Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Холево, Прирост энтропии и соответствие Чоя–Ямилковского для бесконечномерных квантовых эволюций, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 1, 142–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:24:19

© 2011 г.

А. С. Холево*

ПРИРОСТ ЭНТРОПИИ И СООТВЕТСТВИЕ ЧОЯ–ЯМИЛКОВСКОГО ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ ЭВОЛЮЦИЙ

Рассматривается прирост энтропии для бесконечномерных квантовых эволюций. Показывается, что в отличие от конечномерного случая существует множество каналов с положительным минимальным приростом энтропии. Дается новая нижняя граница и вычисляется минимальный прирост энтропии для широкого класса бозонных гауссовских каналов. Приводится математическая формулировка соответствия Чоя–Ямилковского между каналами и состояниями в бесконечномерном случае в форме, близкой к используемой в квантовой теории информации. В частности, получена явная формула для оператора Чоя–Ямилковского, определяющего невырожденный бозонный гауссовский канал общего вида, и вычислена его норма.

Ключевые слова: квантовая энтропия, вполне положительное отображение, соответствие Чоя–Ямилковского, бозонный гауссовский канал.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются квантовые (необратимые) эволюции Φ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, описываемые соотношением

$$\Phi[\rho] = \sum_{j=1}^{\infty} V_j \rho V_j^*, \quad (1)$$

где V_j – ограниченные операторы, удовлетворяющие условию $\sum_{j=1}^{\infty} V_j^* V_j = I$ (единичный оператор в $\mathcal{H}$), причем ряд сходится в сильной операторной топологии. Здесь ρ – оператор плотности в $\mathcal{H}$, представляющий состояние квантовой системы. Известно, что отображения вида (1) могут быть охарактеризованы как вполне положительные, сохраняющие след (такое общее определение будет подробно обсуждено в разделе 3), а правая часть формулы (1) дает так называемое представление Крауса (см., например, монографию [1]). С другой стороны, редуцированная динамика открытой квантовой системы, взаимодействующей с окружением, описывается

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: holevo@mi.ras.ru

отображением (1) с операторами V_j , определяемыми взаимодействием [2]. С точки зрения некоммутативной теории вероятностей, отображение (1) является обобщением марковского отображения, а в квантовой теории информации [3], [4] подобные отображения являются стандартной математической моделью канала связи (главным образом, в случае конечномерного $\mathcal{H}$). В дальнейшем мы будем использовать термин *канал*.

Для канала Φ и входного состояния ρ *прирост энтропии* дается величиной $H(\Phi[\rho]) - H(\rho)$, где $H(\rho) = -\text{Tr } \rho \ln \rho$ – энтропия фон Неймана оператора плотности ρ в гильбертовом пространстве системы $\mathcal{H}$. В работе [5] изучался минимальный прирост энтропии $G(\Phi) = \inf_{\rho} (H(\Phi[\rho]) - H(\rho))$ в случае $\dim \mathcal{H} = d < \infty$ и было показано, что

$$-\ln d \leq G(\Phi) \leq 0. \quad (2)$$

Неравенство $G(\Phi) \leq 0$ было получено в работе [5] как следствие того, что в конечномерном случае всякий канал имеет инвариантное состояние, однако это следует и непосредственно из оценки $\inf_{\rho} (H(\Phi[\rho]) - H(\rho)) \leq \inf_{\rho} (\ln d - H(\rho)) = 0$. Отсюда, в частности, следует, что $G(\Phi) = 0$ для конечномерных *унитальных* каналов ($\Phi[I] = I$), поскольку прирост энтропии в этом случае всегда неотрицателен (см., например, монографию [4]).

В разделе 2 мы исследуем аналогичную характеристику для бесконечномерных каналов. Прежде всего, прирост энтропии должен быть корректно определен, поскольку энтропия может принимать значение $+\infty$. Тогда утверждение (2) относительно возможных значений $G(\Phi)$ меняется кардинально: оказывается, что существует множество каналов с положительным минимальным приростом энтропии. Мы даем новую нижнюю границу и вычисляем минимальный прирост энтропии для широкого класса бозонных гауссовских каналов, показав, что нижняя грань достигается асимптотически на гауссовских состояниях. Эти результаты показывают, что, тогда как прирост энтропии традиционно связывается со степенью необратимости, существенным параметром здесь является коэффициент изменения фазового объема, который может быть меньше, равен или больше 1 для различных бесконечномерных эволюций. Мы также кратко комментируем полезные аналитические свойства прироста энтропии (выпуклость и аддитивность).

Раздел 3 посвящен математической формулировке соответствия Чоя–Ямилковского (ЧЯ) между каналами и состояниями в бесконечномерном случае в форме, близкой к используемой в квантовой теории информации (см., например, книгу [3]). Мы показываем, что нет необходимости использовать предельный переход (как в работе [6]) для определения “ненормированного максимально сцепленного состояния” и соответствующего аналога состояния ЧЯ, поскольку они могут быть определены строго как, вообще говоря, незамкнутые формы на подходящем плотном подпространстве. Свойства этих форм рассмотрены в п. 3.1. В п. 3.2 дается опирающаяся на точное определение разделимых форм ЧЯ версия результата работы [7], характеризующего формы, которые отвечают каналам, разрушающим сцепленность. В п. 3.3 мы получаем явную формулу для оператора ЧЯ, определяющего невырожденный бозонный гауссовский канал общего вида, и вычисляем его норму.

Отметим, что обобщение соответствия ЧЯ на случай положительно определенных функций на компактных группах рассматривалось в работе [8].

2. ПРИРОСТ ЭНТРОПИИ

2.1. Нижняя граница. В дальнейшем будем обозначать через $\mathcal{H}$ сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – банахово пространство операторов со следом (ядерных операторов) в $\mathcal{H}$ и $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – выпуклое подмножество всех операторов плотности ρ :

$$\rho^* = \rho \geq 0, \quad \text{Tr } \rho = 1.$$

Для краткости мы также называем их *состояниями*, имея в виду, что оператор плотности однозначно задает нормальное состояние на алгебре всех ограниченных операторов $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Если $\{A_n\}$ – монотонно неубывающая последовательность положительных операторов, сходящаяся слабо (а значит, и сильно) к ограниченному оператору A , мы пишем $A_n \uparrow A$.

Пусть Φ – канал в $\mathcal{H}$, задаваемый соотношением (1), где $\rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$. Поскольку единичный оператор I в бесконечномерном случае не принадлежит $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, выражение $\Phi[I]$, вообще говоря, не определено. Однако есть важный случай, когда оно может быть определено естественным образом как ограниченный положительный оператор. Рассмотрим условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|V_j^* \psi\|^2 < \infty, \quad \psi \in \mathcal{H}, \quad (3)$$

из которого, используя принцип равномерной ограниченности [9], можно получить $\sum_{j=1}^n V_j V_j^* \uparrow A$, где A – ограниченный положительный оператор, обозначаемый в дальнейшем $\Phi[I]$. Заметим, что в силу известного соотношения между различными представлениями Крауса этот оператор не зависит от выбора представления. Такие каналы будут называться *регулярными* в настоящей работе. Пример нерегулярного канала дается полностью деполяризующим каналом $\Phi[\rho] = \rho_0 \text{Tr } \rho$; $\rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

В дальнейшем нам понадобится продолжение функционала квантового математического ожидания на неограниченные операторы. Пусть F – самосопряженный положительный оператор. Для любого оператора плотности ρ положим

$$\text{Tr } \rho F = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle e_k | F | e_k \rangle, \quad (4)$$

где λ_k – собственные значения, а e_k – собственные векторы оператора ρ , подразумевая, что $\langle e_k | F | e_k \rangle = +\infty$, если $e_k \notin \mathcal{D}(\sqrt{F})$. Доказательство следующей леммы очевидно для чистого состояния ρ , а в общем случае получается предельным переходом с использованием спектрального разложения ρ .

