Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, Ресуммирующий L -фактор в релятивистском квазипотенциальном подходе, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 2, 225–244

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:29:56

© 2011 г.

О. П. Соловцова^{*†}, Ю. Д. Черниченко^{*}

РЕСУММИРУЮЩИЙ L -ФАКТОР В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

Получен новый релятивистский кулоновоподобный ресуммирующий фактор (L -фактор) для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$. Рассмотрение проведено в рамках полностью ковариантного квазипотенциального подхода в квантовой теории поля, сформулированного в релятивистском конфигурационном представлении для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс.

Ключевые слова: квантовая теория поля, релятивистское конфигурационное представление, кулоновоподобный квазипотенциал.

1. ВВЕДЕНИЕ

Релятивистский квазипотенциальный (РКП) подход Логунова–Тавхелидзе [1] построен на основе ковариантной одновременной формулировки проблемы двух тел в квантовой теории поля (КТП). Развитию данного подхода было посвящено большое количество публикаций (см., например, работы [2]–[9]). РКП-подход сводит изучение релятивистской двухчастичной системы к исследованию ковариантных трехмерных двухчастичных уравнений для волновой функции шредингеровского вида или уравнений Липпмана–Швингера для инвариантной амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности с обобщенным потенциалом – квазипотенциалом. Предложенный в этих и ряде других работ формализм, будучи трехмерным и допускающим вероятностную интерпретацию волновой функции, в то же время обладает и главными преимуществами (перенормируемость, аналитичность и т.д.) полностью ковариантного метода. Кроме того, в данном подходе все рассматриваемые величины имеют ясный физический смысл и аналогию с нерелятивистской квантовой

^{*}Международный центр перспективных исследований, Гомельский государственный технический университет, Гомель, Беларусь.

E-mail: solovtsova@gstu.gomel.by, chern@gstu.gomel.by

[†]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.

E-mail: olsol@theor.jinr.ru

механикой. Еще один вариант РКП-подхода к задаче о двух релятивистских частицах был предложен в работах [10], [11]. Данный подход не связан с формализмом Бете–Солпитера и ковариантным формализмом Феймана–Дайсона, а использует гамильтонову формулировку КТП [12]. При этом важно, что трехмерность в нее заложена с самого начала, а все частицы даже в промежуточных состояниях являются физическими, т.е. лежат на массовых поверхностях.

РКП-подход в КТП нашел широкое применение для описания свойств атомов, адронов и ядер как связанных состояний [13]–[16]. В настоящее время он продолжает оставаться одним из методов исследования составных объектов [17]–[19]. Точные решения релятивистских квазипотенциальных уравнений с квазипотенциалами конкретного вида (см., например, работы [20], [21]) представляют такой же интерес, как и соответствующие решения нерелятивистского уравнения Шредингера. Так, например, решение задачи о нерелятивистском потенциальном рассеянии двух бесспиновых частиц с произвольными массами m_1 , m_2 на притягивающем кулоновском потенциале¹⁾

$$V(r) = -\frac{\alpha Z_1 Z_2}{r} \quad (1.1)$$

позволяет вычислить для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$ кулоновский ресуммирующий фактор, определяющийся производной порядка ℓ от парциальной волновой функции непрерывного спектра в нуле [22], [23]:

$$\begin{aligned} L_{\text{nr}}(\eta) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{\Gamma(2\ell + 2)}{(2k)^\ell \Gamma^2(\ell + 1)} \frac{d^\ell}{dr^\ell} \left[\frac{\varphi_\ell(r, k)}{r} \right] \right|^2 = \\ &= \frac{X_{\text{nr}}(\eta)}{1 - e^{-X_{\text{nr}}(\eta)}} \prod_{n=1}^{\ell} \left[1 + \left(\frac{\eta}{n} \right)^2 \right], \quad X_{\text{nr}}(\eta) = 2\pi\eta. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь Γ – гамма-функция, $\eta = \lambda/k$ – кулоновский параметр Зоммерфельда, $\lambda = \mu\alpha Z_1 Z_2 > 0$; $k = 2\mu v_{\text{nr}}$ – относительный импульс сталкивающихся частиц; $2v_{\text{nr}}$ – относительная скорость этих частиц; $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – обычная приведенная масса частиц; Z_1 , Z_2 – их заряды; α – постоянная тонкой структуры.

