Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Климчик, С. Е. Пархоменко, О T -дуальности Пуассона–Ли и нулевых модах,
ТМФ, 2004, том 139, номер 3, 462–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf66>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:00:53

© 2004 г.

С. Климчик*, С. Е. Пархоменко*,†

О T -ДУАЛЬНОСТИ ПУАССОНА–ЛИ И НУЛЕВЫХ МОДАХ

Рассмотрен дринфельдовский дубль D Лю–Вейнштейна–Сойбельмана и пара ассоциированных с ним σ -моделей. Показано, что связывающая их T -дуальность Пуассона–Ли может быть распространена на струнные конфигурации с отличным от единицы неабелевым импульсом. С дуальной струнной конфигурацией (определенной на максимальной компактной подгруппе D) ассоциирована нетривиальная монодромия, принимающая значения в алькове Вейля. Также дано инвариантное относительно дуальности действие этой динамической системы и описано аналогичное явление для одевающих факторпространств.

Ключевые слова: струны, σ -модели, T -дуальность.

1. В данной статье обсуждается давно известная проблема: как рассматривать нулевые моды в контексте T -дуальности Пуассона–Ли? Отчасти ответ на этот вопрос был дан в работе [1], где было показано, что фундаментальная группа соответствующего дубля Дринфельда играет в общем случае роль абелевой решетки намоток импульса. Вместе с тем фундаментальные группы неабелевых дублей, вообще говоря, малы, и, следовательно, обмен импульсных намоток не представляет большого интереса в неабелевом случае.

Мы покажем, что обмен неабелевых намоток импульса будет иметь гораздо более богатую структуру, если отказаться от требования замкнутости струн. В действительности даже если исходить из замкнутых струн в одном таргет-пространстве, то в силу самой дуальности эта конфигурация замкнутых струн “разорвется” в дуальном таргет-пространстве. Количественной мерой этого разрыва является некоторая монодромия, представляющая собой не что иное, как (неабелев) импульс исходной замкнутой струны. Если неабелев импульс совпадает с единичным элементом дуальной группы, то монодромия обращается в нуль и мы возвращаемся к исходной T -дуальности Пуассона–Ли [2].

Дальнейшее изложение мы начнем с обзора T -дуальности Пуассона–Ли без нулевых мод. В частности, выписано соответствующее инвариантное относительно дуальности

*Institute de Mathématiques de Luminy, Marseille, France

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: spark@itp.ac.ru

действие на дубле Дринфеля. Затем мы модифицируем действие на дубле путем добавления новой переменной, переходящей в нулевые моды, характеризующие импульсы замкнутых струн при спуске с дубля на одно из таргет-пространств для группы Пуассона–Ли. Если спуститься на другое (дуальное) таргет-пространство, то эта новая переменная становится монодромией, являющейся мерой разрыва замкнутой струны.

Статья заканчивается детальным описанием этого явления в контексте пары Лю–Вейнштейна–Сойбельмана (ЛВС) [3] групп Пуассона–Ли, а также в контексте обычной абелевой T -дуальности [4].

2. T -дуальность Пуассона–Ли в ее более современной версии [1] соотносит две нелинейные σ -модели, определенные на двух различных таргет-пространствах D/G и $D/\tilde{G}$. Здесь D – это такая группа Ли, что: 1) $\dim D = 2 \dim G = 2 \dim \tilde{G}$; 2) G и $\tilde{G}$ являются подгруппами D ; 3) на $\mathcal{D} = \text{Lie}(D)$ имеется такая симметричная невырожденная инвариантная билинейная форма $(\cdot, \cdot)$, что $(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{G}}) = 0$, где $\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$ и $\tilde{\mathcal{G}} = \text{Lie}(\tilde{G})$. Другими словами, $\mathcal{G}$ и $\tilde{\mathcal{G}}$ являются изотропными подалгебрами $\mathcal{D}$.

Сразу оговоримся, что не каждая группа D , удовлетворяющая условиям 1–3, является так называемым дублем Дринфеля. Для этого требуется выполнение еще одного условия: 4) $\mathcal{G} \cap \tilde{\mathcal{G}} = 0$. Вместе с тем современная версия T -дуальности Пуассона–Ли не предполагает выполнения условия 4. В нашей предыдущей статье [5] мы несколько вольно называли D “дублем Дринфеля” даже в тех случаях, когда условие 4 не выполнялось.

Для простоты мы будем рассматривать более старую и менее общую версию T -дуальности Пуассона–Ли [2], [6], в которой помимо выполнения условий 1–3 требуется, во-первых, чтобы группа D действительно была дублем Дринфеля (т.е. было выполнено условие 4) и, во-вторых, чтобы группа D была так называемым совершенным дублем Дринфеля, т.е. допускала глобальное гладкое разложение $D = G\tilde{G} = \tilde{G}G$.

В случае совершенных дублей T -дуальность Пуассона–Ли меняет местами таргет-пространства G и $\tilde{G}$, поскольку D/G отождествляется с $\tilde{G}$, а $D/\tilde{G}$ – с G . Напомним, что ли-пуассонова структура на G характеризуется пуассоновым бивектором $\alpha \in \Lambda^2 TG$ (удовлетворяющим тождеству Якоби) или, эквивалентным образом, его правой тривиализацией. Последняя представляет собой отображение $\Pi: G \rightarrow \Lambda^2 \mathcal{G}$, определяемое соотношением

$$\Pi(g) = R_{g^{-1}*} \alpha_g, \quad (1)$$

где R_g – правый сдвиг на групповом многообразии G . Кроме того, требуется чтобы было выполнено следующее условие коцикла:

$$\Pi(gh) = \Pi(g) + \text{Ad}_g \Pi(h). \quad (2)$$

Теперь можно выписать действия соответствующей пары σ -моделей:

$$S_\Pi = \frac{1}{8\pi} \int \langle (R + \Pi(g))^{-1}, dg g^{-1} \wedge * dg g^{-1} \rangle, \quad (3)$$

$$S_{\tilde{\Pi}} = \frac{1}{8\pi} \int \langle (R^{-1} + \tilde{\Pi}(\tilde{g}))^{-1}, d\tilde{g} \tilde{g}^{-1} \wedge * d\tilde{g} \tilde{g}^{-1} \rangle. \quad (4)$$

Здесь $\tilde{\Pi}(\tilde{g})$ – это ли-пуассонова структура на дуальной группе $\tilde{G}$, а $R \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ – некоторая невырожденная билинейная форма на дуальном пространстве $\mathcal{G}^*$ алгебры Ли $\mathcal{G}$. Так как $\mathcal{G}^*$ естественно отождествляется с $\tilde{\mathcal{G}}$ при помощи билинейной формы $(\cdot, \cdot)$ на дубле $\mathcal{D}$, то обратная билинейная форма R^{-1} может рассматриваться как элемент $\tilde{\mathcal{G}} \otimes \tilde{\mathcal{G}}$. Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает спаривание между векторным пространством и его дуальным пространством. Наконец, $dg g^{-1} \in T^*\Sigma \otimes \mathcal{G}$ – это обратный образ на мировом листе Σ правоинвариантной формы Маурера–Картана на G , а $*$ обозначает звездочку Ходжа на Σ .

