Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Захаров, Макроскопическая система уравнений Эйнштейна–Максвелла для системы взаимодействующих частиц, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 1, 107–131

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:03:20

МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА–МАКСВЕЛЛА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

Работа посвящена выводу с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию макроскопических уравнений Эйнштейна–Максвелла для систем, в которых доминирующими являются электромагнитные межчастичные взаимодействия (например, радиационно-доминированная космологическая плазма в расширяющейся Вселенной до момента рекомбинации).

Усреднение по ансамблям микроскопических уравнений Эйнштейна, Максвелла и уравнений Лиувилля на случайные функции каждого из сортов частиц приводит к замкнутой системе уравнений, состоящей из макроскопических уравнений Эйнштейна, Максвелла и кинетических уравнений для одночастичных функций распределения каждого из сортов частиц.

Макроскопические уравнения Эйнштейна для системы электромагнитно и гравитационно взаимодействующих частиц отличаются от классических уравнений Эйнштейна наличием в левой части дополнительных слагаемых, обусловленных взаимодействием. Эти слагаемые образуют симметричный двухвалентный бесследовый тензор с равной нулю дивергенцией. В явном виде эти слагаемые представляются в виде интегралов в импульсном пространстве от выражений, содержащих одночастичные функции распределения каждого из сортов частиц. Данные дополнительные члены имеют много общего с аналогичными слагаемыми в левой части макроскопических уравнений Эйнштейна, полученных автором для системы самогравитирующих частиц.

Макроскопические уравнения Максвелла для системы электромагнитно и гравитационно взаимодействующих частиц также оказались отличными от классических уравнений Максвелла. Это отличие проявилось в появлении в левой части уравнений Максвелла дополнительных членов, обусловленных одновременно как эффектами, описываемыми общей теорией относительности, так и эффектами взаимодействия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Идея макроскопического описания гравитации может быть рассмотрена как развитие идеи Лоренца [1], который сформулировал электродинамику на двух уровнях: микроскопическом и макроскопическом. Лоренц показал, что электродинамика Максвелла является макроскопической теорией электромагнетизма и уравнения Максвелла могут быть получены из системы микроскопических полевых уравнений, называемых ныне

* Казанский государственный университет, Казань, Россия. E-mail: Alexei.Zakharov@ksu.ru

уравнениями Максвелла–Лоренца, путем усреднения последних по физически бесконечно малым пространственно-временным областям [1, 2]. Известно, что уравнения Максвелла для сплошных сред могут быть получены также из микроскопических уравнений Максвелла–Лоренца посредством статистического усреднения по ансамблям [3].

Уравнения Эйнштейна, правая часть которых содержит тензор энергии-импульса среды, являются феноменологическими уравнениями. Естественно предположить, что уравнения Эйнштейна (или их обобщения) в среде также могут быть получены путем усреднения микроскопических полевых уравнений Эйнштейна, т.е. уравнений Эйнштейна, в правой части которых присутствует сумма тензоров энергии-импульса отдельных частиц. Однако ввиду нелинейности левой части уравнений Эйнштейна проблема усреднения микроскопических уравнений Эйнштейна намного более сложна, чем проблема вывода макроскопических уравнений Максвелла в специальной теории относительности [4–8].

В работе [9] был развит метод усреднения по ансамблям микроскопических уравнений Эйнштейна для системы самогравитирующих частиц. При этом была использована процедура усреднения, введенная Климонтовичем [10, 11] при выводе релятивистского кинетического уравнения для плазмы. Эта же процедура была использована автором в работах [12, 13] при выводе релятивистского кинетического уравнения для случая электромагнитно взаимодействующих частиц и для системы самогравитирующих частиц в общей теории относительности с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию. Данный метод позволил получить в работе [14] макроскопические уравнения Эйнштейна для системы самогравитирующих частиц с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию.

Полученные макроскопические уравнения для системы гравитационно взаимодействующих частиц оказались отличными от классических уравнений Эйнштейна благодаря появлению в левой части дополнительных слагаемых, обусловленных взаимодействием частиц. Эти члены представляют собой симметричный двухвалентный бесследовый тензор с равной нулю дивергенцией. Они представлены в [14] в виде интегралов в импульсном пространстве от выражений, содержащих одночастичные функции распределения. Дополнительные члены пропорциональны кубу постоянной Эйнштейна и квадрату плотности вещества. Последнее означает, что эффекты взаимодействия могут оказать значительное влияние на вид макроскопических уравнений Эйнштейна только в системах с достаточно высокой плотностью вещества. Такие плотности могут достигаться в объектах, близких к состоянию гравитационного коллапса или на ранних стадиях расширения Вселенной.

Однако на ранних стадиях эволюции Вселенной доминирующими являются не гравитационные взаимодействия. В частности, на радиационно-доминированной стадии эволюции Вселенной доминирующими являются электромагнитные взаимодействия в космологической плазме.

Целью этой работы является вывод макроскопической системы уравнений Эйнштейна–Максвелла в релятивистской плазме, в которой доминирующими являются электромагнитные взаимодействия.

Оказалось, что макроскопические уравнения Эйнштейна для релятивистской плазмы также отличаются от классических уравнений Эйнштейна благодаря появлению в левой части дополнительных членов, обусловленных одновременно как электромагнитными, так и гравитационными взаимодействиями. Эти члены также представляют собой симметричный двухвалентный бесследовый тензор с равной нулю дивергенцией. Дано явное выражение для этих членов в виде интегралов в импульсном пространстве от выражений, содержащих одночастичные функции распределения взаимодействующих частиц плазмы.

Макроскопические уравнения Максвелла для системы электромагнитно и гравитационно взаимодействующих частиц также оказались отличными от классических уравнений Максвелла. Это отличие проявилось в появлении в левой части уравнений Максвелла дополнительных членов, обусловленных одновременно как эффектами, описываемыми общей теорией относительности, так и эффектами взаимодействия.

2. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Запишем микроскопическую систему уравнений Эйнштейна–Максвелла в виде

$$\tilde{G}^{ij} = \chi \tilde{T}_{(m)}^{ij} + \chi \tilde{T}_{(el)}^{ij}, \quad (1)$$

$$\tilde{\nabla}_k \tilde{F}^{ik} = -\frac{4\pi}{c} \tilde{J}^i. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{G}^{ij}$ – тензор Эйнштейна риманова пространства с метрикой $\tilde{g}_{ij}$, $\tilde{T}_{(m)}^{ij}$ – микроскопический тензор энергии-импульса частиц среды, $\chi = 8\pi k/c^4$ – постоянная Эйнштейна, k – гравитационная постоянная Ньютона, c – скорость света, $\tilde{F}^{ik}$ – тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла), $\tilde{J}^i$ – микроскопический 4-вектор тока, $\tilde{T}_{(el)}^{ij}$ – тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Операции поднятия и опускания индексов производятся здесь с помощью метрического тензора $\tilde{g}_{ij}$ и обратного к нему тензора $\tilde{g}^{ij}$. $\tilde{\nabla}_k$ обозначает ковариантную производную в римановом пространстве с метрикой $\tilde{g}_{ij}$.

Тензор $\tilde{T}_{(el)}^{ij}$ выражается через $\tilde{F}^{ik}$:

$$\tilde{T}_{(el)}^{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(-\tilde{F}^i_l \tilde{F}^{lj} + \frac{1}{4} \tilde{g}^{ij} \tilde{F}_{lm} \tilde{F}^{lm} \right). \quad (3)$$

Тензоры $\tilde{T}_{(m)}^{ij}$ и $\tilde{J}^i$ выражаются через случайную функцию Климонтовича [10]:

$$\tilde{T}_{(m)}^{ij} = \sum_a m_a c^2 \int \frac{d^4 \tilde{p}_a}{\sqrt{-\tilde{g}}} \tilde{u}_a^i \tilde{u}_a^j \tilde{N}_a(q^i, \tilde{p}_i), \quad (4)$$

$$\tilde{J}^i = \sum_b e_b c \int \frac{d^4 \tilde{p}}{\sqrt{-\tilde{g}}} \tilde{u}_b^i \tilde{N}_b(q, \tilde{p}). \quad (5)$$

Здесь e_a – заряд частиц сорта a , m_a – их масса, $\tilde{g}$ – определитель метрики $\tilde{g}_{ij}$, $\tilde{p}_a^i$ – импульс частиц сорта a , $\tilde{u}_a^i = \tilde{p}_a^i / \sqrt{\tilde{g}_{kj} \tilde{p}_a^k \tilde{p}_a^j}$, $d^4 \tilde{p} / \sqrt{-\tilde{g}}$ – инвариантный элемент объема

в четырехмерном импульсном пространстве с координатами $\tilde{p}_i$ [15]. Случайная функция Климонтовича [10] определяется выражением

$$\tilde{N}_a(q^i, \tilde{p}_j) = \sum_{i=1}^{n_a} \int d\tilde{s} \delta^4(q^i - q_{(l)}^i) \delta^4(\tilde{p}_j - \tilde{p}_j^{(l)}(\tilde{s})), \quad (6)$$

где n_a – число частиц сорта a , $\tilde{s}$ – канонический параметр вдоль траектории частиц: $d\tilde{s} = \sqrt{g_{ij} dq^i dq^j}$; $q_{(l)}^i$ и $\tilde{p}_j^{(l)}$ – координаты и импульс l -й частицы сорта a , которые определяются из уравнений движения

$$\frac{dq_{(l)}^i}{d\tilde{s}} = \frac{\tilde{p}_{(l)}^i}{m_a c}, \quad \frac{d\tilde{p}_{(l)}^i}{d\tilde{s}} = \frac{1}{m_a c} \left(\tilde{\Gamma}_{j,ik} \tilde{p}_{(l)}^j \tilde{p}_{(l)}^k + \frac{e_a}{c} \tilde{F}_{ik} \tilde{p}_{(l)}^k \right). \quad (7)$$

Здесь $\tilde{\Gamma}_{j,ik}$ – символы Кристоффеля 1-го рода, вычисленные по метрике $\tilde{g}_{ij}$. Вследствие уравнений (7) функция (6) подчиняется уравнению

$$\tilde{p}^i \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial q^i} + \tilde{\Gamma}_{j,ik} \tilde{p}^j \tilde{p}^k \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial \tilde{p}_i} + \frac{e_a}{c} \tilde{F}_{ik} \tilde{p}^k \frac{\partial \tilde{N}_a}{\partial \tilde{p}_i} = 0. \quad (8)$$

Представим метрику $\tilde{g}_{ij}$ гравитационного поля, создаваемого всеми частицами, в виде суммы усредненной метрики g_{ij} и вклада h_{ij} , обусловленного микроскопическим взаимодействием частиц:

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + h_{ij}, \quad (9)$$

где $g_{ij} = \langle \tilde{g}_{ij} \rangle$ – усредненная по ансамблю метрика $\tilde{g}_{ij}$ [9], а $\langle h_{ij} \rangle \equiv 0$.