Для часто встречающегося случая $\ell = 0$ и $Z_1 = Z_2 = 1$ выражение (1.2) принимает вид общеизвестного S -фактора Гамова–Зоммерфельда–Сахарова [24]–[26]

$$S_{\text{nr}}(v_{\text{nr}}) = \frac{X_{\text{nr}}(v_{\text{nr}})}{1 - e^{-X_{\text{nr}}(v_{\text{nr}})}}, \quad X_{\text{nr}}(v_{\text{nr}}) = \frac{\pi\alpha}{v_{\text{nr}}}. \quad (1.3)$$

Хорошо известно, что кулоновский фактор (1.3) может оказывать существенное влияние на сечение неупругого процесса (см. книги [27], [28]). Действительно, S -фактор определяется квадратом модуля волновой функции относительного движения в кулоновском поле, вычисленной в начале координат и нормированной условием, что амплитуда асимптотической плоской волны равна единице. С другой стороны, квадрат модуля волновой функции в нуле определяет вероятность нахождения частиц вблизи друг друга, и, следовательно, сечение неупругого процесса оказывается пропорциональным S -фактору. При скоростях v_{nr} малых и таких, что

¹⁾Мы будем всюду использовать систему единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

$\alpha \ll v_{\text{нр}} \ll 1$, поведение S -фактора (1.3) определяется выражением $S_{\text{нр}} \sim 1 + \pi\alpha/v_{\text{нр}}$, из которого следует, что при $v_{\text{нр}} \rightarrow 0$ сечение процесса должно увеличиваться.

В квантовой хромодинамике (КХД) S -фактор важен вблизи порога рождения кварковой пары, поскольку в этой области пертурбативное разложение непригодно даже в том случае, когда константа связи α_s мала [29], [30]. Причина состоит в том, что в околопороговой области пертурбативное разложение содержит сингулярности вида $(\alpha/v)^n$, где

$$v = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}, \quad (1.4)$$

$\sqrt{s}$ – полная энергия взаимодействующих частиц в системе центра инерции (СЦИ), а m – масса кварка. Такие пороговые сингулярности должны быть просуммированы. Впервые задача о кулоновском взаимодействии в конечном состоянии между компонентами электрон-позитронной пары была рассмотрена в рамках нековариантной теории возмущений на основе нерелятивистского уравнения Шредингера в известной работе Сахарова [26]. В рамках этого подхода такое рассмотрение приводит к нерелятивистскому S -фактору (1.3). Еще одно решение задачи о кулоновском взаимодействии в конечном (или начальном) состоянии для произвольного процесса с участием заряженных частиц с малыми относительными скоростями (т.е. нерелятивистских частиц, для которых $\alpha/v \gtrsim 1$) было получено в работе [31] путем суммирования главных (по α/v) диаграмм теории возмущений.

В релятивистской теории нерелятивистское приближение должно быть модифицировано. По-видимому, впервые релятивистская модификация S -фактора (1.3) в КХД для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс была выполнена в работах [32] (см. также [33]) и заключалась в замене $v_{\text{нр}} \rightarrow v$. Точно такой же вид S -фактора, как в [32], и также при взаимодействии двух частиц равных масс был позднее предложен в работе [34]. Другое релятивистское обобщение S -фактора также в случае двух частиц равных масс было получено в работах [35].