Пара моделей (3), (4) была впервые рассмотрена в [2] в несколько ином виде. Представление (3), (4) было получено в работе [6]. Крайне важно понять, в каком смысле эти две модели являются двойственными друг другу. Можно изучать распространение замкнутой струны на группе G , соответствующее действию (3), и рассматривать ту же задачу для таргет-пространства $\tilde{G}$ и действия (4), но в этом случае нет никакой дуальности. Другими словами, неверно, что T -дуальность Пуассона–Ли связывает (3) и (4) как модели стандартных замкнутых струн. Модели (3) и (4) становятся дуальными друг другу, только если исключить моды с нулевым импульсом из замкнутых струн. В абелевом контексте это означает, что у струн могут быть лишь осцилляторные возбуждения¹⁾.

Прежде всего опишем, что мы понимаем под исключением импульса из замкнутой струны в неабелевом контексте [1], [2], [6]. Для этого рассмотрим стандартные замкнутые струны, распространяющиеся в односвязной группе G согласно действию (3). Соответствующие полевые уравнения представляются в наиболее простом виде при помощи 1-формы $\tilde{\lambda}$ на мировом листе со значениями в дуальной алгебре Ли $\tilde{\mathcal{G}}$:

$$\tilde{\lambda} = -\pi_{\tilde{\mathcal{G}}} \text{Ad}_g (R + \Pi(g))^{-1} (\partial_+ g g^{-1}, \cdot) d\xi^+ + \pi_{\tilde{\mathcal{G}}} \text{Ad}_g (R + \Pi(g))^{-1} (\cdot, \partial_- g g^{-1}) d\xi^-, \quad (5)$$

где $\xi^\pm$ – обычные переменные светового конуса на цилиндре:

$$\xi^\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in [0, 2\pi],$$

$\partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma$, а $\pi_{\tilde{\mathcal{G}}}$ – проектор на подалгебру $\tilde{\mathcal{G}}$ с ядром $\mathcal{G}$. Заметим, что выражение $(R + \Pi(g))^{-1} (\partial_+ g g^{-1}, \cdot)$ лежит в $\tilde{\mathcal{G}}$. Мы рассматриваем его как элемент $\mathcal{D}$ и действуем на него присоединенным образом элементом $g \in G$. Результат проецируется при помощи $\pi_{\tilde{\mathcal{G}}}$ с тем, чтобы форма $\tilde{\lambda}$ принимала значения в $\tilde{\mathcal{G}}$. В терминах $\tilde{\lambda}$ полевые уравнения выглядят очень просто:

$$d\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda} \wedge \tilde{\lambda}. \quad (6)$$

¹⁾Как уже отмечалось, имеется способ включения некоторых (дискретных) импульсных мод в конструкцию дуальности в случае, когда группы G и/или $\tilde{G}$ не односвязны [1]. Если дубль $\mathcal{D}$ является совершенным, то $\pi_1(\tilde{G})$ параметризует возможные дискретные импульсные моды, а $\pi_1(G)$ параметризует намоточные моды движущихся по G замкнутых струн. С точки зрения таргет-пространства $\tilde{G}$ импульсная и намоточная интерпретации групп гомотопии меняются ролями. Такой способ рассмотрения применим и к знаменитому обмену намоток и импульсов в контексте абелевой T -дуальности [4], когда G – это группа вращений окружности, а $\tilde{G}$ – дуальная окружность. В данной статье группы G и $\tilde{G}$ всегда предполагаются односвязными; мы покажем, что моды с нулевым импульсом можно включить в конструкцию дуальности также и для этого специального случая за счет “разрыва” замкнутых струн.

В некотором базисе $\tilde{T}_a$ в $\tilde{\mathcal{G}}$ они имеют вид

$$d\tilde{\lambda}^a = \frac{1}{2}\tilde{f}^a{}_{bc}\tilde{\lambda}^b \wedge \tilde{\lambda}^c, \quad (7)$$

где $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}^a \tilde{T}_a$, а $\tilde{f}^a{}_{bc}$ – структурные константы $\tilde{\mathcal{G}}$. Единственным нетривиальным фактом, необходимым для вывода полевых уравнений (6) из действия (3), является условие коцикла (2).

Мы видим, что каждое решение $g(\tau, \sigma)$ полевых уравнений модели (3) определяет плоскую $\tilde{\mathcal{G}}$ -значную связность $\tilde{\lambda}$. Ее монодромия определяется по формуле

$$\widetilde{M} = P \exp \int_{\gamma} \tilde{\lambda}(g), \quad (8)$$

где γ – кривая, охватывающая цилиндр. В частности, можно выбрать кривую $\tau = \text{const}$. Эта монодромия называется некоммутативным импульсом [1], [2], [6]; ее класс сопряженности не зависит от времени, если g является решением полевых уравнений. В частности, если в некоторый момент времени некоммутативный импульс $\widetilde{M}$ является единичным элементом $\tilde{e}$ дуальной группы $\tilde{G}$ (которая также предполагается односвязной), то он будет равен $\tilde{e}$ в любой момент времени.

Предположим теперь, что

$$\widetilde{M} = \tilde{e} \quad (9)$$

для некоторого решения $g(\tau, \sigma) \in G$. Это означает, что существует такая однозначная функция $\tilde{h}(\tau, \sigma) \in \tilde{G}$ на мировом листе, что

$$\tilde{\lambda}(g) = d\tilde{h} \tilde{h}^{-1}. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь следующую D -значную функцию $l(\tau, \sigma) \in D$ на мировом листе:

$$l(\tau, \sigma) = g(\tau, \sigma) \tilde{h}(\tau, \sigma). \quad (11)$$

Это отображение допускает разложение вида

$$l(\tau, \sigma) = \tilde{g}(\tau, \sigma) h(\tau, \sigma), \quad \tilde{g} \in \tilde{G}, \quad h \in G, \quad (12)$$

поскольку имеются два глобальных разложения дубля: $D = G\tilde{G} = \tilde{G}G$. Тогда оказывается [2], что $\tilde{g}(\tau, \sigma)$ является решением полевых уравнений дуальной модели (4), а дуальная $\mathcal{G}$ -значная связность λ имеет вид

$$\lambda(\tilde{g}) = dh h^{-1}. \quad (13)$$

Так как поле $h(\tau, \sigma)$ очевидным образом однозначно, то дуальный некоммутативный импульс M также удовлетворяет соотношению

$$M = P \exp \int_{\gamma} \lambda(\tilde{g}) = e, \quad (14)$$

где e – единичный элемент G .

