Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. О. Чехов, Б. Эйнард, О. Маршал, Топологическое разложение модели β -ансамбля и квантовая алгебраическая геометрия в рамках секторного подхода, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 2, 163–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:18:28

© 2011 г. Л. О. Чехов^{*†‡}, Б. Эйнард[§], О. Маршал[§]

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МОДЕЛИ β -АНСАМБЛЯ И КВАНТОВАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В РАМКАХ СЕКТОРНОГО ПОДХОДА

Решения петлевых уравнений модели β -ансамбля строятся в виде, аналогичном решению в случае эрмитовых матриц ($\beta = 1$). При $\beta = 1$ решение выражается в терминах алгебраической спектральной кривой, задаваемой уравнением $y^2 = U(x)$. При произвольном β уравнение спектральной кривой превращается в уравнение Шредингера $((\hbar\partial)^2 - U(x))\psi(x) = 0$, в котором $\hbar \propto (\sqrt{\beta} - 1/\sqrt{\beta})/N$. Основные ингредиенты метода, основанного на алгебраическом решении, сохраняют свою значимость, но в то же время использован альтернативный подход к построению решения петлевого уравнения, в котором резольвенты задаются отдельно в каждом из секторов. Хотя технически этот подход оказывается более сложным, в его рамках удастся задать внутренне непротиворечивым образом структуру $\mathcal{B}$ -циклов для построенной квантовой алгебраической кривой (или D-модуля вида $y^2 - U(x)$, где $[y, x] = \hbar$) и выписать в явном виде корреляционные функции и соответствующие симплектические инварианты $\mathcal{F}_h$, или члены разложения свободной энергии по $1/N^2$ при произвольном $\hbar$. Набор “плоских” координат включает в себя времена потенциала t_k и числа заполнения $\tilde{\epsilon}_\alpha$. Даются определения и исследуются свойства $\mathcal{A}$ - и $\mathcal{B}$ -циклов, форм первого, второго и третьего родов и билинейные тождества Римана. Эти тождества позволяют найти сингулярную часть $\mathcal{F}_0$, зависящую только от $\tilde{\epsilon}_\alpha$.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, ядро Бергмана, корреляционные функции, тождества Римана, плоские координаты, уравнение Риккати.

Статья написана по заказу Редколлегии

^{*}Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: chekhov@mi.ras.ru

[†]Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия

[‡]Независимый московский университет, Москва, Россия

[§]Institute de Physique Théorique, Centre des Etudes Atomiques, Gif-sur-Yvette, France

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	165
2. Уравнение Шредингера и резольвента.....	168
2.1. Решения уравнения Шредингера.....	168
2.1.1. Стоксовы секторы.....	168
2.1.2. Явление Стокса. Убывающие решения.....	169
2.1.3. Нули функции ψ	170
2.1.4. Листы.....	170
2.2. Резольвента.....	170
3. Квантовая риманова поверхность.....	171
3.1. Контур интегрирования C_D и набор $\mathcal{A}$ - и $\mathcal{B}$ -циклов.....	171
3.2. Числа заполнения.....	174
3.3. Функции первого рода.....	175
3.4. Риманова матрица периодов.....	176
4. Ядра рекурсии.....	177
4.1. Ядро рекурсии.....	177
4.2. Дифференциал третьего рода: ядро $G(x, z)^{\alpha, \beta}$	179
4.3. Ядро Бергмана $B(x, z)^{\alpha, \beta}$	181
4.4. Мероморфные формы и билинейное тождество Римана.....	186
5. Корреляционные функции. Представление в диаграммном виде.....	187
5.1. Определение и свойства корреляционных функций.....	187
5.2. Диаграммное представление.....	189
6. Деформации.....	191
6.1. Вариации резольвенты.....	191
6.2. Вариации относительно “плоских” координат.....	191
6.2.1. Вариации относительно чисел заполнения.....	191
6.2.2. Вариация относительно t_0	192
6.2.3. Вариации относительно t_k . Двухточечная корреляционная функция.....	192
6.3. Вариации старших корреляционных функций.....	194
7. Классическая и квантовая геометрия: сводка результатов.....	195
8. Приложение к матричным моделям.....	197
8.1. Корреляционные функции и петлевые уравнения.....	198
8.2. Вариация относительно $\hbar$	199
9. Свободная энергия.....	201
9.1. Оператор $\hat{H}$	201
9.2. Производная $\hbar \partial / \partial \hbar$	201
9.2.1. Случай $r = 0$, $I = \varnothing$ и $r = h$, $I = J$	202
9.2.2. Случай $r = 0$, $I = \{x_1\}$	203
9.2.3. Случай $r = h$, $I = J \setminus \{x_n\}$	203
9.3. Примеры применения оператора $\hbar \partial / \partial \hbar$	204
9.3.1. Восстановление $W_n^{(0)}(J)$	204
9.3.2. Действие на $\overline{W}_2^{(0)}(x_1, x_2)$	204
9.3.3. Действие на $\mathcal{F}_1$	205
9.3.4. Действие на $W_1^{(1)}(x)$	206

9.4. Члены $\mathcal{F}_h$	206
10. Заключение	206
Приложение А. Доказательство теоремы 5.2	207
Приложение Б. Симметричность функции $W_3^{(0)}$	208
Приложение В. Доказательство теоремы 5.3	209
Приложение Г. Вычисление $\partial^3 \mathcal{F}_0 / \partial t_0^3$ в гауссовом случае	211

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной математической физике понятие квантовых поверхностей встречается довольно часто и в самых разнообразных аспектах. Не задаваясь целью описать весь спектр задач, в которых исследуется квантование самих координат пространства-времени (что, как правило, связано со струнными моделями или моделями на бранах), отметим тем не менее главную черту, на наш взгляд, присущую большинству, если не всем подобным моделям: в основном исследование ограничивается достаточно простыми сферическими или тороидальными геометриями. Наблюдаемыми в таких теориях оказываются не координаты сами по себе, которые перестают коммутировать и удовлетворяют некоторым постулированным квантовым алгебрам, а объекты, задаваемые представлениями этих алгебр, так как только они допускают классическую интерпретацию. В настоящей работе предлагается новый подход к описанию этих так называемых “квантовых поверхностей”: на основе решений стандартного одномерного уравнения Шредингера с полиномиальным потенциалом строится квантовая поверхность старшего рода (являющаяся аналогом классической гиперэллиптической римановой поверхности), для которой удастся определить аналоги всех основных понятий алгебраической геометрии.

Настоящая работа представляет собой “альтернативную версию” нашей статьи [1], в которой было введено понятие квантовой алгебраической геометрии. В обеих версиях происхождение квантовой алгебраической геометрии одно и то же: уравнение Шредингера $((\hbar\partial)^2 - U(x))\psi(x) = 0$. Принципиальное отличие между двумя версиями заключается в том, что в настоящей статье все величины, начиная с одноточечной резольвенты, определяются различным образом в разных секторах, т. е. эти резольвенты строятся на базе различных решений уравнения Шредингера, каждое из которых отвечает своему стоксову сектору на комплексной плоскости. Это позволяет математически строго определить интегрирования по $\mathcal{A}$ - и $\mathcal{B}$ -циклам и предъявить самосогласованную процедуру построения корреляционных функций и симплектических инвариантов.

Корреляционные функции $W_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n)$ и симплектические инварианты $\mathcal{F}_h$ для произвольной алгебраической кривой, заданной полиномиальным уравнением

$$\mathcal{E}(x, y) = \sum_{i,j} \mathcal{E}_{i,j} x^i y^j = 0,$$

были определены в работах [2], [3]. Инварианты $\mathcal{F}_h(\mathcal{E})$ описываются в терминах алгебраической геометрии, основанной на римановой поверхности, которая задается уравнением $\mathcal{E}(x, y) = 0$. Со стороны матричных моделей эти инварианты представляют собой члены разложения по $1/N^2$ (разложения по родам) свободной энергии, вычисленные в работе [4] для одноматричной модели и в работе [5] для двухматричной модели.

Введем понятие квантовой кривой, для которой $\mathcal{E}(x, y)$ представляет собой некоммутативный многочлен от x и y :

$$\mathcal{E}(x, y) = \sum_{i,j} \mathcal{E}_{i,j} x^i y^j, \quad [y, x] = \hbar.$$

Квантовые кривые также известны под названием D-модулей, т.е. фактора пространства функций по ядру $\text{Ker } \mathcal{E}(x, y)$, где $y = \hbar \partial / \partial x$.

Наша конструкция базируется на функциях $\psi(x)$, удовлетворяющих уравнению $\mathcal{E}(x, \hbar \partial_x) \psi(x) = 0$, и в ее рамках удается согласованным образом определить все основные понятия алгебраической геометрии. Хотя некоторые объекты, например точки ветвления, теряют явный смысл, понятия циклов, форм, ядра Бергмана, матрицы периодов и соответствующего отображения Абеля, равно как и других объектов, можно определить в самосогласованном виде. Тем не менее представляется весьма неожиданным, что почти все соотношения классической алгебраической геометрии, например билинейное тождество Римана, модифицированная вариационная формула Рауха и топологические рекуррентные формулы, задающие корреляционные функции и симплектические инварианты, сохраняют свою значимость при $\hbar \neq 0$.

Симплектические инварианты $\mathcal{F}_\hbar$ были впервые введены при решении петлевых уравнений, возникающих в эрмитовой одноматричной модели случайных матриц [2], [4]. Впоследствии они были обобщены на многоматричные модели [5], [6].

Модели, отвечающие квантовым поверхностям, суть β -ансамбли, классифицированные показателем степени β . Три вигнеровских ансамбля (см. монографию [7] с заменой $\beta \rightarrow \beta/2$) отвечают $\beta = 1$ (случай эрмитовых матриц), $\beta = 1/2$ (случай вещественных симметрических матриц), $\beta = 2$ (случай вещественных самодуальных кватернионных матриц), однако для произвольного вещественного β можно легко определить модель β -ансамбля собственных значений как N -кратный интеграл следующего вида:

$$\int d\lambda_1 \dots d\lambda_N |\Delta(\lambda)|^{2\beta} e^{-N\sqrt{\beta} \sum_{j=1}^N V(\lambda_j)},$$

где Δ – определитель Вандермонда.

В работе [8] решение, найденное в работе [2], было обобщено на случай модели β -ансамбля, при этом само решение было представлено в виде двойного полубесконечного ряда, имеющего в случае $\beta = O(1)$ следующий вид в разложении при больших N :

$$\mathcal{F} = \sum_{h,k=0}^{\infty} N^{2-2h-k} \left(\sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)^k \mathcal{F}_{h,k}.$$

Коэффициенты $\mathcal{F}_{h,k}$ этого ряда были вычислены в работе [8].

В настоящей статье, как и в статье [1], предполагается, что $\hbar = (\sqrt{\beta} - 1/\sqrt{\beta})/N$, и производится (бесконечное) пересуммирование ряда в вышеприведенной формуле; разложение свободной энергии при этом принимает стандартный вид:

$$\mathcal{F} = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} \mathcal{F}_h(\hbar).$$

Коэффициенты $\mathcal{F}_{h,k}$ из работы [8] можно восстановить, вычислив квазиклассический предел в разложении величин $\mathcal{F}_h(\hbar)$ при малых $\hbar$. В настоящей работе показано, что величины $\mathcal{F}_h(\hbar)$ оказываются естественным обобщением симплектических инвариантов [3] для “квантовой спектральной кривой” $\mathcal{E}(x, y)$ при $[y, x] = \hbar$.

Определим также аналоги многоточечных резольвент:

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = N^{-n} \left\langle \sum_{j=1}^N (x_1 - \lambda_j)^{-1} \dots \sum_{j=1}^N (x_n - \lambda_j)^{-1} \right\rangle_{\text{conn}},$$

где угловыми скобками обозначено усреднение с весом $|\Delta(\lambda)|^{2\beta} e^{-N\sqrt{\beta} \sum_{j=1}^N V(\lambda_j)}$, а индекс “conn” означает, что мы выделяем связную часть коррелятора. Эти резольвенты сами по себе допускают разложение по $1/N^2$, имеющее вид

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h-n} W_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n).$$

В настоящей статье все члены $W_n^{(h)}$ вычисляются с помощью модифицированной диаграммной техники.

Основным приемом при изучении β -модели собственных значений является метод петлевого уравнения. Петлевое уравнение получается из условия инвариантности интеграла относительно специальной замены переменных. Петлевые уравнения для β -модели собственных значений были получены в работах [9], [10], и в настоящей статье мы решаем их порядок за порядком теории возмущений по $1/N^2$ при фиксированном параметре $\hbar$.

В последнее время модели указанного типа получили новый толчок к развитию в связи с гипотезой Алдая–Гайотто–Тачикавы (АГТ) [11] о связи некрасовской инстантонной функции [12] с конформными блоками теории Лиувилля; эти конформные блоки, в свою очередь, описываются моделью типа матричной модели (см. работы [13], [14]). Связь с некрасовскими параметрами $\epsilon_{1,2}$ при этом вполне явная: $\epsilon_1 \epsilon_2 \sim 1/N^2$ и $\epsilon_1/\epsilon_2 \sim \beta$, так что с помощью подхода, развиваемого в настоящей работе, можно получать *непертурбативные* решения некрасовских уравнений относительно ϵ_1/ϵ_2 . Мы ограничиваем наше рассмотрение случаем полиномиальных потенциалов, обобщение на потенциалы логарифмического типа, встречающиеся в формулировке гипотезы АГТ, будет предметом следующей публикации.

Работа имеет следующую структуру. Общие сведения о явлении Стокса, возникающем в решениях уравнения Шредингера, собраны в разделе 2. Описание квантовой римановой поверхности дается в разделе 3, в котором вводятся понятия $\mathcal{A}$ - и $\mathcal{B}$ -циклов, чисел заполнения $\tilde{\epsilon}_i$ и функций первого рода (аналогов голоморфных и мероморфных дифференциалов типа Уизема–Кричевера), а также система плоских координат и риманова матрица периодов. В разделе 4 описаны ядра рекурсии и (би)дифференциалы второго и третьего родов. В разделе 5 рассмотрение выходит за рамки ведущего члена разложения по $1/N^2$; приведена процедура построения корреляционных функций во всех порядках разложения с применением диаграммной техники фейнмановского типа. Происхождение рекурсионной процедуры проясняется в разделе 6, в котором подробно описаны вариации относительно всего набора плоских координат. Сводка результатов содержится в разделе 7. В двух следующих

(совершенно новых по сравнению с работой [1]) разделах исследуется связь с моделью β -ансамблей (раздел 8), и на основе этого анализа строятся члены разложения свободной энергии (раздел 9). В приложениях А–В содержатся доказательства трех основных теорем из раздела 5, описывающих свойства корреляционных функций, а в приложении Г приведена новая формула, выражающая ведущий член разложения свободной энергии $\mathcal{F}_0$ через числа заполнения $\tilde{\epsilon}_i$; в матричных моделях сингулярный член этого разложения имеет вид $(\tilde{\epsilon}_i^2/2) \ln \tilde{\epsilon}_i$. В квантовой геометрии этот член оказывается пропорциональным интегралу от $\ln \Gamma(\tilde{\epsilon}_i)$, что представляет собой первый пример реальных вычислений в случае квантовых римановых поверхностей.

2. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА И РЕЗОЛЬВЕНТА

2.1. Решения уравнения Шредингера. Начнем с уравнения Шредингера

$$\hbar^2 \psi''(x) = U(x) \psi(x), \quad (2.1)$$

где $U(x)$ – многочлен четной степени $2d$, для которого можно определить полиномиальный “потенциал” $V(x)$ степени $d+1$ с помощью формулы

$$V'(x) = 2(\sqrt{U})_+ = \sum_{k=0}^d t_{k+1} x^k, \quad (2.2)$$

где $(\cdot)_+$ означает положительную часть ряда Лорана. На языке матричных моделей (см. раздел 8) величины $t_1, \dots, t_{d+1}$ называются *временами*, связанными с потенциалом $V(x)$. Также определим следующий многочлен степени $d-1$:

$$P(x) = \frac{(V')^2(x)}{4} - U(x) - \hbar \frac{V''(x)}{2}. \quad (2.3)$$

Наконец, введем величину

$$t_0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xP(x)}{V'(x)}, \quad (2.4)$$

t_0 – нормированное полное число собственных значений (частиц) или температура. Оставшиеся коэффициенты многочлена P фиксируются ниже с помощью введения в рассмотрение “чисел заполнения” ϵ_i .

2.1.1. Стоксовы секторы. Для функции $\psi(x)$, представляющей собой решение уравнения Шредингера, имеет место явление Стокса: хотя $\psi(x)$ представляет собой целую функцию, ее асимптотическое поведение оказывается разрывным вблизи точки ∞ , в которой наблюдается существенная особенность. Пусть $\theta_0 = \text{Arg}(t_{d+1})$ – аргумент старшего коэффициента потенциала $V(x)$. Определим стоксовы лучи как асимптотические направления, вдоль которых $\text{Re } V(x)$ асимптотически убывает,

$$L_k = \left\{ x: \text{Arg}(x) = -\frac{\theta_0}{d+1} + \pi \frac{k+1/2}{d+1} \right\},$$

и соответствующие стоксовы секторы

$$S_k = \left\{ x: \text{Arg}(x) \in \left[-\frac{\theta_0}{d+1} + \pi \frac{k-1/2}{d+1}, -\frac{\theta_0}{d+1} + \pi \frac{k+1/2}{d+1} \right] \right\},$$

т. е. S_k есть сектор между лучами L_{k-1} и L_k .

Заметим, что асимптотически $\text{Re } V(x) > 0$ в секторах с четными номерами и $\text{Re } V(x) < 0$ в секторах с нечетными номерами.

Рис. 1. Пример разбиения на стоксовы сектора и структура нулей для решения уравнения Шредингера $\psi(x)$, которое убывает в светлом секторе и возрастает во всех остальных секторах (степень потенциала $V(x)$ равна четырем).

2.1.2. *Явление Стокса. Убывающие решения.* Исследования уравнения Шредингера показывают, что $\psi(x)$ – целая функция, обладающая следующим разложением при больших x в каждом из секторов S_k :

$$\psi(x) \underset{S_k}{\sim} e^{\pm V(x)/2\hbar} x^{C_k} \left(A_k + \frac{B_k}{x} + \dots \right); \quad (2.5)$$

здесь знак $\pm$ может меняться при переходах между секторами, равно как и числа $A_k, B_k, C_k, \dots$ (и в общем случае все коэффициенты ряда по $1/x^j$ на бесконечности)¹⁾. В каждом секторе S_k имеется единственное решение, экспоненциально убывающее вдоль любого асимптотического направления внутри сектора. Теперь отделим решения в четных секторах от решений в нечетных секторах и рассмотрим множество $\{\psi_\alpha(x)\}$ решений, каждое из которых убывает в соответствующем четном секторе. Таким образом вводится *посекторная* система решений уравнения Шредингера.

Полезной оказывается теорема Стокса, утверждающая, что в случае асимптотического экспоненциального убывания функции $\psi(x)$ в некотором секторе то же самое асимптотическое поведение (2.5) оказывается справедливым и в двух примыкающих секторах (и, следовательно, $\psi(x)$ экспоненциально возрастает в этих двух секторах).

В случае общего положения (т. е. для потенциала $U(x)$ общего вида) решение $\psi_\alpha(x)$ убывает ровно в одном секторе S_α и экспоненциально возрастает во всех других секторах. Но в случае специальных потенциалов в уравнении Шредингера может случиться так, что $\psi_\alpha(x)$ будет экспоненциально убывать сразу в нескольких секторах (это будет означать, что $\psi_{\alpha_1}(x) = \psi_{\alpha_2}(x)$ при некоторых $\alpha_1 \neq \alpha_2$).

¹⁾ Соответствующий ряд имеет асимптотическую природу, а потому не может быть аналитически продолжен в другие секторы.

В дальнейшем в основном мы рассматриваем случай общего положения, и все функции ψ_α предполагаются различными, если не указано обратное.

Случай, исследованный в работе [15], был наиболее вырожденным: одно и то же решение ψ экспоненциально убывало в $d + 1$ секторах.

2.1.3. Нули функции ψ . Каждая из $\psi_\alpha(x)$ представляет собой целую функцию с существенной сингулярностью в точке ∞ и с изолированными нулями $s_i^{(\alpha)}$. Число этих нулей конечно или бесконечно. В последнем случае нули могут накапливаться только около бесконечно удаленной точки и только вблизи стоксовых лучей L_j , ограничивающих секторы (см. рис. 1). Такая концентрация нулей вдоль луча L_j имеет место тогда и только тогда, когда $\psi_\alpha(x)$ экспоненциально возрастает по обоим сторонам от стоксова луча. Поэтому накопления нулей функции $\psi_\alpha(x)$ не происходит вдоль лучей, граничащих с сектором с номером α , и, следовательно, эта функция может иметь лишь конечное число нулей внутри “расширенного” сектора, включающего в себя сектор с номером α и внутренности двух примыкающих секторов.