ЛЕММА 1. Пусть $E(d\lambda)$ – спектральная мера оператора F , и пусть $m_\rho(B) = \text{Tr } \rho E(B)$ для борелевских $B \subset \mathbb{R}_+$. Тогда

$$\text{Tr } \rho F = \int_0^{\infty} \lambda m_\rho(d\lambda).$$

В общем случае $0 \leq \text{Tr } \rho F \leq +\infty$. Это определение может быть расширено на положительные операторы F , которые могут принимать значение $+\infty$, если мы

определим их посредством спектральной меры на расширенной полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Для краткости обозначим этот класс операторов $\mathfrak{F}(\mathbb{R}_+)$. Для данного F обозначим $\mathfrak{S}_F(\mathcal{H}) = \{\rho: \text{Tr } \rho F < \infty\}$. Вся эта конструкция очевидным образом обобщается на самосопряженные операторы, полуограниченные снизу.

Для любого оператора плотности σ имеем $-\ln \sigma \in \mathfrak{F}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Относительная энтропия определяется как

$$H(\rho||\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [\ln \lambda_k - \langle e_k | \ln \sigma | e_k \rangle], \quad (5)$$

и всегда имеет место соотношение

$$H(\rho||\sigma) + H(\rho) = \text{Tr } \rho(-\ln \sigma), \quad (6)$$

в котором обе части неотрицательны, но могут принимать бесконечное значение.

ЛЕММА 2. *Ряд (5) сходится безусловно, причем его сумма может принимать значения в $[0, +\infty]$.*

Утверждение следует из неравенств

$$\ln \lambda_k - \langle e_k | \ln \sigma | e_k \rangle \geq \ln \lambda_k - \ln \langle e_k | \sigma | e_k \rangle \geq 1 - \frac{\langle e_k | \sigma | e_k \rangle}{\lambda_k},$$

где первое неравенство вытекает из вогнутости функции $\ln x$ и спектрального разложения оператора σ , а второе – из неравенства $\ln x^{-1} \geq 1 - x$.

Если положительный самосопряженный оператор F таков, что

$$\text{Tr } e^{-\beta F} < \infty, \quad \beta > 0, \quad (7)$$

то формула

$$\rho_\beta = e^{-\beta F - c(\beta)}, \quad c(\beta) = \ln \text{Tr } e^{-\beta F}, \quad (8)$$

определяет оператор плотности. Обычно F имеет смысл гамильтониана, а ρ_β – гиббсовского состояния при обратной температуре β [10]. В этом случае $\mathfrak{S}_F(\mathcal{H}) = \{\rho: \text{Tr } \rho F < +\infty\}$ является подмножеством состояний с конечной энергией. Если $\beta \rightarrow 0$, то $e^{-\beta F} \uparrow I$, и для регулярного канала $\Phi[e^{-\beta F}] \uparrow \Phi[I]$.

Пусть ρ – произвольный оператор плотности с конечной энтропией $H(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (-\ln \lambda_k)$. Тогда оператор F , удовлетворяющий условиям $\text{Tr } \rho F < +\infty$ и (7), всегда существует. В самом деле, положим

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (-\ln \lambda_k) |e_k\rangle \langle e_k|,$$

где $\mu_k \uparrow +\infty$ – числовая последовательность такая, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \lambda_k (-\ln \lambda_k)$ сходится¹⁾.

¹⁾Этим наблюдением автор обязан М. Е. Широкову, который использовал аналогичный прием в работе [11].

ТЕОРЕМА. Пусть Φ – регулярный канал и ρ – состояние с конечной энтропией. Тогда

$$H(\Phi[\rho]) - H(\rho) \geq \text{Tr } \Phi[\rho](-\ln \Phi[I]), \quad (9)$$

где правая часть содержит квантовое математическое ожидание оператора $-\ln \Phi[I]$, который является самосопряженным и полуограниченным снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $H(\rho) < \infty$, прирост энтропии однозначно определен как величина со значениями в $(-\infty, +\infty]$. Согласно сделанному выше замечанию, мы всегда можем выбрать F , удовлетворяющий условию (7), так, что $\rho \in \mathfrak{S}_F(\mathcal{H})$. Из формул (7), (8) следует, что

$$H(\rho||\rho_\beta) + H(\rho) = \beta \text{Tr } \rho F + c(\beta), \quad (10)$$

где все слагаемые конечны. В силу свойства монотонности относительной энтропии (см., например, работы [4], [10])

$$H(\Phi[\rho]||\Phi[\rho_\beta]) \leq H(\rho||\rho_\beta), \quad (11)$$

поэтому согласно соотношению (6)

$$\text{Tr } \Phi[\rho](-\ln \Phi[\rho_\beta]) \leq H(\Phi[\rho]) - H(\rho) + \beta \text{Tr } \rho F + c(\beta).$$

После подстановки формулы (8) члены $c(\beta)$ сокращаются, и мы получаем

$$\text{Tr } \Phi[\rho](-\ln \Phi[e^{-\beta F}]) - \beta \text{Tr } \rho F \leq H(\Phi[\rho]) - H(\rho), \quad (12)$$

где $-\ln \Phi[e^{-\beta F}]$ – самосопряженный оператор, полуограниченный снизу. Поскольку $e^{-\beta F} \leq I$, имеем $\ln \Phi[e^{-\beta F}] \leq \ln \Phi[I]$ в силу операторной монотонности функции $\ln x$ на $\mathbb{R}_+$. Полагая $\beta \rightarrow 0$, из уравнения (12) получаем неравенство (9). Теорема доказана.

Таким образом, определение минимального прироста энтропии следует модифицировать как

$$G(\Phi) = \inf_{\rho: H(\rho) < \infty} (H(\Phi[\rho]) - H(\rho)). \quad (13)$$

Учитывая неравенство $0 \leq \Phi[I] \leq \|\Phi[I]\|I$, имеем $-\ln \Phi[I] \geq (-\ln \|\Phi[I]\|)I$, откуда

$$-\ln \|\Phi[I]\| \leq G(\Phi). \quad (14)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если канал Φ имеет инвариантное состояние с конечной энтропией (что всегда выполняется в конечномерном случае), то $G(\Phi) \leq 0$ и $\|\Phi[I]\| \geq 1$.

Определяя унитарный канал как регулярный канал, для которого $\Phi[I] = I$, получаем $G(\Phi) \geq 0$. В бесконечномерном случае можно найти даже классические унитарные каналы, для которых $G(\Phi) = +\infty$. Для доказательства рассмотрим бесконечную стохастическую матрицу $\Phi = [p_{ij}]_{i,j \in \mathbb{N}_+}$, где $p_{ij} = q_{n_j(i)}$, $Q = \{q_n\}$ – распределение вероятностей на $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$ с бесконечной энтропией и $n_j(i)$ – перестановки множества $\mathbb{N}_+$, определенные в приложении (лемма 6). Тогда матрица

является бистохастической, т.е. канал Φ унитарен, и для любого чистого классического состояния δ_i имеем $H(\Phi[\delta_i]) = H(Q) = +\infty$. Поэтому в силу вогнутости энтропии $H(\Phi[P]) = +\infty$ для любого распределения вероятностей P на $\mathbb{N}_+$.