Хорошо известно, что фазовое пространство теоретико-полевой модели можно рассматривать как пространство ее классических решений. Рассмотрим фазовое пространство Υ классических решений, отвечающих замкнутым струнам, распространяющимся в соответствии с (3), и выполним симплектическую редукцию, наложив условие (9) равенства единице некоммутативного импульса. При этом мы получим редуцированное фазовое пространство $\Upsilon_{\tilde{e}}$. Применяя ту же процедуру к модели (4), получаем дуальное редуцированное фазовое пространство $\tilde{\Upsilon}_e$. Оба редуцированных фазовых пространства $\Upsilon_{\tilde{e}}$ и $\tilde{\Upsilon}_e$ наследуют симплектическую структуру из Υ и $\tilde{\Upsilon}$, соответственно. Более того, поскольку условия равенства единице некоммутативного импульса коммутируют с временной эволюцией, заключаем, что гамильтонианы замкнутых струн H и $\tilde{H}$ определяют некоторые гамильтонианы $H_{\tilde{e}}$ и $\tilde{H}_e$ в $\Upsilon_{\tilde{e}}$ и $\tilde{\Upsilon}_e$.

Обычное утверждение, что модели (3) и (4) связаны при помощи T -дуальности Пуассона–Ли, имеет тот смысл, что существует (сохраняющий гамильтониан) симплектоморфизм между динамическими системами $(\Upsilon_{\tilde{e}}, H_{\tilde{e}})$ и $(\tilde{\Upsilon}_e, \tilde{H}_e)$. Этот симплектоморфизм был найден в работах [2], [6]. Его чисто алгебраическое описание имеется в [7].

Существует инвариантное относительно дуальности описание [6] эквивалентных динамических систем $(\Upsilon_{\tilde{e}}, H_{\tilde{e}})$ и $(\tilde{\Upsilon}_e, \tilde{H}_e)$. Оказывается, что фазовое пространство $\Upsilon_{\tilde{e}}$ можно отождествить с факторпространством LD/D , где LD – группа петель дубля Дринфельда D . Другими словами, LD – это множество гладких отображений окружности S^1 в D , снабженное операцией поточечного умножения. Симплектическую форму Ω на этом факторпространстве можно определить как внешнюю производную некоторой 1-формы θ на LD/D . Последняя естественно определяется в терминах ее интеграла вдоль произвольной кривой γ в фазовом пространстве, параметризованной параметром τ . Эту кривую можно представить с помощью некоторой D -значной функции $l(\tau, \sigma) \in D$. Положим

$$\int_{\Gamma} \theta = \frac{1}{8\pi} \int (\partial_{\sigma} l l^{-1}, \partial_{\tau} l l^{-1}) + \frac{1}{48\pi} \int d^{-1}(dl l^{-1}, [dl l^{-1}, dl l^{-1}]), \quad (15)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – инвариантная билинейная форма на $\mathcal{D}$, а в правой части стоит известный член Весса–Зумино–Виттена (ВЗВ). Отметим, что данное определение θ неоднозначно из-за произвола в выборе обратной внешней производной d^{-1} , но эта неоднозначность не проявляется на уровне симплектической формы $\Omega = d\theta$.

Может показаться, что выражение (15) представляет собой действие стандартной модели ВЗВ, но это не совсем верно, поскольку τ и σ не являются переменными светового конуса $\xi^{\pm}$. Тем не менее единственное различие между обычной моделью ВЗВ и выражением (15) состоит в *наименовании* переменных. Это означает, что выражение (15) имеет те же формальные математические свойства, что и стандартное действие ВЗВ. В частности, если заменить $l(\tau, \sigma)$ на $l(\tau, \sigma)l_0(\tau)$, то интеграл $\int \theta$ не изменится (киральная инвариантность модели ВЗВ!) и, следовательно, можно считать, что симплектическая форма Ω определена на факторпространстве LD/D , а не на самом пространстве LD .

Хорошо известно, что действие первого порядка динамической системы $(\Omega = d\theta, H_{\tilde{e}})$ имеет вид

$$S = \int (\theta - H_{\tilde{e}} dt), \quad (16)$$

где гамильтониан $H_{\tilde{e}}$ дается выражением [6]

$$H_{\tilde{e}} = \frac{1}{8\pi} \int (\partial_{\sigma} l l^{-1}, \mathcal{R} \partial_{\sigma} l l^{-1}). \quad (17)$$

Здесь $\mathcal{R}$ – это линейное идемпотентное самосопряженное отображение из алгебры Ли $\mathcal{D}$ в себя. Оно имеет два собственных значения $+1$ и -1 одинаковой кратности, причем соответствующие собственные подпространства $R_{\pm}$ имеют вид

$$\begin{aligned} R_+ &= \text{Span}(t + R(t, \cdot)), \quad t \in \tilde{\mathcal{G}}, \\ R_- &= \text{Span}(t - R(\cdot, t)), \quad t \in \tilde{\mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Разумеется, $R(\cdot, \cdot)$ – это та же билинейная форма, что и в (3) и (4). Подставляя (15) и (17) в (16), получаем явный вид действия динамической системы $(\Upsilon_{\tilde{e}}, H_{\tilde{e}}) = (\tilde{\Upsilon}_e, \tilde{H}_e)$:

$$\begin{aligned} S(l) &= \frac{1}{8\pi} \int (\partial_{\sigma} l l^{-1}, \partial_{\tau} l l^{-1}) + \frac{1}{48\pi} \int d^{-1}(dl l^{-1}, [dl l^{-1}, dl l^{-1}]) - \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int (\partial_{\sigma} l l^{-1}, \mathcal{R} \partial_{\sigma} l l^{-1}). \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что это действие инвариантно относительно калибровочного преобразования $l(\tau, \sigma) \rightarrow l(\tau, \sigma) l_0(\tau)$. Это означает, что модель определена скорее на LD/D , чем на LD .

Мы не будем описывать вывод из (19) моделей со связями (3) и (4); в действительности этот вывод представляет собой частный случай более общей конструкции, которая будет представлена ниже.

3. Подчеркнем, что рассматривавшаяся до сих пор дуальность имеет место между $(\Upsilon_{\tilde{e}}, H_{\tilde{e}})$ и $(\tilde{\Upsilon}_e, \tilde{H}_e)$, а не между (Υ, H) и $(\tilde{\Upsilon}, \tilde{H})$. Мы хотим найти динамическую систему, дуальную к (Υ, H) , или, другими словами, дуальную к модели (3), описывающей замкнутые струны с произвольным некоммутативным импульсом. Основная проблема заключается в том, что если решение $g(\tau, \sigma)$ в виде замкнутой струны на G имеет отличный от единицы некоммутативный импульс, то конфигурация (ср. (11)) $l(\tau, \sigma) \in D$ не описывает распространение замкнутой струны в дубле. Это связано с тем, что определенное формулой (10) отображение не является однозначным на цилиндре мирового листа, но имеет некоторую монодромию. Если ограничить $\tilde{h}(\tau, \sigma)$ на интервал $\sigma \in [0, 2\pi]$, то получится распространяющаяся в $\tilde{G}$ полоса, а не цилиндр. То же самое происходит при $l(\tau, \sigma) = g(\tau, \sigma) \tilde{h}(\tau, \sigma)$, что не соответствует вложенному в D мировому листу замкнутой струны. Если спроецировать $l(\tau, \sigma)$ на $\tilde{g}(\tau, \sigma)$ в соответствии с (12), то струнная конфигурация $\tilde{g}(\tau, \sigma) \in \tilde{G}$ не будет замкнутой: $\tilde{g}(\tau, \sigma + 2\pi) \neq \tilde{g}(\tau, \sigma)$. Именно поэтому в работах [2], [6] налагалось требование равенства единице некоммутативного импульса.