Еще один метод получения релятивистского S -фактора для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс был предложен в работе [36]. Разработанный в этой работе метод базируется на РКП-подходе [10] и использует возможность перехода от интегрального уравнения в трехмерном импульсном пространстве Лобачевского к интегральному уравнению в трехмерном релятивистском конфигурационном представлении, введенном в статье [37] для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс. При этом важно, что использованный потенциал (1.1) учитывает существенные моменты КХД – свойство асимптотической свободы и закон эволюции инвариантного заряда [38]. Данный метод приводит к следующему релятивистскому S -фактору²⁾:

$$S(\chi) = \frac{X(\chi)}{1 - e^{-X(\chi)}}, \quad X(\chi) = \frac{\pi\alpha}{\text{sh } \chi}, \quad (1.5)$$

где χ – быстрота, которая связана с полной энергией взаимодействующих частиц в СЦИ $\sqrt{s}$ соотношением $2m \text{ch } \chi = \sqrt{s}$. Функция $X(\chi)$ в формуле (1.5) может быть

²⁾Здесь и далее всюду в кулоновском потенциале (1.1) считаем $Z_1 = Z_2 = 1$.

выражена в терминах скорости v :

$$X(v) = \frac{\pi\alpha}{v} \sqrt{1 - v^2}.$$

Следует также обратить внимание на работу [39], в которой на основе уравнения Бете–Солпитера получено явное выражение для S -фактора при малых скоростях v . Полученное там выражение совпадает с фактором (1.5) при малых значениях скорости v (формула (1.4)), поскольку очевидно, что $X(v) \rightarrow \pi\alpha/v$ при $v \rightarrow 0$. Однако, как подчеркнуто в самой работе [39], авторам не удалось найти явное выражение для кулоновского фактора в ультрарелятивистском пределе при $v \rightarrow 1$.

Решение с произвольным i -периодическим фактором с кулоновским потенциалом было ранее получено в работе [40]. Известно, что использование данного решения применимо только для спектральных задач. Другие формы РКП-уравнения с таким потенциалом были рассмотрены в статьях [21], [41]. Применения релятивистского S -фактора (1.5) для описания ряда характеристик адронных процессов можно найти в работах [42]–[44].

Обобщение предложенного в работе [36] метода на случай состояний с произвольным значением ℓ и то же для случая взаимодействия двух частиц равных масс было проведено в работах [45], [46]. Данное рассмотрение приводит к следующему выражению для релятивистского ресуммирующего L -фактора ($\ell \geq 0$):

$$L(\chi) = \frac{X(\chi)}{1 - e^{-X(\chi)}} \prod_{n=1}^{\ell} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{2n \operatorname{sh} \chi} \right)^2 \right], \quad (1.6)$$

где функция $X(\chi)$ определена формулой (1.5).

Этот же метод был также успешно применен и в случае взаимодействия двух частиц произвольных масс m_1, m_2 в работе [47], что позволило получить следующее выражение для релятивистского ресуммирующего S -фактора (состояние $\ell = 0$) в РКП-подходе:

$$S_{\text{RQP}}(u) = \frac{X_{\text{RQP}}(u)}{1 - e^{-X_{\text{RQP}}(u)}}. \quad (1.7)$$

Здесь

$$X_{\text{RQP}}(u) = \frac{\pi\alpha}{u} \sqrt{1 - u^2}, \quad (1.8)$$

где скорость u дается выражением

$$u = \sqrt{1 - \frac{4m'^2}{s - (m_1 - m_2)^2}}, \quad (1.9)$$

а $m' = \sqrt{m_1 m_2}$ – масса эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы, концепция которой возникает в РКП-подходе [48].

Другое выражение для релятивистского S -фактора в случае двух частиц произвольных масс m_1, m_2 было предложено в рамках релятивистской квантовой механики на основе уравнения Шредингера в работе [49]. Сравнительный анализ обсуждаемых здесь выражений для S -фактора можно найти в работе [47].

Отметим, что ресуммирующие факторы появляются в параметризации мнимой части соответствующих кварковых токовых корреляторов, в отношении Дрелла

$R(s)$, которое в двухчастичном приближении может быть аппроксимировано амплитудой Бете–Солпитера двух заряженных частиц $\chi_{BS}(x)$ при $x = 0$ [50]. Представление амплитуды Бете–Солпитера через волновую функцию, отвечающую нерелятивистскому уравнению Шредингера с кулоновским потенциалом, ведет к формуле (1.3) с заменой $\alpha \rightarrow 4\alpha_s/3$ для КХД. В РКП-подходе амплитуда Бете–Солпитера, которая параметризует физическую величину $R(s)$ и берется при $x = 0$, а следовательно, при относительном времени $\tau = 0$, может быть выражена для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс m через волновую РКП-функцию $\Psi_q(\mathbf{p})$ соотношением

$$\chi_{BS}(x = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{p}} \Psi_q(\mathbf{p}), \quad (1.10)$$

где $d\Omega_{\mathbf{p}} = (m d\mathbf{p})/E_p$ – релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, которое реализуется на верхней полé массового гиперboloида $E_p^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$.