Тензор электромагнитного поля $\tilde{F}_{ik}$ также представим в виде суммы:

$$\tilde{F}_{ik} = F_{ik} + \omega_{ik}, \quad (10)$$

где $F_{ik} = \langle \tilde{F}_{ik} \rangle$ – усредненный по ансамблям тензор Максвелла, ω_{ik} – микроскопический тензор электромагнитного поля, обусловленный взаимодействием частиц. Заметим, что $\langle \omega_{ik} \rangle \equiv 0$.

Наряду с импульсами $\tilde{p}_{(l)}^i = m_a c dq_{(l)}^i / d\tilde{s}$ мы будем также использовать импульсы p^i , измеренные в метрике g_{ij} :

$$p_{(l)}^i = \alpha^{-1}(q, p) \tilde{p}_{(l)}^i, \quad \alpha(q, p) = \frac{ds}{d\tilde{s}} = (g_{ij} p^i p^j)^{\frac{1}{2}} (\tilde{g}_{lk} \tilde{p}^l \tilde{p}^k)^{-\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

где s – канонический параметр, вычисленный по метрике g_{ij} .

Перейдем от переменной $\tilde{p}_i$ к p_i по правилу

$$\tilde{p}_j = \tilde{g}_{jk} \tilde{p}^k = \alpha \tilde{g}_{jk} g^{ki} p_i. \quad (12)$$

Якобиан преобразования (12) есть [13]

$$\left| \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \right| = \alpha^4 \frac{\tilde{g}}{g}, \quad (13)$$

где g – определитель метрики g_{ij} . Введем в рассмотрение функцию $N_a(q^i, \tilde{p}_j)$, заданную в восьмимерном фазовом пространстве с координатами (q, p) :

$$N_a(q, p) = \sum_{l=1}^{n_a} \int ds \delta^4(q^i - q_{(l)}^i(s)) \delta^4(p_j - p_j^{(l)}(s)). \quad (14)$$

Функции $q_{(l)}^i$ и $p_j^{(l)}$ в (14) определяются из уравнений, получающихся из (7) при замене (12) ($p^i = g^{ij}p_j$).

Отметим, что функции $\tilde{N}_a$ и N_a связаны следующим образом:

$$\tilde{N}_a(q, \tilde{p}) = \frac{g}{\tilde{g}\alpha^5} N_a(q, p). \quad (15)$$

Уравнение для функции $N_a(q, p)$ получается из уравнения Лиувилля (8) с помощью замены переменных (12) и (15):

$$\begin{aligned} p^i \frac{\partial N_a}{\partial q^i} + \Gamma_{j,ik} p^j p^k \frac{\partial N_a}{\partial p_i} + \frac{e_a}{c} F_{ik} p^k \frac{\partial N_a}{\partial p_j} = \\ = \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\left(\Omega_{jk}^m \Delta_{mi} p^j p^k - \frac{e_a}{c} \psi_{.k}^l \Delta_{lj} p^k \right) N_a \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\Delta_{ki} = g_{ki} - u_k u_i, \quad u^k = \frac{p^k}{\sqrt{p^l p_l}}, \quad \Omega_{kj}^m = \tilde{\Gamma}_{kj}^m - \Gamma_{kj}^m, \quad (17)$$

где величина Ω_{kj}^m есть разность символов Кристоффеля второго рода для метрик $\tilde{g}_{ij}$ и g_{ij} ,

$$\psi_{.k}^l = \frac{1}{\alpha(q, p)} \tilde{F}_{.k}^l - F_{.k}^l = \frac{1}{\alpha(q, p)} \tilde{g}^{lm} \tilde{F}_{mk} - g^{lm} F_{mk}. \quad (18)$$

Переходя в (4) и (5) к импульсам p_i и функции N_a , получим

$$\tilde{T}^{ij} = \sum_a m_a c^2 \int \frac{d^4 p_a}{\sqrt{-g}} \alpha(q, p) \sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}} u_a^i u_a^j N_a(q, p_a), \quad (19)$$

$$\tilde{J}^i = \sum_b e_b c \int \frac{d^4 p_b}{\sqrt{-g}} \sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}} u_b^i N_b(q, p_b), \quad (20)$$

где $d^4 p / \sqrt{-g}$ – инвариантный элемент объема в невозмущенном импульсном пространстве.

Для дальнейших целей уравнения Эйнштейна удобнее переписать в виде

$$\begin{aligned} R_{ij} + \nabla_m \Omega_{ij}^m - \nabla_j \Omega_{im}^m + \Omega_{mn}^m \Omega_{ij}^n - \Omega_{jn}^m \Omega_{im}^n = \\ = \chi \sum_a m_a c^2 \int \frac{d^4 p_a}{\sqrt{-g}} \alpha \sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}} \left(\tilde{g}_{ik} \tilde{g}_{jm} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ij} \tilde{g}_{km} \right) u_a^k u_a^m N_a(q, p_a) + \chi \tilde{T}_{ij}^{(el)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где R_{ij} – тензор Риччи риманова пространства с метрикой g_{ij} , ∇_m – ковариантная производная в этом пространстве.

Подставим (9) и (10) в уравнения Максвелла (2). Учитывая слабость гравитационных взаимодействий, разложим микроскопические уравнения Максвелла с точностью до членов первого порядка по h_{ij} :

$$\begin{aligned} & \nabla_k F^{ik} + \nabla_k (h_m^i F^{km} - h_m^k F^{im}) + \frac{1}{2} F^{ik} \nabla_k h + \nabla_k \omega^{ik} + \\ & + \nabla_k (h_m^i \omega^{km} - h_m^k \omega^{im}) + \frac{1}{2} \omega^{ik} \nabla_k h = \\ & = -4\pi \sum_a e_a \int \frac{d^4 p_a}{\sqrt{-g}} u_{(a)}^i \left(1 - \frac{1}{2} h\right) N_a(q, p_a). \end{aligned} \quad (22)$$

В формулах (21), (22) и ниже поднимание и опускание индексов производится с помощью усредненной метрики g_{ij} , $h = h_l^l$.

Разложим уравнения Эйнштейна (21) с точностью до членов второго порядка малости по h_{ij} и ω_{ij} :

$$\begin{aligned} R_{ij} + R_{ij}^{(1)} + R_{ij}^{(2)} + \dots = \sum_a \chi m_a c^2 \int \frac{d^4 p_a}{\sqrt{-g}} \left(\tilde{g}_{ik} \tilde{g}_{jm} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ij} \tilde{g}_{km} \right) u_a^k u_a^m N_a(q, p_a) + \sum_a \chi m_a c^2 \int \frac{d^4 p_a}{\sqrt{-g}} L_{ijk}^{(1)}(h) \times \\ \times u_a^k u_a^m N_a + \dots + \chi T_{ij}^{(\text{el})} + \chi (T_{ij}^{(\text{el})})^{(1)} + \chi (T_{ij}^{(\text{el})})^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $R_{ij}^{(1)}$ – сумма всех членов первого порядка по h_{ij} в разложении $\tilde{R}_{ij}$, $R_{ij}^{(2)}$ – сумма всех членов второго порядка по h_{ij} в разложении $\tilde{R}_{ij}$ и т.д., $L_{ijk}^{(1)}(h)$ – сумма всех членов первого порядка по h_{ij} разложения выражения

$$\alpha \sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}} \left(\tilde{g}_{ik} \tilde{g}_{jm} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ij} \tilde{g}_{km} \right),$$

$T_{ij}^{(\text{el})}$ – тензор энергии-импульса усредненного электромагнитного поля F_{ij} , $(T_{ij}^{(\text{el})})^{(1)}$ – сумма членов первого порядка в разложении $\tilde{T}_{ij}^{(\text{el})}$ по микроскопическим полям h_{ij} и ω_{ij} , $(T_{ij}^{(\text{el})})^{(2)}$ – сумма членов второго порядка. Явный вид этих выражений следующий:

$$R_{ij}^{(1)} = \nabla_m \Omega_{ij}^{(1)m} - \nabla_j \Omega_{im}^{(1)m}, \quad (24)$$

$$R_{ij}^{(2)} = \nabla_m \Omega_{ij}^{(2)m} - \nabla_j \Omega_{im}^{(2)m} + \Omega_{mn}^{(1)m} \Omega_{ij}^{(1)n} - \Omega_{jn}^{(1)m} \Omega_{im}^{(1)n}, \quad (25)$$

где

$$\Omega_{ij}^{(1)m} = \frac{1}{2} g^{ml} (-\nabla_l h_{ij} + \nabla_i h_{lj} + \nabla_j h_{li}); \quad (26)$$

$$\Omega_{ij}^{(2)m} = -\frac{1}{2}h^{ml}(-\nabla_l h_{ij} + \nabla_i h_{lj} + \nabla_j h_{li}) = -\frac{1}{2}h_l^m \Omega_{ij}^{(1)l}; \quad (27)$$

$$\begin{aligned} L_{ijkm}^{(1)} = & -\frac{1}{2}(h_{st}u^s u^t + h_{st}g^{st})\left(g_{ik}g_{jm} - \frac{1}{2}g_{ij}g_{km}\right) + \\ & + h_{ik}g_{jm} + g_{ik}h_{jm} - \frac{1}{2}h_{ij}g_{km} - \frac{1}{2}g_{ij}h_{km}; \end{aligned} \quad (28)$$

$$T_{ij}^{(\text{el})} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_{jm}g^{lm} + \frac{1}{4}g_{ij}F_{lm}F^{lm}\right); \quad (29)$$

$$\begin{aligned} (T_{ij}^{(\text{el})})^{(1)} = & \frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F_{im}h^{lm} + \frac{1}{4}h_{ij}F_{lm}F^{lm} - \frac{1}{2}g_{ij}F_{lm}F_{kn}g^{lk}h^{mn} - \right. \\ & \left. - \omega_{il}F_j^{\cdot l} - \omega_{jl}F_i^{\cdot l} + \frac{1}{2}F^{lm}\omega_{lm}\right); \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} (T_{ij}^{(\text{el})})^{(2)} = & \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_{jm}g_{st} + \frac{1}{2}g_{ij}F_{lk}F_m^{\cdot k}g_{st} + \frac{1}{4}g_{ij}F_{lm}F_{st} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}F_{\cdot t}^k F_{km}g_{il}g_{js}\right)h^{ls}h^{tm} + \\ & + \frac{1}{4\pi}\left(F_{it}g_{jl}g_{sm} + F_{jt}g_{il}g_{sm} - g_{ij}F_{lm}g_{st} + \frac{1}{2}g_{it}g_{jm}F_{ls}\right)\omega^{ls}h^{tm} + \\ & + \frac{1}{4\pi}\left(-g_{it}g_{is} + \frac{1}{4}g_{ij}g_{st}\right)\omega_{\cdot l}^t \omega^{sl}. \end{aligned} \quad (31)$$

3. УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМЫ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Усредним уравнения (22) и (23) по совокупности систем (см. [10–13]) и введем одно-частичную функцию распределения

$$f_a(q, p) = \left\langle \int ds \delta^4(q^i - q_{a(l)}^i(s)) \delta^4(p_j - p_j^{a(l)}(s)) \right\rangle = \frac{1}{n_a} \langle N_a \rangle. \quad (32)$$

В результате мы приходим к макроскопическим уравнениям Эйнштейна в виде

$$R_{ij} + \Lambda_{ij} = \chi \left(T_{ij}^{(\text{m})} - \frac{1}{2} T^{(\text{m})} g_{ij} \right) + \chi \left(T_{ij}^{(\text{el})} - \frac{1}{2} T^{(\text{el})} g_{ij} \right) + \chi \left(T_{ij}^{(\text{r})} - \frac{1}{2} T^{(\text{r})} g_{ij} \right). \quad (33)$$

Здесь

$$T_{(\text{m})}^{ij} = \sum_a n_a m_a c^2 \int \frac{d^4 p_a}{\sqrt{-g}} u_a^i u_a^j f_a(q, p_a) \quad (34)$$

– макроскопический тензор энергии-импульса среды, $T_{(\text{el})}^{ij}$ – тензор энергии-импульса макроскопического электромагнитного поля (см. (29)),

$$T_{(\text{r})}^{ij} = \frac{1}{4\pi} \left\langle -\omega_{\cdot l}^i \omega^{jl} + \frac{1}{4} g^{ij} \omega_{lm} \omega^{lm} \right\rangle \quad (35)$$

– макроскопический тензор энергии-импульса излучения в плазме,

$$\Lambda_{ij} = \langle R_{ij}^{(2)} \rangle - \sum_a \chi m_a c^2 \int \frac{d^4 p_a}{\sqrt{-g}} \langle N_a L_{ijk}^{(1)} u_a^m u_a^k \rangle. \quad (36)$$

При получении (33) учтено, что

$$\langle R_{ij}^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle (T_{ij}^{(el)})^{(1)} \rangle = 0.$$

Мы наложим также достаточно слабое ограничение на величину электромагнитного поля внутри радиуса корреляции. А именно, мы считаем, что произведения компонент макроскопического тензора электромагнитного поля на компоненты микроскопического гравитационного поля пренебрежимо малы по сравнению с отличными от нуля компонентами тензора микроскопического электромагнитного поля. Например,

$$F_{ik} h_j^k \ll \omega_{ij}. \quad (37)$$

С помощью (25)–(28) можно представить тензор Λ_{ij} в виде

$$\Lambda_{ij} = \nabla_k \varphi_{ij}^k + \mu_{ij}, \quad (38)$$

где

$$\varphi_{ij}^k = -\frac{1}{2} (\delta_n^k \delta_j^s - \delta_j^k \delta_n^s) P_{is}^n, \quad (39)$$

$$P_{is}^n = \langle h_l^n \Omega_{is}^{(1)l} \rangle, \quad (40)$$

$$\mu_{ij} = (\delta_n^k \delta_j^s - \delta_j^k \delta_n^s) Q_{kis}^n + \lambda_{ij}, \quad (41)$$

$$Q_{kis}^n = \langle \Omega_{kl}^{(1)n} \Omega_{is}^{(1)l} \rangle, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} = & - \sum_a \chi m_a c^2 \int \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} \left\{ -\frac{1}{2} u_i u_j u^k u^m - \frac{1}{4} g_{ij} u^k u^m - \frac{1}{2} u_i u_j g^{km} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} g_{ij} g^{km} + u_i u^k \delta_j^m + u_j u^k \delta_i^m - \frac{1}{2} \delta_i^k \delta_j^m \right\} \langle N_a h_{km} \rangle. \end{aligned} \quad (43)$$

В формуле (43) мы опускаем индекс a у импульсов и скоростей частиц сорта a .

Макроскопические уравнения Максвелла, получаемые из (22) усреднением по совокупности систем, принимают вид

$$\nabla_k F^{ik} + \nabla_k \varphi^{ik} + \mu^i = -\frac{4\pi}{c} J^i, \quad (44)$$

где

$$\varphi^{ik} = \langle h_m^i \omega^{km} \rangle - \langle h_m^k \omega^{im} \rangle, \quad (45)$$

$$\mu^i = \frac{1}{2} \langle \omega^{ik} \nabla_k h \rangle + \lambda^i, \quad (46)$$

$$\lambda^i = -2\pi \sum_b e_b \int \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} u_{(b)}^i \langle N_b h \rangle, \quad (47)$$

$$J^i = \sum_b e_b c n_b \int \frac{d^4 p}{\sqrt{-g}} u_b^i f_b, \quad (48)$$

J^i – макроскопический 4-вектор плотности электрического тока.

Макроскопические уравнения Эйнштейна и Максвелла оказались отличными от классических уравнений. В них появились дополнительные слагаемые, обусловленные взаимодействием частиц. Наша дальнейшая цель – вычислить эти дополнительные слагаемые. Для этого нужно определить микроскопические поля h_{ij} и ω_{ij} внутри области корреляции. Учтем, что основной вклад в вычисляемые величины дают далекие столкновения, поэтому мы можем считать микроскопические поля малыми.

Из микроскопических уравнений Максвелла (22) и Эйнштейна (23) вычтем соответствующие макроскопические уравнения (33) и (44), соответственно. Пренебрегая членами, квадратичными по h_{ij} и ω_{ij} , и предполагая по-прежнему, что влиянием макроскопического электромагнитного поля на микроскопические поля можно пренебречь внутри области корреляции (неравенство (37)), мы приходим к стандартным линеаризованным уравнениям Эйнштейна и Максвелла. Далее мы полагаем, что внутри области корреляции усредненный метрический тензор и функцию распределения можно считать постоянными. В этом случае мы можем понимать под g_{ij} внутри области корреляции метрику Минковского.

В результате для определения тензоров h_{ij} и ω_{ij} внутри области корреляции мы получаем стандартные линеаризованные относительно метрики Минковского уравнения Эйнштейна и Максвелла. Если на h_{ij} наложить калибровку $\nabla_k \gamma^{ik} = 0$, где $\gamma_{ij} = h_{ij} - (1/2) h g_{ij}$, то линеаризованные уравнения принимают вид

$$\square \gamma^{ij} = - \sum_b 2\chi m_b c^2 \int d^4 p'_b \Phi_b(q, p'_b) u_b'^i u_b'^j, \quad (49)$$

$$\nabla_k \omega^{ik} = -4\pi \sum_b e_b \int d^4 p'_b \Phi_b(q, p'_b) u_b'^i, \quad (50)$$

где $\square = g^{ij} \nabla_i \nabla_j$ – оператор Даламбера, $\Phi_b = N_b - n_b f_b$.

Дальнейшие вычисления не носят ковариантного характера, однако они будут производиться с целью определения компонент тензоров φ_{ij}^k , μ_{ij} , φ_{ij} и μ_i в некоторой точке (q) в локально лоренцевой системе координат. В этой системе координат интервал запишем в виде

$$ds^2 = d\eta^2 - (dq^1)^2 - (dq^2)^2 - (dq^3)^2. \quad (51)$$

В дальнейшем не представит труда записать окончательный результат в явно ковариантной форме.

Решение уравнения (49) и выражения для h_{ij} и $\Omega_{jk}^{(1)i}$ найдены в работе [9] и имеют вид

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{q}) = \sum_b \int d^4 p' \int d^3 q' \int d^3 k \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \times}$$

$$\times h_{ij}^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) \Phi_b(\eta', \mathbf{q}', p'), \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{jk}^{(1)i}(\eta, \mathbf{q}) &= \sum_b \int d^4 p' \int d^3 q' \int d^3 k \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} \times \\ &\times \Omega_{jk}^{i(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) \Phi_b(\eta', \mathbf{q}', p'), \end{aligned} \quad (53)$$

где $\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3)$ – трехмерный радиус-вектор в данной системе координат, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $\Phi_b = N_b - n_b f_b$,

$$h_{ij}^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) = -\frac{i\chi m_b c^2}{(2\pi)^3 k} \left(u'_i u'_j - \frac{1}{2} g_{ij} \right) \{ e^{ik(\eta'-\eta)} - e^{-ik(\eta'-\eta)} \}, \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{jk}^{i(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) &= \frac{\chi m_b c^2}{2(2\pi)^3 k} \left\{ \left[\left(u'_j u'_k - \frac{1}{2} g_{jk} \right) k_+^i - \left(u'_j u'^i - \frac{1}{2} \delta_j^i \right) k_k^+ - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(u'_k u'^i - \frac{1}{2} \delta_k^i \right) k_j^+ \right] e^{ik(\eta'-\eta)} - \left[\left(u'_j u'_k - \frac{1}{2} g_{jk} \right) k_-^i - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(u'_j u'^i - \frac{1}{2} \delta_j^i \right) k_k^- - \left(u'_k u'^i - \frac{1}{2} \delta_k^i \right) k_j^- \right] e^{-ik(\eta'-\eta)} \right\}. \end{aligned} \quad (55)$$

В формулы (54) и (55) введены 4-векторы

$$k_i^+ = (k, \mathbf{k}), \quad k_i^- = (-k, \mathbf{k}),$$

где

$$k = \sqrt{(k_1)^2 + (k_2)^2 + (k_3)^2} = |\mathbf{k}|.$$

Очевидно, что $k_i^-(\mathbf{k}) = -k_i^+(-\mathbf{k})$.

