^{-\beta \hat{h}}). \quad (3)$$

Если на параметры гамильтониана БКШ (1) наложить условия ограниченности сумм

$$\frac{1}{V} \sum_{m \in \mathbb{S}} |\lambda_m|, \quad \frac{1}{V} \sum_{m \in \mathbb{S}} |\lambda_m \varepsilon_m|, \quad \frac{1}{V} \sum_{m \in \mathbb{S}} \lambda_m^2$$

при $V \rightarrow \infty$, то оказывается [12], что свободная энергия

$$F_H = -\frac{1}{\beta} \ln \text{Sp}(e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}),$$

вычисленная по гамильтониану БКШ (1), и свободная энергия (3) связаны соотношением

$$\frac{F_H - F_h}{V} = O(V^{-2/5}) \rightarrow 0$$

при $V \rightarrow \infty$. Такое свойство модели БКШ позволяет говорить о ее асимптотически точной решаемости.

Если плотность числа частиц в системе конечна, стремление объема к бесконечности означает, что и число частиц в системе $N \rightarrow \infty$. Наше рассмотрение не будет апеллировать к этому пределу и будет справедливо при любом числе частиц.

3. ЯДРО ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ В МОДЕЛИ БКШ

Пусть задано множество неповторяющихся состояний $\mathbb{N} = \{m_1, m_2, \dots, m_N\}$, содержащее N элементов. Рассмотрим начальное N -частичное состояние вида

$$|\Phi_0\rangle = \prod_{m \in \mathbb{N}} \hat{a}_m^+ |0\rangle; \quad (4)$$

здесь состояние $|0\rangle$ определяется соотношениями $\hat{a}_m |0\rangle = 0$ при любом m .

Эволюцию этого состояния можно описать соотношением

$$|\Phi(t)\rangle = e^{-it\hat{H}} |\Phi_0\rangle. \quad (5)$$

Представим динамику нашего состояния в виде эволюции по бесконечно малым промежуткам времени $\epsilon = t/K$, $K \rightarrow \infty$:

$$|\Phi(t)\rangle = \lim_{K \rightarrow \infty} (e^{-i\epsilon \hat{H}})^K |\Phi_0\rangle.$$

Перейдем к голоморфному представлению или, по Березину, к исчислению символов [13]. В этом случае произвольное состояние $|\Psi\rangle$ будет иметь вид функции от грассмановых переменных $\bar{\alpha}_m$, т.е. $|\Psi\rangle \Rightarrow \Psi(\bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_m, m \in \mathbb{S}\}$. Так, начальное состояние (4) определяется как

$$\Phi_0(\bar{\alpha}) = \prod_{m \in \mathbb{N}} \bar{\alpha}_m, \quad (6)$$

его динамика описывается следующим выражением:

$$\Phi(\bar{\alpha}, t) = \int \left(\prod_{m \in \mathbb{S}} d\bar{\alpha}_m(0) d\alpha_m(0) e^{-\bar{\alpha}_m(0)\alpha_m(0)} \right) U(\bar{\alpha}, \alpha(0)|t) \Phi_0(\bar{\alpha}(0)), \quad (7)$$

где α_m – также грассмановы переменные, а ядро оператора эволюции $U(\bar{\alpha}, \alpha(0)|t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} U(\bar{\alpha}, \alpha(0)|t) &= \left(\prod_{k=1}^{K-1} \prod_{m \in \mathbb{S}} \int d\bar{\alpha}_m(k) d\alpha_m(k) \right) e^{\sum_{m \in \mathbb{S}} \bar{\alpha}_m(0)\alpha_m(0)} \times \\ &\times \exp \sum_{k=1}^K \left(\sum_{m \in \mathbb{S}} (\bar{\alpha}_m(k) - \bar{\alpha}_m(k-1))\alpha_m(k-1) - i\epsilon H(\bar{\alpha}(k), \alpha(k-1)) \right). \end{aligned}$$

В последней формуле $H(\bar{\alpha}, \alpha)$ – символ гамильтониана, который получается из нормально упорядоченного гамильтониана заменой операторов рождения $\hat{a}_m^+$ и операторов уничтожения $\hat{a}_m$ на $\bar{\alpha}_m$ и α_m соответственно. Кроме того, следует считать $\bar{\alpha}_m(K) = \bar{\alpha}_m$, а в конце вычислений положить $K \rightarrow \infty$.