Цель настоящей работы состоит в обобщении метода, предложенного в работе [36], для вывода релятивистских ресуммирующих пороговых факторов для произвольного значения орбитального момента ($\ell \geq 0$) в рамках полностью ковариантного РКП-подхода в КТП. В разделе 2 представлен формализм РКП-подхода в КТП, сформулированного в релятивистском конфигурационном представлении для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс [48]. В разделе 3 в рамках данного подхода изложена суть метода вывода новых S -, P -, D -факторов и как обобщение для произвольного орбитального момента ℓ – L -фактора. В разделе 4 выполнен анализ поведения полученных факторов в нерелятивистском, релятивистском и ультрарелятивистском случаях, в случае равных масс частиц и когда одна из частиц покоится и проведено сравнение этих факторов с их нерелятивистскими аналогами. Результаты анализа обсуждаются в заключении.

2. КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ: СЛУЧАЙ ЧАСТИЦ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МАСС

В основу нашего рассмотрения положено полностью ковариантное РКП-уравнение в пространстве моментов, построенное в работе [48] для волновой РКП-функции $\Psi_{q'}(\mathbf{p}')$ для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс m_1, m_2 . Это уравнение имеет вид

$$(2E_{q'} - 2E_{p'})\Psi_{q'}(\mathbf{p}') = \frac{2\mu}{m'(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} \tilde{V}(\mathbf{p}', \mathbf{k}'; E_{q'})\Psi_{q'}(\mathbf{k}'), \quad (2.1)$$

где $d\Omega_{\mathbf{k}'} = m' d\mathbf{k}'/E_{k'}$ – релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, $m' = \sqrt{m_1 m_2}$, $E_{q'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{q}'^2}$, $E_{p'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{p}'^2}$, $E_{k'} = \sqrt{m'^2 + \mathbf{k}'^2}$.

Уравнение (2.1) можно рассматривать как релятивистское обобщение уравнения Шредингера в духе геометрии Лобачевского, реализующейся на верхней полé массового гиперboloида $E_p^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$. Это уравнение описывает рассеяние на квазипотенциале $\tilde{V}(\mathbf{p}', \mathbf{k}'; E_{q'})$ эффективной релятивистской частицы, которая выступает

в качестве двухчастичной системы, имеет массу m' , относительный 3-импульс $\mathbf{k}'$ и несет полную энергию взаимодействующих частиц в СЦИ $\sqrt{s}$, пропорциональную энергии $E_{k'}$ одной эффективной релятивистской частицы массы m' [48], [51]:

$$\sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{k}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^2} = \frac{m'}{\mu} E_{k'}. \quad (2.2)$$

Собственно преобразования Лоренца означают трансляцию в пространстве Лобачевского, а роль плоских волн, соответствующих этим трансляциям, играют функции

$$\xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) = \left(\frac{E_{p'} - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{n}}{m'} \right)^{-1 - i r m'}, \quad (2.3)$$

где модуль радиус-вектора $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$) является релятивистским инвариантом [51], причем в нерелятивистском пределе ($p' \ll 1$, $r \gg 1$) $\xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \rightarrow e^{i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}}$. Функции (2.3) соответствуют главной серии унитарных представлений группы Лоренца и удовлетворяют условиям полноты и ортогональности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{p}'} \xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \xi^*(\mathbf{p}', \mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} \xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \xi^*(\mathbf{q}', \mathbf{r}) &= \delta(\mathbf{p}'(-)\mathbf{q}'), \end{aligned} \quad (2.4)$$