В заключение этого пункта отметим два полезных аналитических свойства прироста энтропии.

1. Функция $\rho \longrightarrow H(\Phi[\rho]) - H(\rho)$ выпукла.
2. Минимальный прирост энтропии аддитивен относительно тензорного произведения каналов:

$$G(\Phi_1 \otimes \Phi_2) = G(\Phi_1) + G(\Phi_2).$$

Оба свойства являются следствием сильной субаддитивности энтропии фон Неймана, которая имеет место и в бесконечномерном случае. Для доказательства удобно представить прирост энтропии в виде $-H(B|E)$, где $H(B|E) = H(BE) - H(E)$ – условная энтропия окружения канала E относительно выхода B (см. § 7.6 в монографии [4]) с учетом того, что условная энтропия определена корректно, если $H(BE) = H(\Phi[\rho]) < \infty$. Тогда свойства 1, 2 вытекают из соответствующих свойств условной энтропии. Свойство 2 в конечномерном случае было отмечено в работе [5]. Оно резко контрастирует с неаддитивностью другой похожей характеристики – минимальной выходной энтропии $\inf_{\rho} H(\Phi[\rho])$, играющей важную роль в квантовой теории информации. Аддитивность этой величины долгое время оставалась открытым вопросом, который лишь недавно был решен в отрицательном смысле [12].

Результаты этого пункта обобщаются на случай каналов с различающимися входными и выходными пространствами, однако интерпретация прироста энтропии и величины $G(\Phi)$ в таком случае затруднительна. В этой связи отметим работу [13], где рассматривалась величина $G(\tilde{\Phi})$ для комплементарного канала $\tilde{\Phi}$, которая интерпретировалась как “мера того, как хорошо канал сохраняет сцепленность”.

2.2. Прирост энтропии для бозонных гауссовских каналов. Пусть (Z, Δ) – координатное симплектическое пространство ($\dim Z = 2s$, где s – число степеней свободы, или мод) с невырожденной кососимметричной матрицей коммутации Δ , и пусть $W(z) = e^{iRz}$, $z \in Z$, – система Вейля в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, дающая представление канонических коммутационных соотношений Вейля–Сигала:

$$W(z)W(z') = e^{iz^T \Delta z' / 2} W(z + z') \quad (15)$$

(см., например, главу 11 в монографии [4]). Здесь R – $2s$ -вектор-строка канонических наблюдаемых. Гауссовское состояние ρ с нулевым средним и вещественной положительно определенной матрицей ковариаций α , удовлетворяющей условию $\alpha \pm (i/2)\Delta \geq 0$, определяется характеристической функцией

$$\phi_{\rho}(z) = \text{Tr } \rho W(z) = e^{-z^T \alpha z / 2}. \quad (16)$$

Оператор плотности ρ является невырожденным тогда и только тогда, когда

$$\alpha - \frac{i}{2}\Delta > 0, \quad (17)$$

т.е. комплексная неотрицательно определенная матрица $\alpha - (i/2)\Delta$ является невырожденной (и, таким образом, положительно определенной, см. приложение).

Пусть Φ – (центрированный) бозонный гауссовский канал,

$$\Phi^*(W(z)) = W(Kz)e^{-z^T \mu z/2},$$

где вещественная неотрицательно определенная матрица μ удовлетворяет условию

$$\mu \geq \pm \frac{i}{2}(\Delta - K^T \Delta K). \quad (18)$$

Канал Φ переводит гауссовское состояние с матрицей ковариаций α в гауссовское состояние с матрицей ковариаций

$$\alpha' = K^T \alpha K + \mu \quad (19)$$

(более детальное описание см. в работах [4], [14]).

Положим $F = R\epsilon R^T$, где ϵ – вещественная положительно определенная матрица энергии (например, единичная матрица). Отметим, что при таком выборе множество $\mathfrak{S}_F(\mathcal{H})$ совпадает с подмножеством состояний с конечными вторыми моментами.

ЛЕММА 3. *Оператор плотности ρ_β , задаваемый соотношением (8), является оператором плотности невырожденного гауссовского состояния с нулевым средним и матрицей ковариаций α_β , удовлетворяющей уравнению*

$$2\Delta^{-1}\alpha_\beta = \text{ctg}(\beta\epsilon\Delta). \quad (20)$$

При этом

$$c(\beta) = \frac{1}{2} \ln \left[\det \left(\Delta^{-1}\alpha_\beta - \frac{i}{2} I \right) \right] \quad (21)$$

и энтропия состояния равна

$$H(\rho_\beta) = \frac{1}{2} \ln \det \left[\Delta^{-1}\alpha_\beta - \frac{i}{2} I \right] + \text{Sp}(\Delta^{-1}\alpha_\beta) \text{arccotg}(2\Delta^{-1}\alpha_\beta), \quad (22)$$

где Sp обозначает след $(2s \times 2s)$ -матрицы.

Доказательство этой леммы, в основном повторяющей теорему 11.4.2 из монографии [4], дается в приложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если матрица K невырождена, то канал Φ регулярен и*

$$\Phi[I] = |\det K|^{-1} I. \quad (23)$$

При этом

$$G(\Phi) = \ln |\det K|. \quad (24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что $\det \Delta = 1$ в случае канонической коммутационной матрицы

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \text{diag} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае одной моды ($s = 1$) особый интерес представляют три случая: аттенуатор с коэффициентом $k < 1$, усилитель с $k > 1$ и канал с аддитивным классическим гауссовским шумом ($k = 1$) [15], которые описываются уравнением

$$\Phi^*(W(z)) = W(kz)e^{-\mu|z|^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}^2. \quad (26)$$

Тогда условие (18) сводится к $\mu \geq |k^2 - 1|/2$. Во всех этих случаях минимальный прирост энтропии равен $\ln k^2$, пробегая все вещественные значения.

Для доказательства предложения 1 используем формулу (21) и запишем

$$\Phi[e^{-\beta F}] = \left[\det \left(\Delta^{-1} \alpha_\beta - \frac{i}{2} I \right) \right]^{1/2} \Phi[\rho_\beta]. \quad (27)$$

Состояние $\Phi[\rho_\beta]$ имеет матрицу ковариаций $\alpha'_\beta = K^T \alpha_\beta K + \mu$; поэтому согласно формуле обращения для квантовой характеристической функции (см. главу V из монографии [16])

$$\Phi[\rho_\beta] = \frac{1}{(2\pi)^s} \int e^{-z^T \alpha'_\beta z / 2} W(-z) d^s z, \quad (28)$$

где $d^s z = \sqrt{\det \Delta} d^{2s} z$ – элемент симплектического объема, отвечающий матрице Δ .

Теперь рассмотрим асимптотику $\beta \rightarrow 0$. Из соотношения (20)

$$\alpha_\beta \sim \frac{1}{2\beta} \epsilon^{-1}, \quad (29)$$

поэтому

$$\det \alpha'_\beta \sim |\det K|^2 \det \alpha_\beta \sim |\det K|^2 \det \Delta \det \left(\Delta^{-1} \alpha_\beta - \frac{i}{2} I \right). \quad (30)$$

Вероятностные меры

$$(2\pi)^{-s} (\det \alpha'_\beta)^{1/2} e^{-z^T \alpha'_\beta z / 2} d^s z$$

при $\beta \rightarrow 0$ сходятся слабо к вероятностной мере, вырожденной в нуле, поэтому из соотношений (27), (28), (30) получаем, что операторы $\Phi[e^{-\beta F}]$ сходятся к $|\det K|^{-1} W(0)$ в слабой операторной топологии. Принимая во внимание, что $W(0) = I$, получаем формулу (23), и теорема дает

$$H(\Phi[\rho]) - H(\rho) \geq \ln |\det K| \quad (31)$$

для любого состояния ρ с конечной энтропией.