Сосредоточим наше внимание на вычислении ядра оператора эволюции. Из вида гамильтониана БКШ (1) следует, что

$$\begin{aligned} \exp \left(-i\epsilon \sum_{k=1}^K H(\bar{\alpha}(k), \alpha(k-1)) \right) &= \exp \left(-i\epsilon \sum_{k=1}^K \sum_{m \in \mathbb{S}} \varepsilon_m \bar{\alpha}_m(k) \alpha_m(k-1) \right) \times \\ &\times \exp \left(\frac{i\epsilon}{V} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{m \in \mathbb{S}} \lambda_m \bar{\alpha}_m(k) \bar{\alpha}_{-m}(k) \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{S}} \lambda_n \alpha_{-n}(k-1) \alpha_n(k-1) \right) \right). \end{aligned}$$

Введем вспомогательную комплексную переменную $Z(k) = X(k) + iY(k)$, чтобы представить член, описывающий взаимодействие пар, в виде (преобразование Хаббарда–Стратоновича)

$$\begin{aligned} \exp \left(\frac{i\epsilon}{V} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{m \in \mathbb{S}} \lambda_m \bar{\alpha}_m(k) \bar{\alpha}_{-m}(k) \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{S}} \lambda_n \alpha_{-n}(k-1) \alpha_n(k-1) \right) \right) &= \\ &= \left(\prod_{k=1}^K \int \frac{i\epsilon V}{\pi} dX(k) dY(k) e^{-i\epsilon V \bar{Z}(k) Z(k)} \right) \times \\ &\times \exp \left(i\epsilon \sum_{k=1}^K \left(\bar{Z}(k) \sum_{m \in \mathbb{S}} \lambda_m \alpha_{-m}(k-1) \alpha_m(k-1) + Z(k) \sum_{m \in \mathbb{S}} \lambda_m \bar{\alpha}_m(k) \bar{\alpha}_{-m}(k) \right) \right). \end{aligned}$$

Как следствие мы можем представить ядро оператора эволюции в виде

$$U(\bar{\alpha}(K), \alpha(0)|t) = \left(\prod_{k=1}^K \int \frac{i\epsilon V}{\pi} dX(k) dY(k) e^{-i\epsilon V \bar{Z}(k)Z(k)} \right) \prod_{m \in \mathbb{S}} u[\bar{Z}(k), Z(k); \bar{\alpha}_m(K), \alpha_m(0)|t],$$

где одночастичное ядро эволюции во внешнем поле $Z(t)$ определено следующим образом:

$$u[\bar{Z}(k), Z(k); \bar{\alpha}_m(K), \alpha_m(0)|t] = \left(\prod_{k=1}^{K-1} \int d\bar{\alpha}_m(k) d\alpha_m(k) \right) e^{\bar{\alpha}_m(0)\alpha_m(0)} \times \\ \times \exp \sum_{k=1}^K ((\bar{\alpha}_m(k) - \bar{\alpha}_m(k-1))\alpha_m(k-1) - i\epsilon h_{\text{eff}}(\bar{\alpha}_m(k), \alpha_m(k-1))),$$

с эффективным гамильтонианом

$$h_{\text{eff}}(\bar{\alpha}_m, \alpha_m) = \varepsilon_m \bar{\alpha}_m \alpha_m - \bar{Z}(k) \lambda_m \alpha_{-m} \alpha_m - Z(k) \lambda_m \bar{\alpha}_m \bar{\alpha}_{-m}. \quad (8)$$