В случае потенциала $U(x)$ общего вида каждое из решений $\psi_\alpha(x)$ имеет бесконечное число нулей, и эти нули накапливаются на бесконечности вдоль всех лучей L_j с номерами $j \neq \alpha, \alpha - 1$. Важное свойство каждого решения ψ_α состоит в том, что

$$\operatorname{Res}_{s_i^{(\alpha)}} \frac{1}{\psi_\alpha^2(x)} = 0. \quad (2.6)$$

В работе [1] род уравнения Шредингера определялся как число лучей, вдоль которых имеет место накопление нулей для выбранной функции ψ_0 . Это определение зависит, однако, от выбранной схемы вычислений, так что, вообще говоря, можно получить различные ответы для рода при одной и той же функции $U(x)$. Полное понимание этого явления пока отсутствует; возможное объяснение заключается в том, что на самом деле рассматриваются различные сечения некоторой объемлющей квантовой поверхности бесконечного рода.

2.1.4. Листы. В секторе S_α справедливо асимптотическое разложение

$$\psi_\alpha(x) \sim e^{-\hbar V(x)/2} x^{t_0/\hbar} \left(A_\alpha + \frac{B_\alpha}{x} + \dots \right),$$

при этом функция ψ_α обладает таким же асимптотическим разложением и в двух примыкающих секторах. Листом квантовой римановой поверхности с номером α будем считать объединение этих трех секторов с возможным аналитическим продолжением в ограниченную область комплексной плоскости. Будем рассматривать только листы, имеющие четные номера α , причем, в отличие от работы [1], будем рассматривать эти листы на равных правах: они все будут эквивалентны в рамках подхода, развиваемого в настоящей работе. Листы, очевидно, перекрываются, и необходимо ввести границы (разрезы) между ними.

2.2. Резольвента. Первая составная часть нашей стратегии состоит в том, чтобы определить резольвенту в виде, максимально похожем на ее определение в матричных моделях.

Определим резольвенту посекторно: для $x \in S_\alpha$

$$\omega(x) = \hbar \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \frac{V'(x)}{2} \quad (2.7)$$

Рис. 2. Исходный контур интегрирования $\mathcal{C}_D$.

(если какая-либо величина определяется посекторно, то номер соответствующего сектора помещается над ее обозначением, как это сделано в аргументе резольвенты). Из определения следует, что $\omega(x)$ имеет простые полюсы в нулях функции ψ_α в соответствующем секторе. Границы между секторами перекрываются, но в дальнейшем они будут зафиксированы в более явном виде (см. картину разбиения комплексной плоскости с помощью $\mathcal{A}$ -циклов). С помощью прямого вычисления получим

$$\omega(x) \sim \frac{t_0}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow \infty_\alpha, \infty_{\alpha \pm 1},$$

т.е. на каждом листе резольвента обладает асимптотическими свойствами, характерными для обычной резольвенты в матричных моделях.

Главным свойством $\omega(x)$ является то, что резольвента удовлетворяет уравнению Риккати. Имеем

$$\begin{aligned} V'(x)\omega(x) - \omega^2(x) - \hbar\omega'(x) &= \frac{(V')^2(x)}{4} - \hbar^2 \frac{\psi_\alpha''(x)}{\psi_\alpha(x)} - \hbar \frac{V''(x)}{2} = \\ &= \frac{(V')^2(x)}{4} - U(x) - \hbar \frac{V''(x)}{2} = P(x), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $P(x)$ – многочлен степени $d-1$, причем этот многочлен один и тот же на всех листах введенной ниже квантовой римановой поверхности.

3. КВАНТОВАЯ РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ

В этом разделе определяются понятия $\mathcal{A}$ - и $\mathcal{B}$ -циклов и дуальных к ним дифференциалов первого рода.

3.1. Контур интегрирования $\mathcal{C}_D$ и набор $\mathcal{A}$ - и $\mathcal{B}$ -циклов. В работах по матричным моделям (на ранней стадии, прежде чем происходит переход к вычислению вычетов в точках ветвления) возникает специальный контур интегрирования $\mathcal{C}_D$,

Рис. 3. Пример деформации контура C_D от бесконечностей к набору $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклов.

который обходит вокруг всех сингулярностей резольвент, оставляя снаружи прочие возможные точки особенностей. Аналогом такого контура в рассматриваемом случае будет объединение $d+1$ контуров, по одному контуру на каждый лист, которые попарно совпадают в дальней асимптотической области в нечетных стоксовых секторах и отделяют все нули функций ψ_α от соответствующих бесконечностей ∞_α (что всегда возможно, так как на каждом листе имеется лишь конечное число таких нулей). Имеем для произвольной функции $f(\tilde{x})$, у которой не происходит асимптотической концентрации нулей вдоль граничных направлений сектора S_α (см. рис. 2),

$$\oint_{C_D} dx f(x) \equiv \sum_{\alpha} \int_{\infty_{\alpha-1}}^{\infty_{\alpha+1}} dx f(\tilde{x}). \quad (3.1)$$

Здесь и далее будем предполагать, что функция $f(\tilde{x})$ может содержать зависимость только от конечного числа производных функции $\psi_\alpha(x)$, а символ $f(\tilde{x})$ при этом обозначает то, что в качестве аргумента подставлено решение $\psi_\alpha(x)$.

Теперь деформируем контур интегрирования C_D , продвинув части контуров через “центральную” область комплексной плоскости, попутно вычисляя вычеты в нулях $s_i^{(\alpha)}$ соответствующих функций ψ_α , как показано на рис. 3. В процессе этого продвижения некоторые из контуров разрываются и представляются в виде объединений новых контуров, которые связывают различные асимптотические направления. В результате получается система, содержащая в точности $2d$ контуров, которые (если не заботиться о вычетах в нулях $s_i^{(\alpha)}$) попарно отождествляются и тем самым представляют собой края d “разрезов”. Таким образом, мы имеем полную систему из d разрезов $\tilde{\mathcal{A}}_i$, $i = 1, \dots, d$, отделяющих друг от друга все бесконечности с четными номерами²⁾ и задающих соответствующие листы квантовой римановой поверхности. Если функции $\psi_\alpha(x)$ на разных листах совпадают, то эти листы можно отождествить. Отметим, что такая конструкция для системы разрезов безусловно

²⁾В дальнейшем “точка” бесконечности с определенным номером отождествляется с соответствующим асимптотическим направлением.

неоднозначна, кроме того, вычеты внутри каждого из листов можно распределить произвольным образом по контурам, ограничивающим этот лист.

Будем называть разрез, отделяющий друг от друга два листа, *циклом* $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$; такой разрез характеризуется четырьмя индексами: α_+ и α_- – номера листов, отделяемых друг от друга этим разрезом (в рассматриваемой классификации эти номера четные); $\tilde{\alpha}_+$ и $\tilde{\alpha}_-$ – номера бесконечностей, к которым асимптотически приближается данный разрез (нечетные числа).

Каждому полному набору $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклов $\{\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\}_{\alpha=1}^d$ можно единственным образом поставить в соответствие набор $\tilde{\mathcal{B}}$ -циклов $\{\tilde{\mathcal{B}}_\alpha\}_{\alpha=1}^d$, которые попарно проходят между бесконечностями с четными номерами α_+ и α_- так, что индекс пересечений $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha \circ \tilde{\mathcal{B}}_\beta = \delta_{\alpha,\beta}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Интегралы по циклу $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ и по сопряженному циклу $\tilde{\mathcal{B}}_\alpha$ имеют вид (см. рис. 4)

$$\oint_{\tilde{\mathcal{A}}_\alpha} dx f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\infty_{\tilde{\alpha}_-}}^{\infty_{\tilde{\alpha}_+}} dx (f(\overset{\alpha_+}{x}) - f(\overset{\alpha_-}{x})) + \sum_{s_i^{(\alpha_\pm)}(\alpha)} \text{Res} f(\overset{\alpha_\pm}{x}), \quad (3.2)$$

$$\oint_{\tilde{\mathcal{B}}_\alpha} dx f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\infty_{\alpha_-}}^{\infty_{\alpha_+}} dx (f(\overset{\alpha_+}{x}) - f(\overset{\alpha_-}{x})), \quad (3.3)$$

где вычеты в первой формуле берутся в тех нулях функции $\psi_{\alpha_\pm}$, которые ассоциированы с соответствующим контуром.

Поскольку номер листа присваивается в соответствии с определениями (3.2) и (3.3) интегралов по циклам, в дальнейшем индексы листов при соответствующих переменных интегрирования будут опускаться.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Распределение вычетов на листе с номером α по контурам, ограничивающим этот лист, произвольно, таким образом, в определении (3.2) интегралов по $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклам имеет место (дискретный) произвол. При этом понятие интегрирования по контуру $\mathcal{C}_D$ определяется однозначно и не зависит от выбора $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклов. Очевидно,

$$\oint_{\mathcal{C}_D} dx f(x) = \sum_{i=1}^d \oint_{\tilde{\mathcal{A}}_i} dx f(x).$$

Введем теперь “настоящие” $\mathcal{A}$ - и $\mathcal{B}$ -циклы, служащие прямыми аналогами $\tilde{\mathcal{A}}$ - и $\tilde{\mathcal{B}}$ -циклов на обычной римановой поверхности. Для этого выберем среди $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклов, например, последний цикл $\tilde{\mathcal{A}}_d$ и сопряженный ему цикл $\tilde{\mathcal{B}}_d$. После этого произведем отождествления $\mathcal{A}_i = \tilde{\mathcal{A}}_i$ и $\mathcal{B}_i = \tilde{\mathcal{B}}_i - \tilde{\mathcal{B}}_d$, $i = 1, \dots, d-1$, в смысле определения 3.1, т. е.

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{A}_i} dx f(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\tilde{\mathcal{A}}_i} dx f(x), \\ \oint_{\mathcal{B}_i} dx f(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \oint_{\tilde{\mathcal{B}}_i} dx f(x) - \oint_{\tilde{\mathcal{B}}_d} dx f(x), \quad i = 1, \dots, d-1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

и будем называть число $g = d-1$ независимых $\mathcal{A}$ - и $\mathcal{B}$ -циклов *родом* квантовой римановой поверхности.

Нововведенные $\mathcal{A}$ - и $\mathcal{B}$ -циклы по-прежнему удовлетворяют стандартной формуле $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta = \delta_{\alpha,\beta}$ для индекса пересечений, и основная часть конструкций настоящей

Рис. 4. Расположение $\tilde{A}$ -циклов (штрих-пунктирные линии) и $\tilde{B}$ -циклов (штриховые линии) для поверхности из примера на рис. 3.

работы зависит только от гомологического класса путей $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}_\alpha$ при асимптотическом стремлении к бесконечности. Однако в промежуточных формулах удобно ввести представителей, а именно точки пересечений P_α такие, что $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{B}_\alpha = \{P_\alpha\}$.

3.2. Числа заполнения. В моделях случайных матриц числа заполнения суть просто интегралы от резольвенты по $\mathcal{A}$ -циклам. Тогда если выбранные $\mathcal{A}$ -циклы лежат на физическом листе (что всегда возможно, например, в гиперэллиптическом случае), то скачок резольвенты вдоль соответствующего разреза задает плотность собственных значений, а сами интегралы по $\mathcal{A}$ -циклам определяют, какая доля собственных значений попадает на соответствующий отрезок распределения этих собственных значений. Эти доли поэтому называются числами заполнения.

В случае квантовой поверхности определим “числа заполнения” $\tilde{\epsilon}_\alpha$ следующим образом:

$$\tilde{\epsilon}_\alpha = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\tilde{\mathcal{A}}_\alpha} dx \omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\infty_{\tilde{\alpha}-}}^{\infty_{\tilde{\alpha}+}} dx (\omega(\overset{\alpha+}{x}) - \omega(\overset{\alpha-}{x})), \quad \alpha = 1, \dots, d. \quad (3.5)$$

Заметим, что это определение зависит от расположения контуров, и (в случае, когда граница листа поверхности состоит из более чем одного $\tilde{\mathcal{A}}$ -цикла) также имеет место свобода распределения вычетов внутри листа по различным $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклам. Тем самым числа заполнения определены с точностью до добавления целых чисел, умноженных на $\hbar$.

Для разности в правой части (3.5) имеем

$$\omega(\overset{\alpha+}{x}) - \omega(\overset{\alpha-}{x}) = \frac{w_{\alpha+, \alpha+}}{\psi_{\alpha+}(x)\psi_{\alpha-}(x)},$$

где $w_{\alpha+, \alpha+} = \psi'_{\alpha+} \psi_{\alpha-} - \psi'_{\alpha-} \psi_{\alpha+}$ – вронскиан двух решений. Поэтому эта разность экспоненциально убывает в секторах, в которых оба решения $\psi_{\alpha+}$ и $\psi_{\alpha-}$ возрастают,

и можно отождествить асимптотические области для интегралов по $\mathcal{A}$ -циклам с “точками ветвления”.

Имеет место равенство $\sum_{\alpha=1}^d \tilde{\epsilon}_{\alpha} = t_0$, которое вытекает из того простого факта, что сумма интегралов по $\mathcal{A}$ -циклам эквивалентна вычислению интеграла по $\mathcal{C}_D$. Отсюда также следует, что в качестве независимых переменных необходимо выбрать только $d - 1 = g$ переменных среди $\tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_d$, если величина t_0 интерпретируется как независимая переменная. Естественно выбрать в качестве этих g переменных ϵ_{α} числа заполнения, отвечающие циклам $\mathcal{A}_{\alpha}$ квантовой римановой поверхности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. В случае $g = -1$, рассмотренном в работе [1], единственным числом заполнения оказывается $\tilde{\epsilon}_d = t_0$, и оно задается (конечной) суммой вычетов функции ω в нулях s_i :

$$\tilde{\epsilon}_d = t_0 = \sum_i \operatorname{Res}_{s_i} \omega = \hbar \# \{s_i\},$$

так что t_0 в этом случае оказывается дискретной величиной. При $g \geq 0$ переменные $\tilde{\epsilon}_{\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, g$, и t_0 могут принимать произвольные, не обязательно целые значения.

3.3. Функции первого рода. После того как определено понятие циклов, следующий важный шаг состоит в задании дифференциалов первого, второго и третьего родов. Начнем с определения дифференциалов первого рода.

Пусть h_k , $k = 1, \dots, d - 1$, – базис в комплексном векторном пространстве многочленов степени не выше $d - 2$. Введем функции

$$v_k(\tilde{x}) = \frac{1}{\hbar \psi_{\alpha}^2(\tilde{x})} \int_{\infty_{\alpha}}^x dx' h_k(x') \psi_{\alpha}^2(x'). \quad (3.6)$$

При этом для всех листов римановой поверхности используется один и тот же многочлен $h_k(x')$.

Заметим, что, поскольку каждая функция $\psi_{\alpha}(x)$ представляет собой решение уравнения Шредингера, $v_k(\tilde{x})$ в точках $s_j^{(\alpha)}$ (в нулях функции ψ_{α}) имеет полюсы второго порядка с нулевыми вычетами и обладает асимптотическим поведением $O(1/x^2)$ в секторе S_{α} и внутри всех секторов, в которых функция ψ_{α} экспоненциально возрастает (в случае, когда многочлен $h_k(x')$ имеет степень меньше $d - 2$). Тем самым в случае общего положения следующие интегралы оказываются хорошо определенными:

$$I_{k,\alpha} = \oint_{\mathcal{A}_{\alpha}} dx v_k(x), \quad \alpha = 1, \dots, g, \quad k = 1, \dots, d - 1.$$

Если матрица с элементами $I_{k,\alpha}$ имеет полный ранг (что и предполагается в дальнейшем), то можно выбрать канонически нормированный базис многочленов h_k , $k = 1, \dots, d - 1$, такой, что

$$I_{k,\alpha} = \delta_{k,\alpha}. \quad (3.7)$$

Таким образом, функции $v_k(x)$, $k = 1, \dots, g$, оказываются естественными аналогами канонически нормированных голоморфных форм (дифференциалов первого рода). Обобщим теперь это понятие на случай *мероморфных* дифференциалов (дифференциалов Уизема–Кричевера) [16]. Для этого рассмотрим следующий базис h_k , $k = 1, 2, \dots$, в пространстве многочленов произвольных степеней. Первые $d - 1$

элементов этого базиса суть исходные многочлены h_k , каждый из которых имеет степень не выше $d - 2$, а каждый многочлен h_k при $k > d - 1$ имеет в точности степень $k - 1$ и выбирается из следующих условий. Определим функции $v_k(\tilde{x})$ при $k > d - 1$ с помощью той же формулы (3.6), что и выше. Пусть теперь многочлен h_k имеет произвольную (фиксированную) степень $k - 1$. Коэффициенты многочлена h_k , $k \geq d - 1$, однозначно определяются следующими условиями нормировки:

условие вычета

$$\oint_{C_D} \frac{dx}{x^l} v_k(x) = \delta_{l, k-d}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad k \geq d - 1; \quad (3.8)$$

условие нормировки

$$\oint_{A_\alpha} dx v_k(x) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, d - 1, \quad k \geq d. \quad (3.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Хотя функции $v_k(\tilde{x})$ в общем случае растут при $x \rightarrow \infty$, как x^{k-d} , интегралы (3.8) и условия нормировки (3.9) хорошо определены при произвольных l и k . Это следует из того, что разность $v_k(\tilde{x}^+) - v_k(\tilde{x}^-)$ становится экспоненциально малой при $x \rightarrow \infty_{\tilde{\alpha} \pm}$ для любого k , и ее можно проинтегрировать вдоль контура C_D с весом, представляющим собой произвольную функцию полиномиального роста. Интеграл (3.8) тем самым представляет собой естественный аналог вычета порядка $l + 1$ на бесконечности.

3.4. Риманова матрица периодов. В стандартной алгебраической геометрии интересным объектом оказывается риманова матрица периодов, задаваемая интегралами от голоморфных дифференциалов по $\mathcal{B}$ -циклам. Таким образом, аналогичная “квантовая” риманова матрица периодов $\tau_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, g$, должна задаваться формулой

$$\tau_{\alpha,i} \stackrel{\text{def}}{=} \oint_{B_\alpha} dx v_i(x).$$

Это определение имеет смысл, поскольку функции $v_i(x)$, $i = 1, \dots, g$, асимптотически ведут себя, как $O(1/x^2)$, в секторах, асимптотических для $\mathcal{B}$ -циклов. Поскольку вычеты функции $v_i(\tilde{x})$ во всех точках $s_j^{(\alpha)}$ равны нулю, эти интегралы зависят только от гомологических классов $\mathcal{B}$ -циклов.

В полной аналогии с классической римановой матрицей периодов имеет место следующее свойство.

ТЕОРЕМА 3.1. Матрица периодов τ симметрична: $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$.

Этот результат следует из теоремы 4.8 ниже, поскольку

$$\oint_{B_\beta} dx \oint_{B_\alpha} dz B(x, z) = 2i\pi \oint_{B_\beta} dx v_\alpha(x) = 2i\pi \tau_{\beta,\alpha},$$

после чего можно применить равенство $B(\tilde{x}, \tilde{z}) = B(\tilde{z}, \tilde{x})$ (см. теорему 4.9 о симметричности ядра Бергмана).

4. ЯДРА РЕКУРСИИ

Одним из важных геометрических объектов, рассмотренных в работах [3] и [15], было “ядро рекурсии” $K(x, z)$. Оно применялось в контексте матричных моделей [5] для решения петлевых уравнений. Аналог ядра $K(x, z)$ будет использован ниже при построении дифференциалов второго и третьего родов.

4.1. Ядро рекурсии. Сначала определим ядро

$$\widehat{K}(\tilde{x}, z) = \frac{1}{\hbar \psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x \frac{dx'}{x' - z} \psi_\alpha^2(x') \quad (4.1)$$

и для каждого $\alpha = 1, \dots, g$ зададим величины

$$\hbar C_\alpha(z) = \oint_{\mathcal{A}_\alpha} dx \widehat{K}(x, z) \equiv \int_{\infty_{\tilde{\alpha}-}}^{\infty_{\tilde{\alpha}+}} dx (K(\tilde{x}^+, z) - K(\tilde{x}^-, z)). \quad (4.2)$$

В этих выражениях необходимо также определить контуры интегрирования по переменной x' , идущие от бесконечностей $\infty_{\alpha\pm}$ до точки x , принадлежащей циклу $\mathcal{A}_\alpha$. Будем предполагать, что эти контуры сначала идут от соответствующей бесконечности вдоль отрезка сопряженного цикла $\mathcal{B}_\alpha$, принадлежащего листу с номером $\alpha_\pm$, до точки пересечения P_α ; после этой точки интегрирование производится вдоль цикла $\mathcal{A}_\alpha$ по направлению к конечной точке x (см. рис. 5).