Покажем, что граница (31) достигается асимптотически для состояний ρ_β , $\beta \rightarrow 0$. Из соотношений (22), (29), (30) следует, что главный член асимптотики в (22) дает первое слагаемое

$$H(\rho_\beta) \sim \frac{1}{2} \ln \det \left(\Delta^{-1} \alpha_\beta - \frac{i}{2} I \right) \sim \frac{1}{2} \ln \frac{\det \alpha_\beta}{\det \Delta} \quad (32)$$

и, аналогично,

$$H(\Phi[\rho_\beta]) \sim \frac{1}{2} \ln \frac{\det \alpha'_\beta}{\det \Delta}. \quad (33)$$

Отсюда, согласно соотношению (30),

$$H(\Phi[\rho_\beta]) - H(\rho_\beta) \sim \frac{1}{2} \ln \frac{|\det K|^2 \det \alpha_\beta}{\det \Delta} - \frac{1}{2} \ln \frac{\det \alpha_\beta}{\det \Delta} \sim \ln |\det K|. \quad (34)$$

Для состояний с конечными вторыми моментами можно доказать несколько более сильное утверждение. Для простоты введем два дополнительных технических ограничения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для гауссовского канала Φ , удовлетворяющего условию*

$$\mu > \frac{i}{2}(\Delta - K^T \Delta K), \quad (35)$$

и состояния ρ с конечными вторыми моментами, удовлетворяющего условию (17), выполняется неравенство

$$H(\Phi[\rho]) - H(\rho) \geq H(\Phi[\rho_G]) - H(\rho_G),$$

где ρ_G – гауссовский оператор плотности с теми же первыми и вторыми моментами, что и ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (17) приводит к невырожденности ρ_G , поэтому $\rho_G = \rho_\beta$, если матрица энергии ϵ выбрана согласно уравнению (20). Из уравнения (10) получаем

$$H(\rho||\rho_\beta) + H(\rho) = H(\rho_\beta) + \beta \operatorname{Tr}(\rho - \rho_\beta)F = H(\rho_\beta), \quad (36)$$

поскольку вторые моменты ρ и ρ_β совпадают. Аналогично

$$H(\Phi[\rho]||\Phi[\rho_\beta]) + H(\Phi[\rho]) = H(\Phi[\rho_\beta]) - \operatorname{Tr}(\Phi[\rho] - \Phi[\rho_\beta]) \ln \Phi[\rho_\beta]. \quad (37)$$

Поскольку Φ – гауссовский канал, матрицы ковариаций состояний ρ и ρ_β преобразуются им одинаково, и поэтому вторые моменты $\Phi[\rho]$ и $\Phi[\rho_\beta]$ также совпадают. Далее, $\Phi[\rho_\beta]$ является гауссовским оператором плотности, который невырожден в силу условий (17), (35), поэтому его логарифм является квадратичной формой от канонических наблюдаемых R . Следовательно, последнее слагаемое в соотношении (37) обращается в нуль, откуда

$$H(\Phi[\rho]||\Phi[\rho_\beta]) + H(\Phi[\rho]) = H(\Phi[\rho_\beta]). \quad (38)$$

Используя формулы (36), (38) и свойство монотонности относительной энтропии, получаем

$$H(\Phi[\rho_\beta]) - H(\rho_\beta) \leq H(\Phi[\rho]) - H(\rho). \quad (39)$$

3. СООТВЕТСТВИЕ ЧОЯ–ЯМИЛКОВСКОГО

3.1. Неотрицательно определенные формы. Пространство состояний $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, снабженное расстоянием следовой нормы, является полным сепарабельным метрическим пространством. Известно [17], [18], что последовательность квантовых состояний $\{\rho_n\}$, сходящаяся к состоянию ρ в слабой операторной топологии, сходится к нему по следовой норме. Более того, достаточно, чтобы $\lim_n \langle \psi | \rho_n | \psi \rangle = \langle \psi | \rho | \psi \rangle$ выполнялось для ψ из плотного линейного подпространства $\mathcal{H}$.

Рассмотрим более общее и абстрактное определение канала, которое, в частности, приводит к представлению (1). Назовем *каналом* линейное отображение $\Phi: \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \mapsto \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ со следующими свойствами:

1) $\Phi(\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)) \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$; отсюда следует, что Φ – ограниченное отображение [18], и поэтому оно однозначно определяется бесконечной матрицей $[\Phi(|i\rangle\langle j|)]$, где $\{|i\rangle\}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}_A$;

2) блочная матрица $[\Phi(|i\rangle\langle j|)]$ неотрицательно определена в том смысле, что для любого конечного набора векторов $\{|\psi_i\rangle\} \subseteq \mathcal{H}_B$ выполняется

$$\sum_{ij} \langle \psi_i | \Phi(|i\rangle\langle j|) | \psi_j \rangle \geq 0. \quad (40)$$

В пространстве $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A$ рассмотрим плотное подпространство

$$\mathcal{H}_B \times \mathcal{H}_A = \text{lin}\{\psi_B \otimes \psi_A : \psi_B \in \mathcal{H}_B, \psi_A \in \mathcal{H}_A\}.$$

ЛЕММА 4. *Существует единственная полуторалинейная неотрицательно определенная форма Ω_Φ на $\mathcal{H}_B \times \mathcal{H}_A$, удовлетворяющая соотношению*

$$\Omega_\Phi(\psi_B \otimes \psi_A; \psi'_B \otimes \psi'_A) = \langle \psi_B | \Phi(|\bar{\psi}_A\rangle\langle \bar{\psi}'_A|) | \psi'_B \rangle = \langle \bar{\psi}'_A | \Phi^*(|\psi'_B\rangle\langle \psi_B|) | \bar{\psi}_A \rangle, \quad (41)$$

где $|\bar{\psi}\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} |i\rangle \overline{\langle i|\psi\rangle}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любого $|\psi_{BA}\rangle = \sum_j |\psi_B^j\rangle \otimes |\psi_A^j\rangle \in \mathcal{H}_B \times \mathcal{H}_A$

$$\sum_{jk} \langle \psi_B^j | \Phi(|\bar{\psi}_A^j\rangle\langle \bar{\psi}_A^k|) | \psi_B^k \rangle \geq 0,$$

и что $|\psi_{BA}\rangle = 0$ влечет равенство этой суммы нулю. Используя разложение $|\psi_A^j\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} c_{ij} |i\rangle$, имеем $|\psi_{BA}\rangle = \sum_i |\tilde{\psi}_B^i\rangle \otimes |i\rangle$, где $|\tilde{\psi}_B^i\rangle = \sum_j c_{ij} |\psi_B^j\rangle$. Упомянутая сумма равна $\sum_{ij} \langle \tilde{\psi}_B^i | \Phi(|i\rangle\langle j|) | \tilde{\psi}_B^j \rangle$, откуда и следует утверждение.