В данной статье мы придерживаемся совершенно иной точки зрения. Она заключается в том, что разрыв замкнутых струн не представляет собой ничего плохого, но, напротив, является интересным явлением. Дело в том, что струны в дуальном таргет-пространстве разрываются контролируемым образом, диктуемым дуальностью. В частности, дуальность предсказывает, что пространства состояний (фазовые пространства на классическом уровне) разорванной струны на $\tilde{G}$ и стандартной замкнутой струны на G идентичны друг другу. Таким образом, можно получить (по крайней мере, на классическом уровне) самосогласованную динамику открытоподобных струн, пространство состояний которых совпадает с пространством состояний замкнутой струны. Мы сделаем это для пары ЛВС групп Пуассона-Ли.

4. ЛВС-дубль D – это просто (рассматриваемая как вещественная группа) комплексификация $\tilde{G}^{\mathbb{C}}$ простой компактной связной и односвязной группы $\tilde{G}$. Так, например, ЛВС-дубль $SU(2)$ – это $SL(2, \mathbb{C})$. Инвариантная невырожденная форма $(\cdot, \cdot)$ на алгебре Ли $\mathcal{D}$ группы D имеет вид

$$(x, y) = \operatorname{Im} K(x, y). \quad (20)$$

Другими словами, она представляет собой мнимую часть формы Киллинга–Картана $K(\cdot, \cdot)$. Так как $\tilde{G}$ является вещественной формой $\tilde{G}^{\mathbb{C}}$, то ясно, что мнимая часть $K(x, y)$ обращается в нуль при $x, y \in \tilde{G}$. Следовательно, группа $\tilde{G}$ действительно изотропно вложена в $\tilde{G}^{\mathbb{C}}$.

Дуальная подгруппа G совпадает с так называемой группой AN в разложении Ивасава группы $\tilde{G}^{\mathbb{C}}$:

$$\tilde{G}^{\mathbb{C}} = \tilde{G}AN. \quad (21)$$

В случае групп $SL(n, \mathbb{C})$ группу AN можно отождествить с группой верхних треугольных матриц с равным единице детерминантом и положительными вещественными числами на диагонали. В общем случае элементы AN однозначно представляются с помощью экспоненциального отображения:

$$g = e^{\phi} \exp \left[\sum_{\alpha > 0} v_{\alpha} E_{\alpha} \right] \equiv e^{\phi} n, \quad (22)$$

где α – корни $\tilde{G}^{\mathbb{C}}$, v_{α} – комплексные числа, а ϕ – эрмитов элемент²⁾ подалгебры Картана алгебры $\tilde{G}^{\mathbb{C}}$. Грубо говоря, A – это “некомпактная часть” максимального комплексного тора группы $\tilde{G}^{\mathbb{C}}$. Изотропность алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы $G = AN$ вытекает из (20); тот факт, что $\mathcal{G}$ и $\tilde{G}$ вместе порождают алгебру Ли $\mathcal{D}$ всего дубля, очевидным образом следует из (21).

5. Мы предпочитаем работать именно с ЛВС-дублем, потому что обе изотропные подгруппы G и $\tilde{G}$ являются неабелевыми, а одна из них ($\tilde{G}$) компактна, что позволяет достаточно хорошо контролировать монодромию со значениями в этой группе. Действительно, некоммутативный импульс (8) замкнутой струны, распространяющейся на некомпактной группе $G = AN$ в соответствии с (3), принимает значения в $\tilde{G}$. Как уже отмечалось, некоммутативные импульсы соответствуют классам сопряженности в группе $\tilde{G}$.

Хорошо известно [8], что если в $\tilde{G}$ выбран максимальный тор T , то каждый класс сопряженности пересекает T . Поэтому достаточно выяснить, когда два элемента максимального тора лежат в одном и том же классе сопряженности. Максимальный тор

²⁾ Напомним, что эрмитовым элементом произвольной комплексной простой алгебры Ли $\tilde{G}^{\mathbb{C}}$ называется собственный вектор оператора инволюции, определяющего компактную вещественную форму $\tilde{G}$; соответствующее собственное значение равно -1 . Эта инволюция возникает из инволюции $g \rightarrow (g^{-1})^{\dagger}$ на группе. Антиэрмитовы элементы, линейной оболочкой которых служит компактная вещественная форма, представляют собой собственные векторы того же оператора инволюции с собственным значением 1 . В случае алгебры Ли $sl(n, \mathbb{C})$ эрмитовы элементы действительно являются эрмитовыми матрицами в обычном смысле слова.

можно рассматривать как факторалгебру подалгебры Картана $\mathcal{T}$ по решетке кокорней $Q^\vee$ (ср. [8], [9]). Известно, что два элемента $\mathcal{T}$ лежат на одной присоединенной орбите $\tilde{G}$ тогда и только тогда, когда они связаны действием группы Вейля. Таким образом, фундаментальную область совместного действия группы Вейля W и решетки кокорней $Q^\vee$ на $\mathcal{T}$ можно отождествить с пространством классов сопряженности $\tilde{G}$. Эту фундаментальную область часто называют альковом Вейля. Мы будем обозначать ее через $\mathcal{T}_+$.

Теперь мы знаем, что в инвариантное относительно дуальности действие (19) необходимо добавить степени свободы, соответствующие некоммутативным импульсам. Оказывается, что это можно сделать очень простым способом: новое действие имеет вид

$$S(l, \mu) = \frac{1}{8\pi} \int (\partial_\sigma l l^{-1}, \partial_\tau l l^{-1}) + \frac{1}{48\pi} \int d^{-1}(dl l^{-1}, [dl l^{-1}, dl l^{-1}]) + \\ + \frac{1}{4\pi} \int (\mu, l^{-1} \partial_\tau l) - \frac{1}{8\pi} \int (\partial_\sigma l l^{-1} + l \mu l^{-1}, \mathcal{R}(\partial_\sigma l l^{-1} + l \mu l^{-1})), \quad (23)$$

где $l(\tau, \sigma) \in D$ — σ -периодические D -значные отображения и $\mu(\tau) \in \mathcal{T}_+ (\subset \tilde{\mathcal{G}})$. Это новое действие калибровочно-инвариантно относительно преобразований $l(\tau, \sigma) \rightarrow l(\tau, \sigma)t(\tau)$, где $t(\tau) \in T$. Это означает, что фазовое пространство этой динамической системы есть $(LD/T) \times \mathcal{T}_+$.

