Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Ведагедера, О фазовой диаграмме направленного полимера в случайной среде с p -спиновым ферромагнитным взаимодействием, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 1, 121–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6600>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:42:56

© 2011 г.

Дж. Р. Ведагедера*

О ФАЗОВОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОГО ПОЛИМЕРА В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ С p -СПИНОВЫМ ФЕРРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается модель направленного полимера с аддитивным p -спиновым ферромагнитным членом ($p > 2$) в гамильтониане. Приведено строгое доказательство для специфической свободной энергии, и получена ее фазовая диаграмма. Эта модель была предложена ранее и было дано подробное доказательство для случая $p = 2$, в то время как для случая $p > 2$ был сформулирован только основной результат. Здесь дано подробное доказательство основного результата и продемонстрировано поведение модели при $p \rightarrow \infty$ путем построения фазовой диаграммы также и в этом случае. Эти результаты являются важными для многих приложений, например для телекоммуникаций и иммунологии. Основной результат состоит в том, что на фазовой диаграмме для $p > 2$ возникает новая кривая переходов, отсутствующая для $p = 2$, между парамагнитной областью и так называемой смешанной областью, а также в том, что ферромагнитная область уменьшается при $p \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: направленный полимер, большие отклонения, фазовая диаграмма.

1. ВВЕДЕНИЕ

Направленные полимеры в случайных средах (самоизбегающие случайные блуждания в случайных средах или случайных деревьях [1]) широко применяются не только в физических науках, но также и во многих других областях (например, динамика общественного мнения и финансовый рынок [2]–[5], эволюционные динамики [6], [7], агрегация, ограниченная диффузией [8], возмущения в одномерной турбулентности [9], [10], иммунология [11]–[13] и т.д.).

Направленный полимер на разупорядоченном дереве является примером диффузии в разупорядоченных средах [14]–[16] и моделью случайной энергии (МСЭ) Дериды [17]–[21], которая состоит из z^n независимо и тождественно распределенных уровней случайной энергии дерева, которое делится на z ветвей в каждом узле этого дерева (см. рис. 1 для случая $z = 2$). Действительно, в работах [22], [19] показано, что МСЭ является предельным случаем модели Шеррингтона–Киркпатрика

*Department of Mathematics, University of Ruhuna, Matara, Sri Lanka.
E-mail: janak@maths.ruh.ac.lk

с взаимодействием r спинов при $r \rightarrow \infty$. Взаимодействие r спинов определяется гамильтонианом

$$-\mathcal{H}_{\text{МСЭ}} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r = 1}^n J_{i_1, i_2, \dots, i_r} \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_r},$$

где $J_{i_1, i_2, \dots, i_r}$ – независимые и тождественно распределенные гауссовские случайные переменные (замороженные, что характеризует обменные интегралы), $\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_r}$ – спины Изинга. Если r мало ($r \ll n$), то можно ожидать, что уровни энергии, возникшие при взаимодействии r спинов, будут сильно скоррелированными, в то время как эти корреляции станут пренебрежимо малыми при $r \rightarrow \infty$; в таком случае восстанавливается МСЭ – результирующие 2^n независимые и тождественно распределенные уровни энергии, для которых

$$-\mathcal{H}_{\text{МСЭ}} = \sum_{i=1}^n V_i. \quad (1)$$

Основным объектом, интересующим нас в этой статье, является направленный полимер, который определяется как самоизбегающее случайное блуждание вдоль дерева, которое разветвляется на $z = 2$ направлений случайным образом в каждом узле и имеет базовый гамильтониан, описываемый так же, как и гамильтониан МСЭ (1).

Рассмотрим пример, изображенный на рис. 1, где мы находим 2^n независимых и тождественно распределенных энергетических уровня, каждый из которых соответствует одному из 2^n блужданий (или путей по нашему определению; см. ниже), заканчивающемуся после n шагов, вдоль дерева, показанного на рис. 1б. Такое блуждание может быть получено, например, при рассмотрении системы, состоящей из n локализованных спинов Изинга $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Можно определить энергию каждого блуждания как сумму энергий, соответствующих каждой ветви, которую пересекает это блуждание. Мы можем определить гамильтониан для этого случая в виде

$$-\mathcal{H}_1 := \sum_{j=1}^n V_{j,(\sigma)^j} \quad (2)$$

для данной конфигурации спинов, например $(\sigma)^j$, и для величин V , имеющих некоторое предыдущее распределение вероятности, зависящее от одного параметра, скажем γ . Кроме того, каждая p -группа этих спинов могла бы оказывать в системе ферромагнитное воздействие (вследствие воздействия какого-то внешнего поля или из-за взаимодействия p -групп; см. рис. 1), которое мы описываем с помощью гамильтониана

$$-\mathcal{H}_2 := \frac{1}{n^{p-1}} \sum_{k=1}^M h_k \left| \sum_{j=1}^n \sigma_j^{(k)} \right|^p, \quad p > 1, \quad (3)$$

который можно упростить следующим образом:

$$-\mathcal{H}_2 = \frac{1}{n^{p-1}} (h_1 + h_2 + \dots + h_M) \left| \sum_{j=1}^n \sigma_j \right|^p = \frac{1}{n^{p-1}} \lambda \left| \sum_{j=1}^n \sigma_j \right|^p,$$

Рис. 1. Образцовый случай возникновения 2^n возможных энергетических уровней: спины Изинга $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ (здесь $n = 5$) оказывают ферромагнитное воздействие на систему со стороны p -спиновой группы ($p = 3$); это определяется с помощью $\sum_{l=1}^{\binom{5}{3}} h_l \sum_{i < j < k; i, j, k=1}^5 \sigma_i \sigma_j \sigma_k + (\sum_{i=1}^5 \sigma_i)^3 -$ (члены низкого порядка) (а). Структура энергетических уровней в виде дерева: $k_{j+1} = 2k_j - (1 - \sigma_{j+1})/2$, $k_j = 1, 2, \dots, n$ и $\sigma_i = \pm 1$ в случае $n = 3$; суммарная энергия системы состоит из энергии каждой конфигурации спинов и энергии взаимодействия p -групп, показаны только три первых уровня этого пути (б).

так как конфигурации $\sigma_j^{(k)}$ являются неразличимыми. Здесь величина $\lambda := \sum_{k=1}^M h_k$ может быть либо параметром, либо замороженной случайной переменной, а $M = \binom{N}{p}$. Полный гамильтониан для этой системы записывается в виде $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Действительно, основываясь на приведенном выше примере, мы определим полную модель в разделе 2.

Модель, которую мы рассматриваем здесь, решалась для специфической свободной энергии в работе [23], где приведено доказательство только для случая $p = 2$ с использованием аргумента, связанного с большим уклоном уровня I для мартингал-процесса (как и в работе [24]), определенного в виде

$$M_n(\beta, t) = \sum_{\{\sigma_j\}_{j=1}^n} \exp \left\{ \beta \sum_{j=1}^n V_{j,(\sigma)} + t \sum_{j=1}^n \sigma_j \right\} / \text{ch}(t) \mathbb{E}\{e^{\beta V}\},$$

где β и t являются параметрами.

Действительно, в работе [23] утверждалось, что фазовая диаграмма для случая $p > 2$ может быть определена так же, как и в случае $p = 2$, а подробности можно найти в работе [25]. Однако эти подробности не опубликованы до сих пор, и, так как

модель для случая $p > 2$ (как отмечено выше и в разделе 6) может использоваться в других контекстах, результаты мы постараемся представить максимально подробно.

Статья организована следующим образом.

В разделе 2 мы еще раз сформулируем определение модели, терминологию и главные результаты, доказанные в работе [23]. В разделе 3 мы выводим функции распределения (вариационная задача). В разделе 4 мы приводим основной результат этой статьи – теорему 2, перед которой даем ряд лемм и предложений, необходимых для того, чтобы обосновать фазовую диаграмму (см. ниже рис. 2 и рис. 6). И, наконец, в разделе 5 мы получаем фазовую диаграмму модели в случае $p \rightarrow \infty$.

2. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для полноты изложения мы повторим некоторые определения и результаты работы [23], в которой отсутствуют подробности доказательства основной теоремы (для случая $p > 2$).

Рассмотрим *дерево Кэли* (рис. 1) с *координационным числом* 3, т. е. каждый узел этого дерева соединен с другими двумя на следующем уровне. Обозначим связи дерева с помощью (j, k) , где $j, k \in \mathbb{N}$, и j соответствует поколению, а $k \in \{1, \dots, 2^j\}$ – связям слева направо внутри j -го поколения. Каждой связи дерева мы припишем независимые, тождественно распределенные переменные $V_{j,k}$, которые имеют известное распределение.