Заметим, что для любого ортонормированного базиса $\{|e_k\rangle\}$ в $\mathcal{H}_B$

$$\sum_k \Omega_\Phi(e_k \otimes \psi_A; e_k \otimes \psi'_A) = \langle \psi_A | \psi'_A \rangle. \quad (42)$$

Выражение в левой части является естественным обобщением на случай форм понятия частичного следа относительно $\mathcal{H}_B$. Соотношение (42) показывает, что для формы Ω_Φ он всегда дается единичным оператором I_A . Аналогично определенный частичный след относительно $\mathcal{H}_A$ существует не всегда; это имеет место только при корректном определении выражения $\Phi[I_A]$ (см. п. 2.1), и тогда он равен этому выражению. Положительность и свойство (42) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} |\Omega_\Phi(\psi_B \otimes \psi_A; \psi'_B \otimes \psi'_A)| &\leq [\Omega_\Phi(\psi_B \otimes \psi_A; \psi_B \otimes \psi_A) \Omega_\Phi(\psi'_B \otimes \psi'_A; \psi'_B \otimes \psi'_A)]^{1/2} \leq \\ &\leq \|\psi_B\| \|\psi'_B\| \|\psi_A\| \|\psi'_A\|. \end{aligned} \quad (43)$$

Обратно, всякая полуторалинейная неотрицательно определенная форма Ω на $\mathcal{H}_B \times \mathcal{H}_A$, удовлетворяющая условию (42), однозначно определяет канал Φ такой, что $\Omega_\Phi = \Omega$ (в силу обращенного соотношения (41)). Положительность формы Ω_Φ

может быть использована для доказательства разложения Крауса (1) для Φ аналогично конечномерному случаю [3]. В самом деле, пусть $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство, полученное пополнением $\mathcal{H}_B \times \mathcal{H}_A$ относительно скалярного произведения, определяемого (факторизованной) формой Ω_Φ . Тогда любой ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$ определяет счетный набор линейных функционалов $\{f_l\}_{l=1}^{+\infty}$ на $\mathcal{H}_B \times \mathcal{H}_A$ такой, что

$$\Omega_\Phi(\psi_B \otimes \psi_A; \psi'_B \otimes \psi'_A) = \sum_{l=1}^{+\infty} f_l(\psi'_B \otimes \psi'_A) \overline{f_l(\psi_B \otimes \psi_A)}.$$

Определим линейные операторы $V_l: \mathcal{H}_A \rightarrow \mathcal{H}_B$ как $\langle \psi_B | V_l | \psi_A \rangle = \overline{f_l(\psi_B \otimes \psi_A)}$. Тогда из формулы (42) следует, что V_l – ограниченные операторы, удовлетворяющие соотношению $\sum_{l=1}^{+\infty} V_l^* V_l = I_A$, а из соотношения (41) – разложение Крауса $\Phi(\rho) = \sum_{l=1}^{+\infty} V_l \rho V_l^*$.

Если форма Ω замыкаема [9], то она однозначно определяется плотно определенным положительным самосопряженным оператором, который мы также обозначаем Ω . Если областью определения формы Ω является все пространство $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A$, то оператор Ω ограничен. Свойство (42) тогда принимает вид

$$\text{Tr}_B \Omega = I_A. \quad (44)$$

Пример незамыкаемой полуторалинейной формы дается тождественным каналом $\Phi = \text{Id}$, для которого

$$\Omega_{\text{Id}}(\psi_B \otimes \psi_A; \psi'_B \otimes \psi'_A) = \langle \psi_B \otimes \psi_A | \Omega | \psi'_B \otimes \psi'_A \rangle,$$

где $\langle \Omega |$ – незамыкаемая линейная форма на $\mathcal{H}_A \times \mathcal{H}_A$, определенная как

$$\langle \Omega | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle i | \psi_1 \rangle \langle i | \psi_2 \rangle, \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_A,$$

а $| \Omega \rangle$ обозначает сопряженную антилинейную форму, которая представляет “ненормированное максимально сцепленное состояние” $| \Omega \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} | i \rangle \otimes | i \rangle$. Соотношение

$$\Omega_\Phi = (\Phi \otimes \text{Id}_A)(\Omega_{\text{Id}})$$

выполняется в слабом смысле, т.е. как равенство для матричных элементов между векторами $|\psi_{BA}\rangle \in \mathcal{H}_B \times \mathcal{H}_A$.

С другой стороны, зафиксируем состояние полного ранга σ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$, и пусть $\{|i\rangle\}_{i=1}^{+\infty}$ – базис собственных векторов оператора σ с соответствующими (положительными) собственными значениями $\{\lambda_i\}_{i=1}^{+\infty}$. Рассмотрим очищающий вектор

$$|\psi_\sigma\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^{1/2} |i\rangle \otimes |i\rangle$$

в пространстве $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A$. Тогда состояние

$$\rho_\Phi(\sigma) = (\Phi \otimes \text{Id}_A)(|\psi_\sigma\rangle\langle\psi_\sigma|) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A), \quad (45)$$

удовлетворяющее условию $\text{Tr}_B \rho_\Phi(\sigma) = \sigma$, однозначно определяет канал Φ посредством соотношения [19]

$$\Phi(|i\rangle\langle j|) = \lambda_i^{-1/2} \lambda_j^{-1/2} \text{Tr}_A(I_B \otimes |j\rangle\langle i|) \rho_\Phi(\sigma).$$

Связь между $\rho_\Phi(\sigma)$ и Ω_Φ дается равенством

$$\langle \psi_B \otimes \psi_A | \rho_\Phi(\sigma) | \psi'_B \otimes \psi'_A \rangle = \Omega_\Phi(\psi_B \otimes \sigma^{1/2} \psi_A; \psi'_B \otimes \sigma^{1/2} \psi'_A).$$

Отметим, что Ω_Φ однозначно определяется своими значениями на плотном подпространстве $\mathcal{D} = \mathcal{H}_B \times \sigma^{1/2}(\mathcal{H}_A)$ благодаря свойству (43).

3.2. Разделимые операторы и каналы, разрушающие сцепленность.

Ограниченный положительный оператор Ω в $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A$, удовлетворяющий условию (44), назовем *разделимым*, если он принадлежит замыканию в слабой операторной топологии выпуклого множества операторов вида $\sum_\alpha \rho_\alpha \otimes M_\alpha$, где $\{M_\alpha\}$ – конечное разложение единицы в $\mathcal{H}_A$, т.е. набор операторов $M_\alpha \geq 0$, $\sum_\alpha M_\alpha = I$, а $\rho_\alpha \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$. Слабо замкнутое выпуклое множество всех разделимых операторов будет обозначаться $\mathfrak{C}_{BA}$.

ЛЕММА 5. Для оператора $\Omega \in \mathfrak{C}_{BA}$ операторная норма $\|\Omega\| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать это утверждение для $\Omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \otimes M_\alpha$, поскольку слабый операторный предел не увеличивает норму. Имеем

$$\|\Omega\| = \sup_{\|\psi\|=1} \langle \psi | \Omega | \psi \rangle \leq \sup_{\|\psi\|=1} \langle \psi | \sum_\alpha I_B \otimes M_\alpha | \psi \rangle \leq \langle \psi | \psi \rangle = 1.$$

Отсюда следует, что в определении разделимости достаточно рассматривать последовательности операторов, слабо сходящиеся на плотном подпространстве пространства $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A$.

Пусть σ – невырожденное состояние в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ и Ω – ограниченный положительный оператор, удовлетворяющий условию (44), тогда

$$\sigma_{BA} = (I_B \otimes \sigma^{1/2}) \Omega (I_B \otimes \sigma^{1/2})$$

является оператором плотности в $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A$ таким, что $\text{Tr}_B \sigma_{BA} = \sigma$. Напомним, что состояние $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A)$ называется *разделимым*, если оно принадлежит выпуклому замыканию (в слабой операторной топологии и, следовательно, в топологии следовой нормы) множества всех состояний произведений. Разделимые состояния – это в точности те, которые допускают представление

$$\rho = \int_{\mathcal{X}} (\rho_B(x) \otimes \rho_A(x)) \mu(dx), \quad (46)$$

где μ – борелевская вероятностная мера на некотором полном сепарабельном метрическом пространстве $\mathcal{X}$ [19].