Далее параметризуем поле конфигураций $l(\tau, \sigma)$ в соответствии с разложением дубля $D = G\tilde{G}$. Другими словами, параметризуем l как $l = g\tilde{h}$, где $g \in AN$ и $\tilde{h} \in \tilde{G}$. Тогда согласно формуле Полякова–Вигмана [10] имеем

$$\frac{1}{8\pi} \int (\partial_\sigma l l^{-1}, \partial_\tau l l^{-1}) + \frac{1}{48\pi} \int d^{-1}(dl l^{-1}, [dl l^{-1}, dl l^{-1}]) = \frac{1}{4\pi} \int (\partial_\sigma \tilde{h} \tilde{h}^{-1}, g^{-1} \partial_\tau g), \quad (24)$$

а все действие (23) принимает вид

$$S(g, \tilde{h}, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int \{(\tilde{\Lambda}, g^{-1}(\partial_\tau - \partial_\sigma)g) + (g^{-1} \partial_\sigma g + \tilde{\Lambda}, P(g)(g^{-1} \partial_\sigma g + \tilde{\Lambda}))\}, \quad (25)$$

где P — проектор на подпространство R_- с ядром R_+ (ср. (18)). Введем обозначение

$$P(g) = \text{Ad}_{g^{-1}} P \text{Ad}_g. \quad (26)$$

Заметим, что зависимость действия (25) от $\tilde{h}$ и μ полностью содержится в

$$\tilde{\Lambda} = \partial_\sigma \tilde{h} \tilde{h}^{-1} + \tilde{h} \mu \tilde{h}^{-1}. \quad (27)$$

Ключевое наблюдение состоит в том, что, в отличие от случая T -дуальности Пуассона–Ли без нулевых мод [6], на величину $\tilde{\Lambda}$ не накладывается условие единичной монодромии. В действительности на величину $\tilde{\Lambda}$ не накладывается вообще никаких ограничений, так как по построению она может иметь произвольную монодromию. Это означает, что действие $S(g, \tilde{h}, \mu)$ можно рассматривать как действие $S(g, \tilde{\Lambda})$, зависящее от двух независимых периодических переменных g , $\tilde{\Lambda}$ и являющееся гауссовой функцией $\tilde{\Lambda}$. Таким образом, $\tilde{\Lambda}$ можно исключить из (25). В результате имеем

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_-(g) - \tilde{\Lambda}_+(g) \quad (28)$$

$(\tilde{\lambda}_{\pm}(g))$ были определены в (5)). Подставляя $\tilde{\Lambda}$ из (28) в действие $S(g, \Lambda)$, получаем действие (3):

$$S_{\Pi}(g) = \frac{1}{8\pi} \int d\tau d\sigma (R + \Pi(g))_{ij}^{-1} [(\partial_{\tau} g g^{-1})^i (\partial_{\tau} g g^{-1})^j - (\partial_{\sigma} g g^{-1})^i (\partial_{\sigma} g g^{-1})^j]. \quad (29)$$

Здесь T_i образуют базис в $\mathcal{G} = \text{Lie}(AN)$, а $\tilde{T}^i$ – соответствующий дуальный базис в $\tilde{\mathcal{G}}$:

$$(T_i, \tilde{T}^j) = \delta_i^j. \quad (30)$$

Таким образом,

$$\partial_{\tau} g g^{-1} = (\partial_{\tau} g g^{-1})^i T_i \quad (31)$$

и

$$(R + \Pi(g))^{-1} = (R + \Pi(g))_{ij}^{-1} (\tilde{T}^i \otimes \tilde{T}^j). \quad (32)$$

Можно легко проверить вывод модели (3) из инвариантного относительно дуальности действия (23), воспользовавшись явной формулой для бивектора Пуассона

$$\Pi(g) = b(g)a(g)^{-1}, \quad (33)$$

где матрицы $a(g)$ и $b(g)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} g^{-1} T_i g &= a(g)_i^j T_j, \\ g^{-1} \tilde{T}^i g &= b(g)^{ij} T_j + d(g)^i_j \tilde{T}^j. \end{aligned}$$

Пользуясь определением (8) некоммутативного импульса $\tilde{M}$ и формулами (27), (28), находим, что

$$\tilde{M} = e^{2\pi\mu}. \quad (34)$$

Таким образом, величина μ в инвариантном относительно дуальности действии (23) действительно становится некоммутативным импульсом замкнутой струны, распространяющейся в таргет-пространстве $G = AN$.

6. Мы установили, что действие (3), описывающее (не подчиненные связям) замкнутые струны, можно записать в виде выражения первого порядка (23). Теперь мы будем искать дуальное действие. Мы увидим, что оно представляет собой небольшую, но интересную модификацию (4), соответствующую замене замкнутых струн монодромными струнами.

Рассмотрим дуальное разложение $l = \tilde{g}h$, где $\tilde{g} \in \tilde{G}$ и $h \in G (= AN)$. Формула Полякова–Вигмана теперь имеет вид

$$\frac{1}{8\pi} \int (\partial_{\sigma} l l^{-1}, \partial_{\tau} l l^{-1}) + \frac{1}{48\pi} \int d^{-1} (dl l^{-1}, [dl l^{-1}, dl l^{-1}]) = \frac{1}{4\pi} \int (\partial_{\sigma} h h^{-1}, \tilde{g}^{-1} \partial_{\tau} \tilde{g}).$$

Следовательно, действие (23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S(\tilde{g}, h, \mu) &= \frac{1}{4\pi} \int (\mu, h^{-1} \partial_{\tau} h) + \frac{1}{4\pi} \int (\Lambda, \tilde{g}^{-1} (\partial_{\tau} - \partial_{\sigma}) \tilde{g} - \mu) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int (\tilde{g}^{-1} \partial_{\sigma} \tilde{g} + \mu + \Lambda, P(\tilde{g})(\tilde{g}^{-1} \partial_{\sigma} \tilde{g} + \mu + \Lambda)), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\Lambda = \partial_\sigma h h^{-1} + h \mu h^{-1} - \mu.$$

В отличие от рассматривавшейся выше аналогичной переменной $\tilde{\Lambda}$, величина Λ удовлетворяет определенным ограничениям. Чтобы понять природу этих ограничений, полезно представить переменную $h(\tau, \sigma) \in AN$ в виде

$$h(\tau, \sigma) = e^{\phi(\tau, \sigma)} n(\tau, \sigma), \quad \phi \in \text{Lie}(A), \quad n \in N. \quad (36)$$

Разумеется, поля ϕ и n также являются периодическими по σ . Теперь для переменной Λ получаем выражение

$$\Lambda = \partial_\sigma \phi + e^\phi (\partial_\sigma n n^{-1} + n \mu n^{-1} - \mu) e^{-\phi} \equiv \Lambda_A + \Lambda_N. \quad (37)$$

Непосредственно видно, что Λ_A принадлежит $\text{Lie}(A)$, а Λ_N принадлежит $\text{Lie}(N)$.