Путь длиной n , начинающийся на вершине дерева, определяется как конечная последовательность

$$\{(j, k_j); 1 \leq j \leq n\}, \quad (4)$$

удовлетворяющая соотношению

$$k_{j+1} = 2k_j - \frac{1}{2}(1 - \sigma_{j+1}), \quad (5)$$

где $\sigma_j \in \{-1, 1\}$ соответствуют изъятию левой или правой ветви из j -го поколения (см. рис. 1). Мы обозначим последовательность спинов Изинга $(\sigma_k)_{k=1}^j$ через $(\sigma)^j$. Тогда путь будет полностью определен с помощью $(\sigma)^n$.

Наша главная задача заключается в получении замкнутого выражения для специфической свободной энергии и фазовой диаграммы для модели.

Мы будем определять наблюдаемые (или параметры порядка) для этой модели на *пространстве конфигураций* $X^n := \{\sigma: \Lambda \rightarrow X\}$, где X – компактное метрическое пространство, а $\Lambda = \{1, \dots, n\}$, где n – любое неотрицательное целое число. В этом частном случае мы положим $X = \{-1, 1\}$. Определим *распределение одного спина* $\mu(\{\sigma\}) = 1/2$, $\sigma = \pm 1$, а меру n -кратного произведения μ обозначим как $\mathbb{F}_n^\mu$. Тогда наблюдаемые $V_n: X^n \rightarrow \mathbb{R}$, $m_n: X^n \rightarrow \mathbb{R}$ имеют вид

$$V_n(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_{j,(\sigma)^j}, \quad m_n(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j. \quad (6)$$

Гамильтониан определяется в виде

$$-\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n V_{j,(\sigma)^j} + \frac{\lambda}{n^{p-1}} \left| \sum_{j=1}^n \sigma_j \right|^p, \quad (7)$$

где $p \geq 2$ – произвольный параметр, $\lambda > 0$ – константа связи.

Таким образом, функция разбиения $\mathcal{Z}_n$ имеет следующее разложение:

$$\mathcal{Z}_n = \sum_{\{\sigma_j\}_{j=1}^n} e^{-\beta \mathcal{H}} = \sum_{\{\sigma_j\}_{j=1}^n} \exp \left\{ \beta n \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_{j,(\sigma)}^j + \lambda \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j \right)^p \right] \right\}. \quad (8)$$

Специфическая свободная энергия системы определяется выражением

$$-\beta f(\beta, \lambda, \gamma) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathcal{Z}_n(\beta). \quad (9)$$

Заметим, что поскольку $V_{j(\sigma)}^j$ зависит от всех предыдущих σ_k , $k \leq j$, нам необходимо использовать мартингалные свойства [26], связанные с $\mathcal{Z}_n$, чтобы вычислить сумму по $\{\sigma_j\}$ в (8).

Теперь мы можем записать свободную энергию (9) в виде

$$-\beta f(\beta, \lambda, \gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathcal{Z}_n(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \int_{X_n} e^{-\beta \mathcal{H}} \mathbb{F}_n^\mu(d\sigma) + \ln 2. \quad (10)$$

Преобразуем интеграл (10) в интеграл по мере образа $\mathbb{Q}_n$ меры $\mathbb{F}_n$, индуцированной отображением $W_n = (V_n, m_n)$ и определенной в виде

$$\mathbb{Q}_n(A) = \mathbb{F}_n^\mu(W_n^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \quad (11)$$

следующим образом:

$$-\beta f(\beta, \lambda, \gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\mathbb{R}^2} e^{n\beta(v + \lambda m^p)} \mathbb{Q}_n(dv, dm) + \ln 2, \quad (12)$$

где $(v, m) \in A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Предел в (12) можно вычислить с помощью теоремы Варадхана [27]:

$$-\beta f(\beta, \lambda, \gamma) = \sup_{v, m} \{\beta(v + \lambda m^p) - I(v, m)\} + \ln 2, \quad (13)$$

где

$$I(v, m) = \sup_{t_1, t_2} \{t_1 v + t_2 m - C(t_1, t_2)\}$$

называется функцией распределения, а $C(t_1, t_2)$ — кумулянтная производящая функция, определяемая в виде

$$C(t_1, t_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \int e^{t_1 v + t_2 m} \mathbb{Q}_n(dv, dm). \quad (14)$$

Таким образом, основная задача заключается в вычислении кумулянтной производящей функции.

Действительно, из приведенного выше изложения результатов работы [23] нетрудно видеть, что $t_1 \equiv \beta$. Положив

$$I^\beta(m) := \sup_t \{tm - C(\beta, t)\}, \quad (15)$$

можно переписать выражение для свободной энергии (13) в виде

$$-\beta f(\beta, \lambda) = \ln 2 + \sup_m \{\lambda \beta m^p - I^\beta(m)\}, \quad (16)$$

при этом используется выпуклость кумулянтной производящей функции.

В работе [23] была доказана следующая теорема (гарантирующая существование предела в (14)), которая основывается на том факте, что

$$M_n(\beta, m) = \sum_{\{\sigma_j\}_{j=1}^n} \exp \left\{ \beta \sum_{j=1}^n V_{j,(\sigma)} + m \sum_{j=1}^n \sigma_j \right\} / \text{ch}(m) \mathbb{E}\{e^{\beta V}\}$$

является мартингалом относительно возрастающего семейства случайных переменных $\nu^n = \{V_{j,(\sigma)}; 1 \leq k \leq 2^j, 1 \leq j\}$.

Определим функции

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(t) &:= \{2\gamma[\ln(2 \text{ch } t) - t \text{th } t]\}^{1/2}, & T(t) &:= \bar{\beta}^{-1}, & \beta_0 &:= \bar{\beta}(0) = \sqrt{2\gamma \ln 2}, \\ \Gamma(t) &:= \{(\beta, t) \in \mathbb{R}^2: |t| < T(\beta)\}. \end{aligned} \quad (17)$$

ТЕОРЕМА 1 [23]. *Предположим, что V подчиняется распределению Гаусса с нулевым средним и дисперсией $1/\gamma$. Тогда*

$$C(\beta, t) = \begin{cases} C_1(\beta, t) := \ln(2 \text{ch } t) + \beta^2/(2\gamma) - \ln 2, & \beta \leq \bar{\beta}(t), \\ C_2(\beta, t) := (\beta/\bar{\beta})[\ln(2 \text{ch } \bar{t}) + \bar{\beta}^2/(2\gamma)] - \ln 2, & \beta \geq \bar{\beta}(t), \end{cases} \quad (18)$$

где $\bar{t}$ является решением уравнения

$$\bar{t} = \frac{\bar{\beta}t}{\beta}. \quad (19)$$

3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В работе [23] было дано краткое изложение доказательства следующего результата. Приведем его здесь подробно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $m(\beta) := \text{th}[T(\beta)]$,

$$I_1^\beta(m) = \sup_{0 \leq t \leq T(\beta)} \{tm - C_1(\beta, t)\} \quad (20)$$

и

$$I_2^\beta(m) = \sup_{T(\beta) \leq t} \{tm - C_2(\beta, t)\}. \quad (21)$$

Тогда

$$I^\beta(m) = \begin{cases} I_1^\beta(m) = I_0(m) - \beta^2/(2\gamma), & 0 \leq |m| \leq m(\beta), \\ I_2^\beta(m) = -\beta\bar{\beta}/\gamma + \ln 2, & m(\beta) < |m| < 1, \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что поскольку $I^\beta(m) = \max\{I_1^\beta, I_2^\beta\}$, то нужно определить, какая из величин I_1^β и I_2^β доминирует и когда это произойдет. Сначала предположим, что $t \leq T(\beta)$ и $\beta < \beta_0$. Тогда с помощью условия максимизации для (20) мы получаем

$$m = \frac{\partial}{\partial t} C_1(\beta, t) = \text{th } t. \quad (23)$$

Отсюда следует, что $m \leq m(\beta)$.