Канал Φ называется *разрушающим сцепленность*, если для любого состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A)$ состояние $(\Phi \otimes \text{Id}_A)(\omega)$ является разделимым. Канал Φ является разрушающим сцепленность тогда и только тогда, когда существуют полное сепарабельное метрическое пространство $\mathcal{X}$, борелевская $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$ -значная функция

$x \mapsto \rho_B(x)$ и вероятностная операторнозначная мера (ВОМ) $M_A(dx)$ на $\mathcal{X}$ в $\mathcal{H}_A$ такие, что

$$\Phi(\rho) = \int_{\mathcal{X}} \rho_B(x) \mu_\rho(dx), \quad (47)$$

где $\mu_\rho(E) = \text{Tr } \rho M_A(E)$ для всех борелевских подмножеств $E \subseteq \mathcal{X}$. Если $\rho = \rho_\Phi(\sigma)$, то $\rho_B(x)$ в формуле (47) то же самое, что и в представлении (46), тогда как $M_A(dx)$ определяется соотношением

$$\langle \psi'_A | M_A(E) | \psi_A \rangle = \int_E \langle \sigma^{-1/2} \psi'_A | \overline{\rho_A(x)} \sigma^{-1/2} \psi_A \rangle \mu(dx), \quad \psi_A, \psi'_A \in \sigma^{1/2}(\mathcal{H}_A),$$

где комплексное сопряжение берется в базисе $\{|i\rangle\}$.

Вооружившись этими результатами, мы можем доказать строгую версию теоремы 4 из работы [7], опирающуюся на определение разделимого оператора и конструкцию интеграла (48), которая дается ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Следующие утверждения равносильны:*

- 1) $\Omega \in \mathfrak{C}_{BA}$;
- 2) состояние $\sigma_{BA} = (I_B \otimes \sigma^{1/2})\Omega(I_B \otimes \sigma^{1/2})$ разделимо;
- 3) $\Omega = \Omega_\Phi$, где Φ – канал, разрушающий сцепленность; если Φ имеет представление (47), то

$$\Omega_\Phi = \int_{\mathcal{X}} \rho_B(x) \otimes \overline{M}_A(dx), \quad (48)$$

где интеграл определяется в ходе доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слабая сходимость операторов $\Omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \otimes M_\alpha \in \mathfrak{C}_{BA}$ влечет слабую сходимость операторов плотности $\sigma_{BA} = \sum_\alpha \rho_\alpha \otimes \sigma^{1/2} M_\alpha \sigma^{1/2}$, поэтому из утверждения 1 следует утверждение 2. То, что утверждение 2 влечет утверждение 3, фактически было доказано в работе [19], где дана подробная конструкция ВОМ $M_A(dx)$.

Доказательство того, что из утверждения 3 следует утверждение 1, требует некоторых сведений из теории интегрирования относительно ВОМ.

Пусть $\mathcal{X}$ – полное сепарабельное метрическое пространство с σ -алгеброй борелевских подмножеств $\mathcal{B}$, и пусть $\{M(E); B \in \mathcal{B}\}$ – ВОМ на $\mathcal{X}$ со значениями в $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Тогда для любого $\psi \in \mathcal{H}$ функция множеств $\{\langle \psi | M(E) | \psi \rangle; B \in \mathcal{B}\}$ является положительной конечной мерой с полной вариацией $\|\psi\|^2$. Для любых $\psi, \psi' \in \mathcal{H}$ функция множеств $\{\langle \psi | M(E) | \psi' \rangle; B \in \mathcal{B}\}$ является комплексной мерой с конечной полной вариацией $\|\psi\| \|\psi'\|$, что следует из неравенства

$$|\langle \psi | M(E) | \psi' \rangle| \leq \frac{1}{2} [c \langle \psi | M(E) | \psi \rangle + c^{-1} \langle \psi | M(E) | \psi' \rangle], \quad c > 0, \quad (49)$$

которое вытекает из положительности операторов $M(E)$ для произвольных борелевских $E \subseteq \mathcal{X}$.

Функция $x \rightarrow \rho(x)$ со значениями в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ будет называться борелевской, если скалярные функции $x \rightarrow \langle \psi | \rho(x) | \psi' \rangle$ являются борелевскими для всех $\psi, \psi' \in \mathcal{H}$. Пусть μ – σ -конечная мера на $\mathcal{X}$, тогда функция $x \rightarrow \rho(x)$ будет называться измеримой, если функции $x \rightarrow \langle \psi | \rho(x) | \psi' \rangle$ μ -измеримы для всех $\psi, \psi' \in \mathcal{H}$. Отсюда следует, что

для любого $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ скалярная функция $x \rightarrow \text{Tr } \rho(x)A$ является μ -измеримой. Поскольку $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ сепарабельно относительно расстояния следовой нормы, то согласно теореме 3.5.3 из книги [20] функция $x \rightarrow \rho(x)$ сильно измерима в том смысле, что найдется последовательность простых борелевских функций $x \rightarrow \rho_n(x)$ такая, что $\|\rho(x) - \rho_n(x)\|_1 \rightarrow 0 \pmod{\mu}$. Если μ – вероятностная мера, то интеграл Бохнера $\int_{\mathcal{X}} \rho(x) \mu(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \rho_n(x) \mu(dx)$ существует и является элементом $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Если $x \rightarrow \rho(x)$ – борелевская функция со значениями в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$, а $M_A(dx)$ – ВОМ в $\mathcal{H}_A$, то мы определим интеграл $\int_{\mathcal{X}} \rho_B(x) \otimes \bar{M}_A(dx) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A)$ следующим образом. Для простой функции $\rho_n(x) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} 1_{E_{\alpha}}(x)$, где $\{E_{\alpha}\}$ – конечное разбиение пространства $\mathcal{X}$, положим $\Omega_n \equiv \int_{\mathcal{X}} \rho_n(x) \otimes \bar{M}_A(dx) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \otimes \bar{M}_A(E_{\alpha})$. Очевидно, что $\Omega_n \in \mathfrak{C}_{BA}$, поэтому $\|\Omega_n\| \leq 1$. Имеем также

$$\langle \psi_B \otimes \psi_A | \Omega_n | \psi'_B \otimes \psi'_A \rangle = \int_{\mathcal{X}} \langle \psi_B | \rho_n(x) | \psi'_B \rangle \langle \bar{\psi}'_A | M_A(dx) | \bar{\psi}_A \rangle$$

для всех $\psi_B, \psi'_B \in \mathcal{H}_B$, $\psi_A, \psi'_A \in \mathcal{H}_A$. Для двух простых функций $\rho_n(x)$, $\rho'_m(x)$ имеем, согласно неравенству (49),

$$\begin{aligned} & |\langle \psi_B \otimes \psi_A | (\Omega_n - \Omega'_m) | \psi'_B \otimes \psi'_A \rangle| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|\psi_B\| \|\psi'_B\| \int_{\mathcal{X}} \|\rho_n(x) - \rho'_m(x)\|_1 [c \langle \bar{\psi}_A | M_A(dx) | \bar{\psi}_A \rangle + c^{-1} \langle \bar{\psi}'_A | M_A(dx) | \bar{\psi}'_A \rangle]. \end{aligned}$$

Выберем последовательность $\{\rho_n(x)\}$ так, чтобы $\|\rho_B(x) - \rho_n(x)\|_1 \rightarrow 0 \pmod{\mu_{\sigma}}$, где σ – невырожденное состояние в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$. Тогда получаем, что формы $\langle \psi_{BA} | \Omega_n | \psi'_{BA} \rangle$ сходятся на плотном подпространстве пространства $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_A$ и равномерно ограничены. Поэтому найдется однозначно определенный ограниченный оператор Ω , который является пределом операторов Ω_n в слабой операторной топологии. Положим $\int_{\mathcal{X}} \rho_B(x) \otimes \bar{M}_A(dx) = \Omega$, тогда из определения следует, что $\Omega \in \mathfrak{C}_{BA}$.