Рис. 5. Путь интегрирования по переменной x' в выражении для ядра рекурсии $K(\tilde{x}, y)$.

Чтобы найти область определения функции $\widehat{K}(\tilde{x}, z)$, слегка деформируем контуры интегрирования по краям $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклов, как показано на рис. 6; тогда для переменной z , лежащей в области, которая оказывается “внутренней” относительно интегрирований, начинающихся в точках бесконечностей, для всех функций $\psi_{\gamma\pm}$, т. е. в области, которая отделена от всех бесконечностей $\infty_{\gamma\pm}$ раздвинутыми краями $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклов, ядро $\widehat{K}(\tilde{x}, z)$ хорошо определено (и в нем появляются логарифмические разрывы, если продолжить переменную z через границу листа S_α).

Опишем теперь свойства аналитичности введенных функций.

При фиксированном x ядро $\widehat{K}(\tilde{x}, z)$ определено для переменной z , находящейся в заштрихованной области, представленной на рис. 6.

Выбрав контур интегрирования между ∞_α и x , получим, что функция $\widehat{K}(\tilde{x}, z)$ определена для значений переменной z , лежащих вне этого контура. При пересечении контура $]\infty_\alpha, x]$ функция $\widehat{K}(\tilde{x}, z)$ испытывает скачок по переменной z , равный

$$\delta_z \widehat{K}(\tilde{x}, z) = \frac{2i\pi}{\hbar} \frac{\psi_\alpha^2(z)}{\psi_\alpha^2(x)}.$$

Рис. 6. Область определения переменной z (заштрихована) в формуле (4.1) (при этом интегралы по $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклам слегка деформированы).

Похожее утверждение справедливо и для $C_\alpha(z)$: эта функция испытывает скачок, когда переменная z пересекает линию цикла $\mathcal{A}_\beta$:

$$\delta_z C_\beta(z) = \frac{2i\pi\psi_{\beta\pm}^2(z)}{\hbar} \int_z^{\infty\tilde{\beta}\pm} \frac{dx''}{\psi_{\beta\pm}^2(x'')}. \quad (4.3)$$

Определим теперь ядро рекурсии $K(\tilde{x}, z)$, которое лежит в основе нашего построения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Ядро рекурсии $K(\tilde{x}, z)$ имеет вид

$$K(\tilde{x}, z) = \hat{K}(\tilde{x}, z) - \sum_{j=1}^{d-1} v_j(\tilde{x}) C_j(z).$$

Оно определено для значений z , лежащих в заштрихованной области на рис. 6.

ТЕОРЕМА 4.1. Ядро K имеет следующие свойства.

При фиксированном z и при $x \rightarrow \infty$ во всех секторах $K(\tilde{x}, z) \sim O(x^{-2})$ (если только функция $\psi_\alpha(x)$ возрастает во всех секторах, кроме S_α).

Нормировочное условие имеет вид

$$\oint_{\mathcal{A}_j} dx K(x, z) = 0, \quad j = 1, \dots, d-1. \quad (4.4)$$

В нулях $s_j^{(\alpha)}$ функции ψ_α ядро $K(\tilde{x}, z)$ имеет полюсы второго порядка с вычетами, равными нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из асимптотического поведения функций $v_k(\tilde{x})$ (3.6) и ядра $\hat{K}(\tilde{x}, z)$, $\hat{K}(\tilde{x}, z) \sim O(x^{-d})$. Второе утверждение вытекает из определения ядра K , а третье – из формулы (2.6).

ТЕОРЕМА 4.2. Во всех секторах на бесконечностях имеет место асимптотическое поведение $K(\overset{\alpha}{x}, z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} O(z^{-d})$. Более точно,

$$K(\overset{\alpha}{x}, z) \sim - \sum_{k=d-1}^{\infty} \frac{K_k(\overset{\alpha}{x})}{z^{k+1}},$$

где

$$K_k(\overset{\alpha}{x}) = \widehat{K}_k(\overset{\alpha}{x}) - \sum_{j=1}^g v_j(\overset{\alpha}{x}) \oint_{\mathcal{A}_j} dx' \widehat{K}_k(x'), \quad (4.5)$$

$$\widehat{K}_k(\overset{\alpha}{x}) = \frac{1}{\hbar \psi_{\alpha}^2(x)} \int_{\infty_{\alpha}}^x dx' (x')^k \psi_{\alpha}^2(x'), \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно разложить ядро $\widehat{K}(\overset{\alpha}{x}, z)$ в ряд:

$$\widehat{K}(\overset{\alpha}{x}, z) \sim - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{K}_k(\overset{\alpha}{x})}{z^{k+1}},$$

где $\widehat{K}_k(\overset{\alpha}{x})$ определены в (4.6), и тем самым для $K_k(\overset{\alpha}{x})$ выполнено (4.5). Представим $(x')^k$ при $k \leq d-2$ в виде линейной комбинации многочленов $h_j(x')$,

$$(x')^k = \sum_{\beta=1}^{d-1} b_{k,\beta} h_{\beta}(x'),$$

тогда из нормировочного условия непосредственно следует, что

$$\oint_{\mathcal{A}_{\alpha}} dx' \widehat{K}_k(x') = b_{k,\alpha},$$

и тем самым $K_k(x) = 0$ при $k \leq d-2$, откуда получаем, что $K(x, z) = O(z^{-d})$. Теорема доказана.

4.2. Дифференциал третьего рода: ядро $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$. Определим теперь второе важное ядро, которое представляет собой аналог дифференциала третьего рода.

Ядро $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ имеет вид

$$G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = -\hbar \psi_{\beta}^2(z) \partial_z \frac{K(\overset{\alpha}{x}, z)}{\psi_{\beta}^2(z)} = 2\hbar \frac{\psi'_{\beta}(z)}{\psi_{\beta}(z)} K(\overset{\alpha}{x}, z) - \hbar \partial_z K(\overset{\alpha}{x}, z). \quad (4.7)$$

С помощью интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = & -\frac{1}{x-z} + \frac{2}{\psi_{\alpha}^2(x)} \int_{\infty_{\alpha}}^x \frac{dx'}{x'-z} \psi_{\alpha}^2(x') \left(\frac{\psi'_{\alpha}(x')}{\psi_{\alpha}(x')} - \frac{\psi'_{\beta}(z)}{\psi_{\beta}(z)} \right) - \\ & - \hbar \sum_{j=1}^{d-1} v_j(\overset{\alpha}{x}) \psi_{\beta}^2(z) \partial_z \frac{C_j(z)}{\psi_{\beta}^2(z)}. \end{aligned}$$

В дальнейшем рассмотрении часто встречается ситуация, в которой имеются два контура интегрирования $\mathcal{C}_{D_x}$ и $\mathcal{C}_{D_z}$, и нам необходимо изменить на противоположный порядок интегрирования (или, что то же самое, порядок, в котором эти два контура пересекают $\mathcal{B}$ -циклы). Из определения $\mathcal{A}$ -циклов с очевидностью следует, что при этом необходимо переставить переменные x и z внутри одного и того же сектора. Таким образом, требуется вывести перестановочные соотношения для $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ при $\alpha = \beta$. Тогда при $x \rightarrow z$ найдем, что $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\alpha}{z}) \sim 1/(z - x)$, т. е. эта функция имеет простой полюс с вычетом при $z = x$, равным единице. Поскольку комбинация $\frac{1}{x' - z} \left(\frac{\psi'_\alpha(x')}{\psi_\alpha(x')} - \frac{\psi'_\alpha(z)}{\psi_\alpha(z)} \right)$ регулярна при $x' = z$, изменение порядка интегрирования по $\mathcal{C}_{D_x}$ и $\mathcal{C}_{D_z}$ приводит просто к добавлению вычета в точке $z = x$; логарифмических разрывов не возникает.

ТЕОРЕМА 4.3. *Функция $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ аналитична по переменной x и имеет простой полюс с вычетом, равным -1 , в точке $x = z$ при $\alpha = \beta$ и полюсы второго порядка в точках $s_j^{(\alpha)}$ (нулях функции $\psi_\alpha(x)$) с вычетами, равными нулю, а также, возможно, существенную сингулярность на бесконечности.*

Функция $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ аналитична по переменной z и имеет простой полюс с вычетом, равным $+1$, в точке $z = x$ при $\alpha = \beta$ и простые полюсы в точках $z = s_j^{(\beta)}$; испытывает скачок при пересечении $\mathcal{A}_\gamma$ -циклов, $\gamma = 1, \dots, g$ (этот скачок имеет разный знак в зависимости от того, какая из двух линий, γ_+ или γ_- , цикла $\mathcal{A}_\gamma$ пересекается, при пересечении последнего цикла $\tilde{\mathcal{A}}_d$ разрыва не происходит),

$$\delta_z G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta_\pm}{z}) = \mp 2i\pi v_\beta(\overset{\alpha}{x}).$$

Также имеет место формула

$$\oint_{\mathcal{A}_\alpha} dx G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все скачки функции $K(\overset{\alpha}{x}, z)$, кроме тех, которые возникают в выражениях (4.3) для $C_j(z)$, пропорциональны $\psi_\alpha^2(z)$, и потому равны нулю скачки функции $G(x, z)$ (4.7). Скачок функции $C_j(z)$ дает $\mp 2\pi i$, следовательно, скачок функции $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ равен $\delta_z G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta_\pm}{z}) = \mp 2i\pi v_\beta(\overset{\alpha}{x})$.

Функция $K(\overset{\alpha}{x}, z)$ регулярна при $z = s_j^{(\beta)}$, откуда непосредственно следует, что функция $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ имеет простые полюсы с вычетами, равными $-2\hbar K(x, s_j^{(\beta)})$, в точках $z = s_j^{(\beta)}$.

По переменной x функция $K(\overset{\alpha}{x}, z)$ имеет полюсы второго порядка с вычетами, равными нулю, в точках $x = s_j^{(\alpha)}$, и это свойство будет выполняться также и для функции $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$.

Обращение в нуль интегралов по $\mathcal{A}$ -циклам вытекает непосредственно из формулы (4.4). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.4. При $x \rightarrow \infty_\alpha$ для любого α имеет место асимптотическое равенство $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = O(1/x^2)$. При этом для больших z в секторе S_γ

$$\lim_{z \rightarrow \infty_\gamma} G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = G(\overset{\alpha}{x}, \infty_\beta) = \eta_{\gamma, \beta} t_{d+1} K_{d-1}(\overset{\alpha}{x}), \quad (4.8)$$

где $\eta_{\gamma, \beta} = \pm 1$ в зависимости от характера асимптотического поведения функции $\psi_\beta \sim e^{\pm V/2\hbar}$ в секторе S_γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Характер поведения функции $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ при больших x следует из теоремы 4.1. Характер поведения при больших z определяется теоремой 4.2, т. е. $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) \sim \pm V'(z) K(\overset{\alpha}{x}, z) \sim \pm t_{d+1} K_{d-1}(\overset{\alpha}{x})$. Знак в этой формуле зависит от поведения решения в данном секторе.

4.3. Ядро Бергмана $B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$. В классической алгебраической геометрии ядро Бергмана представляет собой фундаментальный бидифференциал второго рода, он задается производной от дифференциала третьего рода. Применяя то же определение, что и в работе [15], положим

$$B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = -\frac{1}{2} \partial_z G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}).$$

Ядро B будем называть “квантовым” ядром Бергмана.

ТЕОРЕМА 4.5. Квантовое ядро Бергмана $B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ – аналитическая функция от x . При $\alpha = \beta$ она имеет полюс второго порядка с нулевым вычетом в точке $x = z$ по обоим переменным x и z и полюсы второго порядка с нулевыми вычетами по x и z в соответствующих нулях $s_j^{(\alpha)}$ и $s_j^{(\beta)}$, а также, возможно, существенную особенность в бесконечности. Скачок при пересечении $\mathcal{A}$ -циклов, имевший место в ядре G , устраняется дифференцированием, так что функция $B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ аналитична во всей комплексной плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все указанные свойства следуют из свойств функции $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$, описанных в теореме 4.3. В частности, единственный скачок функции $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ происходит при пересечении $\mathcal{A}$ -циклов и не зависит от z , и потому функция $B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ оказывается непрерывной.

ТЕОРЕМА 4.6. При $x \rightarrow \infty$ во всех секторах $B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = O(1/x^2)$ и при $z \rightarrow \infty$ во всех секторах $B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = O(1/z^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Такое поведение ядра непосредственно следует из поведения функции $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ при больших x и z .

ТЕОРЕМА 4.7. Ядро B удовлетворяет следующим петлевым уравнениям:

$$\left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x \right) \left(B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) - \frac{1}{2(x-z)^2} \right) + \partial_z \frac{\frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} - \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)}}{x-z} = P_2^{(0)}(x, \overset{\beta}{z}), \quad (4.9)$$

где $P_2^{(0)}(x, z)$ – многочлен по переменной x степени не выше $d - 2$, и

$$\left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) \left(B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) - \frac{1}{2(x-z)^2}\right) + \partial_x \frac{\frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} - \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)}}{x-z} = \tilde{P}_2^{(0)}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}), \quad (4.10)$$

где $\tilde{P}_2^{(0)}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ – многочлен по переменной z степени не выше $d - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с того, что докажем справедливость первого из петлевых уравнений для $B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$. Пусть

$$\widehat{B}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = \frac{1}{2} \partial_z \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} - \partial_z\right) \widehat{K}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}),$$

т. е. мы имеем

$$B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = \widehat{B}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) - \sum_{j=1}^{d-1} v_j(\overset{\alpha}{x}) \oint_{\mathcal{A}_j} dx'' \widehat{B}(x'', \overset{\beta}{z}).$$

Так как $h_j(x) = (2\psi'_\alpha(x)/\psi_\alpha(x) + \partial_x) v_j(\overset{\alpha}{x})$ представляет собой многочлен степени не выше $d - 2$, достаточно доказать, что для $\widehat{B}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ выполнено уравнение (4.9). Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x\right) \widehat{B}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) &= \frac{1}{2} \partial_z \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} - \partial_z\right) \frac{1}{x-z} = \\ &= -\frac{1}{(x-z)^3} + \partial_z \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)(x-z)}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x\right) \left(\widehat{B}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) - \frac{1}{2(x-z)^2}\right) + \partial_z \frac{\frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} - \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)}}{x-z} = 0.$$

Это завершает доказательство справедливости уравнения (4.9), в котором следует положить

$$P_2^{(0)}(x, z) = - \sum_{j=1}^g h_j(x) \oint_{\mathcal{A}_j} dx'' \widehat{B}(x'', \overset{\beta}{z}).$$

Выведем теперь второе петлевое уравнение для $B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$. Имеем

$$\left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) \widehat{B}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}) = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) \partial_z \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} - \partial_z\right) \widehat{K}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z}),$$

где дифференциальный оператор в правой части имеет вид

$$\widehat{U}(z) = -\frac{1}{2} \partial_z^3 + \frac{2}{\hbar^2} U(z) \partial_z + \frac{1}{\hbar^2} U'(z), \quad (4.11)$$

а потому не зависит от того, какое решение $\psi_\beta(z)$ берется в качестве исходного. Этот оператор есть не что иное, как оператор Гельфанда–Дикого [17]. Тогда получим

$$\begin{aligned} \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) \widehat{B}(\vec{x}, \vec{z}) &= \\ &= \frac{1}{\psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x dx' \psi_\alpha^2(x') \left(-\frac{3}{(x' - z)^4} + \frac{2U(z)}{(x' - z)^2} + \frac{U'(z)}{x' - z} \right). \end{aligned}$$

Трижды проинтегрировав первое слагаемое по частям, введя обозначение $Y_\alpha(x) = \psi'_\alpha(x)/\psi_\alpha(x)$ (и учитывая, что $Y'_\alpha + Y_\alpha^2 = U$), получим

$$\begin{aligned} \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) \widehat{B}(\vec{x}, \vec{z}) &= \frac{1}{(x - z)^3} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{Y_\alpha(x)}{x - z} + \\ &+ \frac{1}{\psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x dx \psi_\alpha^2(x') \left(2 \frac{U(z) - U(x')}{(x' - z)^2} + \frac{U'(z) + U'(x')}{x' - z} \right). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что имеет место формула

$$\begin{aligned} \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) \left(\widehat{B}(\vec{x}, \vec{z}) - \frac{1}{2(x - z)^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{Y_\alpha(x) - Y_\beta(z)}{x - z} &= \\ = \frac{1}{\psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x dx' \psi_\alpha^2(x') \left(2 \frac{U(z) - U(x')}{(x' - z)^2} + \frac{U'(z) + U'(x')}{x' - z} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Полученное выражение, очевидно, есть полином по переменной z . Выражение в скобках в правой части формулы (4.12) представляет собой антисимметричный многочлен от x' и z степени не выше $2d - 2$. Более того, все слагаемые с $(x')^k$ при $k \leq d - 2$ оказываются после интегрирования линейными комбинациями дифференциалов первого рода $v_j(\vec{x})$ и тождественно равны нулю при взятии проекции на подпространство функций с нулевыми интегралами по $\mathcal{A}$ -циклам. Поэтому член с минимальной степенью по x' , дающий вклад в ответ, пропорционален $(x')^{d-1}$. Но член $(x')^{d-1}z^{d-1}$ в скобках отсутствует в силу свойства антисимметричности, так что старший член, дающий ненулевой вклад, пропорционален $(x')^{d-1}z^{d-2}$, откуда непосредственно следует, что построенный многочлен $\tilde{P}_2^{(0)}(\vec{x}, z)$ имеет максимальную степень не более $d - 2$ по переменной z .

ТЕОРЕМА 4.8. Для каждого $\alpha = 1, \dots, g$ имеют место соотношения

$$\oint_{\mathcal{A}_i} dx B(x, \vec{z}) = 0, \quad \oint_{\mathcal{A}_j} dz B(\vec{x}, z) = 0 \quad (4.13)$$

и

$$\oint_{\mathcal{B}_j} dz B(\vec{x}, z) = 2i\pi v_j(\vec{x}). \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что интегралы по $\mathcal{A}$ -циклам по переменной x обращаются в нуль, следует непосредственно из определения. Для переменной z получим

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{A}_\beta} dz B(\vec{x}, z) &= \int_{\infty_{\tilde{\beta}-}}^{\infty_{\tilde{\beta}+}} dz (B(\vec{x}, \vec{z}) - B(\vec{x}, \vec{z})) = \\ &= -\frac{1}{2} (G(\vec{x}, \infty_{\tilde{\beta}+}^{\beta_+}) - G(\vec{x}, \infty_{\tilde{\beta}+}^{\beta_-}) - G(\vec{x}, \infty_{\tilde{\beta}-}^{\beta_+}) + G(\vec{x}, \infty_{\tilde{\beta}-}^{\beta_-})), \end{aligned}$$

и асимптотические свойства функции G для всех четырех слагаемых в правой части равенства совпадают, так что из теоремы 4.4 можно заключить, что результат интегрирования равен нулю.

Перейдем теперь к интегрированию по циклу $\tilde{\mathcal{B}}_\beta$:

$$\begin{aligned} \oint_{\tilde{\mathcal{B}}_\beta} dy B(x, y) &= \text{скачок функции } G(x, y) \text{ на } \tilde{\mathcal{A}}_\beta - \\ &- \frac{1}{2} (G(x, \infty_{\beta_+}^{\beta_+}) - G(x, \infty_{\beta_+}^{\beta_-}) - G(x, \infty_{\beta_-}^{\beta_+}) + G(x, \infty_{\beta_-}^{\beta_-})) = \\ &= 2\pi i (1 - \delta_{\beta, d}) v_\beta(x) + 2K_{d-1}(x), \end{aligned}$$

где снова были применены асимптотические свойства из теоремы 4.4. Из этой формулы вытекает, что если произвести интегрирование по циклу $\mathcal{B}_j$ при $j = 1, \dots, d-1$, которое задается разностью интегралов по циклам $\tilde{\mathcal{B}}_j$ и $\tilde{\mathcal{B}}_d$, то в результате получится формула (4.14). Теорема доказана.