Если $\tilde{t}$ – максимайзер функции (20), то мы имеем $\partial I_1 / \partial m = \tilde{t}$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} I_1^\beta(m) &= m \operatorname{th}^{-1} m - C_1(\beta, \operatorname{th}^{-1} m) = \\ &= m \operatorname{th}^{-1} m - \ln[2 \operatorname{ch}(\operatorname{th}^{-1} m)] - \frac{\beta^2}{2\gamma} + \ln 2 = I_0(m) - \frac{\beta^2}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (24)$$

Это равняется $I^\beta(m)$, если $(\beta, t) \in \Gamma$, т.е. $\beta \leq \bar{\beta}(t)$, или $T(\beta) \geq t$, так как $\bar{\beta}$ – убывающая функция. Мы покажем, что это действительно происходит в настоящем случае, т.е. при $m \leq m(\beta)$. Сначала вычислим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_2}{\partial t} \right)_\beta &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\beta}{\bar{\beta}(\beta, t)} F[\bar{\beta}(\beta, t), \bar{t}(\beta, t)] - \ln 2 \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\beta}{\bar{\beta}} \ln \left[2 \operatorname{ch} \left(\frac{t \bar{\beta}}{\beta} \right) \right] + \frac{\beta \bar{\beta}}{2\gamma} - \ln 2 \right] = \\ &= -\frac{\beta}{\bar{\beta}^2} \ln \left[2 \operatorname{ch} \left(\frac{t \bar{\beta}}{\beta} \right) \right] \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} + \frac{\beta}{\bar{\beta}} \left[\operatorname{th} \left(\frac{t \bar{\beta}}{\beta} \right) \left(\frac{\bar{\beta}}{\beta} + \frac{t}{\beta} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} \right) \right] + \frac{\beta}{2\gamma} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} = \\ &= \frac{\beta}{\bar{\beta}^2} \left\{ -\ln \left[2 \operatorname{ch} \left(\frac{t \bar{\beta}}{\beta} \right) \right] + \frac{t \bar{\beta}}{\beta} \operatorname{th} \left(\frac{t \bar{\beta}}{\beta} \right) + \frac{\bar{\beta}^2}{2\gamma} \right\} \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} + \operatorname{th} \left(\frac{t \bar{\beta}}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Но мы также имеем $t \bar{\beta} / \beta = \bar{t}$, следовательно,

$$\left(\frac{\partial C_2}{\partial t} \right)_\beta = \operatorname{th} \bar{t}. \quad (26)$$

Учитывая $C_2(\beta, t)$, мы имеем $\bar{\beta} \leq \beta$, и это дает $T(\bar{\beta}) \geq T(\beta)$. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial C_2}{\partial t} \right)_\beta = \operatorname{th}[\bar{t}(\beta, t)] = m(\bar{\beta}) \geq m(\beta) \geq m, \quad (27)$$

так что $m - (\partial C_2 / \partial t)_\beta < 0$. Это показывает, что максимум функции I_2^β достигается при $t = T(\beta)$, т.е. следует рассматривать I_1^β в этом случае. Следовательно, для $m \leq m(\beta)$ мы имеем $I^\beta = I_1^\beta$.

Далее, предположим, что $\beta > \beta_0$ или $m \geq m(\beta)$. Зная m и β , мы оцениваем максимайзер функции (21): $t^* = \bar{t} \beta / \bar{\beta}$, где $\bar{\beta}$ находится следующим образом. Согласно (26) $m = \operatorname{th} \bar{t}$, и мы имеем

$$\begin{aligned} \bar{\beta}^2 &= 2\gamma [\ln[2 \operatorname{ch} \bar{t}] - \bar{t} \operatorname{th} \bar{t}] = \\ &= 2\gamma [\ln[\operatorname{ch}(\operatorname{th}^{-1} m)] - m \operatorname{th}^{-1} m + \ln 2] = 2\gamma [\ln 2 - I_0(m)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Величина $\bar{t}$ неявно дается решением уравнения (28), как только $\bar{\beta}$ найдено для данного m . Итак, мы нашли максимайзер t^* правой части соотношения (21), теперь вычислим $I_2^\beta(m)$, используя выражение (28) для $\bar{\beta}^2$:

$$\begin{aligned} I_2^\beta(m) &= t^* m - C_2(\beta, t^*) = \frac{\beta}{\bar{\beta}} \bar{t} m - \frac{\beta}{\bar{\beta}} \ln[2 \operatorname{ch} \bar{t}] - \frac{\beta \bar{\beta}}{2\gamma} + \ln 2 = \\ &= \frac{\beta}{2\gamma \bar{\beta}} 2\gamma (I_0(m) - \ln 2) - \frac{\beta \bar{\beta}}{2\gamma} + \ln 2 = -\frac{\beta \bar{\beta}}{\gamma} + \ln 2. \end{aligned} \quad (29)$$

Рис. 2. Фазовая диаграмма. В парамагнитной области (P) $m = 0$, но свободная энергия зависит от β ; а в ферромагнитной области (F) $m(\beta, \lambda) \neq 0$, в то время как в фазе спинового стекла (SG) $m = 0$ и свободная энергия остается постоянной. В смешанной фазе (M) $m \neq 0$ и свободная энергия зависит только от λ . Магнетизация m прерывается в направлении поперек кривых C_1 , C и $\lambda = \lambda_c$, в то время как она является непрерывной в направлении поперек кривой C_2 . Мы ожидаем, что упорядоченная ферромагнитная фаза уменьшится в высокотемпературном режиме в случае больших p , что доказывается в разделе 5.

Это равенство справедливо всякий раз, когда $\beta \geq \bar{\beta}(t)$, или, что эквивалентно, когда $m \geq m(\beta)$.

Покажем, что в этом случае, т. е. когда $m \geq m(\beta)$, ни одно значение t не может быть максимайзером величины I_1^β : неравенство

$$m - \frac{\partial C_1}{\partial t} = m - \text{th } t \geq 0, \quad (30)$$

вместе с $C_1 t \leq T(\beta)$ влечет $\text{th } t \leq m(\beta)$. Следовательно, если $m \geq m(\beta)$, то $I^\beta = I_2^\beta$. И также если $m \geq 1$, то ясно, что $I^\beta(m) = \infty$.

4. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ И ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА ($p > 2$)

В этом разделе мы представим основные результаты настоящей статьи, которые сформулированы и доказаны в теореме 2.

Сначала определим кривые $\lambda = C_1(\beta)$, $\lambda = C_2(\beta)$:

$$C_1(\beta) = \frac{1}{2\beta}, \quad C_2(\beta) = \frac{T(\beta)}{2\beta m(\beta)} \quad (31)$$

Рис. 3. Решения уравнения (36): $\text{th}[p\beta\lambda m^{p-1}]$ при $\lambda > \tilde{\lambda}$, $\lambda = \tilde{\lambda}$ и $\lambda < \tilde{\lambda}$ (а); $\lambda = C_1(\beta)$ определяет критическое значение (б).

(см. рис. 2), где $m(\beta) = \text{th}[T(\beta)]$. Также определим

$$G_1(m) = \left[1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right)m\right] \ln(1+m) + \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)m\right] \ln(1-m) \quad (32)$$

и

$$g_i(\beta, \lambda; m) = \beta\lambda m^p - I_i^\beta(m), \quad i = 1, 2. \quad (33)$$

ЛЕММА 1. Пусть $\beta < \beta_0$, и мы определим

$$F_1(\beta, \lambda) = \sup_{0 \leq m \leq m(\beta)} \{\beta\lambda m^p - I_1^\beta(m)\}, \quad (34)$$

где $m(\beta) = \text{th}[T(\beta)]$. Тогда происходят скачки магнетизации от 0 до m_p поперек кривой $\lambda = C_1(\beta)$, где m_p не зависит от β , λ и дается решением уравнения $G_1(m) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что супремум выражения (34) достигается, если m удовлетворяет уравнению

$$m = \text{th}[p\beta\lambda m^{p-1}], \quad (35)$$

в случае решения $\bar{m} \leq m(\beta)$. Действительно, при фиксированном β имеется критическое значение $\tilde{\lambda}(\beta)$, ниже которого уравнение (35) имеет только нулевое решение. Тогда при $\lambda \leq \tilde{\lambda}(\beta)$ мы имеем $\partial g_1 / \partial m \leq 0$, откуда получаем

$$F_1(\beta, \lambda) = -I_1^\beta(0).$$

При $\lambda > \tilde{\lambda}(\beta)$ уравнение (36) имеет ненулевые решения $\tilde{m}_1(\beta, \lambda)$ и $\bar{m}_1(\beta, \lambda) > \tilde{m}_1(\beta, \lambda)$ (см. рис. 3а).

Ясно, что функция g_1 имеет локальный минимум при $\tilde{m}_1$ и локальный максимум при $\bar{m}_1$ (см. рис. 3а, 3б), однако неверно считать, что при этом $\tilde{\lambda}$ будет критическим значением λ . Действительно,

$$g_1(\beta, \tilde{\lambda}; \bar{m}_1) < g_1(\beta, \tilde{\lambda}; 0),$$

Рис. 4. Кривая $G_1(m) = 0$ имеет единственное решение на отрезке $(0, 1)$.

из-за непрерывности так и будет, если λ возрастает не сильно. Магнетизация станет ненулевой, когда λ достигнет значения, при котором

$$g_1(\beta, \lambda; \bar{m}_1) = g_1(\beta, \lambda; 0) = -I_1^\beta(0). \quad (36)$$

Это определяет критическую линию $\lambda = C_1(\beta)$ (см. рис. 36). Поперек линии $\lambda = C_1(\beta)$ магнетизация изменяется скачком от нуля до значения m_p , задаваемого положительным решением уравнения (35) таким, что

$$-I_1^\beta(0) = \beta\lambda m_p^p - I_1^\beta(m_p) \Rightarrow \beta\lambda m_p^p = I_0(m_p). \quad (37)$$

В совокупности с (36) это дает $G_1(m_p) = 0$.