Так как эффективный гамильтониан квадратичен по грассмановым переменным, по ним можно провести интегрирование:

$$u[\bar{Z}(k), Z(k); \bar{\alpha}_m(K), \alpha_m(0)|t] u[\bar{Z}(k), Z(k); \bar{\alpha}_{-m}(K), \alpha_{-m}(0)|t] = \\ = (-1)^{K-1} \det G \exp(c_A \bar{\alpha}_m(K) \alpha_m(0) + c_B \bar{\alpha}_{-m}(K) \alpha_{-m}(0) + \\ + c_a \bar{\alpha}_m(K) \bar{\alpha}_{-m}(K) + c_b \alpha_m(0) \alpha_{-m}(0)).$$

Определим вновь введенные обозначения.

1. G – блочная матрица

$$G = \begin{pmatrix} j_{k,l} & i\eta Z(k) \delta_{k,l} \\ i\eta \bar{Z}(k+1) \delta_{k,l} & -j_{l,k} \end{pmatrix},$$

$j_{k,l} = \zeta \delta_{k-1,l} - \delta_{k,l}$, $k, l = 1, \dots, K-1$, $\delta_{k,l}$ – символ Кронекера.

2. c_A , c_B , c_a , c_b определяются элементами матрицы, обратной к G :

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} A_{k,l} & a_{k,l} \\ b_{k,l} & B_{l,k} \end{pmatrix},$$

а именно

$$c_A = -\zeta^2 A_{K-1,1}, \quad c_B = \zeta^2 B_{1,K-1}, \\ c_a = \zeta^2 a_{K-1,K-1} + i\eta Z(K), \quad c_b = -\zeta^2 b_{1,1} - i\eta \bar{Z}(1).$$

3. Постоянные ζ , η связаны с параметрами гамильтониана:

$$\zeta = 1 - i\epsilon \varepsilon_m, \quad \eta = 2\epsilon \lambda_m.$$

Для нахождения матрицы G^{-1} достаточно знать матрицу, обратную

$$M_{k,l} = \sum_{j=1}^{K-1} j_{k,j} \frac{1}{\bar{Z}(j+1)} j_{l,j} - \eta^2 Z(k) \delta_{k,l}.$$

Для этого представим матрицу M в виде произведения трех матриц:

$$M = J \cdot D \cdot J^T,$$

где

$$J_{k,l} = \delta_{k,l} - \zeta \frac{u_l}{u_k} \delta_{k-1,l}, \quad D_{k,l} = \delta_{k,l} \frac{u_{k+1}}{u_k \bar{Z}(k+1)}, \quad (J^T)_{k,l} = J_{l,k},$$

при этом значения u_k находятся из решения рекуррентного соотношения

$$\frac{u_{k+1}}{\bar{Z}(k+1)} - u_k \left(\frac{1}{\bar{Z}(k+1)} - \eta^2 Z(k) + \frac{\zeta^2}{\bar{Z}(k)} \right) + \frac{\zeta^2 u_{k-1}}{\bar{Z}(k)} = 0, \quad k = 1, \dots, K-1, \quad (9)$$

с начальными условиями $u_1 = u_0 = 1$.

Найти матрицу, обратную J , не представляет труда:

$$(J^{-1})_{k,l} = \zeta^{k-l} \frac{u_l}{u_k} \sum_{j=1}^k \delta_{j,l}.$$

Используя эти обстоятельства, получим

$$\begin{aligned} \det G &= (-1)^{K-1} u_K, & c_A &= c_B = \frac{\zeta^K}{u_K}, \\ c_a &= \frac{u_{K+1} - u_K}{i\eta \bar{Z}(K+1) u_K}, & c_b &= -i\eta \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\zeta^{2k} \bar{Z}(k+1)}{u_k u_{k+1}}. \end{aligned}$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что величина

$$\tilde{u}_k = i\eta u_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\zeta^{2j} \bar{Z}(j+1)}{u_j u_{j+1}}$$

также удовлетворяет приведенным выше рекуррентным соотношениям (9), но с другими начальными данными: $\tilde{u}_0 = 0$, $\tilde{u}_1 = i\eta \bar{Z}(1)$.