а также уравнению в терминах конечных разностей [51]

$$(2E_{p'} - \hat{H}_0) \xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) = 0. \quad (2.5)$$

Здесь $\delta(\mathbf{p}'(-)\mathbf{q}') = \sqrt{1 + \mathbf{p}'^2/m'^2} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{q}')$ – релятивистская δ -функция в пространстве моментов; оператор

$$\hat{H}_0 = 2m' \left[\text{ch} \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{i\lambda'}{r} \text{sh} \left(i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\lambda'^2}{2r^2} \Delta_{\theta, \varphi} e^{i\lambda' \partial / \partial r} \right] \quad (2.6)$$

– оператор свободного гамильтониана, являющийся конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига $e^{\pm i\lambda' \partial / \partial r}$, в то время как $\Delta_{\theta, \varphi}$ – его угловая часть, а $\lambda' = 1/m'$ – комптоновская длина волны, связанная с эффективной релятивистской частицей массы m' .

Отметим, что уравнение (2.1) отличается от квазипотенциального уравнения, рассмотренного в работе [15], введением в него релятивистской приведенной массы. Однако в работе [15] было показано, что можно использовать различные выражения для релятивистской приведенной массы путем выбора функциональной связи между относительным импульсом $\mathbf{k}$ и релятивистской относительной скоростью $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц, связанной с их полной энергией в СЦИ $\sqrt{s}$ хорошо известным соотношением

$$|\mathbf{v}| = 2 \sqrt{\frac{s - (m_1 + m_2)^2}{s - (m_1 - m_2)^2}} \left(1 + \frac{s - (m_1 + m_2)^2}{s - (m_1 - m_2)^2} \right)^{-1}, \quad (2.7)$$

т.е. точно так же, как, например, в работах [35], [49]. В частности, если зависимость между кинетической энергией относительного движения и релятивистской относительной скоростью $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц [48], [51] дается выражением

$$\frac{\mathbf{k}'^2}{2\mu} = \mu \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} - 1 \right), \quad (2.8)$$

то, принимая во внимание соотношение (2.7), это приводит к выражению (2.2). Такой выбор функциональной связи позволил ввести концепцию эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы и имеющей массу m' , относительный 3-импульс $\mathbf{k}'$ и несущей полную энергию взаимодействующих частиц в СЦИ $\sqrt{s}$ ³⁾.

Волновые функции в пространстве моментов и в $\mathbf{r}$ -представлении, называемом релятивистским конфигурационным представлением [48], [51], связаны между собой соотношениями

$$\psi_{q'}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{p}'} \xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \Psi_{q'}(\mathbf{p}'), \quad \Psi_{q'}(\mathbf{p}') = \int d\mathbf{r} \xi^*(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \psi_{q'}(\mathbf{r}). \quad (2.9)$$

Для сферически-симметричных потенциалов применение преобразований (2.9) (преобразований Шапиро или ξ -преобразований) к уравнению (2.1) позволяет получить интегральную форму релятивистского уравнения Шредингера в конфигурационном представлении:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{p}'} (2E_{q'} - 2E_{p'}) \xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \int d\mathbf{r}' \xi^*(\mathbf{p}', \mathbf{r}') \psi_{q'}(\mathbf{r}') = \\ = \frac{2\mu}{m'} V(r; E_{q'}) \psi_{q'}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где правая часть уже является локальной в $\mathbf{r}$ -представлении, а квазипотенциал $V(r; E_{q'})$ дается в терминах тех же релятивистских плоских волн:

$$V(r; E_{q'}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{p}'} \xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \tilde{V}(\mathbf{p}'^2; E_{q'}).$$

Данный квазипотенциал является локальным в смысле геометрии Лобачевского и в общем случае зависит параметрически от энергии $E_{q'}$ одной эффективной релятивистской частицы массы m' (подробности можно найти в работах [48], [51], [52]).