Прямой анализ присоединенных орбит борелевских подгрупп группы $\tilde{G}^\mathbb{C}$ показывает, что Λ_N не удовлетворяет никаким связям. Другими словами, при изменении $h(\tau, \sigma)$ и $\mu(t)$ величина $\Lambda_N(\tau, \sigma)$ принимает все возможные значения. С другой стороны, величина $\Lambda_A(\tau, \sigma)$ очевидно подчинена связям, поскольку в ее разложении в ряд Фурье по σ отсутствует нулевая мода. Эту связь легко учесть, добавив к действию (35) член $\int (\nu(\tau), \Lambda_A(\tau, \sigma))$ с лагранжевым множителем, где $\nu(\tau)$ принадлежит подалгебре Картана $\mathcal{T}(\subset \tilde{\mathcal{G}})$. При этом вместо действия (35) получаем эквивалентное ему действие

$$\begin{aligned} S(\tilde{g}, \Lambda, \nu, \mu, \phi_0) = & -\frac{1}{4\pi} \int \{(\partial_\tau \mu, \phi_0) - (\Lambda, \nu)\} + \frac{1}{4\pi} \int (\Lambda, \tilde{g}^{-1}(\partial_\tau - \partial_\sigma) \tilde{g} - \mu) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int (\tilde{g}^{-1} \partial_\sigma \tilde{g} + \mu + \Lambda, P(\tilde{g})(\tilde{g}^{-1} \partial_\sigma \tilde{g} + \mu + \Lambda)), \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$\phi_0(\tau) = \int d\sigma \phi(\tau, \sigma).$$

Напомним, что нам надо исключить переменные Λ и ϕ_0 (связанные с переменной h в разложении $l = \tilde{g}h$). Это нетрудно сделать, поскольку после введения лагранжева множителя ν переменные Λ и ϕ_0 в (38) уже не подчинены никаким связям. Получающееся в результате действие имеет вид

$$\begin{aligned} S_{\tilde{\Pi}}(\tilde{g}, \nu, \mu_0) = & \frac{1}{8\pi} \int d\tau d\sigma (R^{-1} + \tilde{\Pi}(\tilde{g}))_{ij}^{-1} [(\partial_\tau \tilde{g} \tilde{g}^{-1} + \tilde{g} \nu \tilde{g}^{-1})^i (\partial_\tau \tilde{g} \tilde{g}^{-1} + \tilde{g} \nu \tilde{g}^{-1})^j - \\ & - (\partial_\sigma \tilde{g} \tilde{g}^{-1} + \tilde{g} \mu_0 \tilde{g}^{-1})^i (\partial_\sigma \tilde{g} \tilde{g}^{-1} + \tilde{g} \mu_0 \tilde{g}^{-1})^j]. \end{aligned} \quad (39)$$

Отметим, что в этом окончательном выражении для дуального действия символ μ заменен на μ_0 , поскольку μ_0 представляет собой не зависящую от времени τ константу, получающуюся в результате интегрирования по лагранжеву множителю ϕ_0 в действии (38). С другой стороны, ν по-прежнему зависит от τ .

Дадим интерпретацию этому результату. Прежде всего заметим, что $\tilde{g}(\tau, \sigma)$ являются $\tilde{G}$ -значными периодическими по σ функциями. Поэтому выражение (39) можно рассматривать как зависящую от μ_0 динамическую систему, описывающую конфигурации

замкнутых струн, взаимодействующих с некоторыми частицеподобными степенями свободы ν . Такая теория не является σ -моделью в стандартном смысле слова. Например, в действие входят зависящие от $\tilde{g}$ члены, не содержащие производных по $\tilde{g}$. Это означает, что в результате нашего преобразования дуальности возник тахионный потенциал.

Мы полагаем, что более правильной является следующая интерпретация. Введем новую полевую переменную

$$\tilde{m}(\tau, \sigma) = \tilde{g}(\tau, \sigma) e^{\mu_0 \sigma}. \quad (40)$$

По очевидным соображениям о такой конфигурации можно говорить как о “монодромной” струне. Ее образ в таргет-пространстве $\tilde{G}$ выглядит как открытая струна. Тогда действие (39) можно переписать в виде

$$S_{\tilde{\Pi}}(\tilde{m}, \nu) = \frac{1}{8\pi} \int d\tau d\sigma (R^{-1} + \tilde{\Pi}(\tilde{m}))_{ij}^{-1} \times \\ \times [(\partial_\tau \tilde{m} \tilde{m}^{-1} + \tilde{m} \nu \tilde{m}^{-1})^i (\partial_\tau \tilde{m} \tilde{m}^{-1} + \tilde{m} \nu \tilde{m}^{-1})^j - (\partial_\sigma \tilde{m} \tilde{m}^{-1})^i (\partial_\sigma \tilde{m} \tilde{m}^{-1})^j]. \quad (41)$$

Замена $\tilde{\Pi}(\tilde{g})$ на $\tilde{\Pi}(\tilde{m})$ является допустимой, поскольку из (2) вытекает, что

$$\tilde{\Pi}(\tilde{m}) = \tilde{\Pi}(\tilde{g} e^{\mu_0 \sigma}) = \tilde{\Pi}(\tilde{g}) + \text{Ad}_{\tilde{g}} \tilde{\Pi}(e^{\mu_0 \sigma}) = \tilde{\Pi}(\tilde{g}). \quad (42)$$

Последнее равенство следует из того, что ли-пуассонова структура Лю–Вейнштейна–Дринфелда $\tilde{\Pi}(\tilde{g})$ на компактной простой связной и односвязной группе $\tilde{G}$ всегда обращается в нуль на максимальном торе $T \subset \tilde{G}$ [11].

Переменная $\nu(\tau) \in \mathcal{T}$ также имеет естественную интерпретацию. Фактически она является калибровочным полем. Снова пользуясь тем, что $\tilde{\Pi}$ обращается в нуль на максимальном торе, заключаем, что модель (4) обладает глобальной симметрией $\tilde{g} \rightarrow \tilde{g}t$, где $t \in T$. Эта глобальная симметрия имеется не только для замкнутых, но и для монодромных струн. При этом введение калибровки означает введение калибровочных полей ν в действие (4), что приводит в точности к действию (41). Калибровочное преобразование имеет вид

$$\tilde{m} \rightarrow \tilde{m}t(\tau), \quad \nu \rightarrow \nu - t^{-1} \partial_\tau t.$$

В итоге получается следующая картина. Модель замкнутых струн (3) на $G = AN$ дуальна модели монодромных струн (4) на компактной группе $\tilde{G}$, где моды с нулевым импульсом на максимальном торе исключены при помощи калибровочного преобразования. В определенном смысле можно сказать, что дуальность требует добавления к (4) мод с нулевой монодромией и в то же время исключения мод с нулевым импульсом на максимальном торе.

7. Абелев пример. Оказывается, что монодромия может быть полностью проанализирована в почти тривиальном, но поучительном случае, когда дубль Дринфелда D – это плоскость $\mathbb{R}^2$, рассматриваемая как аддитивная абелева группа Ли. Ее алгебра Ли также совпадает с $\mathbb{R}^2$, а экспоненциальное отображение – это просто тождественное отображение. Инвариантная билинейная форма определяется соотношением

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 y_2 + y_1 x_2. \quad (43)$$

Она симметрична и невырожденна. Положим

$$\mathcal{G} = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}, \quad \tilde{\mathcal{G}} = \{(0, \tilde{x}); \tilde{x} \in \mathbb{R}\}. \quad (44)$$

Обе подалгебры $\mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}$ являются изотропными, причем $\mathcal{G} \cap \tilde{\mathcal{G}} = 0$. Более того, дубль D очевидным образом является совершенным, т.е. $D = G + \tilde{G}$.