Рекуррентные соотношения (9) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x_{k+1} - x_k = i\eta \zeta^{2k} \bar{Z}(k+1) y_k, \\ y_{k+1} - y_k = i\eta \zeta^{-2k-2} Z(k+1) x_{k+1}, \end{cases} \quad k = 0, \dots, K-1, \quad (10)$$

причем решения этой системы с начальными условиями $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ дают нам значения

$$u_K = x_K, \quad v_K = y_K,$$

а решения с начальными данными $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ – значения

$$\tilde{u}_K = x_K, \quad \tilde{v}_K = y_K.$$

С помощью вновь определенных величин найдем

$$c_a = \frac{\zeta^{2K} v_K}{u_K}, \quad c_b = -\frac{\tilde{u}_K}{u_K}, \quad c_a c_b - c_A c_B = -\frac{\zeta^{2K} \tilde{v}_K}{u_K}.$$

Все это позволяет представить ядро оператора эволюции в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 U(\bar{\alpha}(K), \alpha(0)|t) = & \left(\prod_{k=1}^K \int \frac{i\epsilon V}{\pi} dX(k) dY(k) e^{-i\epsilon V \bar{Z}(k) Z(k)} \right) \times \\
 & \times \prod_{m \in \mathbb{S}, m > 0} (\zeta^K \bar{\alpha}_m(K) \alpha_m(0) + \zeta^K \bar{\alpha}_{-m}(K) \alpha_{-m}(0) + \\
 & + u_K + \zeta^{2K} v_K \bar{\alpha}_m(K) \bar{\alpha}_{-m}(K) + \\
 & + \tilde{u}_K \alpha_{-m}(0) \alpha_m(0) + \zeta^{2K} \tilde{v}_K \bar{\alpha}_m(K) \bar{\alpha}_{-m}(K) \alpha_{-m}(0) \alpha_m(0)). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Таким образом, динамика нашей многочастичной системы свелась к исследованию системы с двумя степенями свободы $X(k)$, $Y(k)$, зависящими от времени (зависимость переменных от узла решетки означает их зависимость от времени). Последовательность шагов теперь такова. Решаем рекуррентные соотношения, определяющие зависимость u_K , v_K , $\tilde{u}_K$, $\tilde{v}_K$ от переменных интегрирования $Z(1), \dots, Z(K)$. Подставляем эти значения в полученную для ядра оператора эволюции формулу и проводим интегрирование по указанным переменным. Интересно отметить, что рекуррентные соотношения, определяющие динамику нашей системы, допускают явное решение:

$$\begin{aligned}
 u_K &= 1 + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^{2k} \sum_{\substack{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k=1 \\ K \geq i_1 > j_1 \geq \dots \geq i_k > j_k}} \prod_{\alpha=1}^k \zeta^{2i_\alpha} \bar{Z}(i_\alpha) \zeta^{-2j_\alpha} Z(j_\alpha), \\
 \tilde{v}_K &= 1 + \sum_{k=1}^K \left(\frac{\eta}{\zeta} \right)^{2k} \sum_{\substack{i_1, j_1, \dots, i_k, j_k=1 \\ K \geq i_1 \geq j_1 > \dots > i_k \geq j_k}} \prod_{\alpha=1}^k \zeta^{-2i_\alpha} Z(i_\alpha) \zeta^{2j_\alpha} \bar{Z}(j_\alpha), \\
 v_K &= \sum_{k=1}^K i\eta \zeta^{-2k} Z(k) u_k, \quad \tilde{u}_K = \sum_{k=1}^K i\eta \zeta^{2k-2} \bar{Z}(k) \tilde{v}_{k-1}.
 \end{aligned}$$

Однако конструктивное использование таких решений еще требует дополнительных исследований¹⁾.