Главное свойство ядра Бергмана дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 4.9. *Ядро $B(x, z)^\beta$ симметрично: $B(x, z)^\beta = B(z, x)^\beta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве активно используется тот факт, что ядро $B(x, z)^\beta$ удовлетворяет петлевым уравнениям по обоим аргументам. Имеем

$$\begin{aligned} \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) \left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x\right) \left(B(x, z)^\beta - \frac{1}{2(x-z)^2}\right) &= \\ = \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) \left(P_2^{(0)}(x, z)^\beta - \partial_z \frac{\frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} - \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)}}{x-z}\right) &= \\ = \left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x\right) \left(\tilde{P}_2^{(0)}(x, z)^\alpha - \partial_x \frac{\frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} - \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)}}{x-z}\right). \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) P_2^{(0)}(x, z)^\beta - \left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x\right) \tilde{P}_2^{(0)}(x, z)^\alpha &= \\ = \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) \partial_z \frac{\frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} - \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)}}{x-z} - \left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x\right) \partial_x \frac{\frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} - \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)}}{x-z} &= \\ = 2 \frac{U(x) - U(z)}{(x-z)^2} - \frac{U'(x) + U'(z)}{x-z}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} (x-z)^2 \left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z\right) P_2^{(0)}(x, z)^\beta + 2U(z) + (x-z)U'(z) &= \\ = (x-z)^2 \left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x\right) \tilde{P}_2^{(0)}(x, z)^\alpha + 2U(x) + (z-x)U'(x) \stackrel{\text{def}}{=} R(x, z). \end{aligned} \quad (4.15)$$

В последнем соотношении левая часть представляет собой многочлен по x , а правая часть, в свою очередь, оказывается многочленом по z . Тем самым $R(x, z)$ – многочлен по обоим переменным степени не выше d по каждой из них. Более того, должно выполняться условие $R(x, x) = 2U(x)$, поэтому должно иметь место равенство

$$R(x, z) = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{1}{2} V'(x)V'(z) - \hbar \frac{V'(x) - V'(z)}{x - z} - P(x) - P(z) \right) + (x - z)^2 \tilde{R}(x, z),$$

где $\tilde{R}(x, z)$ – многочлен степени не выше $d - 2$ по каждой из двух переменных. Подставив этот многочлен в формулу (4.15) и используя симметрию относительно замены $x \leftrightarrow z$, получим

$$\left(2 \frac{\psi'_\beta(z)}{\psi_\beta(z)} + \partial_z \right) (P_2^{(0)}(x, z) - \tilde{P}_2^{(0)}(z, x)) = \tilde{R}(x, z) - \tilde{R}(z, x). \quad (4.16)$$

Тогда, поскольку правую часть можно разложить по базису, составленному из функций $h_i(x)h_j(z)$, имеем

$$\tilde{R}(x, z) - \tilde{R}(z, x) = \sum_{i,j=1}^{d-1} (\tilde{R}_{i,j} - \tilde{R}_{j,i}) h_i(x) h_j(z).$$

Применяя интегральный оператор

$$f(z) \mapsto \frac{1}{\psi_\beta^2(z)} \int_{\infty_\beta}^z dz' \psi_\beta^2(z') f(z') \quad (4.17)$$

к дифференциальному уравнению (4.16), получим

$$P_2^{(0)}(x, z) - \tilde{P}_2^{(0)}(z, x) = \sum_{i,j=1}^{d-1} (\tilde{R}_{i,j} - \tilde{R}_{j,i}) h_i(x) v_j(z) + A_1(x),$$

где $A_1(x)$ – некоторая постоянная интегрирования.

Применяя теперь петлевые уравнения (4.7), получим с помощью вычитания, что

$$\left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x \right) (B(x, z) - B(z, x)) = P_2^{(0)}(x, z) - \tilde{P}_2^{(0)}(z, x);$$

применив интегральный оператор (4.17) относительно переменной x на листе S_α , приходим к ответу:

$$B(x, z) - B(z, x) = \sum_{i,j=1}^{d-1} (\tilde{R}_{i,j} - \tilde{R}_{j,i}) v_i(x) v_j(z) + A(x) + \tilde{A}(z),$$

в котором $A(x)$ и $\tilde{A}(z)$ – постоянные интегрирования.

Далее, из асимптотического поведения ядра B при больших x и z следует, что $A(x) = \tilde{A}(z) = 0$, и потому

$$B(x, z) - B(z, x) = \sum_{i,j} (\tilde{R}_{i,j} - \tilde{R}_{j,i}) v_i(x) v_j(z). \quad (4.18)$$

Применив теперь теорему 4.8, утверждающую что для всех i, j

$$\oint_{\mathcal{A}_i} dx B(x, \overset{\beta}{z}) = \oint_{\mathcal{A}_j} dz B(\overset{\alpha}{x}, z) = 0,$$

получим $\tilde{R}_{i,j} = \tilde{R}_{j,i}$ для всех i, j , что и завершает доказательство симметричности ядра Бергмана.

Таким образом, мы показали, что введенное “квантовое” ядро Бергмана обладает всеми свойствами, характерными для стандартного ядра Бергмана, ассоциированного с римановой поверхностью: оно симметрично, не испытывает скачков и имеет полюс второго порядка с вычетом, равным нулю, при совпадающих аргументах (что в нашем случае отвечает совпадению аргументов на *одном и том же* листе S_k). Используя все вышесказанное, можно обобщить рекурсивную процедуру из работ [2], [5], [15] и задать корреляционные функции (см. следующий раздел).

4.4. Мероморфные формы и билинейное тождество Римана. Мероморфная форма $\mathcal{R}(\overset{\alpha}{x})$ определена следующим образом:

$$\mathcal{R}(\overset{\alpha}{x}) = \frac{1}{\hbar \psi_\alpha^2(x)} \int_{-\infty_\alpha}^x dx' r(x') \psi_\alpha^2(x'), \quad (4.19)$$

где $r(x)$ – рациональная функция от x , имеющая асимптотическое поведение порядка не более $O(x^{d-2})$ при больших x , в полюсах r_i которой имеют место условия

$$\text{Res}_{r_i} \psi_\alpha^2(x) r(x) = 0.$$

Голоморфные формы $v_j(\overset{\alpha}{x})$ и ядра $G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ и $B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$ представляют собой примеры мероморфных форм от x .

Мероморфная форма $\mathcal{R}(\overset{\alpha}{x})$, определенная формулой (4.19), имеет полюсы в точках $x = r_i$ – полюсах функции $r(x)$. Порядок этих полюсов на один меньше, чем порядок полюсов функции $r(x)$. Форма $\mathcal{R}(\overset{\alpha}{x})$ имеет полюсы второго порядка с нулевыми вычетами в нулях $s_i^{(\alpha)}$ и асимптотическое поведение $O(x^{-2})$ во всех секторах (с учетом накопления полюсов вдоль лучей L_i , на которых происходит накопление нулей функции ψ_α). Заметим, что интегралы $\oint_{\mathcal{A}_\alpha} dx \mathcal{R}(x)$ при этом хорошо определены.

Докажем следующую теорему (*билинейное тождество Римана*).

ТЕОРЕМА 4.10. *Для переменной z в секторе S_α (вне заштрихованной области на рис. 6), имеет место следующее представление мероморфной формы $\mathcal{R}(\overset{\alpha}{z})$:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\overset{\alpha}{z}) = & - \sum_{\beta} \sum_{r_i \in S_\beta} \text{Res}_{y^\beta=r_i} G(\overset{\alpha}{z}, \overset{\beta}{y}) \mathcal{R}(\overset{\beta}{y}) - \\ & - \sum_{\beta} \sum_{s_k^{(\beta)} \in S_\beta} \text{Res}_{y^\beta=s_k^{(\beta)}} G(\overset{\alpha}{z}, \overset{\beta}{y}) \mathcal{R}(\overset{\beta}{y}) + \sum_{j=1}^g v_j(\overset{\alpha}{z}) \oint_{\mathcal{A}_j} dy \mathcal{R}(y). \end{aligned} \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с интеграла по $\mathcal{C}_D$ (см. рис. 2) от функции $G(z, y)\mathcal{R}(y)$:

$$\int_{\mathcal{C}_D} dy G(z, y)\mathcal{R}(y) = \sum_{\beta} \int_{\infty_{\beta-1}}^{\infty_{\beta+1}} dy G(z, y)\mathcal{R}(y).$$

Этот интеграл тождественно обращается в нуль в силу асимптотических условий $G(z, y) \rightarrow 1/y$ при $y \rightarrow \infty_{\beta}$ и $\mathcal{R}(y) \sim 1/y^2$ при $y \rightarrow \infty_{\beta}$ и ввиду того, что никакого накопления нулей функции $\mathcal{R}(y)$ не происходит на границах между секторами S_{β} и $S_{\beta\pm 1}$. При этом можно продвинуть контуры интегрирования через центральную часть комплексной плоскости в сторону $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклов, как показано на рис. 3. Вычеты в точках r_i и $s_k^{(\beta)}$ дадут в совокупности две двойные суммы в выражении (4.20), а вычет в точке $x = y$ в секторе S_{α} воспроизведет левую часть этого равенства, поскольку из теоремы 4.3 вытекает, что $G(z, y) = 1/(z - y) + \text{регулярные слагаемые}$. Остается только рассмотреть интегралы вдоль $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклов. Для этого заметим, что интегрирования по переменной y оказываются внешними по отношению к интегрированиям по переменной x вдоль $\mathcal{A}$ -циклов в формуле (4.2) для множителей C_j , так что при перемещении контура интегрирования по переменной y через контур интегрирования по переменной x возникающий скачок функции $G(z, y)^{\beta_{\pm}}$ равен $2\pi i v_j(z)$; на цикле $\tilde{\mathcal{A}}$ никакого разрыва не возникает. Все эти скачки не зависят от переменной y , так что интеграл по контуру факторизуется для каждого из циклов $\mathcal{A}_j$ и дает последний член в выражении (4.20).

Чтобы вычислить оставшиеся интегралы внутри заштрихованной области на рис. 6, напомним, что $G(x, y) = \psi_{\beta}^2(y) \partial_y (K(x, y)/\psi_{\beta}^2(y))$, так что, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{\infty_{\tilde{\beta}-}}^{\infty_{\tilde{\beta}+}} dz (G(x, z)^{\beta_+} \mathcal{R}(z)^{\beta_+} - G(x, z)^{\beta_-} \mathcal{R}(z)^{\beta_-}) = \\ = - \int_{\infty_{\tilde{\beta}-}}^{\infty_{\tilde{\beta}+}} dz (K(x, z)r(z) - K(x, z)r(z)) = 0, \end{aligned}$$

и эти вклады обращаются в нуль для всех циклов $\mathcal{A}_{\beta}$. Теорема доказана.

5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ДИАГРАММНОМ ВИДЕ

В этом разделе вводится посекторное определение квантовых корреляционных функций, рассматривавшихся в работе [1] (деформаций “классических” корреляционных функций, введенных в работах [2], [3], [5]). Эти определения исходят из (неэрмитовых) моделей собственных значений (см. раздел 8), но они сохраняют справедливость и в общем случае произвольного уравнения Шредингера.

5.1. Определение и свойства корреляционных функций. Функции $W_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n)$, называемые n -точечными корреляционными функциями “рода” h , задаются следующими соотношениями рекурсии:

$$W_1^{(0)}(x) = \omega(x), \quad W_2^{(0)}(x_1, x_2) = B(x_1, x_2), \quad (5.1)$$

$$W_{n+1}^{(h)}(x_0, J) = \oint_{\mathcal{C}_{D_x}} dx K(x_0, x) \left(\overline{W}_{n+2}^{(h-1)}(x, x, J) + \sum_{r=0}^h \sum'_{I \subset J} W_{|I|+1}^{(r)}(x, I) W_{n-|I|+1}^{(h-r)}(x, J \setminus I) \right), \quad (5.2)$$

в которых $J = \{x_1, \dots, x_n\}$, символ $\sum \sum'$ означает, что из суммы исключены члены с $r = 0$, $I = \emptyset$, $r = 0$, $I = \{x_i\}$, $r = h$, $I = J \setminus \{x_i\}$ и $r = h$, $I = J$; интегрирование по контуру $\mathcal{C}_{D_x}$ определено формулой (3.1) и

$$\overline{W}_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n) = W_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n) - \frac{\delta_{n,2} \delta_{h,0} \delta_{\alpha_1, \alpha_2}}{2(x_1 - x_2)^2}. \quad (5.3)$$

Точка x_0 в этих выражениях выбирается вне контура интегрирования $\mathcal{C}_{D_x}$ для переменной x , а все точки x_i лежат снаружи контуров интегрирований по $\mathcal{A}$ -циклам в проекционных членах.

Основное свойство введенных корреляционных функций состоит в том, что они представляют собой решения петлевых уравнений в разложении по $1/N^2$. Докажем также следующие их свойства.

ТЕОРЕМА 5.1. *Каждая из функций $W_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n)$ при $2 - 2h - n < 0$ представляет собой аналитическую функцию по всем своим аргументам с полюсами только при $x_i \rightarrow s_j^{(\alpha_i)}$. Она убывает, по крайней мере, как $O(1/x_i^2)$, при $x_i \rightarrow \infty_{\alpha_i}$ и не имеет разрывов на $\mathcal{A}$ -циклах. Следовательно, справедливо равенство*

$$\int_{\mathcal{C}_{D_x}} dx W_{n+1}^{(h)}(x, J) = t_0 \delta_{n,0} \delta_{h,0}. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим рекурсию по $2h+n$. Свойство аналитичности, очевидно, выполнено. Утверждение теоремы уже доказано для $W_2^{(0)}$. Предположим, что утверждение справедливо при $2g+n$ и докажем его для $W_{n+1}^{(h)}(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Для того чтобы проверить выполнение асимптотического условия, заметим, что из определения 4.1 вытекает, во-первых, что член $\int_{\mathcal{C}_{D_y}} dy \hat{K}(\hat{x}, y) U_n^{(h)}(y, J)$, где для сокращения записи мы ввели обозначение

$$U_n^{(h)}(\hat{x}, J) = \overline{W}_{n+2}^{(h-1)}(\hat{x}, \hat{x}, J) + \sum_{r=0}^h \sum'_{I \subset J} \overline{W}_{|I|+1}^{(r)}(\hat{x}, I) \overline{W}_{n-|I|+1}^{(h-r)}(\hat{x}, J \setminus I), \quad (5.5)$$

имеет порядок $\psi_\alpha^{-2}(x) \int_{\infty_\alpha}^x dx' \psi_\alpha^2(x')/(x')^2 \sim x^{-d-2}$, так что главный вклад обеспечивается членами, пропорциональными $v_j(\hat{x}) \sim x^{-2}$, что завершает доказательство теоремы.

Также имеет место следующая простая лемма, вытекающая из равенства (5.4) и из условий нормировки для ядра $K(\hat{x}, y)$.

ЛЕММА 5.1. *При всех $(n, h) \neq (0, 0)$*

$$\oint_{\hat{\mathcal{A}}_\alpha} dx W_{n+1}^{(h)}(x, J) = 0.$$

Теперь сформулируем первую из основных теорем.

ТЕОРЕМА 5.2. *При $2 - 2h - n < 0$ функции $W_n^{(h)}$ удовлетворяют петлевому уравнению. Это означает, что функция*

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(h)}(x; x_1, \dots, x_n) = & \hbar \left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x \right) \overline{W}_{n+1}^{(h)}(\alpha, x_1, \dots, x_n) + \\ & + \sum_{r=0}^h \sum'_{I \subset J} \overline{W}_{|I|+1}^{(r)}(\alpha, I) \overline{W}_{n-|I|+1}^{(h-r)}(\alpha, J \setminus I) + \overline{W}_{n+2}^{(h-1)}(\alpha, x, x, J) + \\ & + \sum_j \partial_{x_j} \left(\frac{\overline{W}_n^{(h)}(\alpha, J \setminus \{x_j\}) \delta_{\alpha, \alpha_j} - \overline{W}_n^{(h)}(\alpha_j, J \setminus \{x_j\})}{x - x_j} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

представляет собой многочлен по переменной x степени не выше $d - 2$, не зависящий от выбора сектора S_α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в приложении А.

ТЕОРЕМА 5.3. *Каждая из функций $W_n^{(h)}$ есть симметричная функция от всех своих аргументов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО особого случая $W_3^{(0)}$ см. в приложении Б, а доказательство теоремы – в приложении В.

ТЕОРЕМА 5.4. *При $2 - 2h - n < 0$ корреляционная функция $W_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n)$ является однородной функцией степени $2 - 2h - n$:*

$$\begin{aligned} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \hbar} + \sum_{j=1}^{d+1} t_j \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{i=1}^g \epsilon_i \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} + t_0 \frac{\partial}{\partial t_0} \right) W_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n) = \\ = (2 - 2h - n) W_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При заменах $t_k \rightarrow \lambda t_k$, $\hbar \rightarrow \lambda \hbar$, $\epsilon_i \rightarrow \lambda \epsilon_i$ и $t_0 \rightarrow \lambda t_0$ уравнения Шредингера сохраняют свой вид, а потому решение ψ не изменяется. Ядро K переходит в K/λ , но никаких других изменений не происходит. По условию рекурсии функция $W_n^{(h)}$ при этом умножается на λ^{2-2h-n} .

5.2. Диаграммное представление. Диаграммное представление для корреляционных функций по своей структуре совпадает с подобным представлением для корреляционных функций в одно- и двухматричных моделях [2], [4], [5]. Введем три типа пропагаторов

$$\begin{array}{ccc} x & y & x & y & x & y \\ K(\overset{\alpha}{x}, y) & & G(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y}) & & B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y}) \end{array}$$

и будем подразумевать частичное упорядочение от “бесконечности” до “ $\mathcal{A}$ -циклов” слева направо в графических выражениях. Представим члены $W_n^{(h)}(J)$ с помощью графов с трехвалентными вершинами. Каждой внутренней вершине присваивается

своя переменная ξ и предполагается, что по этой переменной производится интегрирование по контуру $\mathcal{C}_D$, а порядок интегрирований зависит от того, какая из вершин лежит ближе к “ $\mathcal{A}$ -циклам”: интегрирования начинаются с внутренних вершин. У диаграммы также имеются n внешних линий (одновалентных вершин), отвечающих точкам x_i , $i = 1, \dots, n$. Будем предполагать, что они лежат снаружи от всех внутренних интегрирований. Например, член $W_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3)$ при этом имеет вид

а рекуррентное соотношение (5.2) запишется как

$$W_{n+1}^{(h)}(x_0, J) = W_{n+2}^{(h-1)}(\xi, \xi, J) + \sum'_{r, I} W_{n-|I|+1}^{(h-r)}(\xi, J \setminus I).$$

Сформулируем теперь диаграммную технику для построения функций $W_n^{(h)}(J)$ при $n > 0$ и при $2g - 2 + n > 0$. Формально она имеет тот же вид, что и диаграммная техника из работ [2], [5].

В данном порядке вносят вклад все диаграммы, берущиеся с соответствующими симметриейными множителями, которые строятся по следующим правилам:

- диаграмма для $W_n^{(h)}(J)$ содержит ровно n внешних линий и h петель;
- выделим одну из переменных, например x_1 , и построим все максимальные связные поддиаграммы древесного типа с единственным корнем в вершине x_1 и такие, что их ветви не выходят ни на одну из внешних линий;
- поставим в соответствие всем ребрам древесной поддиаграммы с корнем направленные пропагаторы $K(x, y)$; направление стрелок всегда идет от корня к ветвям;
- всем прочим пропагаторам, включающим в себя в точности h внутренних пропагаторов и $n - 1$ оставшихся внешних линий, ставятся в соответствие функции $B(x, y)$, если вершины x и y различаются, и функции $\bar{B}(x, x)$ для петли, состоящей из одного единственного пропагатора;

д) каждое корневое дерево устанавливает соотношение частичного порядка на множестве трехвалентных вершин диаграммы; внутренним пропагаторам $B(x, y)$ разрешается соединять между собой только сравнимые вершины (любая вершина считается сравнимой сама с собой).

6. ДЕФОРМАЦИИ

В данном разделе рассматриваются вариации корреляционных функций $W_n^{(h)}$ при инфинитезимальных вариациях потенциала Шредингера $U(x)$ или $\hbar$. Инфинитезимальные вариации резольвенты $\omega(x)$ могут быть разложены по базису “мероморфных форм” $v_k(\overset{\alpha}{x})$, $k = 1, \dots$; оказывается, что эти формы дуальны специальным циклам, а ядро дуальности – это ядро Бергмана. При этом классические ($\hbar = 0$) выражения сохраняют свой вид и при $\hbar \neq 0$.