Для нахождения дополнительных слагаемых в макроскопических уравнениях Максвелла нам понадобятся также выражения для h и $\nabla_k h$:

$$\begin{aligned} h(\eta, \mathbf{q}) &= \sum_b \int d^4 p' \int d^3 q' \int d^3 k \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} \times \\ &\times h^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) \Phi_b(\eta', \mathbf{q}', p'), \end{aligned} \quad (56)$$

где

$$h^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) = \frac{i\chi m_b c^2}{(2\pi)^3 k} \{ e^{ik(\eta'-\eta)} - e^{-ik(\eta'-\eta)} \}; \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \nabla_k h(\eta, \mathbf{q}) &= \sum_b \int d^4 p' \int d^3 q' \int d^3 k \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} \times \\ &\times h_{;k}^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) \Phi_b(\eta', \mathbf{q}', p'), \end{aligned} \quad (58)$$

где

$$h_{;k}^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) = \frac{\chi m_b c^2}{(2\pi)^3 k} \{ k_k^+ e^{ik(\eta'-\eta)} - k_k^- e^{-ik(\eta'-\eta)} \}. \quad (59)$$

Решение уравнения (50) выражается через векторный потенциал A_i :

$$\omega_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i.$$

Решение для векторного потенциала представим в форме [10]

$$\begin{aligned} A_i(\eta, \mathbf{q}) = \sum_b \int d^4 p' \int d^3 q' \int d^3 k \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} \times \\ \times A_i^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) \Phi_b(\eta', \mathbf{q}', p'), \end{aligned} \quad (60)$$

где

$$A_i^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) = \frac{ie_b}{(2\pi)^2 k} u'_i \{ e^{ik(\eta'-\eta)} - e^{-ik(\eta'-\eta)} \}. \quad (61)$$

Выражение для микроскопического электромагнитного поля ω_{ij} принимает в этом случае вид

$$\begin{aligned} \omega_{ik}(\eta, \mathbf{q}) = \sum_b \int d^4 p' \int d^3 q' \int d^3 k \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} \times \\ \times \omega_{ik}^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) \Phi_b(\eta', \mathbf{q}', p'), \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$\omega_{ik}^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}) = \frac{e_b}{(2\pi)^2 k} \{ (k_i^+ u'_k - k_k^+ u'_i) e^{ik(\eta'-\eta)} - (k_i^- u'_k - k_k^- u'_i) e^{-ik(\eta'-\eta)} \}. \quad (63)$$

Подстановка соотношений (52), (53), (56), (58), (62) в (35), (40), (42), (43), (45)–(47) приводит к следующим выражениям для тензоров $T_{ij}^{(r)}$, P_{is}^n , Q_{kis}^n , λ_{ij} , $\langle h_m^i \omega^{km} \rangle$, $\langle \omega^{ik} \nabla_k h \rangle$, λ_i , появляющихся в макроскопических уравнениях Эйнштейна и Максвелла при учете взаимодействия частиц:

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(r)} = \frac{1}{4\pi} \left(-g_{it} g_{js} + \frac{1}{4} g_{ij} g_{ts} \right) \sum_{bc} \int d^4 p' \int d^4 p'' \int d^3 q' \int d^3 q'' \times \\ \times \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \int d^3 k' \int d^3 k'' e^{-i\mathbf{k}'(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} e^{-i\mathbf{k}''(\mathbf{q}-\mathbf{q}'')} \times \\ \times \omega_{.i}^{t(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}') \omega^{(c)sl}(\eta, \eta'', p'', \mathbf{k}'') n_b n_c g_{bc}(x', x''), \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} P_{is}^n = \sum_{bc} \int d^4 p' \int d^4 p'' \int d^3 q' \int d^3 q'' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \times \\ \times \int d^3 k' \int d^3 k'' e^{-i\mathbf{k}'(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} e^{-i\mathbf{k}''(\mathbf{q}-\mathbf{q}'')} \times \\ \times h_l^{n(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}') \Omega_{is}^{l(c)}(\eta, \eta'', p'', \mathbf{k}'') n_b n_c g_{bc}(x', x''), \end{aligned} \quad (65)$$

$$Q_{kis}^n = \sum_{bc} \int d^4 p' \int d^4 p'' \int d^3 q' \int d^3 q'' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int d^3 k' \int d^3 k'' e^{-i\mathbf{k}'(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} e^{-i\mathbf{k}''(\mathbf{q}-\mathbf{q}'')} \times \\ & \times \Omega_{kl}^{n(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}') \Omega_{is}^{l(c)}(\eta, \eta'', p'', \mathbf{k}'') n_b n_c g_{bc}(x', x''), \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} = & - \sum_{bc} \chi m_c c^2 \int d^4 p' \int d^4 p'' \int d^3 q' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int d^3 k' e^{-i\mathbf{k}'(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} \times \\ & \times \left\{ -\frac{1}{2} u''_i u''_j u''^k u''^m - \frac{1}{4} g_{ij} u''^k u''^m - \frac{1}{2} u''_i u''_j g^{km} + \frac{1}{4} g_{ij} g^{km} + \right. \\ & + u''_i u''^k \delta_j^m + u''_j u''^k \delta_i^m - \frac{1}{2} \delta_i^k \delta_j^m \left. \right\} \times \\ & \times h_{km}^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}') n_b n_c g_{bc}(x'; \eta, \mathbf{q}, p''), \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \langle h_m^i \omega^{km} \rangle = & \sum_{bc} \int d^4 p' \int d^4 p'' \int d^3 \mathbf{q}' \int d^3 \mathbf{q}'' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \times \\ & \times \int d^3 \mathbf{k}' \int d^3 \mathbf{k}'' e^{-i\mathbf{k}'(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} e^{-i\mathbf{k}''(\mathbf{q}-\mathbf{q}'')} \times \\ & \times h_m^{i(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}') \omega_{(c)}^{km}(\eta, \eta'', p'', \mathbf{k}'') n_b n_c g_{bc}(x', x''), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \langle \omega^{ik} \nabla_k h \rangle = & \sum_{bc} \int d^4 p' \int d^4 p'' \int d^3 \mathbf{q}' \int d^3 \mathbf{q}'' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \times \\ & \times \int d^3 \mathbf{k}' \int d^3 \mathbf{k}'' e^{-i\mathbf{k}'(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} e^{-i\mathbf{k}''(\mathbf{q}-\mathbf{q}'')} \times \\ & \times h_{;k}^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}') \omega_{(c)}^{ik}(\eta, \eta'', p'', \mathbf{k}'') n_b n_c g_{bc}(x', x''), \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \lambda^i = & - \sum_{bc} 2\pi e_c \int d^4 p' \int d^4 p'' \int d^3 \mathbf{q}' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int d^3 \mathbf{k}' e^{-i\mathbf{k}'(\mathbf{q}-\mathbf{q}')} \times \\ & \times u''^i h^{(b)}(\eta, \eta', p', \mathbf{k}') n_b n_c g_{bc}(x'; \eta, \mathbf{q}, p''). \end{aligned} \quad (70)$$

Здесь мы воспользовались определением двухчастичной корреляционной функции из работ [9–11, 14].

Двухчастичная корреляционная функция выражается через одночастичные и двухчастичные функции распределения соотношением

$$f_{ab}(x, x') = f_a(x) f_b(x') + g_{ab}(x, x'). \quad (71)$$

Одночастичная, двухчастичная, трехчастичная и т.д. функции распределения определяются как

$$\begin{aligned} \left\langle \int ds \delta(x - x_a(s)) \right\rangle &= f_a(x), \\ \left\langle \int ds \delta(x - x_a(s)) \int ds' \delta(x' - x_b(s')) \right\rangle &= f_{ab}(x, x'), \\ \left\langle \int ds \delta(x - x_a(s)) \int ds' \delta(x' - x_b(s')) \int ds'' \delta(x'' - x_c(s'')) \right\rangle &= \end{aligned}$$

$$= f_{abc}(x, x', x''),$$

где

$$\delta(x - x_a(s)) = \delta^4(q^i - q_a^i(s))\delta^4(p_j - p_j^a(s)),$$

x обозначает совокупность всех восьми координат $(\eta, \mathbf{q}, p_i)$ фазового пространства, x' – совокупность аналогичных штрихованных координат.

Для моментов случайных функций справедливы формулы [10, 11]

$$\langle N_a(x) \rangle = n_a f_a(x), \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \langle N_a(x) N_b(x') \rangle &= (n_a n_b - n_a \delta_{ab}) f_{ab}(x, x') + \\ &+ n_a \delta_{ab} f_a(x) \int ds' \delta(x' - x_a(s'|x)), \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \langle N_a(x) N_b(x') N_c(x'') \rangle &= (n_a n_b n_c - n_a n_b \delta_{ac} - n_a n_b \delta_{bc} - \\ &- n_a n_c \delta_{ab} + 2n_a \delta_{ab} \delta_{bc}) f_{abc}(x, x', x'') + \\ &+ (n_a n_c - n_a \delta_{ac}) \delta_{ab} f_{ac}(x, x'') \int ds' \delta(x' - x_a(s'|x)) + \\ &+ (n_a n_b - n_a \delta_{ab}) \delta_{ac} f_{ab}(x, x') \int ds'' \delta(x'' - x_a(s''|x)) + \\ &+ (n_a n_b - n_a \delta_{ab}) \delta_{bc} f_{ab}(x, x') \int ds'' \delta(x'' - x_b(s''|x')) + \\ &+ n_a \delta_{ab} \delta_{bc} f_a(x) \int ds' \delta(x' - x_a(s'|x)) \int ds'' \delta(x'' - x_a(s''|x)). \end{aligned} \quad (74)$$

Здесь $x_a(s|x)$ обозначает траекторию частицы, проходящую через точку фазового пространства x .

Учитывая связь N_a с Φ_a ($\Phi_a = N_a - n_a f_a$) и имея в виду, что f_a не случайная функция, нетрудно получить выражения для средних

$$\langle N_a(x) \Phi_b(x') \rangle, \quad \langle N_a(x) \Phi_b(x') \Phi_c(x'') \rangle.$$

При получении (65)–(70) также полагалось, что $n_a \gg 1$ и что $x'' = x_b(s''|x')$, т.е. точка фазового x'' -пространства не принадлежит траектории частицы сорта b , проходящей через точку x' . Этим мы не учитываем действие частицы самой на себя.

В выражениях (65)–(70) нештрихованные величины относятся к частицам сорта a , штрихованные величины – к частицам сорта b , дважды штрихованные величины – к частицам сорта c .

Таким образом, все новые члены, которыми макроскопические уравнения Эйнштейна и Максвелла отличаются от классических уравнений, выражаются через интегралы в импульсном пространстве от двухчастичных корреляционных функций. В отсутствие взаимодействий корреляционные функции обращаются в нуль и мы проходим к классическим уравнениям Эйнштейна и Максвелла.

4. ДВУХЧАСТИЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Для дальнейшего упрощения дополнительных слагаемых, появляющихся в макроскопических уравнениях Эйнштейна и Максвелла при учете взаимодействия частиц, нам необходимо знание двухчастичных корреляционных функций.

Для системы частиц, взаимодействующих только гравитационно, двухчастичная корреляционная функция была найдена в работе [9] как попутный результат при выводе релятивистского кинетического уравнения для системы самогравитирующих частиц с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию. Для системы частиц, взаимодействующих только электромагнитным образом, двухчастичная функция распределения была найдена в [11, 12] при выводе релятивистского кинетического уравнения для плазмы. В нашем случае необходимо знание корреляционной функции с учетом как электромагнитных, так и гравитационных взаимодействий.