ЛЕММА 2. *Для любого $p > 2$ уравнение $G_1(m) = 0$ имеет единственное решение $m_p \in (0, 1)$. Более того, при больших p справедливо $m_p \sim 1 - 2^{-(2p-1)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем $G_1(0) = 0$, $G_1(1) = -\infty$ и

$$G_1'(m) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \ln \frac{1+m}{1-m} + \frac{1 + (1-1/p)m}{1+m} - \frac{1 - (1-1/p)m}{1-m},$$

$$G_1'(0) = 0, \quad G_1'(1) = -\infty.$$

Также мы находим

$$G_1''(m) = \frac{2}{1-m^2} \left[1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \frac{1+m^2}{1-m^2}\right], \quad G_1''(0) = 2\left(1 - \frac{2}{p}\right) > 0.$$

Так как $(1+m^2)/(1-m^2)$ увеличивается от 1 до $+\infty$ при возрастании m от 0 до 1, то имеется единственное значение $m_1 > 0$ такое, что $G_1''(m_1) = 0$, и $G_1''(m) > 0$ при $m < m_1$ и $G_1''(m) < 0$ при $m > m_1$. Следовательно, функция $G_1'(m)$ является возрастающей от $m = 0$ до $m = m_1$ и убывающей от $m = m_1$ до $m = 1$.

Так как $G'_1(0) = 0$, $G'_1(m_1) > 0$ и $G'_1(1) = -\infty$, то имеется единственное значение $m_2 > m_1$ такое, что $G'_1(m_2) = 0$. Таким образом, функция G_1 является возрастающей от $m = 0$ до $m = m_2$ и убывающей при $m > m_2$. Тогда имеется единственное значение $m_p > m_2$ такое, что $G_1(m_p) = 0$. Форма кривой G_1 показана на рис. 4. Чтобы завершить доказательство леммы, мы положим $m = 1 - \delta$. Ясно, что при больших p

$$\begin{aligned} \ln \delta &= -\frac{1 + (1 - 1/p)m}{1 - (1 - 1/p)m} \ln(1 + m) \sim -\frac{2 - 1/p}{1/p} \ln 2 = \\ &= -(2p - 1) \ln 2 \Rightarrow \delta \sim 2^{-(2p-1)}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Выберем $\tilde{\lambda}(\beta)$ как в лемме 1, и пусть $m_0 > 0$ будет таким значением, при котором $m_0 = \text{th}[\beta \lambda p m_0^{p-1}]$ (см. рис. 3а), а значение $\beta_{\max}$ будет таким, что $m(\beta_{\max}) = m_0$.

При $\beta < \beta_{\max}$ справедливо $m(\beta) > m_0$, тогда имеется единственная кривая $\lambda = C_2(\beta)$, для которой $\bar{m}_1(\beta, \lambda) = m(\beta)$, и только эта часть кривой $\lambda = C_2(\beta)$ является существенной в фазовой диаграмме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если подставить m_p в уравнение (35), получим

$$C_1(\beta) = \frac{\text{th}^{-1} m_p}{p \beta m_p^{p-1}}. \quad (38)$$

При $\lambda > C_1(\beta)$ максимум достигается при $m = \bar{m}_1 \geq m_p$, если $\bar{m}_1 \leq m(\beta)$. Таким образом, мы получаем еще одно критическое значение λ , выше которого $m = m(\beta)$. Эта кривая дается уравнением $\lambda = C_2(\beta)$, где

$$C_2(\beta) = \frac{\text{th}^{-1}(m(\beta))}{p \beta (m(\beta))^{p-1}}. \quad (39)$$

Заметим, что $m(\beta) \rightarrow 1$ при $\beta \rightarrow 0$, так что для малых, но возрастающих β , мы имеем $C_2(\beta) > C_1(\beta)$, и $m(\beta)$ уменьшается до тех пор, пока не достигнет m_p .

Определим β_1 :

$$m(\beta_1) = m_p. \quad (40)$$

Тогда $C_1(\beta_1) = C_2(\beta_1)$. Имеется минимальное значение $\lambda_{\min}$, ниже которого уравнение

$$m = m(\beta), \quad m = \bar{m}_1(\beta, \lambda) \quad (41)$$

не имеет решения. В случае $\lambda < \tilde{\lambda}(\beta_{\max}) = \lambda_{\min}$ мы должны увеличить β , чтобы уравнение (35) имело решение, но тогда функция $m(\beta)$ становится меньше m_0 и недействительна. Так как $\beta < \beta_{\max}$, $m(\beta) > m_0$, то имеется единственное значение $\lambda = C_2(\beta)$, при котором $\bar{m}_1(\beta, \lambda) = m(\beta)$; отсюда следует, что только эта часть кривой $\lambda = C_2(\beta)$ является существенной.

ЛЕММА 4. Для $\beta > \beta_1$ справедливо $\bar{m}_1(\beta, \lambda) > m(\beta)$ и существует критическая кривая на фазовой диаграмме, задаваемая уравнением

$$C_3(\beta) = \frac{\beta_0^2 - \beta^2}{2\gamma \beta m^p(\beta)}. \quad (42)$$

Более того, $C_3(\beta) \rightarrow +\infty$ при $\beta \rightarrow \beta_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\tilde{\lambda}(\beta) = c_0/\beta$ (для некоторой постоянной c_0), так как $\bar{m}_1$ зависит только от $\beta\lambda$. При $\beta\lambda < c_0$ уравнение (35) не имеет решений, в то время как при $c > c_0$ гипербола $\beta\lambda = c$ пересекает кривую $\lambda = \mathcal{C}_2(\beta)$ в двух точках: одна из них с $\beta < \beta_{\max}$ соответствует $m(\beta) = \bar{m}_1(\beta, \lambda)$, и другая с $\beta > \beta_{\max} - m(\beta) = \tilde{m}_1(\beta, \lambda)$.

Отсюда следует, что для $\beta > \beta_1$ имеет место $\bar{m}_1(\beta, \lambda) > m(\beta)$. Итак, мы должны сравнить $-I_1^\beta(0)$ и $\beta\lambda m^p(\beta) - I_1^\beta(m(\beta))$. Это определяет критическую линию $\mathcal{C}_3(\beta)$:

$$\lambda = \frac{I_1^\beta(m(\beta)) - I_1^\beta(0)}{\beta m^p(\beta)} = \frac{I_0(m(\beta))}{\beta m^p(\beta)} \equiv \mathcal{C}_3(\beta). \quad (43)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} I_0(m(\beta)) &= \frac{1}{2} \ln(1 - m^2(\beta)) + m(\beta) \operatorname{th}^{-1} m(\beta) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\operatorname{ch}^2(T(\beta))} + T(\beta) \operatorname{th}[T(\beta)] = \\ &= -\ln[\operatorname{ch}(T(\beta))] + T(\beta) \operatorname{th}[T(\beta)] = \\ &= -\frac{\bar{\beta}(T(\beta))^2}{2\gamma} + \ln 2 = \frac{\beta_0^2 - \beta^2}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (44)$$

Итак, мы имеем $\mathcal{C}_3(\beta) = (\beta_0^2 - \beta^2)/2\gamma\beta m^p(\beta)$, что и требовалось доказать. При $\beta \rightarrow \beta_0$ получаем $m(\beta) \rightarrow 0$, а более точно

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(t) &\sim \left\{ 2\gamma \left(\ln 2 - \frac{t^2}{2} \right) \right\}^{1/2} \sim \beta_0 \left(1 - \frac{t^2}{4 \ln 2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow T(\beta) &\sim \left\{ \frac{4 \ln 2}{\beta_0} (\beta_0 - \beta) \right\}^{1/2} \Rightarrow m(\beta) \sim \left\{ \frac{4 \ln 2}{\beta_0} (\beta_0 - \beta) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Отсюда получаем, что $\mathcal{C}_3(\beta) \rightarrow +\infty$ при $\beta \rightarrow \beta_0$.

Теперь можно сформулировать следующую лемму.

ЛЕММА 5. Пусть β_1 – точка пересечения кривых $\mathcal{C}_1(\beta)$ и $\mathcal{C}_2(\beta)$. Если $0 < \beta \leq \beta_1$, то

$$F_1(\beta, \lambda) = \begin{cases} -I_1^\beta(0), & \lambda \leq \mathcal{C}_1(\beta), \\ \beta\lambda \bar{m}_1^p - I_1^\beta(\bar{m}_1), & \mathcal{C}_1(\beta) \leq \lambda \leq \mathcal{C}_2(\beta), \\ \beta\lambda m^p(\beta) - I_1^\beta(m(\beta)), & \lambda > \mathcal{C}_2(\beta). \end{cases} \quad (46)$$

Если $\beta_1 < \beta < \beta_0$, то

$$F_1(\beta, \lambda) = \begin{cases} -I_1^\beta(0), & \lambda \leq \mathcal{C}_3(\beta), \\ \beta\lambda m^p(\beta) - I_1^\beta(m(\beta)), & \lambda > \mathcal{C}_3(\beta). \end{cases} \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Остается только доказать, что при $\lambda > \mathcal{C}_2(\beta)$ мы имеем $F_1(\beta, \lambda) = \beta\lambda m^p(\beta) - I_1^\beta(m(\beta))$. Это следует из того факта, что $\mathcal{C}_3(\beta) < \mathcal{C}_2(\beta)$ при $\beta < \beta_1$. Но это эквивалентно $G_1(m(\beta)) < 0$, и согласно доказательству леммы 2 это эквивалентно $m(\beta) > m_p$, т. е. $\beta < \beta_1$.