6.1. Вариации резольвенты. Рассмотрим инфинитезимальную вариацию полиномиального типа: $U \rightarrow U + \delta U$, $\hbar \rightarrow \hbar + \delta \hbar$. Поскольку $U = (V')^2/4 - \hbar V''/2 - P$, имеем

$$\delta U = \frac{V'}{2} \delta V' - \frac{\hbar}{2} \delta V'' - \frac{\delta \hbar}{2} \delta V'' - \delta P.$$

Можно включить в рассмотрение также вариации $V'(z)$ относительно старших времен t_k , $k = 1, \dots$:

$$\delta V'(x) = \sum_{k=1} \delta t_k x^{k-1}.$$

Тогда при $k \leq d+1$ вариация δP имеет порядок не выше $d-1$, в то время как при $k > d+1$ многочлен δP имеет порядок не выше $k-2$.

Вычисляя $\delta(\psi'_\alpha(x)/\psi_\alpha(x))$, получим

$$\delta \left(\frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} \right) = \frac{1}{\hbar^2 \psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x dx' \psi_\alpha^2(x') \left(\delta U(x') - 2 \frac{\delta \hbar}{\hbar} U(x') \right), \quad (6.1)$$

при $\omega(\overset{\alpha}{x}) = V'(x)/2 + \hbar \psi'_\alpha(x)/\psi_\alpha(x)$ имеем

$$\delta \omega(\overset{\alpha}{x}) = \frac{\delta V'(x)}{2} + \delta \hbar \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \frac{1}{\hbar \psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x dx' \psi_\alpha^2(x') \left(\delta U(x') - 2 \frac{\delta \hbar}{\hbar} U(x') \right). \quad (6.2)$$

6.2. Вариации относительно “плоских” координат. Выберем систему “плоских” координат $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{d-1}, t_0, t_1, \dots$ на многообразии рода $d-1$.

6.2.1. Вариации относительно чисел заполнения. При вариациях чисел заполнения $\delta \epsilon_\alpha$, очевидно, $\delta V' = 0$ и, соответственно, $\delta U(x) = -\delta P(x)$, где $\deg \delta P \leq d-2$, так что этот многочлен разлагается по базису h_α :

$$\delta P(x) = \sum_{\alpha'} c_{\alpha'} h_{\alpha'}.$$

Следовательно, из уравнения (6.2) имеем $\delta \omega(x) = -\sum_{\alpha'} c_{\alpha'} v_{\alpha'}(x) dx$, и, поскольку $2i\pi \epsilon_{\alpha'} = \oint_{\mathcal{A}_{\alpha'}} \omega$, получаем

$$2i\pi \delta_{\alpha, \alpha'} = \oint_{\mathcal{A}_{\alpha'}} \delta \omega = - \sum_{\alpha''} \oint_{\mathcal{A}_{\alpha''}} dx c_{\alpha''} v_{\alpha''}(x) = -c_{\alpha'}.$$

Таким образом, $\delta U(x)/\delta \epsilon_\alpha = 2i\pi h_\alpha(x)$ и

$$\delta_{\epsilon_\alpha} \omega(\overset{\beta}{x}) = 2i\pi v_\alpha(\overset{\beta}{x}) dx = \oint_{\mathcal{B}_\alpha} dz B(\overset{\beta}{x}, z).$$

Поэтому плоская координата ϵ_α оказывается дуальной голоморфной форме v_α , которая, в свою очередь, дуальна циклу B_α :

$$\epsilon_\alpha = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{A}_\alpha} \omega, \quad \delta_{\epsilon_\alpha} \omega = 2i\pi v_\alpha(x) dx = \oint_{B_\alpha} dz B(z).$$

6.2.2. *Вариация относительно t_0 .* Имеем $\delta U(x) = -\delta P(x) = -t_{d+1} x^{d-1} + Q(x)$, где $\deg Q \leq d-2$. Применяя уравнение (6.2), получим

$$\delta\omega(\overset{\alpha}{x}) = \frac{1}{\psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x dx' (-t_{d+1}(x')^{d-1} + Q(x')) \psi_\alpha^2(x'),$$

и многочлен Q следует выбрать так, чтобы выполнялись условия $\oint_{\mathcal{A}_i} \delta\omega = 0$. Поэтому имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \delta\omega(\overset{\alpha}{x}) &= -t_{d+1} K_{d-1}(\overset{\alpha}{x}) = \\ &= -t_{d+1} \left(\widehat{K}_{d-1}(\overset{\alpha}{x}) - \sum_{\beta=1}^{d-1} v_\beta(\overset{\alpha}{x}) \oint_{\mathcal{A}_\beta} dx' \widehat{K}_{d-1}(x') \right) = v_d(\overset{\alpha}{x}), \end{aligned}$$

в котором

$$\widehat{K}_k(\overset{\alpha}{x}) = \frac{1}{\psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x dx' (x')^k \psi_\alpha^2(x')$$

и $K_k(\overset{\alpha}{x})$ есть k -й член разложения при больших z функции

$$K(\overset{\alpha}{x}, z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K_k(\overset{\alpha}{x}, z)}{z^{k+1}}$$

из теоремы 4.2. На основании теоремы 4.4 имеем $G(x, \infty_\alpha) = \eta_\alpha t_{d+1} K_{d-1}(\overset{\alpha}{x})$. Отсюда следует, что

$$\delta_{t_0} \omega(\overset{\alpha}{x}) = \frac{1}{2} (G(\overset{\alpha}{x}, \infty_{\bar{d}+}) - G(\overset{\alpha}{x}, \infty_{\bar{d}-})) = \int_{\infty_{\bar{d}-}}^{\infty_{\bar{d}+}} dz B(\overset{\alpha}{x}, z).$$

Интеграл в этом выражении берется по последнему циклу $\widetilde{B}_d$.

Плоская координата t_0 при этом дуальна мероморфной форме третьего рода $-2G(\overset{\alpha}{x}, \infty)$, которая, в свою очередь, дуальна циклу $[\infty_{\bar{d}-}, \infty_{\bar{d}+}]$:

$$t_0 = \oint_{C_D} dz \omega(z), \quad \delta_{t_0} \omega(\overset{\alpha}{x}) = \int_{\infty_{\bar{d}-}}^{\infty_{\bar{d}+}} dz B(\overset{\alpha}{x}, z).$$

6.2.3. *Вариации относительно t_k . Двухточечная корреляционная функция.* Поскольку

$$t_k = \oint_{C_D} \frac{dz}{z^k} h \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

из условий $\partial t_k / \partial t_r = \delta_{k,r}$ и $\partial t_k / \partial \epsilon_\beta = 0$ следует, что

$$\oint_{C_D} \frac{dz}{z^k} \frac{\partial}{\partial t_r} \left(h \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \right) = \delta_{k,r}, \quad \oint_{\mathcal{A}_\beta} dz \frac{\partial}{\partial t_r} \left(h \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \right) = 0,$$

а из общего вида вариации (6.1) можно заключить, что (ср. (3.8) и (3.9))

$$\frac{\partial}{\partial t_r} \left(\hbar \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} \right) = v_{d+r}(\tilde{x}).$$

Уместно сформулировать следующую лемму.

ЛЕММА 6.1. *Имеют место равенства*

$$v_{d+r}(\tilde{x}) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_D > x} dz \frac{z^r}{r} B(\tilde{x}, z), \quad r = 1, 2, \dots, \quad (6.3)$$

где $\mathcal{C}_D > x$ означает, что точка x отделена контуром $\mathcal{C}_D$ от всех бесконечностей ∞_β , $\beta = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что выражение в формуле (6.3) обладает необходимой структурой, следует из явного вида ядра B ; необходимо лишь проверить выполнение условий нормировки. Обращение в нуль интегралов по $\mathcal{A}$ -циклам очевидно, остается доказать равенство

$$\delta_{d,l} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_D} \frac{dx}{x^l} v_{d+r}(x) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{\mathcal{C}_D > x} dz \oint_{\mathcal{C}_D} \frac{dx}{x^l} \frac{z^r}{r} B(z, x).$$

Переставляя порядок интегрирования и принимая во внимание, что $x^{-l}B(z, x) \sim x^{-l-2}$ при $x \rightarrow \infty$, приходим к заключению, что единственный ненулевой вклад порожден полюсом второго порядка в точке $x = z$, следовательно,

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_D} \frac{dx}{x^l} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{z^r}{r} \right) \Big|_{z=x} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_D} dx x^{r-l-1} = \delta_{r,l}.$$

Лемма доказана.

Определим теперь оператор вставки петель:

$$\frac{\partial}{\partial V(y)} = \sum_{r=1}^{\infty} r y^{-r-1} \frac{\partial}{\partial t_r},$$

применяя который к $\hbar\psi'/\psi$, получим

$$\frac{\partial}{\partial V(y)} \left(\hbar \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} \right) = \sum_{r=1}^{\infty} y^{-r-1} \oint_{y > \mathcal{C}_D} dz B(\tilde{x}, z) z^r,$$

и, поскольку $\oint_{\mathcal{C}_D} dz B(\tilde{x}, z) = 0$, можно дополнить сумму членом с $r = 0$, что приводит к появлению в правой части следующего выражения:

$$\oint_{y > \mathcal{C}_D} \frac{dz}{y - z} B(\tilde{x}, z).$$

Заметим, что точка y лежит между одной из бесконечностей, например ∞_β , и контуром интегрирования $\mathcal{C}_D$. После пронесения контура интегрирования через точку

y на бесконечность, получим интеграл, равный нулю в силу асимптотических условий на ядро $B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{z})$, так что единственный ненулевой вклад порожден вычетом при $y = z$, что в итоге приводит к ответу:

$$\frac{\partial}{\partial V(y)} \left(\hbar \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} \right) = -\frac{1}{2} B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y}). \quad (6.4)$$

Соответственно, поскольку $\partial V'(x)/\partial V(y) = 1/(y-x)^2$, результат для *двухточечной корреляционной функции* $W_2^{(0)}(x, y)$ имеет вид

$$W_2^{(0)}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y}) := \frac{\partial}{\partial V(y)} \omega(\overset{\alpha}{x}) = -\frac{1}{2} B(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y}) + \frac{1}{2(y-x)^2}.$$

6.3. Вариации старших корреляционных функций. Заметим, что во всех вышеприведенных вариациях относительно плоских координат имеются циклы $\delta\omega^*$ и (не зависящая от выбора сектора) функция $\Lambda_{\delta\omega}^*$ такая, что

$$\delta\omega(\overset{\alpha}{x}) = \int_{\delta\omega^*} dz B(\overset{\alpha}{x}, z) \Lambda_{\delta\omega}^*(z).$$

Следующая теорема позволяет вычислять инфинитезимальные вариации произвольной корреляционной функции $W_n^{(h)}$ при вариациях уравнения Шредингера.

ТЕОРЕМА 6.1. *При инфинитезимальной деформации $U \rightarrow U + \delta U$*

$$\delta W_n^{(h)}(\overset{\alpha_1}{x}_1, \dots, \overset{\alpha_n}{x}_n) = \int_{\delta\omega^*} dx' W_{n+1}^{(h)}(\overset{\alpha_1}{x}_1, \dots, \overset{\alpha_n}{x}_n) \Lambda^*(x'),$$

где $(\delta\omega^*, \Lambda_{\delta\omega}^*)$ – цикл, дуальный к деформации резольвенты $\omega \rightarrow \omega + \delta\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему по индукции. Начнем с петлевого уравнения для $W_n^{(h)}(\overset{\alpha}{x}, J)$:

$$\left(2\hbar \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \hbar \partial_x \right) W_n^{(h)}(\overset{\alpha}{x}; J) + U_n^{(h)}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\alpha}{x}; J) = P_n^{(h)}(x, J). \quad (6.5)$$

Варьируя по любой из плоских координат, получим

$$\begin{aligned} \left(2\hbar \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \hbar \partial_x \right) \delta W_n^{(h)}(\overset{\alpha}{x}, J) + \left(2\delta\hbar \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} \right) W_n^{(h)}(\overset{\alpha}{x}, J) + \\ + \delta U_n^{(h)}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\alpha}{x}; J) = \delta P_n^{(h)}(x, J), \end{aligned}$$

где $\delta P_n^{(h)}(x, J)$ – многочлен от x степени не выше $d-2$. Здесь оба выражения

$$\delta U_n^{(h)}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\alpha}{x}; J), \quad 2\delta\hbar \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} = \int_{\delta\omega^*} dx' 2B(\overset{\alpha}{x}, x') \Lambda^*(x')$$

могут быть по предположению индукции выражены в виде интегралов по дуальному циклу. Более того,

$$\begin{aligned} \delta U_n^{(h)}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\alpha}{x}; J) = \int_{\delta\omega^*} dx' U_{n+1}^{(h)}(\overset{\alpha}{x}, \overset{\alpha}{x}; J, x') \Lambda^*(x') - \\ - \int_{\delta\omega^*} dx' 2B(\overset{\alpha}{x}, x') \Lambda^*(x') \cdot W_n^{(h)}(\overset{\alpha}{x}, J), \end{aligned} \quad (6.6)$$

поскольку в выражение для $\delta U_n^{(h)}(\bar{x}, \bar{x}; J)$ не входит ни одного члена, содержащего двухточечную корреляционную функцию $W_2^{(0)}(\bar{x}, x')$.

Применяя петлевое уравнение в форме (6.5), связывающей $W_{n+1}^{(h)}(\bar{x}; J, x')$ и $U_{n+1}^{(h)}(\bar{x}, \bar{x}; J, x')$, получим, что второй член в правой части уравнения (6.6) сокращается с вкладом $2\delta\hbar\psi'_\alpha(x)/\psi_\alpha(x)$, и тем самым имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \left(2\hbar \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \hbar\partial_x\right) \left(\int_{\omega^*} dx' W_{n+1}^{(h)}(\bar{x}, J, x')\Lambda^*(x') - \delta W_n^{(h)}(\bar{x}, J)\right) = \\ = \delta P_n^{(h)}(x, J) - \int_{\omega^*} dx' P_{n+1}^{(h)}(x, J, x')\Lambda^*(x') = \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i(J)h_i(x), \end{aligned}$$

правая часть которого представляет собой многочлен от x степени не выше $d-2$, выраженный через базис многочленов $h_i(x)$. Применяя (6.2), получим

$$\int_{\omega^*} dx' W_{n+1}^{(h)}(\bar{x}, J, x')\Lambda^*(x') - \delta W_n^{(h)}(\bar{x}, J) = \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i(J)v_i(x),$$

но, так как условие обращения в нуль интегралов по $\mathcal{A}$ -циклам выполняется для $W_n^{(h)}(x, J)$ и $W_{n+1}^{(h)}(x, J, x')$, имеем $\alpha_i = 0$, т. е.

$$\delta W_n^{(h)}(\bar{x}, J) = \int_{\omega^*} dx' W_{n+1}^{(h)}(\bar{x}, J, x')\Lambda^*(x').$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Для всех $n \geq 0$ и $\hbar \geq 0$

$$\frac{\partial W_n^{(h)}(J)}{\partial \epsilon_\alpha} = \oint_{B_\alpha} dx' W_{n+1}^{(h)}(J, x').$$

7. КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В приведенной ниже таблице сведены воедино понятия классической алгебраической геометрии и их квантовые аналоги.

	Классическая геометрия ($\hbar = 0$)	Квантовая геометрия
Плоская кривая	$E(x, y) = \sum_{i,j} E_{i,j} x^i y^j$, $E(x, y) = 0$	$E(x, y) = \sum_{i,j} E_{i,j} x^i y^j$, $[y, x] = \hbar$, $E(x, \hbar\partial_x)\psi = 0$
Гиперэллиптическая плоская кривая	$y^2 = U(x)$, $\deg U = 2d$	$\hbar^2\psi'' = U\psi$, $[y, x] = \hbar$
Потенциал	$V'(x) = 2(\sqrt{U(x)})_+$	
Резольвента	$\omega(x) = \frac{V'(x)}{2} + y$	$\omega(x) = \frac{V'(x)}{2} + \frac{\hbar\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)}$

	Классическая геометрия ($\hbar = 0$)	Квантовая геометрия
Физический лист	$y_\infty \sim -\frac{V'(x)}{2}, \quad \omega \sim \frac{t_0}{x}$	объединение секторов, в которых $\frac{\hbar\psi'}{\psi} \sim -\frac{V'(x)}{2}, \quad \omega \sim \frac{t_0}{x}$
Точки ветвления	простые нули $U(x)$, $U(a_i) = 0, U'(a_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, 2d + 2$	лучи L_i накопления нулей функ- ции ψ , $i = 1, \dots, 2d + 2$
Двойные точки	двойные нули $U(x)$, $U(\hat{a}_i) = 0, U'(\hat{a}_i) = 0$	лучи без накопления нулей функции ψ
Род $g = -1$	вырожденная поверхность	$\psi e^{V/2\hbar}$ – многочлен
$\mathcal{A}_\alpha$ -Циклы, $\alpha = 1, \dots, g$	Обходят вокруг пар точек ветвления	Обходят вокруг пар лучей накопления нулей
Дополнительный $\mathcal{A}_d$ -цикл	Обходит вокруг последней пары точек ветвления	Обходит вокруг последней пары лучей накопления нулей
$\mathcal{B}$ -Циклы	$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_j = \delta_{i,j}$	
Голоморфные формы, дифференциалы первого рода	$v_i(x) = -\frac{h_i(x)}{2\sqrt{U(x)}},$ h_i – многочлены, $\deg h_i \leq d - 2$, нормировка: $\oint_{\mathcal{A}_\alpha} dx v_i(x) = \delta_{\alpha,i}, \alpha = 1, \dots, d - 1$	$v_i(\hat{x}) = \frac{1}{\hbar\psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x dx' \psi_\alpha^2(x') h_i(x'),$
Матрица периодов	$\tau_{i,j} = \oint_{\mathcal{B}_j} dz v_i(z), \quad i, j = 1, \dots, g, \quad \tau_{i,j} = \tau_{j,i}$	
Числа заполнения	$2i\pi\epsilon_\alpha = \oint_{\mathcal{A}_\alpha} dx \omega(x), \alpha = 1, \dots, g, \quad \epsilon_d = t_0 - \sum_{\alpha=1}^g \epsilon_\alpha$	
Форма третьего рода	$G(x, z) \underset{x \rightarrow z}{\sim} \frac{1}{z - x},$ $G(\hat{x}, \hat{z}) = (2\omega(\hat{z}) - V'(z) - \hbar\partial_z) K(\hat{x}, z)$	
Ядро рекурсии	$K(\hat{x}, z) = \hat{K}(\hat{x}, z) - \sum_i v_i(\hat{x}) C_i(z),$ $C_i(z) = \oint_{\mathcal{A}_i} dx' \hat{K}(x', z),$ $\hat{K}(x, z) = \frac{1}{z - x} \frac{1}{2\sqrt{U(x)}} \quad \Bigg \quad \hat{K}(\hat{x}, z) = \frac{1}{\hbar\psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x \frac{dx'}{x' - z} \psi_\alpha^2(x')$	
Ядро Бергмана, дифференциал второго рода	$B(\hat{x}, \hat{z}) = -\frac{\partial_z G(\hat{x}, \hat{z})}{2},$ $B(\hat{x}, \hat{z}) \sim \frac{1}{2(x - z)^2}$	
Симметрия	$B(\hat{x}, \hat{z}) = B(\hat{z}, \hat{x})$	
Билинейные тождества Римана	$\oint_{\mathcal{A}_i} dx B(x, \hat{z}) = 0,$ $\oint_{\mathcal{B}_i} dx B(x, \hat{z}) = 2i\pi v_i(\hat{z})$	

	Классическая геометрия ($\hbar = 0$)	Квантовая геометрия
Мероморфные формы	$\mathcal{R}(x) dx = \frac{r(x) dx}{2\sqrt{U(x)}}$, $r(x)$ – рациональная функция с нулями r_i , $r(x) = O(x^{d-2})$,	$\mathcal{R}(\alpha) = \frac{1}{\hbar \psi_\alpha^2(x)} \int_{\infty_\alpha}^x dx' r(x') \psi_\alpha^2(x')$, $\text{Res}_{r_i} r(x) \psi^2(x) = 0$
Высшие корреляционные функции	$W_{n+1}^{(h)}(\alpha, J) = \sum_i \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_i} dz K(\alpha, z) (W_{n+2}^{(h-1)}(z, z, J) +$ $+ \sum_{s+s'=h, I \cup I'=J} W_{1+ I }^{(s)}(z, I) W_{1+ I' }^{(s')}(z, I')),$ C_i обходит вокруг точки ветвления L_i	$\sum_i \frac{1}{2i\pi} \oint_{C_i} \dots = \oint_{C_D} \dots$
Симметрия	$W_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n) = W_n^{(h)}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \sigma \in S_n$	
Вариации и дуальные циклы	$U(x) \rightarrow U(x) + \delta U(x),$ $\delta U^*: \delta \omega(\alpha) = \int_{\delta U^*} dx' B(\alpha, x') \Lambda_{\delta U}(x')$	
$\delta V' = \sum \delta t_k x^{k-1}$	$\delta_{t_k} \omega(\alpha) = \oint_{C_D} dx' \frac{(x')^k}{k} B(\alpha, x')$	
Вариация δt_0	$\delta_{t_0} \omega(\alpha) = \int_{\infty_{\bar{d}-}}^{\infty_{\bar{d}+}} dx' B(\alpha, x')$	
Вариация $\delta \epsilon_i$	$\delta_{\epsilon_i} \omega(\alpha) = \oint_{B_i} dx' B(\alpha, x')$	
Вариации старших корреляционных функций	$\delta W_n^{(h)}(x_1, \dots, x_n) = \int_{\delta U^*} dx' W_{n+1}^{(h)}(x_1, \dots, x_n, x') \Lambda_{\delta U}(x')$	

8. ПРИЛОЖЕНИЕ К МАТРИЧНЫМ МОДЕЛЯМ

Основная причина интереса, проявляемого к функциям $W_n^{(h)}$, состоит в том, что они удовлетворяют петлевым уравнениям, характеризующим случайные β -ансамбли собственных значений. Поэтому их можно отождествить с корреляционными функциями (резольвентами) для этих ансамблей.