3.3. Случай бозонных гауссовских каналов. Пусть $\mathcal{H}_A$ – пространство представления канонических коммутационных соотношений (15) с координатным симплектическим пространством (Z_A, Δ_A) и системой Вейля $W_A(z) = e^{iR_A z}$, $z \in Z_A$. Здесь Δ_A – невырожденная кососимметричная коммутационная матрица, R_A – вектор-строка канонических наблюдаемых в $\mathcal{H}_A$, и аналогично для пространства $\mathcal{H}_B$.

Предполагая, что форма Ω_{Φ} задается ограниченным оператором, имеем

$$\langle \bar{\psi}'_A | \Phi^* (|\psi'_B\rangle \langle \psi_B|) | \bar{\psi}_A \rangle = \text{Tr } \Omega_{\Phi} |\psi'_B\rangle \langle \psi_B| \otimes |\psi'_A\rangle \langle \psi_A|,$$

откуда

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}'_A | \Phi^*(W_B(z)) | \bar{\psi}_A \rangle &= \text{Tr } \Omega_{\Phi} W_B(z) \otimes |\psi'_A\rangle \langle \psi_A| = \\ &= \text{Tr } \Omega_{\Phi}^{\text{T}_A} W_B(z) \otimes |\bar{\psi}_A\rangle \langle \bar{\psi}'_A| = \\ &= \langle \bar{\psi}'_A | \text{Tr}_B \Omega_{\Phi}^{\text{T}_A} (W_B(z) \otimes I_A) | \bar{\psi}_A \rangle, \end{aligned}$$

где $^{\text{T}_A}$ обозначает транспонирование в $\mathcal{H}_A$. Таким образом,

$$\Phi^*(W_B(z)) = \text{Tr}_B \Omega_{\Phi}^{\text{T}_A} (W_B(z) \otimes I_A),$$

откуда по формуле обращения

$$\Omega_{\Phi}^{\text{T}A} = \frac{1}{(2\pi)^s} \int W_B(-z) \otimes \Phi^*(W_B(z)) d_{\Delta_B}^{2s} z,$$

где $d_{\Delta_B}^{2s} z = \sqrt{\det \Delta_B} d^{2s} z$ – элемент объема, отвечающий симплектической форме $z^{\text{T}} \Delta_B z'$. Окончательно имеем

$$\Omega_{\Phi} = \frac{\sqrt{\det \Delta_B}}{(2\pi)^s} \int W_B(-z) \otimes \Phi^*(W_B(z))^{\text{T}A} d^{2s} z. \quad (50)$$

Пусть теперь Φ – (центрированный) гауссовский канал:

$$\Phi^*(W_B(z)) = W_A(Kz) e^{-z^{\text{T}} \mu z / 2},$$

где

$$\mu \geq \pm \frac{i}{2} \Delta_K \equiv \pm \frac{i}{2} (\Delta_B - K^{\text{T}} \Delta_A K). \quad (51)$$

Тогда из формулы (50) следует, что

$$\Omega_{\Phi} = \frac{\sqrt{\det \Delta_B}}{(2\pi)^s} \int W_B(-z) \otimes W_A(Kz)^{\text{T}A} e^{-z^{\text{T}} \mu z / 2} d^{2s} z. \quad (52)$$

Отсюда, предполагая, что μ невырожденна, непосредственно получаем оценку

$$\|\Omega_{\Phi}\| \leq \sqrt{\frac{\det \Delta_B}{\det \mu}}.$$

Однако имеется и лучшая оценка. Заметим, что унитарные операторы $W_K(z) = W_B(-z) \otimes W_A(Kz)^{\text{T}A}$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям (15) с симплектической формой, определяемой матрицей Δ_K , так что $W_K(z) = e^{iR_K z}$, где $R_K = -R_B \otimes I_A + I_B \otimes R_A^{\text{T}A} K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Предположим, что матрица Δ_K невырожденна, тогда Ω_{Φ} – ограниченный гауссовский оператор и*

$$\|\Omega_{\Phi}\| = \sqrt{\frac{\det \Delta_B}{\det \Delta_K \det[\text{abs}(\Delta_K^{-1} \mu) + I/2]}}. \quad (53)$$

Если, кроме того, матрица $\mu - (i/2)\Delta_K$ невырожденна, то

$$\Omega_{\Phi} = \sqrt{\frac{\det \Delta_B}{\det(\mu - (i/2)\Delta_K)}} e^{-R_K \epsilon R_K^{\text{T}}}, \quad (54)$$

где $\epsilon = \text{arccotg}(2\Delta_K^{-1} \mu) \Delta_K^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуя соотношение (52) и вновь используя формулу обращения, имеем

$$\Omega_{\Phi} = \frac{\sqrt{\det \Delta_B}}{(2\pi)^s \sqrt{\det \Delta_K}} \int W_K(z) e^{-z^{\text{T}} \mu z / 2} d_{\Delta_K}^{2s} z = \sqrt{\frac{\det \Delta_B}{\det \Delta_K}} \rho_K,$$

где $d_{\Delta_K}^2 z$ – элемент объема, отвечающий симплектической форме $z^T \Delta_K z'$, а ρ_K – гауссовский оператор плотности в канонических наблюдаемых R_K с нулевым средним и матрицей ковариаций μ .

Далее, мы используем доказательство леммы 3 для $\alpha = \mu$, $\Delta = \Delta_K$ (см. приложение). Величина (53) равна максимальному собственному значению оператора (58), умноженному на $(\det \Delta_B / \det \Delta_K)^{1/2}$. Поскольку $\mu - (i/2)\Delta_K = \Delta_K(\Delta_K^{-1}\mu - i/2)$, условие того, что $\mu - (i/2)\Delta_K$ невырожденна, равносильно тому, что разложение (56) не имеет чистых компонент. Формулы (59)–(61) дают

$$\rho_K = C e^{-R_K \epsilon R_K^T},$$

где

$$C = \frac{1}{\sqrt{\det(\Delta_K^{-1}\mu - i/2)}},$$

а матрица ϵ находится из уравнения

$$2\Delta_K^{-1}\mu = \text{ctg}(\epsilon\Delta_K),$$

откуда следует формула (54).