ЛЕММА 6. *Определим*

$$F_2(\beta, \lambda) := \sup_{m \geq m(\beta)} \{\beta \lambda m^p - I_2^\beta(m)\}. \quad (48)$$

Тогда существует такое значение $\lambda_2 > 0$, что для всех $\lambda < \lambda_2$ функция F_2 имеет глобальный максимайзер, скажем $\bar{m}_2(\lambda)$, при достаточно больших λ . Функция F_2 имеет нуль в качестве максимайзера при $\lambda \geq \lambda_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие максимизации функции (49) имеет вид

$$\begin{aligned} p\beta\lambda m^{p-1} &= \frac{d}{dm} I_2^\beta(m) = \frac{d}{dm} \left[\ln 2 - \frac{\beta}{\gamma} [\beta_0^2 - 2\gamma I_0(m)]^{1/2} \right] = \\ &= \frac{\beta}{\bar{\beta}} \operatorname{th}^{-1} m \Rightarrow m = \operatorname{th}[p\bar{\beta}(m)\lambda m^{p-1}]. \end{aligned} \quad (49)$$

Теперь докажем, что $\operatorname{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}]$ имеет в точности одну поворотную точку на отрезке $(0, 1)$. Находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dm} \operatorname{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}] &= \operatorname{sch}^2(p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}) [p\lambda(p-1)m^{p-2}\bar{\beta} + p\lambda m^{p-1}\bar{\beta}'] = \\ &= p\lambda m^{p-2} \operatorname{sch}^2(p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}) [(p-1)\bar{\beta} + m\bar{\beta}'] \end{aligned} \quad (50)$$

и

$$\bar{\beta}' = -\frac{\gamma \operatorname{th}^{-1} m}{\bar{\beta}}. \quad (51)$$

Подставляя приведенное выше выражение в (50), мы получим $d[\operatorname{th}(p\bar{\beta}\lambda m^{p-1})]/dm = 0$ тогда и только тогда, когда

$$(p-1)\bar{\beta} = \frac{m\gamma \operatorname{th}^{-1} m}{\bar{\beta}},$$

т. е.

$$2(p-1)I_0(m) + m \operatorname{th}^{-1} m - 2(p-1) \ln 2 = 0. \quad (52)$$

Так как обе функции $I_0(m)$ и $m \operatorname{th}^{-1} m$ являются выпуклыми и возрастающими и обе равны нулю при $m = 0$, уравнение (52) всегда имеет в точности одно ненулевое решение, которое показывает, что функция $\operatorname{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}]$ имеет в точности одну поворотную точку на отрезке $[0, 1]$. Так как функция $\operatorname{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}] = 0$ при $m = 0, 1$ и является неотрицательной величиной для $m \in [0, 1]$, ясно, что приведенный выше экстремум является максимумом. Изучая кривые $y = m^{p-1}$ и $y = \bar{\beta}(m) = \{\beta_0^2 - 2\gamma I_0(m)\}^{1/2}$, мы видим, что функция $\operatorname{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}]$ не является ни выпуклой, ни вогнутой. В действительности она является выпуклой на $(0, m_1)$ и вогнутой на $(m_1, 1)$ для некоторых $m_1 \in (0, 1)$; так что уравнение $m = \operatorname{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}]$ должно иметь не более двух ненулевых решений (см. рис. 5). Пусть $\tilde{m}_2, \bar{m}_2 \in (0, 1)$, $\tilde{m}_2 < \bar{m}_2$, будут этими двумя решениями. Из формы кривой $y = \operatorname{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}]$ следует

$$\begin{aligned} m &\geq \operatorname{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}], & \text{если } m \leq \tilde{m}_2 \text{ или } m \geq \bar{m}_2, \\ m &\leq \operatorname{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}], & \text{если } \tilde{m}_2 \leq m \leq \bar{m}_2. \end{aligned} \quad (53)$$

Рис. 5. Функция $m = \text{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}]$ имеет два ненулевых решения $\tilde{m}_2, \bar{m}_2$; $\tilde{m}_2$ уменьшается и $\bar{m}_2$ увеличивается при увеличении λ .

Так как функция $\text{th}[p\bar{\beta}\lambda m^{p-1}]$ является возрастающей по λ , то ясно, что $\tilde{m}_2$ уменьшается, а $\bar{m}_2$ увеличивается с увеличением λ .

Как и в случае уравнения (35), существует такое значение $\lambda_2 > 0$, что уравнение (49) имеет только нулевое решение, если $\lambda \geq \lambda_2$ (однако λ_2 не зависит от β). Для $\lambda < \lambda_2$ существуют два решения, а именно $\tilde{m}_2(\lambda)$ и $\bar{m}_2(\lambda)$. Функция $g_2(\beta, \lambda; m)$ имеет локальный максимум при наибольшем из них, т.е. при $\bar{m}_2(\lambda)$. И опять он может быть только глобальным максимумом, если λ достаточно велико, т.е.

$$\beta\lambda\bar{m}_2^p(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}_2(\lambda)) \geq \beta\lambda m^p(\beta) - I_2^\beta(m(\beta)). \quad (54)$$

Итак, мы можем написать $\beta_2 = \bar{\beta}(\lambda_2)$, т.е. $\lambda_2 = m(\beta_2)$.

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 7. Для $\beta \leq \beta_2$ неравенство (54) эквивалентно $\lambda \geq C_2(\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{m}_2(\lambda) = m(\beta) = m$. Тогда $\bar{\beta}(m) = \beta$, т.е. (49) эквивалентно (35). Таким образом, мы имеем случай, аналогичный (41): горизонтальные линии $\lambda = \text{const} > \lambda_2$ пересекают $\lambda = C_2(\beta)$ в двух точках; одна из них с $\beta < \beta_2$ соответствует $m(\beta) = \bar{m}_2(\lambda)$, а другая с $\beta > \beta_2 - m(\beta) = \tilde{m}_2(\lambda)$. Теперь пусть $\lambda \geq C_2(\beta)$. Тогда $\bar{m}_2(\lambda) \geq m(\beta) \geq \tilde{m}_2(\lambda)$, т.е. $g_2(\beta, \lambda; m)$ возрастает от $m(\beta)$ до $\bar{m}_2(\lambda)$. И наоборот, пусть $\lambda < C_2(\beta)$. Тогда $\bar{m}_2(\lambda) < m(\beta)$, и решение не является действительным.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для $\beta_2 < \beta < \beta_0$ неравенство (54) определяет кривую $\lambda = C_4(\beta)$, которая не совпадает с $\lambda = C_2(\beta)$. Прежде чем обсуждать этот случай, мы рассмотрим случай $\beta > \beta_0$.

ЛЕММА 8. Пусть $\beta > \beta_0$, определим функцию

$$G_2(m) := \frac{p}{\gamma} \bar{\beta}(m)(\beta_0 - \bar{\beta}(m)) - m \text{th}^{-1} m. \quad (55)$$

Пусть $p > 2$. Тогда уравнение $G_2(m) = 0$ имеет единственное решение $m = m_c \in (0, 1)$ и, более того, для больших p

$$1 - m_c \sim \frac{1}{8p^2 \ln 2} \ln(8p^2 \ln 2). \quad (56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda < \lambda_2$, то $g_2(\beta, \lambda; m)$ является убывающей функцией; тогда

$$F_2(\beta, \lambda) = -I_2^\beta(0). \quad (57)$$

Для $\lambda > \lambda_2$ мы должны сравнить $-I_2^\beta(0)$ и $\beta \lambda \bar{m}_2^p(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}_2(\lambda))$. Критическое значение λ_c дается уравнением

$$-I_2^\beta(0) = \beta \lambda \bar{m}_2^p(\lambda_c) - I_2^\beta(\bar{m}_2(\lambda_c)). \quad (58)$$

Заметим, что это выражение не зависит от $\beta > \beta_0$:

$$\lambda_c = \frac{\beta_0 - \bar{\beta}(m_c)}{\gamma m_c^p}, \quad (59)$$

где $m_c = \bar{m}_2(\lambda_c)$. Подставляя (59) в (49) с $\lambda = \lambda_c$, мы имеем $G_2(m_c) = 0$, где

$$G_2(m) = \frac{p}{\gamma} \bar{\beta}(m)(\beta_0 - \bar{\beta}(m)) - m \operatorname{th}^{-1} m. \quad (60)$$