Рассмотрим (возможно, формальный) матричный интеграл

$$Z = \int_{E_{N,\beta}} dM e^{-(N\sqrt{\beta}/t_0) \text{tr } V(M)},$$

где $V(x)$ – некоторый потенциал, а $E_{N,1} = H_N$ – множество эрмитовых матриц размера N , $E_{N,1/2}$ – множество вещественных симметрических матриц размера N и $E_{N,2}$ – множество кватернионных самодуальных матриц размера N (см. монографию [7]). Произведя интегрирование по унитарным степеням свободы, можно перейти к интегрированию только по собственным значениям [7]:

$$Z = \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N |\Delta(\lambda)|^{2\beta} \prod_{i=1}^N e^{-(N\sqrt{\beta}/t_0) V(\lambda_i)}, \quad (8.1)$$

где $\Delta(\lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)$ – определитель Вандермонда.

Обобщим теперь матричную модель на случай произвольных значений параметра β , выбрав интеграл (8.1) в качестве определения интеграла β -модели. Для этого возьмем

$$\hbar = \frac{t_0}{N} \left(\sqrt{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right).$$

Заметим, что $\hbar = 0$ отвечает эрмитову случаю $\beta = 1$, а переход $\hbar \rightarrow -\hbar$ отвечает переходу $\beta \rightarrow 1/\beta$.

8.1. Корреляционные функции и петлевые уравнения. Определим связанные корреляционные функции (резольвенты)

$$W_k(x_1, \dots, x_k) = \beta^{k/2} \left\langle \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{1}{x_1 - \lambda_{i_1}} \dots \frac{1}{x_k - \lambda_{i_k}} \right\rangle_{\text{conn}}$$

и

$$W_0 = \mathcal{F} = \ln \mathcal{Z}.$$

При рассмотрении вариаций потенциала $V(x)$ предполагается, что эти резольвенты удовлетворяют асимптотическим условиям посекторно, т. е. они сами определены по отдельности в каждом из секторов. Также предполагается (это условие выполнено автоматически, если рассматривается формальный матричный интеграл), что при больших N имеет место разложение (где предполагается, что $\hbar = O(1)$)

$$W_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{N}{t_0} \right)^{2-2h-k} W_k^{(h)}(\alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad (8.2)$$

$$W_0 = \mathcal{F} = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{N}{t_0} \right)^{2-2h} W_0^{(h)} \equiv \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{N}{t_0} \right)^{2-2h} \mathcal{F}_h. \quad (8.3)$$

Петлевые уравнения получаются с помощью интегрирования по частям, например тождество

$$0 = \sum_i \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{1}{x - \lambda_i} |\Delta(\lambda)|^{2\beta} \prod_j e^{-(N\sqrt{\beta}/t_0)V(\lambda_j)} \right) \quad (8.4)$$

приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \left\langle \frac{1}{(x - \lambda_i)^2} + 2\beta \sum_{j \neq i} \frac{1}{x - \lambda_i} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} - \frac{N\sqrt{\beta}}{t_0} \frac{V'(\lambda_i)}{x - \lambda_i} \right\rangle = \\ &= \sum_i \left\langle \frac{1}{(x - \lambda_i)^2} + \beta \sum_{j \neq i} \frac{1}{x - \lambda_i} \frac{1}{x - \lambda_j} - \frac{N\sqrt{\beta}}{t_0} \frac{V'(\lambda_i)}{x - \lambda_i} \right\rangle = \\ &= \sum_i \left\langle \frac{1 - \beta}{(x - \lambda_i)^2} + \beta \sum_j \frac{1}{x - \lambda_i} \frac{1}{x - \lambda_j} - \frac{N\sqrt{\beta}}{t_0} \frac{V'(\lambda_i)}{x - \lambda_i} \right\rangle = \\ &= \frac{\beta - 1}{\sqrt{\beta}} W_1'(x) + \beta \left(\frac{1}{\beta} W_1^2(x) + \frac{1}{\beta} W_2(x, x) \right) - \\ &\quad - \frac{N\sqrt{\beta}}{t_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} V'(x) W_1(x) - \sum_i \left\langle \frac{V'(x) - V'(\lambda_i)}{x - \lambda_i} \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Определим многочлен

$$P_1(x) = \sqrt{\beta} \sum_i \left\langle \frac{V'(x) - V'(\lambda_i)}{x - \lambda_i} \right\rangle = (V'W_1)_+.$$

В итоге приходим к петлевому уравнению из работы [8]:

$$W_1^2(x) + \hbar \frac{N}{t_0} W_1'(x) + W_2(x, x) = \frac{N}{t_0} (V'(x)W_1(x) - P_1(x)).$$

С помощью разложения (8.2) получим уравнение Риккати:

$$W_1^{(0)}(x)^2 + \hbar \partial_x W_1^{(0)}(x) = V'(x)W_1^{(0)}(x) - P_1^{(0)}(x),$$

которому удовлетворяет функция $\omega(x) = W_1^{(0)}(x)$. Тем самым корреляционные функции β -моделей собственных значений удовлетворяют топологической рекурсии, сформулированной в п. 5.1.

8.2. Вариация относительно $\hbar$. В этом пункте аналогия с β -ансамблем собственных значений используется для того, чтобы предположить возможный вид последнего недостающего звена нашей конструкции – вариации относительно $\hbar$, показателя степени определителя Вандермонда в интеграле (8.1). С точностью до несущественных множителей можно вместо $\hbar \partial / \partial \hbar$ рассматривать производную $\beta \partial / \partial \beta$, для которой имеет место соотношение

$$\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z} \sim \frac{2\beta}{\mathcal{Z}} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \Delta(\lambda)^{2\beta} \ln |\Delta(\lambda)| \prod_{i=1}^N e^{-(N\sqrt{\beta}/t_0)V(\lambda_i)}, \quad (8.5)$$

так что в выражениях появляется логарифм модуля определителя Вандермонда.

Нам представляется невозможным построить выражение (8.5), исходя только из функции $W_1(\overset{\alpha}{x})$, но можно вместо этого попробовать использовать *двухточечную* корреляционную функцию $W_2(\overset{\alpha}{x}, \overset{\gamma}{y})$. Принимая за основу определение $W_2(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y})$ в β -ансамбле в виде двухточечной резольвенты (не обязательно связной),

$$W_2(x, y) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \sum_{i=1}^N \frac{1}{x - \lambda_i} \sum_{j=1}^N \frac{1}{y - \lambda_j} |\Delta(\lambda)|^{\hbar N} e^{-(N\sqrt{\beta}/t_0)V(\lambda)},$$

необходимо также ввести регуляризацию (как инфракрасную, так и ультрафиолетовую, если выражаться в физических терминах). При этом уместно разбить все собственные значения λ_i на кластеры, каждый из которых будет отвечать некоторому сектору S_γ . После этого для каждого из членов $1/(y - \lambda_i)$ произведем интегрирование по переменной y от Λ_γ до $x + \delta_\gamma$ вдоль прямых, параллельных друг другу; параметры регуляризации при этом зависят только от номера сектора γ , а предел снятия регуляризации соответствует $\Lambda_\gamma \rightarrow \infty_\gamma$ и $\delta_\gamma \rightarrow 0$. При этом получим

$$\begin{aligned} & \frac{2\beta}{\mathcal{Z}} \int_{\Lambda_\gamma}^{x+\delta_\gamma} d\xi W_2(\overset{\alpha}{x}, \overset{\gamma}{\xi}) \sim \\ & \sim \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \Delta(\lambda)^{2\beta} \sum_{i=1}^N \frac{1}{x - \lambda_i} \sum_{\gamma} \sum_{j_\gamma=1}^{\epsilon_\gamma} \int_{\Lambda_\gamma}^{x+\delta_\gamma} \frac{d\xi}{\xi - \lambda_{j_\gamma}} \prod_{i=1}^N e^{-(N\sqrt{\beta}/t_0)V(\lambda_i)} = \end{aligned}$$

Рис. 7. Происхождение контура интегрирования $\mathcal{C}_D$ в матрично-модельном подходе. Внутренние точки суть λ_i , а внешние точки суть $\lambda_i + \delta_\gamma$, $\gamma = 0, 2, 4, 6$; тонкими направленными лучами обозначены логарифмические разрезы.

$$\begin{aligned}
 &= \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \Delta(\lambda)^{2\beta} \sum_{i=1}^N \frac{1}{x - \lambda_i} \times \\
 &\times \sum_{\gamma} \sum_{j_{\gamma}=1}^{\epsilon_{\gamma}} \left(\ln |x + \delta_{\gamma} - \lambda_{j_{\gamma}}| - \ln |\Lambda_{\gamma}| + O\left(\frac{1}{\Lambda_{\gamma}}\right) \right) \prod_{i=1}^N e^{-(N\sqrt{\beta}/t_0)V(\lambda_i)}. \quad (8.6)
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем теперь по переменной x , что должно в итоге привести к выражению (8.5). Очевидно, что контур интегрирования должен иметь весьма специальный вид: надо потребовать, чтобы он обходил вокруг всех полюсов при $x = \lambda_i$ и оставлял вовне все логарифмические разрезы, проходящие от ∞_{γ} до $\lambda_i + \delta_{\gamma}$ в соответствующем секторе (см. рис. 7). После выбора такого контура интегрирование по переменной x сведется к сумме вычетов в точках λ_i (напомним, что в интеграле по собственным значениям не возникают границы между секторами внутри комплексной плоскости; они появляются позднее, и их наличие оказывается проявлением коллективных эффектов при учете полюсов по переменным λ в силу выбранной посекторной регуляризации). Вычисляя интеграл по переменной x в выражении (8.6) в виде суммы вычетов в точках λ_i , получим

$$\begin{aligned}
 &\frac{2\beta}{\mathcal{Z}} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \Delta(\lambda)^{2\beta} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{\gamma} \sum_{j_{\gamma}=1}^{\epsilon_{\gamma}} \ln |\lambda_i + \delta_{\gamma} - \lambda_{j_{\gamma}}| - \right. \\
 &\quad \left. - N \sum_{\gamma} \epsilon_{\gamma} \ln |\Lambda_{\gamma}| + O\left(\frac{1}{\Lambda_{\gamma}}\right) \right) \prod_{i=1}^N e^{-(N\sqrt{\beta}/t_0)V(\lambda_i)} = \\
 &= \frac{2\beta}{\mathcal{Z}} \int d\lambda_1 \dots d\lambda_N \Delta(\lambda)^{2\beta} \left| \ln \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j + \delta_{\gamma}) \right| -
 \end{aligned}$$

$$-2\beta N \sum_{\gamma} \epsilon_{\gamma} \ln |\Lambda_{\gamma}| + 2\beta \sum_{\gamma} \epsilon_{\gamma} \ln |\delta_{\gamma}|,$$

где первый член в правой части как раз дает искомый интеграл (8.5) при $\delta_{\gamma} \rightarrow 0$, а два оставшихся члена расходятся в пределе снятия регуляризации. Однако эти два члена зависят исключительно от чисел заполнения, а потому вносят вклад только в не зависящую от потенциала часть свободной энергии $\mathcal{F}_0$ и могут быть устранены путем выбора подходящей нормировки.

9. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ

Используем теперь вариации и теорему 5.4 для того, чтобы определить $\mathcal{F}_h$.

9.1. Оператор $\hat{H}$. Из теоремы 5.4 имеем

$$(2 - 2h - n - \hbar \partial_{\hbar}) W_n^{(h)} = \left(t_0 \partial_{t_0} + \sum_{k=1}^{d+1} t_k \partial_{t_k} + \sum_{i=1}^g \epsilon_i \partial_{\epsilon_i} \right) W_n^{(h)}.$$

В разделе 6 производные от величин $W_n^{(h)}$ были представлены в виде интегралов от $W_{n+1}^{(h)}$ с точностью до действия производной $\hbar \partial / \partial \hbar$,

$$(2 - 2h - n - \hbar \partial_{\hbar}) W_n^{(h)} = \hat{H}.W_{n+1}^{(h)} = \hat{H}. \frac{\partial}{\partial V} W_n^{(h)},$$

где $\hat{H}$ – линейный оператор, действующий по следующему правилу:

$$\hat{H}.f(x) = t_0 \oint_{\tilde{\mathcal{B}}_d} dx f(x) + \sum_{j=1}^{d+1} \int_{\mathcal{C}_D} dx \frac{t_j x^j}{j} f(x) + \sum_{i=1}^g \epsilon_i \oint_{\mathcal{B}_i} dx f(x).$$

Положим $W_0^{(h)} = \mathcal{F}_h$ при $n = 0$ и при $h \geq 2$. Свободная энергия $\mathcal{F}_h$ при $h \geq 2$ представляет собой функцию, для которой

$$(2 - 2h - \hbar \partial_{\hbar}) \mathcal{F}_h = \hat{H}.W_1^{(h)}.$$

9.2. Производная $\hbar \partial / \partial \hbar$. Применяя матрично-модельные соображения из предыдущего раздела, можно предположить, что построение производной корреляционной функции $W_n^{(h)}(J)$ по показателю степени $\hbar$ должно включать в рассмотрение резольвенты порядка $n + 2$. Другими словами,

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial}{\partial \hbar} W_n^{(h)}(J) = & \int_{\mathcal{C}_{D_{\xi}}} \left(\int_{\infty}^{\xi} d\xi' W_{n+2}^{(h-1)}(\bar{\xi}', \xi, J) + \right. \\ & \left. + \sum_{r=0}^h \sum_{I \subseteq J} \int_{\infty}^{\xi} d\xi' W_{|I|+1}^{(r)}(\bar{\xi}', I) \cdot W_{n-|I|+1}^{(h-r)}(\xi, J \setminus I) \right), \end{aligned} \quad (9.1)$$

где $\bar{\xi}$ следует выбрать в качестве “внутренней” переменной в том смысле, что в силу выполнения соотношения $\int^{\xi} d\xi' B(\xi', y) = G(\xi, y)$ можно произвести во всех

поддиаграммах замены

и

без добавления дополнительных слагаемых.

Заметим, что сумма в выражении (9.1) идет по всем, не обязательно стабильным, случаям, так что можно начать с исследования нестабильных вкладов в стабильные ($2h - 2 + n > 0$). Заметим, что все эти вклады происходят из второго члена в выражении (9.1).

9.2.1. Случай $r = 0$, $I = \emptyset$ и $r = h$, $I = J$. Рассмотрим ситуацию, когда $n \geq 1$. При этом в качестве корня всех древесных поддиаграмм, составленных из K -пропагаторов, можно выбрать точку x_1 , тогда ξ будет переменной некоторой из внешних B -линий. Вклад в $W_n^{(h)}(J)$ будет при этом состоять из всех вставок вида

$$\int^\xi W_1^{(0)} \begin{array}{c} \xi \\ \diagup \\ \longrightarrow \\ \eta \end{array} + \begin{array}{c} \xi \\ \diagdown \\ \longrightarrow \\ \eta \end{array} W_1^{(0)} , \quad \int^\xi W_1^{(0)} \begin{array}{c} \xi \\ \diagdown \\ \longrightarrow \\ \eta \end{array} + \begin{array}{c} \xi \\ \diagup \\ \longrightarrow \\ \eta \end{array} W_1^{(0)} .$$

Рассмотрим первую диаграмму; вторая будет аналогична первой. Изменение порядка интегрирования по переменным ξ и η во второй диаграмме дает

$$\int^\xi W_1^{(0)} \begin{array}{c} \xi \\ \diagup \\ \longrightarrow \\ \eta \end{array} + W_1^{(0)} \begin{array}{c} \xi \\ \diagdown \\ \longrightarrow \\ \eta \end{array} - \frac{\psi'}{\psi} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \eta \end{array} .$$

Здесь сумма первых двух членов содержит интеграл от полной производной функции $\int^\xi d\xi' W_1^{(0)}(\xi') \cdot G(\eta, \xi)$, и, поскольку

$$G(\eta, \xi) \sim O(\xi^{-1}), \quad \int^\xi d\xi' W_1^{(0)}(\xi') \sim \int^\xi \frac{d\xi'}{\xi'} t_0 \sim t_0 \ln |\xi|,$$

этот вклад равен нулю. Остается только третий вклад, задаваемый вычетом при $\xi = \eta$, и этот вклад есть не что иное, как действие оператора $\hat{H}$ на внешнюю линию $B(\eta, \xi)$, взятое с отрицательным знаком, так что

$$\hat{H} \cdot \begin{array}{c} \xi \\ \swarrow \\ \longrightarrow \eta \end{array} - \begin{array}{c} \psi'/\psi \\ \longrightarrow \eta \end{array} = 0.$$

Таким образом, полный вклад двух случаев $r = 0$, $I = \emptyset$ и $r = h$, $I = J$ в точности сокращается с действием оператора $\hat{H}$.

9.2.2. Случай $r = 0$, $I = \{x_1\}$. Начнем с тождества

$$\int_{x > C_{D_\xi} > y} d\xi G(\tilde{x}, \xi) K(\xi, y) = -K(\tilde{x}, y) \quad (9.2)$$

(напомним, что неравенства вида $x > C_{D_\xi} > y$ описывают взаимные расположения точек и контуров интегрирований). В самом деле, записав равенство $G(\tilde{x}, \xi) = \psi_\gamma^2(\xi) \partial_\xi (K(\tilde{x}, \xi) / \psi_\gamma^2(\xi))$ и проинтегрировав по частям, получим

$$\sum_\gamma K(\tilde{x}, \xi) K(\xi, y) \Big|_{\infty_-}^{\infty_+} - \int_{x > C_{D_\xi} > y} d\xi K(\tilde{x}, \xi) \left[\frac{1}{\xi - y} + \sum_j h_j(\xi) C_j(y) \right].$$

Внеинтегральная подстановка, очевидно, дает нуль, и только вычет при $\xi = y$ вносит вклад во второй член, так что в итоге мы приходим к выражению (9.2). Его следствием будет вторая формула свертки:

$$\int_{x > C_{D_\xi} > y} d\xi G(\tilde{x}, \xi) B(\xi, y) = -B(\tilde{x}, y). \quad (9.3)$$

В случае $r = 0$, $I = \{x_1\}$ имеем диаграмму

$$x_1 \longrightarrow \boxed{W_n^{(h)}(\xi, J \setminus \{x_1\})} = -W_n^{(h)}(J).$$

9.2.3. Случай $r = h$, $I = J \setminus \{x_n\}$. Здесь нам понадобится другое тождество:

$$\int_{x, y > C_{D_\xi}} d\xi G(\tilde{x}, \xi) B(\xi, y) = 0. \quad (9.4)$$

Чтобы его получить, представим функции G и B через ядро K , в результате имеем

$$\begin{aligned} & \int_{x, y > C_{D_\xi}} d\xi G(\tilde{x}, \xi) B(\xi, y) = \\ &= \int_{x, y > C_{D_\xi}} d\xi \left(\partial_\xi - 2 \frac{\psi'_\gamma(\xi)}{\psi_\gamma(\xi)} \right) K(\tilde{x}, \xi) \partial_\xi \left(\partial_\xi - 2 \frac{\psi'_\gamma(\xi)}{\psi_\gamma(\xi)} \right) K(y, \xi) = \\ &= K(\tilde{x}, \xi) B(y, \xi) \Big|_{\infty_-}^{\infty_+} - \int_{x, y > C_{D_\xi}} d\xi K(\tilde{x}, \xi) \left(\partial_\xi + 2 \frac{\psi'_\gamma(\xi)}{\psi_\gamma(\xi)} \right) \partial_\xi \left(\partial_\xi - 2 \frac{\psi'_\gamma(\xi)}{\psi_\gamma(\xi)} \right) K(y, \xi). \end{aligned}$$

Внеинтегральная подстановка опять дает ноль, а дифференциальный оператор, действующий на ядро $K(y, \xi)$, снова оказывается оператором Гельфанда–Дикого (4.11), не зависящим от выбора сектора γ . Подынтегральное выражение также, очевидно, регулярно во всех нулях ψ -функций, и в результате интегрирования по всем $\tilde{\mathcal{A}}$ -циклам получается ноль.