4. ДИНАМИКА N -ЧАСТИЧНОГО СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим теперь эволюцию N -частичного состояния (6). Итак, задано множество неповторяющихся состояний

$$\mathbb{N} = \{m_1, \dots, m_N\}.$$

Все состояния, как уже отмечалось, разбиты на пары с m и $-m$. Пусть $\mathbb{O}$ – подмножество неспаренных состояний из $\mathbb{N}$, т.е.

$$\mathbb{O} = \{m \in \mathbb{N}, -m \notin \mathbb{N}\},$$

¹⁾Заметим, что полученные выражения в непрерывном пределе $K \rightarrow \infty$ воспроизводят бесконечные ряды теории возмущений, вопрос о сходимости которых требует дополнительных исследований. В решеточном пределе такие вопросы попросту не возникают.

а $\mathbb{E}$ – подмножество состояний из $\mathbb{N}$ с $m > 0$, у которых есть пара с $-m$ из $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E} = \{\mathbb{N} \setminus \mathbb{O}, m > 0\}.$$

Наконец, определим подмножество $\mathbb{F}$ незанятых состояний с $m > 0$, у которых парное состояние с $-m$ тоже свободно, множества $\mathbb{S}$:

$$\mathbb{F} = \{m \notin \mathbb{N}, -m \notin \mathbb{N}, m > 0\}.$$

Теперь начальное N -частичное состояние можно записать в виде

$$\Phi_0(\bar{\alpha}) = \prod_{l \in \mathbb{O}} \bar{\alpha}_l \prod_{m \in \mathbb{E}} \bar{\alpha}_m \bar{\alpha}_{-m}.$$

Используя выражение для ядра оператора эволюции (11) и формулу (7) и переходя к континуальному пределу на временной оси $K \rightarrow \infty$, найдем вид нашего состояния в момент времени t :

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\alpha}, t) = & \left(\prod_{l \in \mathbb{O}} \bar{\alpha}_l e^{-i\varepsilon_l t} \right) \int \mathcal{D}\bar{Z}(t) \mathcal{D}Z(t) e^{-iV \int_0^t d\tau \bar{Z}(\tau) Z(\tau)} \times \\ & \times \prod_{m \in \mathbb{E}} (\tilde{u}_m(t) + \tilde{v}_m(t) e^{-i2\varepsilon_m t} \bar{\alpha}_m \bar{\alpha}_{-m}) \prod_{n \in \mathbb{F}} (u_n(t) + v_n(t) e^{-i2\varepsilon_n t} \bar{\alpha}_n \bar{\alpha}_{-n}). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\tilde{u}_m(t)$, $\tilde{v}_m(t)$, $u_m(t)$, $v_m(t)$ – функционалы, зависящие от $\bar{Z}(t)$, $Z(t)$, которые находятся из решения системы дифференциальных уравнений (см. (10))

$$\begin{cases} \frac{dx_m}{dt} = i2\lambda_m e^{-i2\varepsilon_m t} \bar{Z}(t) y_m, \\ \frac{dy_m}{dt} = i2\lambda_m e^{i2\varepsilon_m t} Z(t) x_m, \end{cases} \quad (13)$$

причем если начальные условия выбраны в виде $x_m(0) = 1$, $y_m(0) = 0$, то мы имеем $x_m(t) = u_m(t)$, $y_m = v_m(t)$; если же $x_m(0) = 0$, $y_m(0) = 1$, то $x_m(t) = \tilde{u}_m(t)$, $y_m = \tilde{v}_m(t)$. Мера в континуальном интеграле определена таким образом, чтобы

$$\int \mathcal{D}\bar{Z}(t) \mathcal{D}Z(t) e^{-iV \int_0^t d\tau \bar{Z}(\tau) Z(\tau)} = 1.$$

Приведенная конструкция описания динамики многочастичной системы составляет основное содержание данной статьи. Она обобщает процедуру Гельфанда–Яглома [10] для нахождения амплитуды перехода осциллятора с частотой, зависящей от времени, на модель БКШ.