Уравнение на двухчастичную корреляционную функцию $g_{ab}(x, x')$ получается из уравнения Лиувилля (см. (16)) после умножения обеих частей этого уравнения на $\Phi_b(x')$ и усреднения по совокупности систем,

$$\begin{aligned} p^i \frac{\partial}{\partial q^i} \langle N_a(x) \Phi_b(x') \rangle + \Gamma_{j,ik} p^j p^k \frac{\partial}{\partial p_i} \langle N_a(x) \Phi_b(x') \rangle + \\ + \frac{e_a}{c} F_{jk} p^k \frac{\partial}{\partial p_j} \langle N_a(x) \Phi_b(x') \rangle = \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \sum_c \int d^4 p''_b \int d^3 \mathbf{q}'' \int d^3 \mathbf{k} \times \right. \\ \times \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{q} - \mathbf{q}')] \left[\Omega_{lm}^{j(c)}(\eta, \eta'', p''_b, \mathbf{k}) p^l p^m \Delta_{ji} - \right. \\ \left. \left. - \frac{e_a}{c} \omega_{.k}^{l(c)}(\eta, \eta'', p'', \mathbf{k}) p^k \Delta_{lj} \right] \langle N_a(x) \Phi_b(x') \Phi_c(x'') \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь мы воспользовались формулами (53), (62) и учли, что для получения макроскопических уравнений с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию при выводе (75) достаточно положить $\Omega_{ij}^k \simeq \Omega_{ij}^{k(1)}$, $\psi_{.k}^l \simeq \omega_{.k}^l$.

Дальнейшее упрощение этого уравнения такое же, как упрощение аналогичных уравнений в работах [9, 12, 13]. Мы используем формулы (73), (74) и полагаем

$$f_{abc}(x, x', x'') \simeq f_a(x) f_b(x'), f_c(x'').$$

В результате для двухчастичной функции распределения $g_{ab}(x, x')$ получается уравнение

$$\begin{aligned} p^i \frac{\partial}{\partial q^i} g_{ab}(x, x') + \Gamma_{i,jk} p^j p^k \frac{\partial}{\partial p_j} g_{ab}(x, x') + \frac{e_a}{c} F_{jk} p^k \frac{\partial}{\partial p_j} g_{ab}(x, x') = \\ = \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \int d^4 p''_b \int d^3 \mathbf{q}'' \int d^3 \mathbf{k} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{q} - \mathbf{q}'')] \times \right. \\ \times \left[\Omega_{lm}^{j(b)}(\eta, \eta'', p'', \mathbf{k}) p^l p^m \Delta_{ji} - \frac{e_a}{c} \omega_{jk}^{(c)}(\eta, \eta'', p'', \mathbf{k}) p^k \right] \times \\ \times f_a(x) f_b(x') \int ds'' \delta(x'' - x_b(s''|x')) \Big\}. \end{aligned} \quad (76)$$

Это уравнение требуется решать при условиях $\Gamma_{i,jk} = 0$, $F_{jk} = 0$ согласно нашему предположению о слабости величин усредненных полей внутри области корреляции.

В этом случае для величины $g_{ab}(x, x')$ имеем линейное уравнение 1-го порядка, в правой части которого стоит сумма двух слагаемых. Одно из них обусловлено гравитационными взаимодействиями, второе – электромагнитными. Очевидно, что решение (76) также представляет собой сумму двух слагаемых:

$$g_{ab}(x, x') = g_{ab}^{(\text{gr})}(x, x') + g_{ab}^{(\text{el})}(x, x'), \quad (77)$$

где $g_{ab}^{(\text{gr})}(x, x')$ – вклад в корреляционную функцию, обусловленный гравитационным взаимодействием, $g_{ab}^{(\text{el})}(x, x')$ – вклад в корреляционную функцию, обусловленный электромагнитными взаимодействиями.

Уравнение для $g_{ab}^{(\text{gr})}(x, x')$ совпадает с уравнением для $g_{ab}(x, x')$ из работы [9]. Там же приведено и решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} g_{ab}^{(\text{gr})}(x, x') = & \int d^3k \int_{-\infty}^{\eta} \frac{d\tau}{p^0} \left[\frac{\partial}{\partial p_i} (p^l p^m \Delta_{ij} f_a(x)) \right]_{\tau} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\tau'}{u'^0} f_b(x') \times \\ & \times \Omega_{lm}^{j(b)}(\tau, \tau', p', \mathbf{k}) \exp \left[-i\mathbf{k}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') + \frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v})(\eta - \tau) + \frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta') \right] + \\ & + \int d^3k \int_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{p'^0} \left[\frac{\partial}{\partial p'_i} (p'^l p'^m \Delta'_{ij} f_b(x')) \right]_{\tau'} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{d\tau}{u^0} f_a(x) \times \\ & \times \Omega_{lm}^{j(a)}(\tau', \tau, p, \mathbf{k}) \exp \left[-i\mathbf{k}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') + \frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\eta' - \tau') + \frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v})(\tau - \eta) \right], \quad (78) \end{aligned}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{c}\mathbf{u}_a/u_a^0$, $\mathbf{v}' = \mathbf{c}\mathbf{u}'_b/u_b'^0$, $\mathbf{u}_a = (u^1, u^2, u^3)$, $\mathbf{u}'_b = (u'^1, u'^2, u'^3)$. Индекс τ означает, что в соответствующее выражение, зависящее от η , $\mathbf{q}$ и p , следует подставлять вместо $(\eta, \mathbf{q})$ величины $(\tau, \mathbf{q} + \mathbf{v}(\tau - \eta))$. Аналогичный смысл имеет индекс τ' .

Уравнение для $g_{ab}^{(\text{el})}(x, x')$ совпадает с уравнением для $g_{ab}(x, x')$ из работы [12]. Там же приведено и решение (см. формулу (18) в статье [12]). В обозначениях, принятых в данной работе, результат (18) из [12] принимает вид

$$\begin{aligned} g_{ab}^{(\text{el})}(x, x') = & -\frac{e_b e_c}{2\pi^2 c} \int \frac{d^3k}{k} \int_{-\infty}^{\eta'} d\tau' \frac{u'^k}{u'^0} f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_i} \int_{-\infty}^{\tau'} d\tau'' \times \\ & \times \left\{ \frac{u''_k}{u''^0} \frac{\partial}{\partial q''_i} [\exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'')) \sin(k(\tau' - \tau''))] - \right. \\ & \left. - \frac{u''_i}{u''^0} \frac{\partial}{\partial q''_k} [\exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'')) \sin(k(\tau' - \tau''))] \right\} \times \\ & \times \exp \left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\eta' - \tau') + \frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\tau'' - \eta'') \right] - \\ & - \frac{e_b e_c}{2\pi^2 c} \int \frac{d^3k}{k} \int_{-\infty}^{\eta''} d\tau'' \frac{u''^k}{u''^0} f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_i} \int_{-\infty}^{\tau''} d\tau' \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{u'_k}{u'^0} \frac{\partial}{q_{\tau''}''} [\exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}')) \sin(k(\tau'' - \tau'))] - \right. \\
& \left. - \frac{u'_i}{u'^0} \frac{\partial}{q_{\tau''}''} [\exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}')) \sin(k(\tau'' - \tau'))] \right\} \times \\
& \times \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta') \right]. \quad (79)
\end{aligned}$$

Здесь $q_\tau^i = (\tau, q^\alpha)$ — 4-вектор q^i , у которого временная компонента η заменяется на τ , а пространственные компоненты образуют трехмерный радиус-вектор $\mathbf{q}$. После выполнения дифференцирования по q_τ^i в (79) и введения обозначений

$$k_i^+ = (k, \mathbf{k}), \quad k_i^- = (-k, \mathbf{k}),$$

где

$$k = \sqrt{(k_1)^2 + (k_2)^2 + (k_3)^2} = |\mathbf{k}|,$$

получаем следующее выражение для корреляционной функции:

$$\begin{aligned}
g_{ab}^{(\text{el})}(x, x') &= -\frac{e_b e_c}{4\pi^2 c} \int \frac{d^3 k}{k} \int_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{u'^0} f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_i} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\tau'} \frac{d\tau''}{u''^0} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'')} [(u' u'') \delta_i^k - u''_i u'^k] (k_k^+ e^{ik(\tau'' - \tau')} - \\
&- k_k^- e^{-ik(\tau'' - \tau')}) \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}')(\eta' - \tau') + \frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\tau'' - \eta'') \right] - \\
&- \frac{e_b e_c}{4\pi^2 c} \int \frac{d^3 k}{k} \int_{-\infty}^{\eta''} \frac{d\tau''}{u''^0} f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_i} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{\tau''} \frac{d\tau'}{u'^0} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}')} [(u' u'') \delta_i^k - u'_i u''^k] (k_k^+ e^{ik(\tau' - \tau'')} - \\
&- k_k^- e^{-ik(\tau' - \tau'')}) \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta') \right]. \quad (80)
\end{aligned}$$

Очевидно, что в плазме электромагнитные взаимодействия являются доминирующими. Поэтому

$$g_{ab}^{(\text{gr})}(x, x') \ll g_{ab}^{(\text{el})}(x, x').$$

Следовательно, при вычислении выражений (65)–(70) для P_{is}^n , Q_{kis}^n , λ_{ij} , $\langle h_m^i \omega^{km} \rangle$, $\langle \omega^{ik} \nabla_k h \rangle$, λ_i достаточно подставить $g_{ab}^{(\text{el})}(x, x')$ вместо $g_{ab}(x, x')$. После интегрирования по $\mathbf{q}'$, $\mathbf{q}''$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$ получаем