Отметим, что использование условия полноты (2.4) и уравнения (2.5) позволяет выразить левую часть уравнения (2.10) в терминах конечных разностей:

$$(2E_{q'} - \hat{H}_0) \psi_{q'}(\mathbf{r}) = \frac{2\mu}{m'} V(r; E_{q'}) \psi_{q'}(\mathbf{r}), \quad (2.11)$$

где свободный гамильтониан $\hat{H}_0$ определен формулой (2.6).

Известно, что решения этого уравнения в принципе могут содержать произвольные функции переменной r с периодом i , так называемые i -периодические константы, которые появляются в решениях из-за конечно-разностной природы гамильтониана (2.6). Для некоторых задач, таких как определение спектра связанных состояний, эти i -периодические константы не важны. Однако для целей выделения

³⁾Напомним, что 3-импульс $\mathbf{k}'$ эффективной релятивистской частицы в силу выражения (2.8) является инвариантом преобразований Лоренца.

ресуммирующих факторов их необходимо учитывать. Следуя работе [36], мы разовьем метод, который позволяет устранить эту неоднозначность. Для этого вместо уравнения (2.11) будем рассматривать уравнение (2.10), которое можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{p}} (2E_q - 2E_p) \xi(\mathbf{p}, \rho) \int d\rho' \xi^*(\mathbf{p}, \rho') \psi_q(\rho') = \\ = \frac{2\mu}{m'} V(\rho; E_q) \psi_q(\rho), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где “старые” и “новые” переменные связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' = m' \mathbf{q}, \quad \mathbf{p}' = m' \mathbf{p}, \quad \mathbf{q} = \text{sh } \chi_q \mathbf{n}_q, \quad \mathbf{p} = \text{sh } \chi_p \mathbf{n}_p, \quad |\mathbf{n}_q| = |\mathbf{n}_p| = 1, \\ \rho = m' \mathbf{r}, \quad \rho' = m' \mathbf{r}', \quad d\Omega_{\mathbf{p}'} = m'^3 d\Omega_{\mathbf{p}}, \quad d\Omega_{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{E_p}, \quad d\mathbf{r}' = m'^{-3} d\mathbf{p}', \\ E_{q'} = m' E_q, \quad E_{p'} = m' E_p, \quad E_q = \sqrt{1 + \mathbf{q}^2}, \quad E_p = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2}, \\ V(r; E_{q'}) \equiv m' V(\rho; E_q), \quad \xi(\mathbf{p}', \mathbf{r}) \equiv \xi(\mathbf{p}, \rho) = (E_p - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n})^{-1-i\rho}, \\ \psi_{q'}(\mathbf{r}) \equiv \psi_q(\rho), \quad \Psi_{q'}(\mathbf{p}') \equiv m'^{-3} \Psi_q(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Используя разложения релятивистских плоских волн (2.3) и волновой функции $\psi_q(\rho)$ по парциальным волнам

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{p}, \rho) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell p_\ell(\rho, \text{ch } \chi_p) P_\ell \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \rho}{p\rho} \right), \\ \psi_q(\rho) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell \frac{\varphi_\ell(\rho, \chi_q)}{\rho} P_\ell \left(\frac{\mathbf{q} \cdot \rho}{q\rho} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

а также формулу [37]

$$p_\ell(\rho, \text{ch } \chi) = \frac{(-1)^\ell (\text{sh } \chi)^\ell}{\rho^{(\ell+1)}} \left(\frac{d}{d \text{ch } \chi} \right)^\ell \left(\frac{\sin \rho \chi}{\text{sh } \chi} \right),$$

уравнение (2.12) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\chi' \frac{(\text{sh } \chi')^{2\ell+2} (-1)^{\ell+1}}{\rho^{(\ell+1)}} (2 \text{ch } \chi - 2 \text{ch } \chi') \left(\frac{d}{d \text{ch } \chi'} \right)^\ell \left(\frac{\sin \rho \chi'}{\text{sh } \chi'} \right) \times \\ \times \left(\frac{d}{d \text{ch } \chi'} \right)^\ell \frac{1}{\text{sh } \chi'} \int_0^\infty d\rho' \frac{\rho' \sin \rho' \chi'}{(-\rho')^{(\ell+1)}} \varphi_\ell(\rho', \chi) = \frac{2\mu}{m'} \frac{V(\rho; E_q) \varphi_\ell(\rho, \chi)}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь $P_\mu^\nu(z)$ – функции Лежандра первого рода, а функция

$$p_\ell(\rho, \text{ch } \chi) = \sqrt{\frac{\pi}{2 \text{sh } \chi}} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\rho} (-\rho)^{(\ell+1)} P_{-1/2+i\rho}^{-1/2-\ell}(\text{ch } \chi) \quad (2.16)$$