Найденное соотношение явно иллюстрирует хорошо известное утверждение модели БКШ: если начальное состояние содержит неспаренные электроны ($m \in \mathbb{O}$), то они эволюционируют свободным образом, не участвуя во взаимодействии.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ОБЪЕМНОГО СВЕРХПРОВОДНИКА

Рассмотрим подробнее ситуацию с $V \rightarrow \infty$. Нетрудно заметить, что символ гамильтониана $\hat{h}$ (2) и символ гамильтониана h_{eff} (8) совпадают, если в формуле (8) положить²⁾

$$Z(t) = \Delta e^{-i2\mu t + i\phi_0} \quad (14)$$

с постоянными величинами Δ , μ , ϕ_0 , а затем выполнить каноническое преобразование переменных $\bar{\alpha}_m \rightarrow \bar{\alpha}_m e^{i\mu t}$, $\alpha_m \rightarrow \alpha_m e^{-i\mu t}$.

Так как гамильтониан (2) используется для решения многих вопросов модели БКШ в пределе $V \rightarrow \infty$ (см. об этом выше в разделе 2), можно предположить, что в этом пределе континуальный интеграл (12) набирает свое значение на конфигурациях переменной $Z(t)$ вида (14) и фактически сводится к интегрированию по всем возможным Δ , μ , ϕ_0 . Это предположение можно оправдать, сравнив полученные результаты с хорошо известными из теории БКШ в той части, в которой они должны совпадать³⁾.

В рамках сделанных предположений найдем решения системы уравнений (10) с заданными начальными условиями:

$$\begin{cases} u_m(t) = e^{-i\xi_m t} (\cos^2 \theta_m e^{iE_m t} + \sin^2 \theta_m e^{-iE_m t}), \\ v_m(t) = \sin \theta_m \cos \theta_m e^{i\xi_m t + i\phi_0} (e^{iE_m t} - e^{-iE_m t}), \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{u}_m(t) = -\overline{v_m(t)}, \\ \tilde{v}_m(t) = \overline{u_m(t)}, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \xi_m &= \varepsilon_m - \mu, & E_m &= \sqrt{\xi_m^2 + 4\lambda_m^2 \Delta^2}, \\ \cos \theta_m &= \sqrt{\frac{E_m + \xi_m}{2E_m}}, & \sin \theta_m &= \sqrt{\frac{E_m - \xi_m}{2E_m}}. \end{aligned}$$

Теперь результат эволюции N -частичной волновой функции выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= C \left(\prod_{l \in \mathbb{O}} e^{-i\varepsilon_l t} \hat{a}_l^+ \right) \int d\Delta \Delta d\mu d\phi e^{-i\varepsilon_0 t - iN_{\mathbb{E}}\phi} \times \\ &\quad \times \prod_{m \in \mathbb{E}} (\sin \theta_m \hat{A}_m - \cos \theta_m e^{-i2E_m t} \hat{B}_m) \times \\ &\quad \times \prod_{n \in \mathbb{F}} (\cos \theta_n \hat{A}_n + \sin \theta_n e^{-i2E_n t} \hat{B}_n) |0\rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \sum_{m \in \mathbb{M}} (\xi_m - E_m) + 2\mu N_{\mathbb{E}} + V\Delta^2, \\ \hat{A}_m &= \cos \theta_m + \sin \theta_m e^{i\phi} \hat{a}_m^+ \hat{a}_{-m}^+, & \hat{B}_m &= \sin \theta_m - \cos \theta_m e^{i\phi} \hat{a}_m^+ \hat{a}_{-m}^+, \end{aligned}$$

$N_{\mathbb{E}}$ – число состояний в множестве $\mathbb{E}$, или, что тоже самое, число спаренных электронов в начальном состоянии, $\mathbb{M} = \mathbb{E} \cup \mathbb{F}$ – множество всех одночастичных состояний с $m > 0$, которые участвуют во взаимодействии пар, C – нормировочная константа.