$$\begin{aligned}
P_{is}^n &= \sum_{bc} \left(-\frac{e_b e_c n_b n_c (2\pi)^6}{4\pi^2 c} \right) \int d^4 p' \int d^4 p'' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \times \\
&\times \int \frac{d^3 k}{k} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{u'^0} \int_{-\infty}^{\tau'} \frac{d\tau''}{u''^0} f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_j} [(u' u'') \delta_j^k - u''_j u'^k] \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (-k_k^- e^{ik(\tau''-\tau')} + k_k^+ e^{-ik(\tau''-\tau')}) \times \\
 & \times \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta') \right] + \\
 & + \int_{-\infty}^{\eta''} \frac{d\tau''}{u''^0} \int_{-\infty}^{\tau''} \frac{d\tau'}{u'^0} f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p_j''} [(u' u'') \delta_j^k - u'_j u''^k] (k_k^+ e^{-ik(\tau''-\tau')} - \\
 & - k_k^- e^{ik(\tau''-\tau')}) \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta') \right] \times \\
 & \times h_l^{n(b)}(\eta, \eta', p', -\mathbf{k}) \Omega_{is}^{l(c)}(\eta, \eta'', p'', \mathbf{k}), \tag{81}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{kis}^n = & \sum_{bc} \left(-\frac{e_b e_c n_b n_c (2\pi)^6}{4\pi^2 c} \right) \int d^4 p' \int d^4 p'' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta''} d\eta'' \times \\
 & \times \int \frac{d^3 k}{k} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{u'^0} \int_{-\infty}^{\tau'} \frac{d\tau''}{u''^0} f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p_j'} [(u' u'') \delta_j^k - u'_j u''^k] \times \right. \\
 & \times (-k_k^- e^{ik(\tau''-\tau')} + k_k^+ e^{-ik(\tau''-\tau')}) \times \\
 & \times \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta') \right] + \\
 & + \int_{-\infty}^{\eta''} \frac{d\tau''}{u''^0} \int_{-\infty}^{\tau''} \frac{d\tau'}{u'^0} f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p_j''} [(u' u'') \delta_j^k - u'_j u''^k] (k_k^+ e^{-ik(\tau''-\tau')} - \\
 & - k_k^- e^{ik(\tau''-\tau')}) \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta') \right] \times \\
 & \times \Omega_{kl}^{n(b)}(\eta, \eta', p', -\mathbf{k}) \Omega_{is}^{l(c)}(\eta, \eta'', p'', \mathbf{k}), \tag{82}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} = & \sum_{bc} \chi(2\pi) e_b e_c n_b n_c m_c c \int d^4 p' \int d^4 p'' \left[-\frac{1}{2} u''_i u''_j u''^k u''^m - \right. \\
 & - \frac{1}{4} g_{ij} u''^k u''^m - \frac{1}{2} u''_i u''_j g^{km} + \frac{1}{4} g_{ij} g^{km} + u''_i u''^k \delta_j^m + u''_j u''^k \delta_i^m - \\
 & - \frac{1}{2} \delta_i^k \delta_j^m \left. \right] \int \frac{d^3 k}{k} \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' h_{km}^{(b)}(\eta, \eta', p', -\mathbf{k}) \left\{ \int_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{u'^0} \int_{-\infty}^{\tau'} \frac{d\tau''}{u''^0} \times \right. \\
 & \times f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p_r'} ((u' u'') \delta_r^l - u''_r u''^l) (k_l^+ e^{-ik(\tau''-\tau')} - \\
 & - k_l^- e^{ik(\tau''-\tau')}) \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta') \right] + \\
 & + \int_{-\infty}^{\eta} \frac{d\tau''}{u''^0} \int_{-\infty}^{\tau''} \frac{d\tau'}{u'^0} f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p_r''} ((u' u'') \delta_r^l - u'_r u''^l) \times \\
 & \times (k_l^+ e^{-ik(\tau''-\tau')} - k_l^- e^{ik(\tau''-\tau')}) \times \\
 & \times \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta') \right] \left. \right\}, \tag{83}
 \end{aligned}$$

$$\langle h_m^i \omega^{km} \rangle = \sum_{bc} \left(-\frac{e_b e_c n_b n_c (2\pi)^6}{4\pi^2 c} \right) \left(\frac{-i \chi m_b e^2}{(2\pi)^3 k} \right) \frac{e_c}{4\pi^2 k} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int d^4 p' \int d^4 p'' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \int \frac{d^3 k}{k} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{u'^0} \int_{-\infty}^{\tau'} \frac{d\tau''}{u''^0} \times \right. \\
& \times f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_l} [(u' u'') \delta_l^s - u_l'' u'^s] (-k_s^- e^{ik(\tau'' - \tau')} + k_s^+ e^{-ik(\tau'' - \tau')}) \times \\
& \times \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k} \mathbf{v}'') (\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k} \mathbf{v}') (\tau' - \eta') \right] + \\
& + \int_{-\infty}^{\eta''} \frac{d\tau''}{u''^0} \int_{-\infty}^{\tau''} \frac{d\tau'}{u'^0} f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_l} [(u' u'') \delta_l^s - u_l' u''^s] (k_s^+ e^{-ik(\tau'' - \tau')} - \\
& - k_s^- e^{ik(\tau'' - \tau')}) \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k} \mathbf{v}'') (\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k} \mathbf{v}') (\tau' - \eta') \right] \Big\} \times \\
& \times \left(u'^i u'_m - \frac{1}{2} \delta_m^i \right) (e^{ik(\eta' - \eta)} - e^{-ik(\eta' - \eta)}) [u''^m (k_+^k e^{ik(\eta'' - \eta)} - \\
& - k_-^k e^{-ik(\eta'' - \eta)}) - u''^k (k_+^m e^{ik(\eta'' - \eta)} - k_-^m e^{-ik(\eta'' - \eta)})], \tag{84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \omega^{ik} \nabla_k h \rangle &= \sum_{bc} \left(-\frac{e_b e_c n_b n_c (2\pi)^6}{4\pi^2 c} \right) \frac{\chi m_b c^2}{(2\pi)^3 k} \frac{e_c}{4\pi^2 k} \int d^4 p' \times \\
& \times \int d^4 p'' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta'' \int \frac{d^3 k}{k} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{u'^0} \int_{-\infty}^{\tau'} \frac{d\tau''}{u''^0} f_c(x'') \times \right. \\
& \times \frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_l} [(u' u'') \delta_l^s - u_l'' u'^s] (-k_s^- e^{ik(\tau'' - \tau')} + k_s^+ e^{-ik(\tau'' - \tau')}) \times \\
& \times \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k} \mathbf{v}'') (\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k} \mathbf{v}') (\tau' - \eta') \right] + \\
& + \int_{-\infty}^{\eta''} \frac{d\tau''}{u''^0} \int_{-\infty}^{\tau''} \frac{d\tau'}{u'^0} f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_l} [(u' u'') \delta_l^s - u_l' u''^s] (k_s^+ e^{-ik(\tau'' - \tau')} - \\
& - k_s^- e^{ik(\tau'' - \tau')}) \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k} \mathbf{v}'') (\eta'' - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k} \mathbf{v}') (\tau' - \eta') \right] \Big\} \times \\
& \times (-k_k^- e^{ik(\eta' - \eta)} + k_k^+ e^{-ik(\eta' - \eta)}) [u''^k (k_+^i e^{ik(\eta'' - \eta)} - \\
& - k_-^i e^{-ik(\eta'' - \eta)}) - u''^i (k_+^k e^{ik(\eta'' - \eta)} - k_-^k e^{-ik(\eta'' - \eta)})], \tag{85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^i &= \sum_{bc} \frac{i \chi e_b e_c^2 m_b c n_b n_c}{2\pi} \int d^4 p' \int d^4 p'' \int_{-\infty}^{\eta} d\eta' \int \frac{d^3 k}{k^2} u''^i \times \\
& \times (e^{ik(\eta' - \eta)} - e^{-ik(\eta' - \eta)}) \left\{ \int_{-\infty}^{\eta'} \frac{d\tau'}{u'^0} \int_{-\infty}^{\tau'} \frac{d\tau''}{u''^0} f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p'_l} \times \right. \\
& \times ((u' u'') \delta_l^s - u_l'' u'^s) (k_s^+ e^{-ik(\tau'' - \tau')} - k_s^- e^{ik(\tau'' - \tau')}) \times \\
& \times \exp \left[\frac{i}{c} (\mathbf{k} \mathbf{v}'') (\eta - \tau'') + \frac{i}{c} (\mathbf{k} \mathbf{v}') (\tau' - \eta') \right] + \int_{-\infty}^{\eta} \frac{d\tau''}{u''^0} \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\tau''} \frac{d\tau'}{u'^0} f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p''_l} ((u' u'') \delta_l^s - u_l' u''^s) (k_s^+ e^{-ik(\tau'' - \tau')} -
\end{aligned}$$

$$-k_s^- e^{ik(\tau''-\tau')} \exp \left[\frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}'')(\eta - \tau'') + \frac{i}{c}(\mathbf{k}\mathbf{v}')(\tau' - \eta') \right] \Bigg\}. \quad (86)$$

Данные выражения справедливы только в локально-лоренцевой системе отсчета в окрестности точки, в которой вычисляются тензоры P_{is}^n , Q_{kis}^n , λ_{ij} , $\langle h_k^i \omega^{km} \rangle$, $\langle h_{;k} \omega^{ik} \rangle$ и λ^i . Дальнейшее упрощение их и ковариантное обобщение проводятся так же, как и в работе [14] для аналогичных выражений, полученных при выводе макроскопических уравнений Эйнштейна для системы гравитационно взаимодействующих частиц.

Опуская подобные [14] рассуждения и вычисления, приведем результат для тензоров φ_{ij}^k , μ_{ij} , φ^{ik} и μ^i , которые появляются в левой части модифицированных эффектами общей теории относительности макроскопических уравнений Максвелла и в левой части макроскопических уравнений Эйнштейна:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^k = \sum_{bc} \frac{\chi^2 e_b e_c m_b m_c n_b n_c c^3}{16\pi^2} \int \frac{d^4 p'}{\sqrt{-g}} \int \frac{d^4 p''}{\sqrt{-g}} \Bigg[\frac{1}{2} g^{fk} u_i'' u_j'' + \\ + u'^k (u' u'') (\delta_j^f u_i'' + \delta_i^f u_j'') \Bigg] (u' u'') K_{fr}(u', u'') \left(f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p_r'} - \right. \\ \left. - f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p_r''} \right), \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ij} = \sum_{bc} \frac{\chi^2 e_b e_c m_b m_c n_b n_c c^3}{16\pi^2} \int \frac{d^4 p'}{\sqrt{-g}} \int \frac{d^4 p''}{\sqrt{-g}} \Bigg[\left(z^2 + \frac{1}{2} \right) (u_i'' u_j'' + \\ + u'_i u'_j) g^{qr} + \left(z^2 - \frac{1}{2} \right) g_{ij} g^{qr} - 2z (u'_i u_j'' + u_i'' u'_j) g^{qr} - \left(z^2 - \frac{1}{2} \right) (\delta_i^q \delta_j^r + \\ + \delta_j^q \delta_i^r) \Bigg] (z \delta_f^m - u_f'' u''^m) J_{rqm}(u', u'') f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p_f'}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{ik} = \sum_{bc} \frac{\chi e_b e_c^2 m_b n_b n_c c}{2\pi} \int \frac{d^4 p'}{\sqrt{-g}} \int \frac{d^4 p''}{\sqrt{-g}} (u' u'') K_{fl}(u', u'') \times \\ \times [(u' u'') (u'^i g^{kf} - u'^k g^{if}) - (u''^i g^{kf} - u''^k g^{if})] \times \\ \times \left(f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p_l'} - f_b(x') \frac{\partial f_c(x'')}{\partial p_l''} \right), \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \mu^i = \sum_{bc} \frac{\chi e_b^2 e_c m_c n_b n_c c}{4\pi} \int \frac{d^4 p'}{\sqrt{-g}} \int \frac{d^4 p''}{\sqrt{-g}} [(u' u'') \delta_l^s - u_l'' u'^s] \times \\ \times u'^k J_{ks}^i(u', u'') f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p_l'}, \end{aligned} \quad (90)$$

где $z = (u' u'') = u'^l u_l''$.