Можно сразу же выписать действие (23) для случая нашего абелева дубля, когда $l(\tau, \sigma) = x(\tau, \sigma) + \tilde{x}(\tau, \sigma)$, $x(\tau, \sigma) \in G$, $\tilde{x}(\tau, \sigma) \in \tilde{G}$ и $\mu(\tau) \in \tilde{\mathcal{G}}$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned} 4\pi S(x, \tilde{x}, \mu) &= \int \partial_\sigma \tilde{x} \partial_\tau x + \int \mu \partial_\tau x - \frac{1}{2} R \int (\partial_\sigma \tilde{x} + \mu)^2 - \frac{1}{2} R^{-1} \int (\partial_\sigma x)^2 = \\ &= \int \tilde{\Lambda} \partial_\tau x - \frac{1}{2} R \int \tilde{\Lambda}^2 - \frac{1}{2} R^{-1} \int (\partial_\sigma x)^2, \end{aligned} \quad (45)$$

где R – положительное вещественное число. Заметим, что величина $\tilde{\Lambda} = \partial_\sigma \tilde{x} + \mu$ не подчинена связям и, следовательно, ее можно исключить. В результате находим

$$S(x) = \frac{1}{8\pi R} \int [(\partial_\tau x)^2 - (\partial_\sigma x)^2]. \quad (46)$$

То же самое действие (45), записанное с дуальной точки зрения, имеет вид

$$4\pi S(x, \tilde{x}, \mu) = \int \partial_\sigma x \partial_\tau \tilde{x} - \int \partial_\tau \mu x_0 - \frac{1}{2} R \int (\partial_\sigma \tilde{x} + \mu)^2 - \frac{1}{2} R^{-1} \int (\partial_\sigma x)^2,$$

где $x_0(\tau)$ – нулевая фурье-компонента поля $x(\tau, \sigma)$.

Повторяя ту же процедуру, что и в общем случае, приходим к следующему дуальному действию:

$$\tilde{S}(\tilde{x}, \nu, \mu_0) = \frac{R}{8\pi} \int [(\partial_\tau \tilde{x} + \nu)^2 - (\partial_\sigma \tilde{x} + \mu_0)^2], \quad (47)$$

где поле $\tilde{x}$ по-прежнему периодически. Для $\tilde{x}$ имеется разложение вида

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + \tilde{x}_{\text{osc}},$$

где $\tilde{x}_0$ обозначает нулевую фурье-компоненту, а $\tilde{x}_{\text{osc}}$ – остальные фурье-компоненты. Положим

$$\tilde{x}_{\text{mon}} = \tilde{x}_{\text{osc}} + \mu_0 \sigma.$$

Заметим, наконец, что нулевые моды $\tilde{x}_0$ можно включить в ν , полагая $\nu' = \nu + \partial_\tau \tilde{x}_0$. Получающееся в результате действие имеет вид

$$\tilde{S}(\tilde{x}_{\text{mon}}, \nu') = \frac{R}{8\pi} \int [(\partial_\tau \tilde{x}_{\text{mon}} + \nu')^2 - (\partial_\sigma \tilde{x}_{\text{mon}})^2]. \quad (48)$$

Исключая поле ν' , получаем окончательный дуальный результат

$$\tilde{S}(\tilde{x}_{\text{mon}}) = \frac{R}{8\pi} \int [(\partial_\tau \tilde{x}_{\text{mon}})^2 - (\partial_\sigma \tilde{x}_{\text{mon}})^2]. \quad (49)$$

Также полезно вычислить некоммутативный импульс $\widetilde{M}$ стандартной замкнутой струны на G . Для этого надо решить уравнения движения модели (45). Общее решение x_{sol} имеет вид

$$x_{\text{sol}}(\tau, \sigma) = x_0 + p\tau + \text{osc}_L(\tau - \sigma) + \text{osc}_R(\tau + \sigma). \quad (50)$$

При этом величина $\tilde{\Lambda}$ дается выражением

$$\tilde{\Lambda} = \partial_- x_{\text{sol}} d\xi^- - \partial_+ x_{\text{sol}} d\xi^+, \quad (51)$$

а импульс $\widetilde{M}$ имеет вид $\widetilde{M} = -p/R$. Мы видим, что в абелевом случае “некоммутативный” импульс становится стандартным импульсом замкнутой струны.

8. Одевающие факторпространства. Существует обобщение T -дуальности Пуассона–Ли [12], связывающее модели, определенные на двойных факторпространствах $F \setminus D/G$ и $F \setminus D/\tilde{G}$, где F – некоторая изотропная подгруппа D . Покажем, что наше рассмотрение нулевых мод можно распространить и на этот случай. Прежде всего напомним основные составляющие конструкции одевающих факторпространств.

Рассмотрим n -мерное линейное подпространство $\mathcal{R}_+ \subset \mathcal{D}$, пересечение которого с его ортогональным дополнением $\mathcal{R}_-$ представляет собой изотропную алгебру Ли $\mathcal{F}$, т.е.

$$\mathcal{R}_+ \cap \mathcal{R}_- = \mathcal{F}, \quad [\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F}. \quad (52)$$

Кроме того, потребуем, чтобы как $\mathcal{R}_+$, так и $\mathcal{R}_-$ были инвариантны относительно присоединенного действия $\mathcal{F}$:

$$[\mathcal{F}, \mathcal{R}_+] \subset \mathcal{R}_+, \quad [\mathcal{F}, \mathcal{R}_-] \subset \mathcal{R}_-. \quad (53)$$

Как показано в [12], эти данные определяют пару дуальных нелинейных σ -моделей на таргет-пространствах $F \setminus D/G$ и $F \setminus D/\tilde{G}$. Их общая динамика описывается гамильтоновым действием первого порядка [12], получающимся при $\mu = 0$ из следующего более общего действия:

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{8\pi} \int d\sigma d\tau (\partial_\sigma l l^{-1}, \partial_\tau l l^{-1}) + \frac{1}{48\pi} \int d^{-1}(dl l^{-1}, [dl l^{-1}, dl l^{-1}]) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int (\mu, l^{-1} \partial_\tau l) - \frac{1}{8\pi} \int d\sigma d\tau \{ ((\partial_\sigma l l^{-1} + l\mu l^{-1})_0, (\partial_\sigma l l^{-1} + l\mu l^{-1})_0) - \\ & - ((\partial_\sigma l l^{-1} + l\mu l^{-1})_1, (\partial_\sigma l l^{-1} + l\mu l^{-1})_1) \}. \end{aligned} \quad (54)$$

Понятно, что действие, в которое включена переменная $\mu(\tau) \in \mathcal{T}_+$, является обобщением конструкции одевающего факторпространства на монодромный случай. Здесь, как и выше, $l(\sigma, \tau) = l(\sigma + 2\pi, \tau)$ – это отображение цилиндрического мирового листа в групповое многообразие D , причем требуется, чтобы

$$\partial_\sigma l l^{-1} + l\mu l^{-1} \in \mathcal{F}^\perp. \quad (55)$$

Ввиду невырожденности формы $(\cdot, \cdot)$ имеем

$$\mathcal{F}^\perp = \text{Span}(\mathcal{R}_+, \mathcal{R}_-).$$

Поясним также смысл нижних индексов 0 и 1 в формуле (54). Каждый элемент $x \in \mathcal{F}^\perp$ может быть записан в виде

$$x = x_0 + x_1, \quad x_0 \in \mathcal{R}_+, \quad x_1 \in \mathcal{R}_-.$$

Разумеется, это разложение не единственно, так как пересечение линейных пространств $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ равно $\mathcal{F}$. С тем же успехом можно использовать разложение $x = x'_0 + x'_1$, где $x'_0 = x_0 + \phi$, $x'_1 = x_1 - \phi$, а ϕ – произвольный элемент $\mathcal{F}$. Тем не менее действие (54) не зависит от этого разложения, поскольку $(\mathcal{F}, \mathcal{R}_+) = (\mathcal{F}, \mathcal{R}_-) = 0$.