²⁾Зависимость Z от k в формуле (8) в континуальном пределе отвечает зависимости Z от времени.

³⁾Речь идет о виде основного состояния и его энергии.

Полученную формулу для $|\Phi(t)\rangle$ можно представить в виде, который позволит определить спектр и собственные состояния гамильтониана БКШ в рассматриваемом пределе. Пусть $\mathbb{P}$ – произвольная выборка одночастичных состояний из $\mathbb{M}$. Тогда выражение (15) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle = & C \left(\prod_{l \in \mathbb{O}} e^{-i\varepsilon_l t} \hat{a}_l^+ \right) \sum_{\{\mathbb{P}\}} \int d\Delta \Delta d\mu d\phi e^{-i\varepsilon_0 t - iN_{\mathbb{E}}\phi - i2t \sum_{m \in \mathbb{P}} E_m} \times \\ & \times \prod_{m_1 \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{P}} \hat{A}_{m_1} \prod_{m_2 \in \mathbb{P}} \hat{B}_{m_2} |0\rangle \times \\ & \times \left(\prod_{n_1 \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{P}} \sin \theta_{n_1} \prod_{n_2 \in \mathbb{E} \cup \mathbb{P}} (-\cos \theta_{n_2}) \prod_{n_3 \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{P}} \cos \theta_{n_3} \prod_{n_4 \in \mathbb{F} \cup \mathbb{P}} \sin \theta_{n_4} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Так как для объемного сверхпроводника $\mathcal{E}_0$ пропорциональна объему $V \rightarrow \infty$, интеграл по Δ и μ берется методом перевала.

Выражение (16) имеет структуру, отвечающую разложению состояния (5) по собственным состояниям гамильтониана БКШ:

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{\{\mathbb{P}\}} e^{-it\mathcal{E}_{\mathbb{P}}} |\Phi_{\mathbb{P}}\rangle \langle \Phi_{\mathbb{P}} | \Phi_0 \rangle.$$

Это позволяет найти многочастичный энергетический спектр исследуемой системы в рассматриваемом пределе:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathbb{P}} = & \sum_{m \in \mathbb{O}} \varepsilon_m + \sum_{m \in \mathbb{M}} (\xi_m(\mathbb{P}) - E_m(\mathbb{P})) + 2\mu_{\mathbb{P}} N_{\mathbb{E}} + V \Delta_{\mathbb{P}}^2 + 2 \sum_{m \in \mathbb{P}} E_m(\mathbb{P}), \\ \xi_m(\mathbb{P}) = & \varepsilon_m - \mu_{\mathbb{P}}, \quad E_m(\mathbb{P}) = \sqrt{\xi_m(\mathbb{P})^2 + 4\lambda_m^2 \Delta_{\mathbb{P}}^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

причем величины $\mu_{\mathbb{P}}$, $\Delta_{\mathbb{P}}$ определяются из решения уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbb{P}}}{\partial \Delta_{\mathbb{P}}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_{\mathbb{P}}}{\partial \mu_{\mathbb{P}}} = 0, \quad (18)$$

а также собственные состояния гамильтониана⁴⁾

$$\begin{aligned} |\Phi_{\mathbb{P}}\rangle = & \left(\sum_{m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{P}} \sqrt{\frac{E_m(\mathbb{P}) - \xi_m(\mathbb{P})}{E_m(\mathbb{P}) + \xi_m(\mathbb{P})}} \hat{a}_m^+ \hat{a}_{-m}^+ + \right. \\ & \left. + \sum_{m \in \mathbb{P}} \sqrt{\frac{E_m(\mathbb{P}) + \xi_m(\mathbb{P})}{E_m(\mathbb{P}) - \xi_m(\mathbb{P})}} \hat{a}_m^+ \hat{a}_{-m}^+ \right)^{N_{\mathbb{E}}} \prod_{n \in \mathbb{O}} \hat{a}_n^+ |0\rangle. \end{aligned}$$

Пусть здесь и далее число частиц в системе четное. Тогда основному состоянию отвечает ситуация, когда множества $\mathbb{O}$ и $\mathbb{P}$ пусты. В этом случае энергия основного состояния воспроизводит хорошо известную формулу, а собственное состояние получается из легендарной вариационной функции БКШ проектированием на подпространство пространства Фока, соответствующее фиксированному числу частиц, равному $2N_{\mathbb{E}}$.