Таким образом, вклад в случае $r = h$, $I = J \setminus \{x_n\}$ равен нулю, и полный вклад всех нестабильных случаев в совокупности с действием $\hat{H}$ -оператора просто даст начальную функцию $W_n^{(h)}(J)$, взятую с обратным знаком.

9.3. Примеры применения оператора $\hbar \partial / \partial \hbar$.

9.3.1. *Восстановление $W_n^{(0)}(J)$.* Применим теперь формулу (9.1) для восстановления корреляционной функции $W_n^{(0)}(J)$. В случае рода ноль существенным будет только вклад несвязных поддиаграмм (второй член в формуле (9.1)). Выберем корень первой поддиаграммы, $\int_{\infty}^{\xi} d\xi' W_{|I|+1}^{(r)}(\bar{\xi}', I)$, лежащим в точке x_1 , тогда внешняя точка $\bar{\xi}$ будет концом некоторой другой (не являющейся корнем) внешней линии $G(\eta, \xi)$ первой диаграммы; для второй диаграммы выберем в роли корня внешнюю линию с концом ξ с отвечающим ей пропагатором $K(\xi, \rho)$. В результате интегрирования по ξ получим с применением (9.2), что эти две диаграммы сшиваются по пропагатору $K(\eta, \rho)$, задавая тем самым *связную* диаграмму, содержащую максимальный подграф в виде дерева из пропагаторов K с корнем в внешней вершине x_1 . Можно теперь задаться вопросом, *сколько раз* данная диаграмма может быть получена в виде композиции двух диаграмм в формуле (9.1)? Мы получим эту диаграмму так: сначала разобьем ее на две части, разрежем одно из внутренних направленных ребер (включая также внешнее ребро $K(x_1, \kappa)$, если берутся в расчет также и нестабильные вклады), а затем сошьем заново эти диаграммы по тому же самому пропагатору. Очевидно, что данная диаграмма будет возникать столько раз, сколько имеется направленных пропагаторов (со знаком минус, получающимся из формулы (9.2)), т. е. $2 - n$ раз для $W_n^{(0)}(J)$. Тем самым, приняв определение (9.1) для действия оператора $\hbar \partial / \partial \hbar$ за основу, получим

$$\left(\hbar \frac{\partial}{\partial \hbar} + \hat{H} \cdot \frac{\partial}{\partial V} \right) W_n^{(0)}(J) = (2 - n) W_n^{(0)}(J),$$

что и является частным случаем общего соотношения (9.1).

9.3.2. *Действие на $\overline{W}_2^{(0)}(x_1, x_2)$.* Рассмотрим теперь действие на нестабильную корреляционную функцию

$$\overline{W}_2^{(0)}(x_1, x_2) = B(x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}) - \frac{\delta_{\alpha_1, \alpha_2}}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Исключая члены, компенсирующие действие оператора $\hat{H}$, получим, что действие оператора $\hbar \partial / \partial \hbar$ дает

$$\begin{aligned} & \int_{x_1 > c_{D_\xi}} d\xi G(x_1^{\alpha_1}, \xi) \left(B(\xi, x_2^{\alpha_2}) - \frac{1}{(\xi - x_2)^2} \right) - \int_{x_1, x_2 > c_{D_\xi}} \frac{d\xi}{x_1 - \xi} B(x_2^{\alpha_2}, \xi) + \\ & + (x_1 \leftrightarrow x_2) = -2B(x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}) + B(x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}) + B(x_2^{\alpha_2}, x_1^{\alpha_1}) = 0, \end{aligned}$$

и это снова находится в согласии с формулой (9.1) (в левой части данного равенства выражение $(x_1 \leftrightarrow x_2)$ означает слагаемые, получающиеся при взаимной замене x_1 на x_2 в интегралах).

9.3.3. Действие на $\mathcal{F}_1$. Мы ожидаем, что в этом случае применение формулы (9.1) даст ноль, возможно, с точностью до несущественных регуляризующих членов. Нестабильные члены не вносят вклада; единственный вклад обеспечивается первым слагаемым в формуле (9.1), которое дает

$$\begin{aligned} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \hbar} + \hat{H} \cdot \frac{\partial}{\partial V} \right) \mathcal{F}_1 &= \int_{\mathcal{C}_{D_\xi}} d\xi \left(G(\xi, \bar{\xi}) - \frac{1}{\xi - \bar{\xi}} \right) = \\ &= \int_{\mathcal{C}_{D_\xi}} d\xi \left(\int_{\infty_\alpha}^{\xi + \delta_\alpha} d\xi' \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\psi_\alpha^2(\xi') / \psi_\alpha^2(\xi) - 1}{\xi' - \xi} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_j \int_{\infty_\alpha}^{\xi + \delta_\alpha} d\xi' h_j(\xi') \psi_\alpha^2(\xi') \left(\frac{C_j(\xi)}{\psi_\alpha^2(\xi)} \right)' \right). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям во втором слагаемом, с точностью до членов порядка $O(\delta_\alpha)$ получим $\int_{\mathcal{C}_{D_\xi}} d\xi h_j(\xi) C_j(\xi)$, и подынтегральное выражение оказывается не зависящим от сектора и несингулярным в нулях функции ψ_α , а потому вносит нулевой вклад при интегрировании. В первом члене, интегрируя по частям относительно переменной ξ' член, содержащий $1/(\xi - \xi')^2$, и учитывая тот факт, что

$$\lim_{\xi' \rightarrow \xi} \frac{1}{\xi' - \xi} \left(\frac{\psi_\alpha^2(\xi')}{\psi_\alpha^2(\xi)} \right) = 2 \frac{\psi'_\alpha(\xi)}{\psi_\alpha(\xi)},$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_{D_\xi}} d\xi \left(-2 \frac{\psi'_\alpha(\xi)}{\psi_\alpha(\xi)} + \int_{\infty_\alpha}^{x + \delta_\alpha} d\xi' \frac{2 \frac{\psi'_\alpha(\xi') \psi_\alpha(\xi')}{\psi_\alpha^2(\xi)} - 2 \frac{\psi'_\alpha(\xi) \psi_\alpha^2(\xi')}{\psi_\alpha^3(\xi)}}{\xi' - \xi} \right) &= \\ = \int_{\mathcal{C}_{D_\xi}} d\xi \left(-2 \frac{\psi'_\alpha(\xi)}{\psi_\alpha(\xi)} + \int_{\infty_\alpha}^{x + \delta_\alpha} d\xi' \left(\frac{2}{\xi' - \xi} \frac{\psi'_\alpha(\xi') \psi_\alpha(\xi')}{\psi_\alpha^2(\xi)} + \frac{\psi_\alpha^2(\xi')}{\xi' - \xi} \left(\frac{1}{\psi_\alpha^2(\xi)} \right)' \right) \right) &= \\ = \int_{\mathcal{C}_{D_\xi}} d\xi \left(-2 \frac{\psi'_\alpha(\xi)}{\psi_\alpha(\xi)} + \int_{\infty_\alpha}^{x + \delta_\alpha} d\xi' \left(\frac{2}{\xi' - \xi} \frac{\psi'_\alpha(\xi') \psi_\alpha(\xi')}{\psi_\alpha^2(\xi)} - \frac{\psi_\alpha^2(\xi')}{\psi_\alpha^2(\xi)} \frac{1}{(\xi' - \xi)^2} \right) \right) &= \\ = \int_{\mathcal{C}_{D_\xi}} d\xi \left(-2 \frac{\psi'_\alpha(\xi)}{\psi_\alpha(\xi)} + \int_{\infty_\alpha}^{x + \delta_\alpha} d\xi' \left(\frac{2}{\xi' - \xi} \frac{\psi'_\alpha(\xi') \psi_\alpha(\xi')}{\psi_\alpha^2(\xi)} + \frac{\psi_\alpha^2(\xi')}{\psi_\alpha^2(\xi)} d \frac{1}{\xi' - \xi} \right) \right) &= \\ = \int_{\mathcal{C}_{D_\xi}} d\xi \left(-2 \frac{\psi'_\alpha(\xi)}{\psi_\alpha(\xi)} + \int_{\infty_\alpha}^{x + \delta_\alpha} d\xi' \left(\frac{1}{\xi' - \xi} \frac{\partial}{\partial \xi'} \frac{\psi_\alpha^2(\xi')}{\psi_\alpha^2(\xi)} + \frac{\psi_\alpha^2(\xi')}{\psi_\alpha^2(\xi)} d \frac{1}{\xi' - \xi} \right) \right) &= \\ = \int_{\mathcal{C}_{D_\xi}} d\xi \left(-2 \frac{\psi'_\alpha(\xi)}{\psi_\alpha(\xi)} + \frac{1}{\xi' - \xi} \frac{\psi_\alpha^2(\xi')}{\psi_\alpha^2(\xi)} \Big|_{\infty_\alpha}^{x + \delta_\alpha} \right) = \int_{\mathcal{C}_{D_\xi}} d\xi \left(\frac{1}{\delta_\alpha} + O(\delta_\alpha) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, результат равен константе, расходящейся в пределе снятия регуляризации, но в остальном не зависящей ни от какой из плоских координат (это же явление имеет место при вычислении соответствующего действия оператора $\hat{H}$ на $\mathcal{F}_1$ в стандартных матричных моделях [4], [8]).

9.3.4. *Действие на $W_1^{(1)}(x)$.* В этом случае имеются два возможных вклада: первый, происходящий из нестабильных графов, дает $W_1^{(1)}(x)$ с (искомым) множителем -1 , а второй должен возникать из первого члена в формуле (9.1), происходящего из члена $W_3^{(0)}$, т. е.

$$\int_{C_{D_\xi}} d\xi \int_{C_{D_\eta}} d\eta K(\bar{x}, \eta) G(\eta, \bar{\xi}) B(\eta, \xi),$$

где контур интегрирования по переменной η проходит между точками $\bar{\xi}$ и ξ . По определению будем полагать интегралы такого типа равными нулю, что задает последнее необходимое предписание для диаграммной техники при построении членов свободной энергии $\mathcal{F}_h$.

9.4. Члены $\mathcal{F}_h$. Для стабильных случаев ($h \neq 0, 1$) сформулируем теперь диаграммную технику, позволяющую найти член $\mathcal{F}_h$. Нам понадобятся диаграммы, задающие стабильные члены $W_1^{(r)}(\bar{\xi})$ и $W_1^{(h-r)}(\xi)$ при $1 \leq r \leq h-1$ и член $W_2^{(h-1)}(\xi, \bar{\xi})$:

$$(2h-2)\mathcal{F}_h = \int_{\rho}^{\eta} W_2^{(h-1)} - \sum_{r=1}^{h-1} \int_{\rho}^{\xi} W_1^{(r)} W_1^{(h-r)}.$$

Здесь в первом слагаемом сумма идет по всем диаграммам, вносящим вклад в $W_2^{(h-1)}$, таким, что внутренние вершины, к которым примыкают две внешние линии, различны. После этого оба внешних пропагатора ампутируются, а вершины η и ρ (вершина ρ всегда есть первая трехвалентная вершина в корневом дереве) соединяются пропагатором $K(\eta, \rho)$. Мы уже приняли в расчет интегрирование по ξ , получив при этом дополнительный знак минус. Такое интегрирование не удастся осуществить таким же простым образом во втором члене, в котором интегрирование по ξ задается условием $\rho > C_{D_\xi} > \eta$, а символ $\int_{\rho}^{\xi}$ на диаграмме означает, что необходимо вставить интегрирование

$$\int_{\rho > C_{D_\xi} > \eta} d\xi \int_{\infty_\alpha}^{\xi + \delta_\alpha} d\xi' K(\xi', \rho) K(\xi, \eta)$$

между интегрированиями по переменным ρ и η .

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы определили квантовую версию понятий алгебраической геометрии, что позволило решить петлевые уравнения в случае произвольного β -ансамбля.

Понятие точек ветвления “размывается” – точка ветвления представляет собой не точку, а луч асимптотического накопления нулей, вдоль которого производится интегрирование вместо вычисления вычета в точке ветвления.

Другое интересное явление относится к теории когомологий, имеющей смысл, только если интеграл по циклу для любой формы зависит лишь от гомологического

класса данного цикла, а потому необходимо потребовать, чтобы все формы имели нулевые вычеты в нулях s_i . Это условие “нулевой монодромии” автоматически выполняется для всех форм, происходящих из уравнения Шредингера. Оно эквивалентно уравнениям анзаца Бете, которым удовлетворяют s_i , и аналогично свойству, имеющему место в модели Годена [18].

В отличие от работы [1], в данном подходе нет зависимости от выбора специального сектора; тем не менее даже полное число $\mathcal{A}$ -циклов и ранг матрицы периодов могут меняться в зависимости от выбора системы разрезов в комплексной плоскости. Это может отвечать тому, что на самом деле в нашем подходе отсутствует какая-либо (классическая) риманова поверхность конечного рода: аналитическое продолжение может никогда не привести к сшиванию соответствующих решений уравнения Шредингера, и мы тем самым работаем с различными сечениями (конечного рода) объемлющей поверхности бесконечного рода. Таким образом, в самом деле понятие рода перестает быть детерминированным.

Применяя посекторные определения, можно ввести симплектические инварианты. В приложении Г представлено первое нетривиальное вычисление данного рода: найдена зависимость ведущего члена разложения от чисел заполнения.

Мы ограничились случаем гиперэллиптических кривых, т. е. дифференциальных уравнений второго порядка, что соответствует одноматричной модели. Первое непосредственное обобщение состоит в рассмотрении логарифмических потенциалов, что позволит вывести некрасовские функции, непerturbативно зависящие от отношения параметров ϵ_2/ϵ_1 . Более обещающей и сложной задачей является обобщение нашего подхода на линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка. Это отвечает случаю двухматричного аналога модели β -ансамбля. В этом случае также представляется возможным определить понятия листов, точек ветвления, форм и корреляционных функций. При этом ожидается сохранение условия анзаца Бете, обеспечивающего равенство нулю монодромий и утверждающего, что интегралы по всем циклам должны зависеть лишь от гомологических классов указанных циклов. Разница между гиперэллиптическим и общим случаем должна быть сравнима с различиями между понятиями в работах [2] и [5], т. е. определение ядра K должно быть более сложным и менее явным, но мы отложим дальнейшее обсуждение до последующих публикаций.

Также было бы интересно понять, обладают ли величины $\mathcal{F}_h$ какими-либо свойствами симплектической инвариантности или, более точно, обладают ли они какой-либо “канонической инвариантностью” – остаются ли они неизменными при произвольной замене $(x, y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ такой, что $[\tilde{y}, \tilde{x}] = [y, x] = \hbar$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Доказательство теоремы 5.2

Докажем теорему 5.2, утверждающую, что все $W_n^{(h)}$ удовлетворяют петлевому уравнению, т. е. покажем, что

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{(h)}(x; x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}) &= \\ &= \hbar \left(2 \frac{\psi'_\alpha(x)}{\psi_\alpha(x)} + \partial_x \right) \overline{W}_{n+1}^{(h)}(x, x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=0}^h \sum'_{I \subset J} \overline{W}_{|I|+1}^{(r)}(\tilde{x}, I) \overline{W}_{n-|I|+1}^{(h-r)}(\tilde{x}, J \setminus I) + \overline{W}_{n+2}^{(h-1)}(\tilde{x}, \tilde{x}, J) + \\
& + \sum_j \partial_{x_j} \left(\frac{\overline{W}_n^{(h)}(\tilde{x}, J \setminus \{x_j\}) \delta_{\alpha, \alpha_j} - \overline{W}_n^{(h)}(\tilde{x}_j, J \setminus \{x_j\})}{x - x_j} \right)
\end{aligned}$$

есть многочлен от x степени не выше $d-2$. Из определения имеем (с потенциалом U из формулы (5.5)):

$$W_{n+1}^{(h)}(\tilde{x}, J) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} dz K(\tilde{x}, z) \left(U_{n+2}^{(g-1)}(z, z, J) + \sum_j B(\tilde{x}_j, z) W_n^{(h)}(z, J \setminus \{x_j\}) \right).$$

Действие оператора $\hbar(2\psi'_\alpha(x)/\psi_\alpha(x) + \partial_x)$ на $K(\tilde{x}, z)$ дает

$$\frac{1}{x-z} + \sum_{j=1}^g h_j(x) C_j(z),$$

причем второй член, очевидно, полиномиален и удовлетворяет утверждению теоремы. Пронеся контур интегрирования по переменной z на бесконечность (исходно точка x лежала вне контура интегрирования) и приняв в расчет, что интеграл на бесконечности равен нулю в силу асимптотических условий, получим, что единственные ненулевые вклады задаются вычетами в точках $z = x$ и $z = x_j$ во втором члене в правой части последнего равенства. Результат интегрирования имеет вид

$$U_{n+2}^{(g-1)}(\tilde{x}, \tilde{x}, J) + \sum_j B(\tilde{x}_j, \tilde{x}) W_n^{(h)}(\tilde{x}, J \setminus \{x_j\}) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{W_n^{(h)}(J)}{x - x_j},$$

применяя теперь (5.3), получим утверждение теоремы.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Симметричность функции $W_3^{(0)}$

ТЕОРЕМА Б.1. Трехточечная функция $W_3^{(0)}$ симметрична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вводя обозначение $Y_\alpha = -2\hbar\psi'_\alpha/\psi_\alpha$, получим по определению следующее выражение:

$$\begin{aligned}
W_3^{(0)}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) &= \\
&= \frac{1}{i\pi} \oint_{\mathcal{C}_D} dx K(\tilde{x}_0, x) B(\tilde{x}_1, x) B(\tilde{x}_2, x) = \frac{1}{4i\pi} \oint_{\mathcal{C}_D} dx K_0 G'_1 G'_2 = \\
&= \frac{1}{4i\pi} \oint_{\mathcal{C}_D} dx K_0 ((\hbar K_1'' + Y K_1' + Y' K_1)(\hbar K_2'' + Y K_2' + Y' K_2)) = \\
&= \frac{1}{4i\pi} \oint_{\mathcal{C}_D} dx K_0 (\hbar^2 K_1'' K_2'' + \hbar Y (K_1' K_2'' + K_1'' K_2') + \hbar Y' (K_1'' K_2 + K_2'' K_1) + \\
&\quad + Y^2 K_1' K_2' + Y Y' (K_1 K_2' + K_1' K_2) + (Y')^2 K_1 K_2),
\end{aligned}$$

в котором введены сокращенные формы записи $K_i = K(x_i, x)$, $G_i = G(x_i, x)$, все производные берутся по x и опущены индексы секторов.

Комбинации $K_0 K_1 K_2 f(x)$, где $f(x)$ не зависит от сектора ($f = 1, U, U', \dots$), обращаются в ноль при интегрировании по x , поскольку каждая из функций K_i также не зависит от выбора сектора для переменной x . Тогда можно применить уравнение Риккати $Y_\alpha^2 = 2\hbar Y'_\alpha + 4U$, чтобы заменить Y_α^2 на $2\hbar Y'_\alpha$ и $Y_\alpha Y'_\alpha$ – на $\hbar Y''_\alpha$, что дает

$$\begin{aligned}
 W_3^{(0)}(x_0, x_1, x_2) &= \\
 &= \frac{1}{4i\pi} \oint_{C_D} dx K_0 (\hbar Y (K'_1 K''_2 + K''_1 K'_2) + \hbar Y' (K'_1 K_2 + K''_2 K_1) + \\
 &\quad + 2\hbar Y' K'_1 K'_2 + \hbar Y'' (K_1 K'_2 + K'_1 K_2) + (Y')^2 K_1 K_2) = \\
 &= \frac{1}{4i\pi} \oint_{C_D} dx K_0 (\hbar Y (K'_1 K'_2)' + \hbar Y' (K_1 K_2)'' + \hbar Y'' (K_1 K_2)' + (Y')^2 K_1 K_2) = \\
 &= \frac{1}{4i\pi} \oint_{C_D} dx (Y')^2 K_0 K_1 K_2 + \hbar (Y'' K_0 (K_1 K_2)' - (Y K_0)' K'_1 K'_2 - (Y' K_0)' (K_1 K_2)') = \\
 &= \frac{1}{4i\pi} \oint_{C_D} dx (Y')^2 K_0 K_1 K_2 - \hbar ((Y K_0)' K'_1 K'_2 + Y' K'_0 (K_1 K_2)') = \\
 &= \frac{1}{4i\pi} \oint_{C_D} dx (Y')^2 K_0 K_1 K_2 - \hbar Y K'_0 K'_1 K'_2 - \hbar Y' (K_0 K'_1 K'_2 + K'_0 K_1 K'_2 + K'_0 K'_1 K_2).
 \end{aligned}$$

Это выражение явно симметрично относительно переменных x_0, x_1, x_2 . Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Доказательство теоремы 5.3

Докажем, что каждая функция $W_n^{(h)}$ представляет собой симметричную функцию от всех своих аргументов. Специальный случай функции $W_3^{(0)}$ доказан выше в приложении Б. Симметричность двухточечной корреляционной функции $\overline{W}_2^{(0)}$ была доказана в теореме 4.9.