Действие (54) обладает калибровочной симметрией $l \rightarrow fl$, $f(\sigma, \tau) \in F$, объясняющей, почему мы выбрали левое факторпространство $F \setminus D/G$.

В работе [12] описано, каким образом можно получить пару дуальных σ -моделей из действия (54) при $\mu = 0$. При ненулевом μ сходное построение приводит к действиям (29) и (41) для соответствующей пары дуальных σ -моделей. Можно спросить, в чем отличие данного случая от предыдущего (когда не было ограничения вида (55)). Ответ заключается в том, что если условие (52) выполнено для $\mathcal{R}_+$, то модель (41) определена не на таргет-пространстве D/G , так как она обладает дополнительной калибровочной симметрией $l \rightarrow fl$, $f(\sigma, \tau) \in F$. Из-за этой калибровочной симметрии таргет-пространством модели (41) фактически является $F \setminus D/G$, а не D/G . Аналогичное рассуждение показывает, что дуальная модель (29) также обладает дополнительной калибровочной симметрией и определена на $F \setminus D/\tilde{G}$.

9. Рассмотренная в работах [2] T -дуальность Пуассона–Ли является обобщением традиционной неабелевой T -дуальности [13]. Помимо цитированных в тексте статей можно упомянуть несколько других работ [14], развивающих различные аспекты этой конструкции. Следует подчеркнуть, что все наше рассмотрение было чисто *классическим*, и нам неизвестно, как обобщить его на квантовый случай. (Фактически, пока имеются лишь некоторые предварительные результаты, касающиеся квантовой версии T -дуальности Пуассона–Ли [15].) Тем не менее мы полагаем, что данная статья поможет работе в направлении построения квантового преобразования T -дуальности Пуассона–Ли, поскольку в конечном счете нам удалось избавиться от сильно нелинейных ограничений монодромии. В рамках квантового анализа можно будет поставить и ключевой вопрос о квантовой устойчивости струнных конфигураций с нетривиальной монодромией. Именно решение этой проблемы в итоге даст ответ на вопрос, останется ли T -дуальность Пуассона–Ли чисто классической конструкцией (хотя и интересной с точки зрения геометрии) или со временем найдет применение в квантовой теории суперструн.

Благодарности. Работа С. Е. Пархоменко была поддержана грантами РФФИ № 99-02-16687, 96-15-96821, INTAS-OPEN-97-1312 и RP1-2254.

Список литературы

- [1] C. Klimčík, P. Ševera. Phys. Lett. B. 1996. V. 383. P. 281.
- [2] C. Klimčík, P. Ševera. Phys. Lett. B. 1995. V. 351. P. 455; C. Klimčík. Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 1996. V. 46. P. 116; P. Ševera. Minimálne plochy a dualita. Diploma thesis. Praha: Praha University, 1995.
- [3] J.-H. Lu, A. Weinstein. J. Diff. Geom. 1990. V. 31. P. 510; Я. С. Со́йбелъман. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 1. С. 190.
- [4] K. Kikkawa, M. Yamasaki. Phys. Lett. B. 1984. V. 149. P. 357; N. Sakai, I. Senda. Progr. Theor. Phys. 1986. V. 75. P. 692.
- [5] C. Klimčík, S. Parkhomenko. Phys. Lett. B. 1999. V. 463. P. 195.
- [6] C. Klimčík, P. Ševera. Phys. Lett. B. 1996. V. 372. P. 65.
- [7] K. Sfetsos. Nucl. Phys. B. 1988. V. 517. P. 549.
- [8] M. Blau, G. Thompson. Lectures on 2d gauge theories: Topological aspects and path integral techniques. In: Proc. of the 1993 Trieste Summer School on High Energy Physics and Cosmology. Eds. E. Gava et al. Singapore: World Scientific, 1994. P. 175; hep-th/9310144.

- [9] *F. Falceto, K. Gawędzki.* J. Geom. Phys. 1993. V. 11. P. 251.
- [10] *A. Polyakov, P. B. Wiegmann.* Phys. Lett. B. 1983. V. 311. P. 549.
- [11] *H. Flaschka, T. Ratiu.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1996. V. 29. № 6. P. 787.
- [12] *C. Klimčík, P. Ševera.* Phys. Lett. B. 1996. V. 381. P. 56.
- [13] *X. de la Ossa, F. Quevedo.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 403. P. 377; *B. E. Fridling, A. Jevicki.* Phys. Lett. B. 1984. V. 134. P. 70; *E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin.* Ann. Phys. 1985. V. 162. P. 31.
- [14] *K. Sfetsos.* Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 1997. V. 56. P. 302; Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 3585; *M. A. Lledo, V. S. Varadarajan.* Lett. Math. Phys. 1998. V. 45. P. 247; *S. Parkhomenko.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 510. P. 623; *A. Stern.* Phys. Lett. B. 1999. V. 450. P. 141; Nucl. Phys. B. 1999. V. 557. P. 459; *M. A. Jafarizadeh, A. Rezaei-Aghdam.* Phys. Lett. B. 1999. V. 45. P. 477; *S. Majid, E. J. Beggs.* Poisson–Lie T-duality for quasitriangular Lie bialgebras. math.QA/9906040; *O. Alvarez.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 584. P. 659; P. 682; *F. Assaoui, N. Benhamou, T. Lhallabi.* Poisson–Lie T-duality in supersymmetric WZNW model. hep-th/0009024.
- [15] *A. Alekseev, C. Klimčík, A. Tseytlin.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 458. P. 430; *E. Tyurin, R. von Unge.* Phys. Lett. B. 1996. V. 382. P. 233; *P. Ševera.* JHEP. 2002. V. 0205. P. 049; hep-th/9803201; *K. Sfetsos.* Phys. Lett. B. 1998. V. 432. P. 365; *L. K. Balazs, J. Balog, P. Forgacs, N. Mohammedi, L. Palla, J. Schnitger.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 535. P. 461; *С. Е. Пархоменко.* ЖЭТФ. 1999. Т. 116. С. 11.

Поступила в редакцию 27.II.2003 г.