⁴⁾Приведенные состояния ненормированы и отвечают случаю $\Delta_{\mathbb{P}} \neq 0$.

Что же касается возбужденных состояний, то здесь можно сказать следующее. Если множество $\mathbb{P}$ содержит не макроскопическое число состояний $N_{\mathbb{P}}$ (т.е. $N_{\mathbb{P}}/V \rightarrow 0$ при $V \rightarrow \infty$), то, как следует из спектра (17)⁵⁾, $\Delta_{\mathbb{P}} = \Delta_0$ и $\mu_{\mathbb{P}} = \mu_0$, где Δ_0 и μ_0 определяются из уравнений (18) по энергии основного состояния. Это позволяет трактовать такие состояния как полученные из основного путем возбуждения квазичастиц с энергиями

$$2E_m = 2\sqrt{(\varepsilon_m - \mu_0)^2 + 4\lambda_m^2 \Delta_0^2}, \quad m \in \mathbb{P}.$$

Если же число состояний в $\mathbb{P}$ макроскопическое (т.е. $N_{\mathbb{P}}/V \rightarrow \text{const}$ при $V \rightarrow \infty$), то $\Delta_{\mathbb{P}} \neq \Delta_0$, $\mu_{\mathbb{P}} \neq \mu_0$ и, строго говоря, квазичастичная трактовка теряет смысл. Здесь, однако, следует отметить, что в квантовой статистике эта ситуация может быть исправлена введением зависимости энергии квазичастиц от температуры.

Благодарности. Автор благодарит С. М. Апенко, А. Г. Семенову и участникам семинара под руководством П. И. Арсеева за обсуждение полученных результатов, а также И. В. Тютина за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания и наставления. Работа поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-65290.2010.2) и научными программами Президиума РАН и Отделения физических наук РАН.

Список литературы

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.*, **108**:5 (1957), 1175–1204.
- [2] Ж. Эмх, *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля*, Мир, М., 1976.
- [3] C. T. Black, D. C. Ralph, M. Tinkham, *Phys. Rev. Lett.*, **76**:4 (1996), 688–691.
- [4] J. von Delft, A. D. Zaikin, D. S. Golubov, W. Tichy, *Phys. Rev. Lett.*, **77**:15 (1996), 3189–3192, arXiv:cond-mat/9604072.
- [5] F. Braun, J. von Delft, D. C. Ralph, M. Tinkham, *Phys. Rev. Lett.*, **79**:5 (1997), 921–924, arXiv:cond-mat/9704181.
- [6] F. Braun, J. von Delft, *Phys. Rev. B*, **59**:14 (1999), 9527–9544, arXiv:cond-mat/9801170.
- [7] A. Mastellone, G. Falci, R. Fazio, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:20 (1998), 4542–4545, arXiv:cond-mat/9801179.
- [8] А. Б. Мигдал, *Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер*, Наука, М., 1983.
- [9] R. W. Richardson, *J. Math. Phys.*, **18**:9 (1977), 1802–1811.
- [10] I. M. Gel'fand, A. M. Yaglom, *J. Math. Phys.*, **1**:1 (1960), 48–69.
- [11] N. N. Bogolubov, *Physica*, **26**, suppl. 1 (1960), S1–S16.
- [12] Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, *Некоторые вопросы статистической механики*, Высшая школа, М., 1975.
- [13] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1986.

Поступила в редакцию 30.06.2010

⁵⁾Последний член в выражении для энергии состояния в формуле (17) можно опустить при $V \rightarrow \infty$.