ПРИМЕР. Рассмотрим аттенюатор/усилитель для одной моды

$$\Delta_A = \Delta_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

который задается уравнением (26). Тогда $\det \Delta_K = (k^2 - 1)^2$ и соотношение (53) дает

$$\|\Omega_\Phi\| = \frac{1}{\mu + |k^2 - 1|/2}.$$

Канал является разрушающим сцепленность тогда и только тогда, когда $\mu \geq (k^2 + 1)/2$, т.е. $\mu + |k^2 - 1|/2 \geq \max\{1, k^2\}$ [21], что согласуется с результатом леммы 5. С другой стороны, если $1 - |k^2 - 1|/2 \leq \mu < (k^2 + 1)/2$, то канал не является разрушающим сцепленность, тогда как по-прежнему $\|\Omega_\Phi\| \leq 1$. Вместе с $\mu \geq |k^2 - 1|/2$ это дает $k > 1$ (усилитель) и нижнюю границу $\mu \geq \max\{(3 - k^2)/2, (k^2 - 1)/2\}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЛЕММА 6. *Существует семейство перестановок $i \rightarrow n_j(i)$ множества $\mathbb{N}_+$, занумерованное индексом $j \in \mathbb{N}_+$, такое, что для любого $i \in \mathbb{N}_+$ последовательность $n_j(i)$, $j = 1, 2, \dots$, является перестановкой множества $\mathbb{N}_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (набросок). Рассмотрим бесконечную матрицу $A_\infty = [n_{ij}]_{i,j \in \mathbb{N}_+}$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $n_{i1} = i$, $n_{1j} = j$, $i, j \in \mathbb{N}_+$;
- 2) матрица A_∞ имеет иерархическую структуру: для любого $k = 1, 2, \dots$

$$A_\infty = \begin{bmatrix} A_k & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix},$$

где $A_k - (2^k \times 2^k)$ -матрица вида

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} & B_{k-1} \\ B_{k-1} & A_{k-1} \end{bmatrix},$$

тогда как

$$B_k = \begin{bmatrix} C_{k-1} & D_{k-1} \\ D_{k-1} & C_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Здесь $B_k, C_k, D_k - (2^k \times 2^k)$ -матрицы аналогичной структуры.

Можно проверить, полагая $k = 1, 2, \dots$, что A_∞ однозначно определяется этими условиями и, принимая $n_j(i) = n_{ij}$, мы получаем последовательность перестановок с требуемыми свойствами.

Докажем теперь лемму 3. Рассмотрим гауссовское состояние с нулевым средним и матрицей ковариаций α . Найдется Δ -симплектическое преобразование T такое, что

$$\tilde{\alpha} = T^T \alpha T = \text{diag} \begin{bmatrix} \alpha_j & 0 \\ 0 & \alpha_j \end{bmatrix}, \quad (55)$$

где $\alpha_j \geq 1/2$, $j = 1, \dots, s$. Тогда

$$\Delta^{-1} \tilde{\alpha} = \text{diag} \begin{bmatrix} 0 & \alpha_j \\ -\alpha_j & 0 \end{bmatrix}$$

и $\Delta^{-1} \alpha = T \Delta^{-1} \tilde{\alpha} T^{-1}$ является матрицей оператора с собственными значениями $\pm i \alpha_j$. Оператор ρ унитарно эквивалентен разложению на нормальные моды:

$$\tilde{\rho} = \bigotimes_{j=1}^s \rho^{(j)}. \quad (56)$$

Здесь $\rho^{(j)}$ – элементарный одномодовый оператор плотности

$$\rho^{(j)} = \frac{1}{\alpha_j + 1/2} \left(\frac{\alpha_j - 1/2}{\alpha_j + 1/2} \right)^{\tilde{n}_j}, \quad (57)$$

где $\tilde{n}_j = (\tilde{q}_j^2 + \tilde{p}_j^2 - 1)/2$ – оператор числа квантов для j -й моды (см. главу V из монографии [16]). Здесь новые канонические наблюдаемые $[\tilde{q}_1, \dots, \tilde{p}_s]$ связаны с исходными соотношением $\tilde{R} = RT$. Максимальное собственное значение оператора ρ , таким образом, равно

$$\prod_{j=1}^s \frac{1}{\alpha_j + 1/2} = \frac{1}{\sqrt{\det[\text{abs}(\Delta_K^{-1} \alpha) + I/2]}}. \quad (58)$$

Поскольку $\alpha - (i/2)\Delta = \Delta(\Delta^{-1}\alpha - (i/2)I)$, условие невырожденности $\alpha - (i/2)\Delta$ равносильно тому, что $\alpha_j > 1/2$, $j = 1, \dots, s$, т.е. разложение (56) не имеет чистых компонент. Возвращаясь от соотношений (56), (57) к исходным наблюдаемым R , получаем

$$\rho = C e^{-R \epsilon R^T}, \quad (59)$$

где

$$C = \prod_{j=1}^s \frac{1}{\sqrt{\alpha_j^2 - 1/4}} = \frac{1}{\sqrt{\det(\Delta^{-1}\alpha - (i/2)I)}} \quad (60)$$

и матрица ϵ находится из уравнения

$$2\Delta^{-1}\alpha = \text{ctg}(\epsilon\Delta). \quad (61)$$

Выражение для энтропии (22) получается из определения применением формул (8), (20), (21).

Благодарности. Эта статья была написана во время визита автора в Высшую Нормальную Школу г. Пиза. Автор благодарен Р. Фацио и В. Джованнетти за приглашение и обсуждение и М. Е. Широкову за полезные замечания. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 09-01-00424) и программой РАН “Математическая теория управления”.

Список литературы

- [1] А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, ИКИ, М., Ижевск, 2003.
- [2] H. Spohn, *Rev. Modern Phys.*, **52**:3 (1980), 569–615.
- [3] М. Нильсен, И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, Мир, М., 2006.
- [4] А. С. Холево, *Квантовые системы, каналы, информация*, МЦНМО, М., 2010.
- [5] R. Alicki, *Isotropic quantum spin channels and additivity questions*, arXiv: quant-ph/0402080.
- [6] G. Giedke, J. I. Cirac, *Phys. Rev. A*, **66**:3 (2002), 032316, 7 pp., arXiv: quant-ph/0204085.
- [7] M. Owari, M. B. Plenio, E. S. Polzik, A. Serafini, M. M. Wolf, *New J. Phys.*, **10**:11 (2008), 113014, arXiv: 0808.2260.
- [8] J. K. Korbicz, J. Wehr, M. Lewenstein, *Comm. Math. Phys.*, **281**:3 (2008), 753–774, arXiv: 0705.2965.
- [9] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1985.
- [10] A. Wehrl, *Rev. Modern Phys.*, **50**:2 (1978), 221–260.
- [11] М. Е. Широков, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:6 (2006), 193–222, arXiv: quant-ph/0510073.
- [12] M. B. Hastings, *Nature Phys.*, **5** (2009), 255–257, arXiv: 0809.3972.
- [13] I. Devetak, M. Junge, C. King, M. Be. Ruskai, *Comm. Math. Phys.*, **266**:1 (2006), 37–63, arXiv: quant-ph/0506196.
- [14] F. Caruso, J. Eisert, V. Giovannetti, A. S. Holevo, *New J. Phys.*, **10**:8 (2008), 083030, arXiv: 0804.0511.
- [15] А. С. Холево, *Пробл. передачи информ.*, **43**:1 (2007), 3–14, arXiv: quant-ph/0607051.
- [16] А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, ИКИ, Москва, Ижевск, 2004.
- [17] G. F. Dell’Antonio, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 413–429.
- [18] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic Press, London, New York, 1976.
- [19] Р. Ф. Вернер, А. С. Холево, М. Е. Широков, *УМН*, **60**:2(362) (2005), 153–154, arXiv: quant-ph/0504204.
- [20] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [21] А. С. Холево, *Пробл. передачи информ.*, **44**:3 (2008), 3–18, arXiv: 0802.0235.