По техническим причинам проще произвести доказательство для *несвязных* корреляционных функций. Введем два типа таких функций: корреляционную функцию

$$\widehat{W}_n^{(h)}(I) = \sum_{\{I_1, \dots, I_k\}} \prod_{j=1}^k W_{n_j}^{(h_j)}(I_j), \quad (\text{B.1})$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $\{I_1, \dots, I_k\}$ набора I , которая включает в себя только разбиения стабильного ($2h_j + n_j - 2 > 0$) типа с $I_j \neq \emptyset$; и корреляционную функцию

$$\widetilde{W}_n^{(h)}(I) = \sum'_{\{I_1, \dots, I_k\}} \prod_{j=1}^k W_{n_j}^{(h_j)}(I_j), \quad (\text{B.2})$$

которая, кроме того, допускает в сумме двухточечные корреляционные функции $\overline{W}_2^{(0)}$ ($2h_j + n_j - 2 \geq 0$) и $I_j \neq \emptyset$.

Из симметричности всех функций $\widehat{W_s^{(h')}}(I)$ при $s+2h' \leq n+2h$, очевидно, следует симметричность $\widehat{W_n^{(h)}}(I)$.

Очевидно, что $\widehat{W_{n+1}^{(h)}}(x_0^{\alpha_0}, x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n})$ есть симметричная функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, а потому достаточно показать, что (при $n \geq 1$)

$$\widehat{W_{n+1}^{(h)}}(x_0^{\alpha_0}, x_1^{\alpha_1}, J) - \widehat{W_{n+1}^{(h)}}(x_1^{\alpha_1}, x_0^{\alpha_0}, J) = 0,$$

где $J = \{x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n}\}$.

Доказательство произведем по индукции по $-\chi = 2h - 2 + n$. Предположим, что все $\widehat{W_k^{(h')}}(x_0^{\alpha_0}, x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n})$ при $2h' + k - 2 \leq 2h + n$ симметричны. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{W_{n+1}^{(h)}}(x_0^{\alpha_0}, x_1^{\alpha_1}, J) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_x} > y} dx K(x_0^{\alpha_0}, x) \widehat{W_{n+2}^{(h-1)}}(x, x, x_1, J) + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \iint_{C_{D_x} > C_{D_y}} dx dy K(x_0^{\alpha_0}, x) B(x_1^{\alpha_1}, x) K(x, y) \widehat{W_{n+1}^{(h-1)}}(y, J). \end{aligned} \quad (B.3)$$

Рассмотрим сначала произведение функций KBK во втором члене: в силу соотношения

$$B(x_1^{\alpha_1}, x) = \partial_x \left(\partial_x - 2 \frac{\psi'_\beta(x)}{\psi_\beta(x)} \right) K(x_1^{\alpha_1}, x),$$

интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_x} > y} dx K(x_0^{\alpha_0}, x) B(x_1^{\alpha_1}, x) K(x, y) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_x} > y} dx K'_x(x_0^{\alpha_0}, x) K'_x(x_1^{\alpha_1}, x) K(x, y) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_x} > y} dx K'_x(x_0^{\alpha_0}, x) K(x_1^{\alpha_1}, x) 2 \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} K(x, y) - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_x} > y} dx K(x_0^{\alpha_0}, x) K'_x(x_1^{\alpha_1}, x) K'_x(x, y) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_x} > y} dx K(x_0^{\alpha_0}, x) K(x_1^{\alpha_1}, x) 2 \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} K'_x(x, y). \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые в правой части уже симметричны относительно замены $x_0 \leftrightarrow x_1$, и мы их в дальнейшем не рассматриваем. Интегрируя по частям в третьем слагаемом, получим еще один симметричный член с $K(x_0^{\alpha_0}, x) K(x_1^{\alpha_1}, x) K''_{xx}(x, y)$ (который также опустим) плюс член с $K'_x(x_0^{\alpha_0}, x) K(x_1^{\alpha_1}, x) K'_x(x, y)$. Объединяя этот результат со вторым слагаемым, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_x} > y} dx K'_x(x_0^{\alpha_0}, x) K(x_1^{\alpha_1}, x) \left(\partial_x + 2 \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \right) K(x, y) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_x} > y} dx K'_x(x_0^{\alpha_0}, x) K(x_1^{\alpha_1}, x) \left(\frac{1}{x-y} + \sum_{\beta} h_\beta(x) C_\beta(y) \right), \end{aligned}$$

где подынтегральное выражение одно и то же во всех секторах переменной x , так что только вычет в точке $x = y$ (взятый со знаком минус) дает вклад во второе слагаемое в правой части (B.3), которое при этом принимает вид

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_y}} dy 2K'_y(x_0, y) K(x_1, y) \widetilde{W_{n+1}^{(h-1)}}(y, y, J). \quad (\text{B.4})$$

Применим теперь предположение индукции к первому члену в правой части (B.3) и запишем его в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_x > y}} \frac{dx}{2\pi i} \oint_{C_{D_y}} dy K(x_0, x) K(x_1, y) \times \\ & \times (2B(x, y)^2 \delta_{1,2} + 4B(x, y) \widetilde{W_{n+1}^{(h-1)}}(x, y, J)' + \widetilde{W_{n+3}^{(h-2)}}(x, x, y, y, J)'), \end{aligned}$$

где штрих обозначает, что пропагаторы типа $B(x, y)$ не входят в это выражение; при этом в этих членах не возникает сингулярности при перестановке порядка интегрирований по x и y . Последний член снова оказывается, очевидно, симметричным относительно замены $x_0 \leftrightarrow x_1$.

Антисимметричная часть в среднем члене равна половине вычета, порожденного полюсом второго порядка $-1/(x-y)^2$ в выражении для $B(x, y)$ (она снова войдет со знаком минус в силу выбора упорядочения контуров), так что получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_y}} dy 2K'_y(x_0, y) K(x_1, y) \widetilde{W_{n+1}^{(h-1)}}(y, y, J)' + \text{симметричный член},$$

и это выражение в точности сокращается с (B.4) во всех случаях, кроме единственного случая $h = 1$, $n = 2$, в котором можно использовать тот факт, что $B(x, y) = -1/(x-y)^2 + \overline{W}_2^{(0)}(x, y)$ при $x \rightarrow y$. В результате имеем

$$2B(x, y)^2 = 2(x-y)^{-4} - 4(x-y)^{-2} \overline{W}_2^{(0)}(x, y) + \text{регулярная часть}.$$

Наиболее сингулярный первый член приводит к подынтегральному выражению $K'''K$, которое не зависит от сектора и поэтому вносит нулевой вклад, а второй член дает

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{D_y}} dy 2K'_y(x_0, y) K(x_1, y) \overline{W}_2^{(0)}(y, y) + \text{симметричный член},$$

что сокращается с последним оставшимся членом (B.4). Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Вычисление $\partial^3 \mathcal{F}_0 / \partial t_0^3$ в гауссовом случае

В этом приложении мы вычислим сингулярную часть третьей производной от $\mathcal{F}_0$ и проинтегрируем получившийся ответ, что позволит найти сингулярную часть свободной энергии $\mathcal{F}_0$. Хотя явные вычисления производятся для гауссовой модели, на их основе можно предположить, как выглядит сингулярная часть свободной энергии в модели с потенциалом общего вида.

В гауссовой модели с потенциалом $V(x) = x^2$ имеются четыре сектора решений с асимптотическими направлениями $\pm\infty$, $\pm i\infty$. В качестве базисных решений выберем $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$, которые убывают на соответствующих мнимых бесконечностях $+i\infty$ и $-i\infty$. Вещественная ось при этом играет роль $\tilde{\mathcal{A}}$ -цикла, а мнимая – роль $\tilde{\mathcal{B}}$ -цикла.

Нас интересует сингулярная часть третьей производной $\partial^3 \mathcal{F}_0 / \partial t_0^3$. Проясним сначала происхождение этой сингулярности. Локальные сингулярности при конечных t_0 , очевидно, проявляются, когда решения ψ_+ и ψ_- совпадают, что имеет место в случае $\psi_{\pm} = \psi_n = H_n(ix)e^{x^2/2\hbar}$, где H_n – многочлены Эрмита, и

$$\hbar^2 \partial_x^2 \psi_n(x) = x^2 \psi_n(x) + (2n+1)\hbar \psi_n(x).$$

Из следствия 6.1 при этом имеем

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t_0^3} = \frac{1}{(2\pi i)^3} \oint_{\mathcal{B}} \oint_{\mathcal{B}} \oint_{\mathcal{B}} dz_1 dz_2 dz_3 W_3^{(0)}(z_1, z_2, z_3). \quad (\Gamma.1)$$

С помощью соотношения $W_3^{(0)}(z_1^{\alpha_1}, z_2^{\alpha_2}, z_3^{\alpha_3}) = \oint_{\mathcal{C}_D} d\xi K(z_1^{\alpha_1}, \xi) B(z_2^{\alpha_2}, \xi) B(z_3^{\alpha_3}, \xi)$ с учетом того, что при интегрировании по z_2 и z_3 никаких сингулярностей не возникает, получим, что каждое из этих интегрирований дает согласно теореме 4.8 просто $v_0(\xi)$, где $\alpha = \pm$, и

$$v_0(\xi^{\pm}) = C_0 \frac{1}{\psi_{\pm}^2(\xi)} \int_{\pm i\infty}^{\xi} d\rho \psi_{\pm}^2(\rho) \quad (\Gamma.2)$$

с нормировочной константой C_0 такой, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi [v_0(\bar{\xi}) - v_0(\xi^+)] = 1.$$

Заметим, что даже в случае, когда $\psi_+ = \psi_-$, функции $v_0(\xi^+)$ и $v_0(\bar{\xi})$ оказываются различными ввиду того, что у них различны нижние пределы интегрирований; их разность при этом просто равна $(C_0 \psi^{-2}(\xi)) \int_{-\infty}^{+\infty} d\rho \psi^2(\rho)$, и нормировочная константа C_0 для $\psi_+ = \psi_- = \psi_n$ принимает вид

$$C_0 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\psi_n^2(\xi)} \right)^{-1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\rho \psi_n^2(\rho) \right)^{-1}. \quad (\Gamma.3)$$

Остающийся интеграл по переменной z_1 в выражении (Г.1) имеет сингулярность при $\psi_{\pm} \rightarrow \psi_n$, поскольку функция $K(z_1^{\pm}, \xi)$ имеет логарифмический разрез на $\tilde{\mathcal{B}}$ -цикле. Применяя явное выражение (4.1) для ядра K (в этом простейшем случае $K = \hat{K}$), получим

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t_0^3} = \sum_{\pm} \int_{\mathcal{C}_{\pm}^{\pm}} \frac{d\xi}{2\pi i} \int_{\pm i\infty}^{\mp i\infty} \frac{1}{\hbar} \frac{dz}{\psi_{\pm}^2(z)} \int_{\pm i\infty}^z d\rho \frac{\psi_{\pm}^2(\rho)}{\rho - \xi} v_0^2(\xi^{\pm}), \quad (\Gamma.4)$$

где контур $C_\xi^\pm$ соединяет $\pm\infty$ и $\mp\infty$, обходя вокруг точки ρ . Сингулярность проявляется, когда ρ (и, следовательно, z) стремится к $-i\infty$ для ψ_+ и к $+i\infty$ для ψ_- ; эта сингулярная часть происходит из вычета при $\xi = \rho$. При этом получим, что правая часть формулы (Г.4) имеет вид

$$\sum_{\pm} \int_0^{\mp i\infty} \frac{1}{\hbar} \frac{dz}{\psi_{\pm}^2(z)} \int_0^z d\rho \psi_{\pm}^2(\rho) v_0^2(\rho) + \text{регулярная часть},$$

так что, применяя явные выражения (Г.2) и (Г.3) для v_0 , имеем для сингулярной части третьей производной $\partial^3 \mathcal{F}_0 / \partial t_0^3$ формулу

$$\begin{aligned} \text{Синг} \left(\frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t_0^3} \right) &= \\ &= \sum_{\pm} \int_0^{\mp i\infty} \frac{1}{\hbar} \frac{dz}{\psi_{\pm}^2(z)} \int_0^z \frac{d\rho}{\psi_{\pm}^2(\rho)} \left[\int_{\pm i\infty}^{\rho} ds \psi_{\pm}^2(s) \right]^2 C_0^2, \end{aligned}$$

где сингулярное поведение имеет место на верхнем пределе интегрирования для z и ρ при $\psi_+, \psi_- \rightarrow \psi_n$, а член в квадратных скобках в этом пределе несингулярен, и его можно заменить на его предельное значение, что в точности сократится с соответствующим членом в выражении для нормировочной константы C_0 (см. формулу (Г.3)). Интегралы по переменным z и ρ разделяются, и мы приходим к окончательному ответу:

$$\text{Синг} \left(\frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t_0^3} \right) = \sum_{\pm} \frac{1}{2\hbar} \left[\int_0^{\mp i\infty} \frac{dz}{\psi_{\pm}^2(z)} \right]^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\psi_{\pm}^2(x)} \right]^{-2}. \quad (\text{Г.5})$$

Вычислим t_0 при $\psi_+, \psi_- \rightarrow \psi_n$. Выбирая $\psi_-(x) = \psi_+(x) \int_{-\infty}^x d\xi \psi_+^{-2}(\xi)$ и принимая в расчет, что число полюсов решений вне $\tilde{\mathcal{A}}$ -цикла равно n , получим

$$\begin{aligned} t_0 &= -\hbar n + \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dz \left(\frac{\psi'_-(z)}{\psi_-(z)} - \frac{\psi'_+(z)}{\psi_+(z)} \right) = -\hbar n + \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\psi_+(z)\psi_-(z)} = \\ &= -\hbar n + \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-i\infty}^0 \frac{d\xi}{\psi_+^2(\xi)} + \int_0^z \frac{d\xi}{\psi_+^2(\xi)} \right)^{-1} \frac{dz}{\psi_+^2(z)}. \end{aligned}$$

В правой части первый интеграл в выражении в круглых скобках расходится при $\psi_+ \rightarrow \psi_n$. Обозначив этот интеграл через Λ , получим

$$t_0|_{\psi_+ \rightarrow \psi_n} = -\hbar n + \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\psi_+^2(z)} \left[\int_{-i\infty}^0 \frac{d\xi}{\psi_+^2(\xi)} \right]^{-1} + O(\Lambda^{-2}). \quad (\text{Г.6})$$

Сравнивая это выражение с (Г.5), имеем

$$\text{Синг} \left(\frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t_0^3} \right) = \frac{1}{\hbar(n + t_0/\hbar)^2}, \quad n \in \mathbb{Z}_{+,0}, \quad (\text{Г.7})$$

т. е. эта производная имеет полюсы второго порядка с множителем $1/\hbar$ во всех точках $t_0 = -\hbar n$, $n = 0, 1, \dots$. Функция, имеющая такое поведение, есть, очевидно,

Γ -функция, так что с точностью до целой функции

$$\text{Синг}\left(\frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t_0^3}\right) \simeq \frac{1}{\hbar} [\ln \Gamma]''\left(\frac{t_0}{\hbar}\right)$$

и

$$\text{Синг}(\mathcal{F}_0) \simeq \hbar^2 \left[\int \ln \Gamma \right] \left(\frac{t_0}{\hbar} \right). \quad (\Gamma.8)$$

Обратившись теперь к асимптотическому поведению $\int dx \ln \Gamma(x)$ при больших положительных x , получим, что ведущий член имеет вид $(x^2/2) \ln x$, что в точности соответствует выражению, которое можно предсказать на основе матрично-модельных соображений. В них допускается применение квазиклассического разложения при больших положительных $t_0/\hbar$, и в этом режиме ведущий вклад в асимптотическое поведение гауссовой матричной модели имеет вид $\text{Синг}(\mathcal{F}_0) \simeq (t_0^2/2) \ln t_0$ с точностью до полиномиальных членов (порядка не выше второго).

Отсюда представляется возможным выдвинуть следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. *Сингулярная часть $\mathcal{F}_0$ для произвольного потенциала $V_{d+1}(x)$ имеет вид*

$$\hbar^2 \sum_{i=1}^d \frac{1}{2} \left[\int \ln \Gamma \right] \left(\frac{\tilde{\epsilon}_i}{\hbar} \right),$$

где $\tilde{\epsilon}_i$ – числа заполнения для циклов $\tilde{\mathcal{A}}_i$.

Благодарности. Авторы признательны О. Бабелону, М. Бержеру, Г. Борро, П. Ди Франческо, В. Паскье, А. Пратс-Ферреру и А. Воросу за полезные и плодотворные обсуждения. Работа Л. О. Чехова поддержана РФФИ (гранты № 09-02-93105-CNRS_a и 09-01-12150-офи_m), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-795.2008.1) и Программой “Математические методы нелинейной динамики”. Работа Б. Эйнарда и О. Маршала частично поддержана Европейской сетью Enigma (грант MRT-СТ-2004-5652), L’Agence nationale de la recherche, Program GIMP (project ANR-05-BLAN-0029-01), Европейским Научным Фондом через программу Misgam и Правительством Квебека (грант FQRNT).

Список литературы

- [1] L. O. Chekhov, B. Eynard, O. Marchal, *Topological expansion of the Bethe ansatz, and quantum algebraic geometry*, arXiv:0911.1664.
- [2] B. Eynard, *JHEP*, **11** (2004), 031, 35 pp., arXiv: hep-th/0407261.
- [3] B. Eynard, N. Orantin, *Comm. Number Theory Phys.*, **1:2** (2007), 347–452, arXiv: math-ph/0702045.
- [4] L. Chekhov, B. Eynard, *JHEP*, **03** (2006), 014, 18 pp., arXiv: hep-th/0504116.
- [5] L. Chekhov, B. Eynard, N. Orantin, *JHEP*, **12** (2006), 053, 31 pp., arXiv: math-ph/0603003.
- [6] B. Eynard, A. Prats Ferrer, *JHEP*, **7** (2009), 096, 29 pp., arXiv: 0805.1368.
- [7] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Pure Appl. Math. Ser., **142**, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [8] L. Chekhov, B. Eynard, *JHEP*, **12** (2006), 026, 29 pp., arXiv: math-ph/0604014.
- [9] I. Dumitriu, A. Edelman, *J. Math. Phys.*, **43:11** (2002), 5830–5847, arXiv: math-ph/0206043.
- [10] B. Eynard, *J. Phys. A*, **34:37** (2001), 7591–7605, arXiv: cond-mat/0012046.

- [11] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv: 0906.3219.
- [12] N. A. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2003), 831–864, arXiv: hep-th/0306211.
- [13] A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **680**:2 (2009), 188–194, arXiv: 0908.2190; A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **682**:1 (2009), 125–129, arXiv: 0909.2052; *JHEP*, **11** (2009), 048, 16 pp., arXiv: 0909.3338.
- [14] T. Eguchi, K. Maruyoshi, *JHEP*, 2010, 022, 21 pp., arXiv: 0911.4797.
- [15] B. Eynard, O. Marchal, *JHEP*, **03** (2009), 094, 52 pp., arXiv: 0809.3367.
- [16] I. M. Krichever, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475, arXiv: hep-th/9205110.
- [17] И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:1 (1979), 8–20.
- [18] O. Babelon, D. Talalaev, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **6** (2007), P06013, 16 pp., arXiv: hep-th/0703124.

Поступила в редакцию 18.08.2010,
после доработки 13.09.2010