Покажем, что функция $G_2(m)$ имеет ту же форму, что и $G_1(m)$ (см. доказательство леммы 2). Сначала вычислим

$$G_2'(m) = \frac{p}{\gamma} \bar{\beta}'(m)(\beta_0 - 2\bar{\beta}(m)) - \operatorname{th}^{-1} m - \frac{m}{1 - m^2} \quad (61)$$

и

$$G_2''(m) = \frac{p}{\gamma} \bar{\beta}''(m)(\beta_0 - 2\bar{\beta}(m)) - \frac{2p}{\gamma} \bar{\beta}'^2(m) - \frac{2}{(1 - m^2)^2}. \quad (62)$$

Используя соотношения

$$\bar{\beta}'(m) = -\gamma \frac{\operatorname{th}^{-1} m}{\bar{\beta}(m)} \quad (63)$$

и

$$\bar{\beta}''(m) = -\frac{\gamma}{(1 - m^2)\bar{\beta}(m)} - \frac{\gamma^2(\operatorname{th}^{-1} m)^2}{\bar{\beta}^3(m)} = -\frac{\gamma}{(1 - m^2)\bar{\beta}(m)} - \frac{\bar{\beta}'^2(m)}{\bar{\beta}(m)}, \quad (64)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} G_2''(m) &= -\frac{p\beta_0}{\bar{\beta}(m)} \left(\frac{1}{1 - m^2} + \frac{\bar{\beta}'^2(m)}{\gamma} \right) + \frac{2p}{1 - m^2} - \frac{2}{(1 - m^2)^2} = \\ &= \frac{1}{1 - m^2} \left\{ p \left(2 - \frac{\beta_0}{\bar{\beta}(m)} \right) - \frac{2}{1 - m^2} - \frac{p}{\gamma} \frac{\beta_0}{\bar{\beta}(m)} (1 - m^2) \bar{\beta}'^2(m) \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

Как и в доказательстве леммы 2, мы покажем, что выражение в фигурных скобках является убывающим по m . Согласно (63) $\bar{\beta}(m)$ является убывающей функцией,

так что первый член является убывающим. Второй член, очевидно, является убывающим. Так как $\beta_0/\bar{\beta}(m)$ – возрастающая функция, то достаточно показать, что

$$\frac{d[(1-m^2)\bar{\beta}'^2(m)]}{dm} \geq 0.$$

Теперь мы имеем

$$\frac{d}{dm}[(1-m^2)\bar{\beta}'^2(m)] = 2\bar{\beta}'(m)[(1-m^2)\bar{\beta}''(m) - m\bar{\beta}'(m)] = -2\frac{\bar{\beta}'(m)}{\bar{\beta}^3(m)}\rho(m), \quad (66)$$

где

$$\rho(m) = \gamma^2(1-m^2)(\operatorname{th}^{-1} m)^2 + \gamma(1-m\operatorname{th}^{-1} m)\bar{\beta}^2(m). \quad (67)$$

Но $\rho(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow 1$,

$$\begin{aligned} \rho'(m) = & -2m\gamma^2(\operatorname{th}^{-1} m)^2 + 2\gamma^2 \operatorname{th}^{-1} m - \gamma\bar{\beta}^2(m) \operatorname{th}^{-1} m - \frac{m}{1-m^2}\bar{\beta}^2(m) - \\ & - 2\gamma^2 \operatorname{th}^{-1} m(1-m\operatorname{th}^{-1} m) < 0. \end{aligned} \quad (68)$$

Отсюда следует, что $\rho(m) > 0$, и поскольку $\bar{\beta}'(m) < 0$, то $d[(1-m^2)\bar{\beta}'^2(m)]/dm \geq 0$. Таким образом, выражение в фигурных скобках в (65) является убывающим. При $m = 0$ оно равняется $p - 2 > 0$, и при $m \rightarrow 1$ оно стремится к $-\infty$. Следовательно, кривая $G_2''(m)$ имеет единственный нуль. Оставшаяся часть доказательства единственности и существования такая же, как в лемме 2.

Ясно, что при больших p значение m_c должно быть близким к единице. Однако асимптотически при $m \sim 1$

$$\bar{\beta}(m) \sim [\gamma(1-m)|\ln(1-m)|]^{1/2}$$

и $m\operatorname{th}^{-1} m \sim (\ln 2 - \ln(1-m))/2$, так что

$$p[2\ln 2(1-m)|\ln(1-m)|]^{1/2} \sim \frac{1}{2}|\ln(1-m)|.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1-m}{|\ln(1-m)|} \sim \frac{1}{8p^2 \ln 2} \Rightarrow 1-m \sim \frac{1}{8p^2 \ln 2} \ln(8p^2 \ln 2).$$

ЛЕММА 9. Пусть β_2 – минимум кривой $C_2(\beta)$, задаваемой уравнением (39). Тогда для $0 < \beta \leq \beta_2$

$$F_2(\beta, \lambda) = \begin{cases} \beta\lambda m^p(\beta) - I_2^\beta(m(\beta)), & \lambda \leq C_2(\beta), \\ \beta\lambda \bar{m}_2^p(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}_2(\lambda)), & \lambda > C_2(\beta), \end{cases}$$

а для $\beta \geq \beta_0$

$$F_2(\beta, \lambda) = \begin{cases} -I_2^\beta(0), & \lambda \leq \lambda_c, \\ \beta\lambda \bar{m}_2^p(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}_2(\lambda)), & \lambda \geq \lambda_c. \end{cases}$$

Наконец, для $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_0$ существует кривая $\lambda = C_4(\beta)$, задаваемая уравнением (54), лежащая ниже $\lambda = C_2(\beta)$ и удовлетворяющая $C_4(\beta_2) = \lambda_2$ и $C_4(\beta_0) = \lambda_c$, так что

$$F_2(\beta, \lambda) = \begin{cases} \beta\lambda m^p(\beta) - I_2^\beta(m(\beta)), & \lambda \leq C_4(\beta), \\ \beta\lambda \bar{m}_2^p(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}_2(\lambda)), & \lambda > C_4(\beta). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Остается только доказать свойства кривой $\mathcal{C}_4(\beta)$.

Если $\beta_2 < \beta < \beta_0$ и $\lambda = \mathcal{C}_2(\beta)$, то $\tilde{m}_2(\lambda) = m(\beta)$. Если λ возрастает, то $\tilde{m}_2(\lambda)$ уменьшается и $\bar{m}_2(\lambda)$ увеличивается; таким образом, если $\lambda > \mathcal{C}_2(\beta)$, то $\tilde{m}_2(\lambda) < m(\beta) < \bar{m}_2(\lambda)$. Но функция $g_2(\beta, \lambda; m)$ является возрастающей для $m \in (\tilde{m}_2(\lambda), \bar{m}_2(\lambda))$; следовательно, неравенство (54) справедливо. Отсюда следует, что $\mathcal{C}_4(\beta) \leq \mathcal{C}_2(\beta)$.

Мы уже видели, что при $\beta = \beta_2$ функция $\mathcal{C}_4(\beta)$ совпадает с $\mathcal{C}_2(\beta_2) = \lambda_2$. При $\beta \nearrow \beta_0$, $m(\beta) \searrow 0$, правая часть неравенства (54) стремится к $-I_2^\beta(0)$. Следовательно, равенство в (54) соответствует (58) (с помощью дифференцирования можно показать, что левая часть (54) является строго возрастающей по λ). Лемма доказана.

Наконец, рассмотрим функцию $f(\beta, \lambda)$. Ясно, что

$$-\beta f(\beta, \lambda) - \ln 2 = \max\{F_1(\beta, \lambda), F_2(\beta, \lambda)\}. \quad (69)$$

Полная фазовая диаграмма изображена на рис. 2 и описывается следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть кривые $\mathcal{C}_1(\beta)$ и $\mathcal{C}_2(\beta)$ определены уравнениями (38) и (39) соответственно. Пусть m_p – единственное положительное решение уравнения $G_1(m) = 0$, и мы положим $\beta_1 = \bar{\beta}(m_p)$. Если $0 < \beta \leq \beta_1$, то

$$-\beta f(\beta, \lambda) - \ln 2 = \begin{cases} -I_1^\beta(0) = \beta^2/(2\gamma), & \lambda \leq \mathcal{C}_1(\beta), \\ \beta\lambda\bar{m}_1(\beta, \lambda) - I_1^\beta(\bar{m}_1(\beta, \lambda)), & \mathcal{C}_1(\beta) \leq \lambda \leq \mathcal{C}_2(\beta), \\ \beta\lambda\bar{m}_2(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}_2(\lambda)), & \lambda > \mathcal{C}_2(\beta). \end{cases} \quad (70)$$

Скачки магнетизации происходят от 0 до m_p поперек кривой $\mathcal{C}_1(\beta)$, но магнетизация постоянна поперек кривой $\mathcal{C}_2(\beta)$.