Тензоры $K_{ij}(u', u'')$ и $J_{ijk}(u', u'')$ совпадают с аналогичными тензорами, появляющимися в дополнительных слагаемых, обусловленных взаимодействием частиц, в макроскопических уравнениях Эйнштейна для системы гравитационно взаимодействующих частиц [14]. Они имеют вид

$$K_{ij}(u', u'') = \frac{4\pi^2}{k_{\min}^2 [(u' u'')^2 - 1]^{\frac{3}{2}}} \{ -[(u' u'')^2 - 1] g_{ij} -$$

$$-u'_i u'_j - u''_i u''_j + (u' u'')(u'_i u''_j + u''_i u'_j)\}, \quad (91)$$

$$\begin{aligned} J_{ijk}(u', u'') = & A[(g_{ij}u'_k + g_{ik}u'_j + g_{jk}u'_i) - z(g_{ij}u''_k + g_{ik}u''_j + g_{jk}u''_i) - \\ & - (u'_i u''_j u''_k + u''_i u'_j u''_k + u''_i u''_j u'_k) + 3z u''_i u''_j u''_k] + \\ & + C[u'_i u'_j u'_k - z(u'_i u'_j u''_k + u'_i u''_j u'_k + u''_i u'_j u'_k) + \\ & + z^2(u'_i u''_j u''_k + u''_i u'_j u''_k + u''_i u''_j u'_k) - z^3 u''_i u''_j u''_k], \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$A = -\frac{2\pi\sqrt{2}}{k_{\min}} \left[\frac{z-2}{(z-1)^2(z+1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2z-1}{(z+1)(z-1)^{\frac{5}{2}}} \ln(z + \sqrt{z^2-1}) \right], \quad (93)$$

$$C = -\frac{2\pi\sqrt{2}}{k_{\min}} \left[\frac{z-6}{(z-1)^3(z+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6z-1}{(z+1)^2(z-1)^{\frac{7}{2}}} \ln(z + \sqrt{z^2-1}) \right]. \quad (94)$$

Параметр $k_{\min}$ равен в данном случае $1/r_D$, где r_D – радиус Дебая. Он появился при обрезании расходящихся интегралов на больших прицельных расстояниях и учитывает экранирование взаимодействий в плазме при $r > r_D$.

Тензоры $K_{ij}(u', u'')$ и $J_{ijk}(u', u'')$ обладают свойствами

$$K_{ij}(u', u'') = K_{ij}(u'', u'), \quad K_{ij}u'^i = K_{ij}u''^i = 0, \quad K_{ij} = K_{ji}; \quad (95)$$

$$J_{ijk}(u', u'')u''^k = 0. \quad (96)$$

Отметим важные тождества, которым удовлетворяют дополнительные слагаемые в левой части макроскопических уравнений Эйнштейна:

$$g^{ij}\varphi_{ij}^k = 0, \quad \varphi_{ij}^i = 0, \quad \varphi_{ij}^k = \varphi_{ji}^k, \quad (97)$$

$$g^{ij}\mu_{ij} = 0. \quad (98)$$

Для получения окончательного вида макроскопических уравнений в релятивистской плазме необходимо вычислить тензор $T_{ij}^{(r)}$ (см. (64)). Здесь мы не можем пренебрегать вкладом гравитационных взаимодействий в двухчастичную корреляционную функцию. Ниже мы увидим, что соответствующий вклад в $\chi T_{ij}^{(r)}$ такого же порядка, что и учтенные дополнительные слагаемые в левой части макроскопических уравнений Эйнштейна. Поэтому $T_{ij}^{(r)}$ складывается из двух частей:

$$T_{ij}^{(r)} = \tau_{ij}^{(r)} + \tau_{ij}^{(gr)}. \quad (99)$$

Выражение для $\tau_{ij}^{(r)}$ получается из (64) подстановкой вместо $g_{bc}(x', x'')$ слагаемого $g_{bc}^{(el)}(x', x'')$ (см. (80)), обусловленного электромагнитными взаимодействиями. Выражение для $\tau_{ij}^{(gr)}$ получается из (64) подстановкой вместо $g_{bc}(x', x'')$ слагаемого $g_{bc}^{(gr)}(x', x'')$ (см. (78)), обусловленного гравитационными взаимодействиями.

После подстановки соответствующих выражений и проведения вычислений, аналогичных приведенным выше, мы приходим к следующему результату для $\tau_{ij}^{(r)}$ и $\tau_{ij}^{(gr)}$:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{(r)} = & \sum_{bc} \frac{e_b^2 e_c^2 n_b n_c}{2(2\pi)^4 c} \int \frac{d^4 p'}{\sqrt{-g}} \int \frac{d^4 p''}{\sqrt{-g}} [-2z \delta_i^r \delta_j^f + z g_{ij} g^{rf} + \\ & + (\delta_i^f u_j'' + \delta_j^f u_i'') u'^r - g^{rf} (u_i' u_j'' + u_i'' u_j')] \times \\ & \times (z \delta_n^s - u_n'' u'^s) J_{rfs}^{(el)}(u', u'') f_c(x'') \frac{\partial f_b(x')}{\partial p_n'}, \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{(gr)} = & \sum_{bc} \frac{\chi e_b e_c m_b m_c n_b n_c c^3}{16\pi^2} \int \frac{d^4 p'}{\sqrt{(-g)}} \int \frac{d^4 p''}{\sqrt{-g}} [2z \delta_i^p \delta_j^q - \\ & - z g_{ij} g^{pq} - (\delta_i^q u_j'' + \delta_j^q u_i'') u'^p + g^{pq} (u_i' u_j'' + u_i'' u_j')] J_{pqf}^{(gr)}(u', u'') \times \\ & \times f_c(x'') \frac{\partial}{\partial p_n'} \left\{ f_b(x') \left[\left(z^2 - \frac{1}{2} \right) \delta_n^f + \left(z^2 + \frac{1}{2} \right) u_n' u'^f - 2z u_n'' u'^f \right] \right\}. \end{aligned} \quad (101)$$

В формулах (100) и (101) формальный вид тензоров $J_{rfs}^{(el)}(u', u'')$ и $J_{pqf}^{(gr)}(u', u'')$ одинаков. Он совпадает с (92), где A и C определяются из (93) и (94). Только в выражении для $J_{rfs}^{(el)}(u', u'')$ в (100) под $k_{\min}$ понимается по-прежнему $1/r_D$, где r_D – радиус экранирования электромагнитных взаимодействий в плазме, а в (101) в $J_{pqf}^{(gr)}(u', u'')$ под $k_{\min}$ надо понимать выражение $1/r_{gr}$, где r_{gr} – радиус корреляции для гравитационных взаимодействий. Этот радиус существует, несмотря на отсутствие экранирования гравитационных взаимодействий. В работах [14, 16, 17] приведены соображения, обосновывающие существование радиуса корреляции для гравитационных взаимодействий и дана оценка r_{gr} в случае, когда усредненная метрика g_{ij} является метрикой Фридмана.

Сравнивая $\chi \tau_{ij}^{(gr)}$ с μ_{ij} , мы видим, что поправка к тензору энергии-импульса электромагнитного излучения, обусловленная гравитационными взаимодействиями, дает в уравнениях Эйнштейна поправки такого же порядка, что и дополнительные слагаемые, появляющиеся в левой части уравнений Эйнштейна.

5. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА–МАКСВЕЛЛА

В результате усреднения по ансамблям микроскопических уравнений мы пришли к макроскопическим уравнениям Эйнштейна и Максвелла. Эти уравнения приняли вид

$$G_{ij} + \nabla_k \varphi_{ij}^k + \mu_{ij} - \chi \tau_{ij}^{(gr)} = \chi T_{ij}, \quad (102)$$

$$\nabla_k F^{ik} + \nabla_k \varphi^{ik} + \mu^i = -\frac{4\pi}{c} J^i. \quad (103)$$

Здесь G_{ij} – тензор Эйнштейна риманова пространства с макроскопической метрикой g_{ij} , F^{ik} – тензор Максвелла, J^i – макроскопический 4-вектор плотности электрического тока, T_{ij} – макроскопический тензор энергии-импульса. Последний представляет собой сумму макроскопических тензоров энергии-импульса $T_{ij}^{(m)}$ среды, макроскопического электромагнитного поля $T_{ij}^{(el)}$ и макроскопического тензора энергии-импульса $\tau_{ij}^{(r)}$ электромагнитного излучения в плазме. (Применительно к космологической плазме мы

будем говорить в последнем случае о тензоре энергии-импульса реликтового излучения.)

Макроскопические уравнения Эйнштейна отличаются от классических уравнений Эйнштейна присутствием в левой части дополнительных слагаемых $\nabla_k \varphi_{ij}^k$, μ_{ij} и $-\chi \tau_{ij}^{(\text{gr})}$. Эти тензоры выражены в явном виде через одночастичные функции распределения по формулам (87), (88) и (101). Последний из этих членов – это умноженная на постоянную Эйнштейна и перенесенная со знаком минус из правой части уравнений Эйнштейна в левую часть поправка к макроскопическому тензору электромагнитного излучения, обусловленная гравитационными взаимодействиями.

Макроскопические уравнения Максвелла в общей теории относительности также оказались отличными от классических уравнений Максвелла из-за появления в левой части дополнительных слагаемых $\nabla_k \varphi^{ki} + \mu^i$. Эти слагаемые обусловлены как эффектами взаимодействия, так и эффектами, описываемыми общей теорией относительности. Они также выражаются в явном виде через одночастичные функции распределения по формулам (89) и (90).

Выражения (87)–(90) и (101) дают нам явный вид дополнительных слагаемых в макроскопических уравнениях Эйнштейна и Максвелла через одночастичные функции распределения каждого из сортов частиц, определенные в восьмимерном фазовом пространстве, в котором все четыре компоненты импульса считаются независимыми. В релятивистской кинетической теории чаще пользуются одночастичными функциями распределения $F_a(q^i, p_\alpha)$, определенными в семимерном фазовом пространстве, в котором независимыми являются только пространственные компоненты импульса p_α (пространственные индексы мы помечаем греческими буквами).