Если $\beta \geq \beta_0$, то

$$-\beta f(\beta, \lambda) - \ln 2 = \begin{cases} -I_2^\beta(0) = \beta\beta_0/\gamma - \ln 2, & \lambda \leq \lambda_c, \\ \beta\lambda\bar{m}^p(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}(\lambda)), & \lambda \geq \lambda_c. \end{cases} \quad (71)$$

Скачки магнетизации происходят от 0 до m_c при $\lambda = \lambda_c$.

При $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_0$ имеется кривая $\mathcal{C}(\beta)$, задаваемая уравнением

$$\lambda = \mathcal{C}(\beta) \Leftrightarrow -I_1^\beta(0) = \beta\lambda\bar{m}_2^p(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}_2(\lambda)), \quad (72)$$

так что $\mathcal{C}(\beta_1) = \mathcal{C}_2(\beta_1)$, $\mathcal{C}(\beta_0) = \lambda_c$ и

$$-\beta f(\beta, \lambda) - \ln 2 = \begin{cases} -I_1^\beta(0) = \beta^2/(2\gamma), & \lambda \leq \mathcal{C}(\beta), \\ \beta\lambda\bar{m}^p(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}(\lambda)), & \lambda \geq \mathcal{C}(\beta). \end{cases} \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $\beta < \beta_1$. Для $\lambda \leq \mathcal{C}_2(\beta)$ имеем

$$F_2(\beta, \lambda) = \beta\lambda m^p(\beta) - I_2^\beta(m(\beta)) = \beta\lambda m^p(\beta) - I_1^\beta(m(\beta)) \leq F_1(\beta, \lambda),$$

т. е. максимум дается с помощью леммы 5.

Если $\lambda > \mathcal{C}_2(\beta)$, то

$$F_1(\beta, \lambda) = \beta \lambda m(\beta) - I_1^\beta(m(\beta)) = \beta \lambda m(\beta) - I_2^\beta(m(\beta)) \leq F_2(\beta, \lambda),$$

и максимум дается с помощью F_2 , как и в лемме 9.

При $\beta \geq \beta_0$ мы имеем $-\beta f(\beta, \lambda) - \ln 2 = F_2(\beta, \lambda)$. Таким образом, соотношение (71) следует из леммы 9.

Наконец, рассмотрим случай $\beta_1 < \beta < \beta_0$. Тогда если $\lambda \leq \mathcal{C}_3(\beta)$, то

$$-I_1^\beta(0) > \beta \lambda m^p(\beta) - I_1^\beta(m(\beta))$$

согласно лемме 5; и согласно лемме 9 мы имеем

$$-\beta f(\beta, \lambda) - \ln 2 = \max\{-I_1^\beta(0), \beta \lambda \bar{m}_2^p(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}_2(\lambda))\}, \quad (74)$$

т. е. переход дается с помощью $\lambda = \mathcal{C}(\beta)$. В частности, $\mathcal{C}(\beta) \geq \mathcal{C}_4(\beta)$. Если $\lambda > \mathcal{C}_3(\beta)$, то $\lambda > \mathcal{C}_2(\beta)$; и так как $\mathcal{C}_4(\beta) < \mathcal{C}_2(\beta)$, то равенство (74) все еще справедливо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Кривая $\lambda = \mathcal{C}(\beta)$ является убывающей и удовлетворяет условиям $\mathcal{C}(\beta_1) = \lambda_1$ и $\mathcal{C}(\beta_0) = \lambda_c$. Более того, $\mathcal{C}'(\beta_1) = \mathcal{C}'(\beta_0)$ и $\mathcal{C}'(\beta_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем $\lambda = \mathcal{C}(\beta) \Leftrightarrow D(\beta, \lambda) = 0$, где

$$D(\beta, \lambda) = -I_1^\beta(0) - [\beta \lambda \bar{m}^p(\lambda) - I_2^\beta(\bar{m}(\lambda))]. \quad (75)$$

Отсюда

$$\mathcal{C}'(\beta) = -\left(\frac{\partial D}{\partial \beta}\right)_\lambda \bigg/ \left(\frac{\partial D}{\partial \lambda}\right)_\beta. \quad (76)$$

Используя соотношение $\partial I_2^\beta / \partial \beta = -\bar{\beta} / \gamma$, мы находим

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = \frac{\beta - \bar{\beta}(\bar{m}(\lambda))}{\gamma} - \lambda \bar{m}^p(\lambda), \quad \frac{\partial D}{\partial \lambda} = -\beta \bar{m}^p(\lambda), \quad (77)$$

откуда получаем

$$\mathcal{C}'(\beta) = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\beta - \bar{\beta}(\bar{m}(\lambda))}{\gamma \bar{m}^p(\lambda)} - \lambda \right] \leq \frac{1}{\beta} \left[\frac{\beta_0 - \bar{\beta}(\bar{m}(\lambda))}{\gamma \bar{m}^p(\lambda)} - \lambda \right] = \frac{1}{\beta} [\lambda_c - \lambda] < 0. \quad (78)$$

При $\beta = \beta_1$ мы имеем $\mathcal{C}_1(\beta_1) = \mathcal{C}_2(\beta_1) = \lambda_1$. Также ясно, что при $\beta = \beta_1$ соотношение (72) справедливо, так как $m(\beta_1) = \bar{m}_1(\lambda_1) = \bar{m}_2(\lambda_1)$. Тогда $\mathcal{C}(\beta_1) = \lambda_1$. При $\beta = \beta_1$ справедливо $\bar{m}_2(\lambda) = m(\beta)$, следовательно, $\beta = \bar{\beta}$. Отсюда имеем

$$\mathcal{C}'(\beta)|_{\beta=\beta_1} = -\frac{\lambda}{\beta_1}.$$

Также при $\beta = \beta_1$ получаем

$$\left(\frac{\partial D}{\partial \beta}\right)_\lambda = -\lambda \bar{m}_1^p(\lambda), \quad \left(\frac{\partial D}{\partial \lambda}\right)_{\beta=\beta_1} = -\beta_1 \bar{m}_1^p(\lambda),$$

так что $\mathcal{C}'_1(\beta)|_{\beta=\beta_1} = -\lambda/\beta_1$.

При $\beta = \beta_0$ мы находим

$$\mathcal{C}'(\beta)|_{\beta=\beta_0} = \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{\beta_0 - \bar{\beta}(\bar{m}(\lambda))}{\gamma \bar{m}^p(\lambda)} - \lambda \right] = \frac{1}{\beta_0} [\lambda_c - \lambda]. \quad (79)$$

Но при $\beta = \beta_0$ мы имеем $\lambda = \lambda_c$, следовательно, $\mathcal{C}'(\beta_0) = 0$.

Рис. 6. Фазовая диаграмма для $2 < p < \infty$, $T_0 = 1/\sqrt{2\gamma \ln 2}$; на вставке приведена фазовая диаграмма для $p = 2$ (а). Если температура понижается вдоль стрелки ХУ из парамагнитной области, то нельзя попасть в ферромагнитную область при больших p , так как точки А и D расходятся. В ходе этого анализа обнаружился новый переход поперек кривой AD при $p > 2$, который не существовал при $p = 2$. Фазовая диаграмма при $p = \infty$: упорядоченный ферромагнитный режим далек от достижения (б). Обозначения см. на рис. 2.

5. ФАЗОВАЯ ДИАГРАММА В ПРЕДЕЛЕ $p \rightarrow \infty$

На рис. 6 изображена фазовая диаграмма, полученная выше, на горизонтальной оси которой отложена температура T вместо обратной температуры β .

Согласно этой фазовой диаграмме, если понижать температуру по направлению от парамагнитной области при λ , близком к λ_c , то встречается линия перехода между парамагнитной фазой и смешанной фазой, а не линия между парамагнитной фазой и ферромагнитной фазой. При $p \rightarrow \infty$ это является единственной возможностью, так как точка А уходит на бесконечность. Сначала вычислим λ_c в пределе $p \rightarrow \infty$ с помощью соотношения (56). Мы имеем $m_c^p \sim (1 - 1/p^2)^p \rightarrow 1$ при $p \rightarrow \infty$. Следовательно, с учетом (59) мы находим

$$\lambda_c = \frac{\beta_0 - \bar{\beta}(m_c)}{\gamma m_c^p} \rightarrow \frac{\beta_0}{\gamma} = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\gamma}$$

при $p \rightarrow \infty$. Также нетрудно видеть (учитывая (35), (37) и (38)), что $C_1(\beta) \rightarrow \ln 2/\beta = T \ln 2$, так как $m_p \nearrow 1$ в лемме 2 при $p \rightarrow \infty$. В результате простых вычислений мы получаем

$$m(\beta) = \text{th}[T(\beta)] \sim 1 - \frac{\beta^2}{2\gamma^2},$$

где $m(\beta)$ определено в (34). Теперь $(T_1, \lambda(T_1))$ является точкой пересечения двух кривых $C_1(T)$ и $C_2(T)$. Это дается решением уравнения (40). Следуя приведенному выше аргументу, получаем $\beta_1/\gamma = 2^{-(p-1)}$, откуда следует, что при $p \rightarrow \infty$ мы имеем $\beta_1 \rightarrow 0$, и, следовательно, $T_1 \rightarrow \infty$. Так как в пределе $p \rightarrow \infty$ справедливо

$C_1(T) = T \ln 2$, то это означает, что точка пересечения двух кривых C_1 и C_2 (точка А) уходит на бесконечность. Это ясно из фазовой диаграммы для случая $p = \infty$, который показан на рис. 66. Здесь $C(T) = T \ln 2 + 1/(2T/\gamma^2)$. Заметим, что в смешанной фазе все еще имеется магнетизация, близкая к единице (даваемая с помощью m_c), которая сходится к единице не экспоненциально быстро, а приблизительно как $1/p^2$.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей статье мы получили фазовую диаграмму модели, определяемой гамильтонианом (7). Фазовые диаграммы для случаев $p = 2$, $2 < p < \infty$ и для предельного случая $p \rightarrow \infty$ оказываются разными, так как новая кривая переходов (кривая C на рис. 2 и кривая DA на рис. 6) появляется при $p > 2$, что приводит к уменьшению упорядоченной ферромагнитной фазы при $p \rightarrow \infty$.

Изложим кратко два практических применения этой модели.

Рассмотрим магнитную систему, состоящую из N взаимодействующих спинов Изинга, предполагая, что спиновые значения равны ± 1 (спиновое стекло). Пусть энергетически благоприятным (ферромагнитным) начальным состоянием системы является состояние $(1, 1, \dots, 1)$. В результате процесса отжига система переходит в более высокое энергетическое состояние, например в состояние $(1, 0, 1, 0, 0, \dots, 1)$. Задача, которую надо решить, заключается в том, как восстановить начальное состояние с помощью подобного процесса отжига. Это фундаментальная проблема в теории информации, впервые сформулированная Шенноном [28], [29]. Возможность переноса оптимального декодирования начального состояния системы на проблему отжига из фазы спинового стекла в ферромагнитную фазу на фазовой диаграмме для $p \geq 2$ в модели, которую мы исследовали в настоящей статье, сначала обсуждалась Сурласом [30], [31] и затем анализировалась Дорласом и Ведагедерой [32]–[34]. Оказалось, что это невозможно, так как ферромагнитная фаза полностью исчезает на фазовой диаграмме в пределе $p \rightarrow \infty$. Однако до тех пор, пока мы имеем взаимодействия конечной p -группы спинов, можно найти упорядоченные основные состояния системы, если $T \gtrsim T_1$ и $\lambda \gtrsim \lambda_c$ (рис. 6).

Случай $p < \infty$ оказывается существенным в некоторых исследованиях в области проблемы иммунологии (см. [13]). Действительно, мы могли бы использовать гамильтониан этой модели, чтобы моделировать взаимодействие между рецептором Т-клетки (основная иммунологическая молекула в иммунной клетке называется Т-клеткой) и молекулой пептид-связывающего главного комплекса тканевой совместимости (ПГКТС), которая находится на поверхности антиген-представляющей клетки, и чтобы объяснить с точки зрения статистической механики проблему активации Т-клетки. Действительно, в этой задаче каждая пара, состоящая из рецептора Т-клетки и ПГКТС, берется для образования модели с идеализированными бинарными взаимодействиями p -группы, с помощью которых проблема может трансформироваться в задачу, связанную с направленным полимером, которую мы решили в настоящей статье. В реальных биологических случаях $2 \leq p \leq 10$ (см., например, [35], [36]). Так как при этом изучается поведение модели при $p < \infty$, строгое обоснование фазовой диаграммы в этом случае обеспечивает жизненно важную информацию, связанную с приведенной выше задачей моделирования.

Благодарность. Настоящая работа поддержана National Research Council of Sri Lanka (грант NRC/05/64).

Список литературы

- [1] É. Brunet, B. Derrida, D. Simon, *Phys. Rev. E*, **78**:6 (2008), 061102, 9 pp., arXiv: 0806.1603.
- [2] J.-P. Bouchaud, M. Potters, *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [3] J. T. Chayes, L. Chayes, *Comm. Math. Phys.*, **105**:2 (1986), 221–238.
- [4] E. W. Montroll, G. H. Weiss, *J. Math. Phys.*, **6**:2 (1965), 167–181.
- [5] W. Paul, J. Baschnagel, *Stochastic Processes. From Physics to Finance*, Springer, Berlin, 1999.
- [6] D. B. Saakian, J. F. Fontanari, *Phys. Rev. E*, **80** (2009), 041903, 12 pp., arXiv: 0905.1097.
- [7] S. Kauffman, S. Levin, *J. Theoret. Biol.*, **128**:1 (1987), 11–45.
- [8] T. A. Witten, Jr., L. M. Sander, *Phys. Rev. Lett.*, **47**:19 (1981), 1400–1403.
- [9] C. Giraud, *Comm. Math. Phys.*, **223**:1 (2001), 67–86.
- [10] Ya. G. Sinai, *Comm. Math. Phys.*, **148**:3 (1992), 601–621.
- [11] D. Dunn-Walters, C. Thiede, B. Alpen, J. Spencer, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, **29**:356 (2001), 73–82.
- [12] J. Sun, D. J. Earl, M. W. Deem, *Modern Phys. Lett. B*, **20**:2–3 (2006), 63–95.
- [13] J. R. Wedagedera, *Directed polymers to model TCR-pMHC interaction*, <http://www.math.ruh.ac.lk/~janak/research/2010-2.pdf> (2010).
- [14] B. Derrida, R. B. Griffiths, R. G. Higgs, *Europhys. Lett.*, **18**:4 (1992), 361–366.
- [15] B. Derrida, P. G. Higgs, *J. Phys. A*, **27**:16 (1994), 5485–5493.
- [16] S. Havlin, D. Ben-Avraham, *Adv. in Phys.*, **51**:1 (2002), 187–292.
- [17] B. Derrida, M. R. Evans, E. R. Speer, *Comm. Math. Phys.*, **156**:2 (1993), 221–244.
- [18] É. Brunet, B. Derrida, *Phys. Rev. E*, **61**:6 (2000), 6789–6801, arXiv: cond-mat/0005352.
- [19] B. Derrida, *Phys. Rev. B*, **24**:5 (1981), 2613–2626.
- [20] B. Derrida, *J. Phys. Lett.*, **46**:9 (1985), 401–407.
- [21] É. Brunet, B. Derrida, D. Simon, *Phys. Rev. E*, **78**:6 (2008), 061102, 9 pp., arXiv: 0806.1603.
- [22] B. Derrida, *Phys. Rev. Lett.*, **45**:2 (1980), 79–82.
- [23] J. R. Wedagedera, T. C. Dorlas, *J. Statist. Phys.*, **103**:5–6 (2001), 697–716.
- [24] E. Buffet, A. Patrick, J. V. Pulé, *J. Phys. A*, **26**:8 (1993), 1823–1834.
- [25] J. R. Wedagedera, *Mathematical aspects of some mean field spin glass models*, Ph.D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1998.
- [26] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge Math. Textbooks, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [27] S. R. S. Varadhan, *Large Deviations and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1984.
- [28] C. E. Shannon, *Bell System Tech. J.*, **27** (1948), 379–423; 623–656.
- [29] C. E. Shannon, W. Weaver, *A Mathematical Theory of Communication*, Univ. of Illinois Press, Urbana, 1963.
- [30] N. Sourlas, *Nature*, **339**:6227 (1989), 693–695.
- [31] N. Sourlas, “Statistical mechanics and error-correcting codes”, *Statistical Mechanics of Neural Networks*, Lecture Notes in Phys., **368**, ed. L. Garrido, Springer, Berlin, 1990, 317–330.
- [32] T. C. Dorlas, J. R. Wedagedera, *Phys. Rev. Lett.*, **83**:21 (1999), 4441–4444.
- [33] T. C. Dorlas, J. R. Wedagedera, *Internat. J. Modern Phys.*, **15**:1 (2001), 1–15.
- [34] P. Gillin, D. Sherrington, H. Nishimori, *J. Phys. A*, **34**:14 (2001), 2949–2964, arXiv: cond-mat/0103292.
- [35] D. J. Irvine, M. A. Purbhoo, M. Krogsgaard, M. M. Davis, *Nature*, **419** (2002), 845–849.
- [36] C. Wülfing, J. D. Rabinowitz, C. Beeson, M. D. Sjaastad, H. M. McConnell, M. M. Davis, *J. Exp. Medicine*, **185**:10 (1997), 1815–1825.

Поступила в редакцию 25.03.2010,
после доработки 5.07.2010