Связь между функциями распределения f_a и F_a задается формулой

$$n_a f_a(q^i, p_j) = F_a(q^i, p_\alpha) \delta(\sqrt{g^{lm} p_l p_m} - m_a c). \quad (104)$$

Интегрируя в соотношениях (87)–(90) и (101) по временным компонентам импульсов p'_0 и p''_0 , мы выразим все дополнительные члены в полученных уравнениях через семимерные функции распределения:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^k = & \sum_{bc} \frac{\chi^2 e_b e_c m_b^2 m_c^2 c^5}{16\pi^2} \int \frac{d^3 p'}{p'^0 \sqrt{-g}} \int \frac{d^3 p''}{p''^0 \sqrt{-g}} \left[\frac{1}{2} g^{fk} u''_i u''_j + \right. \\ & \left. + u'^k (u' u'') (\delta_j^f u''_i + \delta_i^f u''_j) \right] (u' u'') K_{f\alpha}(u', u'') \times \\ & \times \left(F_c(x'') \frac{\partial F_b(x')}{\partial p'_\alpha} - F_b(x') \frac{\partial F_c(x'')}{\partial p''_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ij} = & \sum_{bc} \frac{\chi^2 e_b e_c m_b^2 m_c^2 c^5}{16\pi^2} \int \frac{d^3 p'}{p'^0 \sqrt{-g}} \int \frac{d^3 p''}{p''^0 \sqrt{-g}} \left[\left(z^2 + \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ & \times (u''_i u''_j + u'_i u'_j) g^{qr} + \left(z^2 - \frac{1}{2} \right) g_{ij} g^{qr} - 2z(u'_i u''_j + u''_i u'_j) g^{qr} - \left(z^2 - \frac{1}{2} \right) \times \\ & \left. \times (\delta_i^q \delta_j^r + \delta_j^q \delta_i^r) \right] (z \delta_\alpha^m - u''_\alpha u'^m) J_{rqm}(u', u'') F_c(x'') \frac{\partial F_b(x')}{\partial p'_\alpha}, \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{ik} = & \sum_{bc} \frac{\chi e_b e_c^2 m_b^2 m_c^3}{2\pi} \int \frac{d^3 p'}{p'^0 \sqrt{-g}} \int \frac{d^3 p''}{p''^0 \sqrt{-g}} (u' u'') \times \\ & \times K_{f\alpha}(u', u'') [(u' u'') (u'^i g^{kf} - u'^k g^{if}) - (u''^i g^{kf} - u''^k g^{if})] \times \\ & \times \left(F_c(x'') \frac{\partial F_b(x')}{\partial p'_\alpha} - F_b(x') \frac{\partial F_c(x'')}{\partial p''_\alpha} \right), \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \mu^i = & \sum_{bc} \frac{\chi e_b^2 e_c m_b m_c^2 c^3}{4\pi} \int \frac{d^3 p'}{p'^0 \sqrt{-g}} \int \frac{d^3 p''}{p''^0 \sqrt{-g}} \times \\ & \times [(u' u'') \delta_\alpha^s - u''_\alpha u'^s] u'^k J_{ks}^i(u', u'') F_c(x'') \frac{\partial F_b(x')}{\partial p'_\alpha}, \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{(gr)} = & \sum_{bc} \frac{\chi e_b e_c m_b^2 m_c^2 c^5}{16\pi^2} \int \frac{d^3 p'}{p'^0 \sqrt{-g}} \int \frac{d^3 p''}{p''^0 \sqrt{-g}} \left[2z \delta_i^p \delta_j^q - \right. \\ & - z g_{ij} g^{pq} - (\delta_i^q u_j'' + \delta_j^q u_i'') u'^p + \\ & + g^{pq} (u'_i u_j'' + u''_i u'_j) \left. \right] J_{pqf}^{(gr)}(u', u'') F_c(x'') \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial p'_n} \left\{ F_b(x') \left[\left(z^2 - \frac{1}{2} \right) \delta_n^f + \left(z^2 + \frac{1}{2} \right) u'_n u'^f - 2z u''_n u'^f \right] \right\}. \end{aligned} \quad (109)$$

Здесь величины

$$\frac{d^3 p'}{p'^0 \sqrt{-g}} \quad \text{и} \quad \frac{d^3 p''}{p''^0 \sqrt{-g}}$$

являются инвариантными элементами объема в трехмерном импульсном пространстве частиц сорта b и c , соответственно. Греческий индекс α в формулах (105)–(108) пробегает только значения 1, 2, 3 (пространственный индекс). Производную по p'_n в (109) следует вычислять так, как будто все четыре компоненты импульса независимы. Зависимость p'_0 от p'_α учитывается после дифференцирования по p'_n .

Тензоры φ_{ij}^k , μ_{ij} , $\tau_{ij}^{(gr)}$ и μ^i обязаны подчиняться дополнительным условиям

$$g^{lj} \nabla_l (\nabla_k \varphi_{ij}^k + \mu_{ij} - \chi \tau_{ij}^{(gr)}) = 0, \quad (110)$$

$$\nabla_i \mu^i = 0, \quad (111)$$

так как дивергенции всех остальных тензоров в макроскопических уравнениях Эйнштейна и Максвелла тождественно равны нулю.

Уравнения (110), (111) накладывают некоторые ограничения на зависимость от координат и относительной скорости частиц (последняя может быть выражена через z) параметров r_D и r_{gr} , присутствующих в тензорах $J_{rfs}^{(el)}$ и $J_{pqf}^{(gr)}$, соответственно.

Макроскопические тензор энергии-импульса частиц плазмы и 4-вектор тока также могут быть выражены через семимерные функции распределения,

$$T_{ij}^{(m)} = \sum_a c \int \frac{d^3 p}{p^0 \sqrt{-g}} p_i p_j F_a(p), \quad (112)$$

$$J^i = \sum_a e_a c \int \frac{d^3 p}{p^0 \sqrt{-g}} p^i F_a(p). \quad (113)$$

К полученной выше системе уравнений нужно добавить кинетическое уравнение для F_a . Для релятивистской плазмы оно найдено в работах [11, 12].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Макроскопические уравнения гравитационного поля для релятивистской плазмы отличаются от классических уравнений Эйнштейна присутствием в левой части дополнительных слагаемых

$$Z_{ij} = \nabla_k \varphi_{ij}^k + \mu_{ij} - \chi \tau_{ij}^{(\text{gr})}.$$

Эти слагаемые пропорциональны квадрату гравитационной постоянной Эйнштейна, но пропорциональны и квадрату плотности числа частиц.

Макроскопические уравнения электродинамики также отличаются от классических уравнений Максвелла присутствием в левой части дополнительных слагаемых

$$Z^i = \nabla_k \varphi^{ki} + \mu^i.$$

Эти слагаемые пропорциональны первой степени от постоянной Эйнштейна и квадрату плотности частиц.

Следовательно, дополнительные слагаемые в макроскопических уравнениях Максвелла и Эйнштейна, неизбежно появляющиеся при учете взаимодействия частиц, могут сыграть значительную роль только в макроскопических системах с очень высокой плотностью вещества. Такие плотности возможны на ранних стадиях эволюции Вселенной, а также в плотных объектах, близких к состоянию гравитационного коллапса.

Приведем некоторые оценки возможности применимости теории на ранней стадии эволюции Вселенной.

При выводе макроскопических уравнений Эйнштейна предполагалось, что доминирующими в системе являются далекие столкновения частиц. Это справедливо, если

$$\gamma = \frac{E_p}{E_k} \ll 1,$$

где E_p – потенциальная энергия взаимодействующих частиц, E_k – их кинетическая энергия. Для системы электромагнитно взаимодействующих частиц в состоянии локального термодинамического равновесия можно положить $E_k \sim kT$, $E_p \sim e^2 n^{1/3}$. Так что условие применимости теории принимает вид

$$\gamma = \frac{e^2 n^{\frac{1}{3}}}{kT} \ll 1, \quad (114)$$

где e , n , T , k – заряд, плотность числа частиц, температура и постоянная Больцмана, соответственно.

Проверим выполнимость условия (114), например, на лептонной стадии эволюции Вселенной. Электромагнитно взаимодействующими частицами являются на этой стадии электрон-позитронные пары. Их плотность сравнима по порядку величины с плотностью реликтового излучения и может быть оценена как $\sigma T^4/kT = \sigma T^3/k$, где σ – постоянная Стефана–Больцмана. Тогда для параметра γ имеем оценку

$$\gamma = \frac{e^2 \sigma^{\frac{1}{3}}}{k^{\frac{4}{3}}} \sim 10^{-2} \ll 1.$$

Следовательно, условия применимости макроскопических уравнений Эйнштейна не нарушены.

Вместе с тем обусловленные взаимодействиями дополнительные члены в левой части уравнений Эйнштейна начинают давать на этой стадии вклад, сравнимый со вкладом от тензора энергии-импульса вещества, стоящего в правой части уравнений Эйнштейна [18].

Список литературы

- [1] *H. A. Lorentz*. Versush einer Theorie der Elektrischen und Optischen Erscheinungen in Bewegten Korpern. Leiden, 1895.
- [2] *H. A. Lorentz*. The Theory of Electrons. Leipzig: Teubner, 1916.
- [3] *Ю. Л. Климонтович*. Кинетическая теория электромагнитных процессов. М.: Наука, 1980.
- [4] *М. Ф. Широков, И. З. Фишер*. Астрон. ж. 1962. Т. 39. С. 899.
- [5] *S. R. de Groot, L. G. Suttrop*. Foundations of Electrodynamics. Amsterdam: North-Holland, 1972.
- [6] *G. F. R. Ellis*. General Relativity and Gravitation. Eds. B. Bertotti et. al. Dortrecht: Reidel, 1984.
- [7] *R. M. Zalaletdinov*. Gen. Relativ. Gravit. 1993. V. 25. P. 673.
- [8] *R. M. Zalaletdinov*. Gen. Relativ. Gravit. 1992. V. 24. P. 1015.
- [9] *А. В. Захаров*. ЖЭТФ. 1996. Т. 110. С. 3.
- [10] *Ю. Л. Климонтович*. ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 735.
- [11] *Ю. Л. Климонтович*. ЖЭТФ. 1960. Т. 38. С. 1212.
- [12] *А. В. Захаров*. ЖЭТФ. 1984. Т. 86. С. 3.
- [13] *А. В. Захаров*. ЖЭТФ. 1989. Т. 96. С. 769.
- [14] *А. В. Захаров*. ЖЭТФ. 1997. Т. 112. С. 1153.
- [15] *Н. А. Черников*. Научн. докл. высшей школы. Физ. Мат. 1959. № 1. С. 168.
- [16] *Г. С. Бисноватый-Коган, И. Г. Шухман*. ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 3.
- [17] *А. В. Захаров*. Астрон. ж. 1989. Т. 66. С. 1208.
- [18] *A. V. Zakharov*. Macroscopic Einstein equations for a system of interacting particles and their cosmological applications. Preprint gr-qc 0002087, 2000.

Поступила в редакцию 27.X.1999 г.,
после доработки 10.IV.2000 г.