является решением уравнения (2.5); χ' , χ – быстроты, которые связаны с E_p , E_q соотношениями $E_p = \text{ch } \chi'$, $E_q = \text{ch } \chi$; функция

$$(-\rho)^{(\ell+1)} = i^{\ell+1} \frac{\Gamma(\ell+1+i\rho)}{\Gamma(i\rho)} \quad (2.17)$$

называется обобщенной степенью [37], где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Очевидно, что уравнение (2.15) отличается от соответствующего уравнения для случая равных масс только коэффициентом $2\mu/m'$, переходящим в единицу при $m_1 = m_2$ [53].

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ФАКТОРЫ

Впервые решение уравнения (2.15), не содержащее i -периодических констант, при $\ell = 0$ с кулоновским потенциалом (1.1) было получено в работе [36] для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс. Этот подход привел к релятивистскому S -фактору (1.5). Отметим, что кулоновоподобный квазипотенциал (1.1) лишь формально имеет ту же форму, что и нерелятивистский. Однако в релятивистском конфигурационном представлении он отличается от нерелятивистского, поскольку применение ξ -преобразования (2.9) к кулоновскому потенциалу (1.1) дает следующее выражение для потенциала в пространстве моментов:

$$V(\Delta) \sim (\chi_\Delta \operatorname{sh} \chi_\Delta)^{-1},$$

где относительная быстрота χ_Δ соответствует $\Delta = \mathbf{p}'(-)\mathbf{k}'$ и определяется квадратом переданного импульса $Q^2 = -(p' - k')^2 = 2(\operatorname{ch} \chi_\Delta - 1)$. При больших Q^2 потенциал $V(\Delta)$ ведет себя как $(Q^2 \ln Q^2)^{-1}$, что воспроизводит главное поведение потенциала в КХД, который в лидирующем порядке пропорционален $\bar{\alpha}_s(Q^2)/Q^2$, где $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ – инвариантный заряд. Тем самым аккумулируется основной эффект, обусловленный бегущей КХД-константой связи. Такое КХД-подобное поведение потенциала (1.1) в РКП-подходе, соответствующее статическому кварк-антикварковому потенциалу, впервые было отмечено в работе [38].

Для того чтобы найти решение РКП-уравнения (2.15) с кулоновоподобным квазипотенциалом (1.1), обобщим метод, предложенный в работе [36] (см. также [47], [53], [54]). Следуя этому методу, решение РКП-уравнения (2.15) с квазипотенциалом (1.1) ищем в виде

$$\varphi_\ell(\rho, \chi) = \frac{(-\rho)^{(\ell+1)}}{\rho} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta e^{i\rho\zeta} R_\ell(\zeta, \chi), \quad (3.1)$$

где обобщенная степень $(-\rho)^{(\ell+1)}$ определена формулой (2.17), а ζ -интегрирование выполняется в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками α_- и α_+ (см. рис. 1).

Подставляя представление (3.1) в (2.15) и принимая во внимание, что

$$\frac{1}{i\pi} \int_0^\infty d\rho' \sin(\rho' \chi') e^{i\rho' \zeta} = \frac{1}{i\pi} \frac{\chi'}{\chi'^2 - \zeta^2}, \quad \operatorname{Im} \zeta > 0,$$

приходим к уравнению

$$\begin{aligned} (-1)^\ell \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta R_\ell(\zeta, \chi) \left(\frac{d}{d \operatorname{ch} \zeta} \right)^\ell & \left[(\operatorname{sh} \zeta)^{2\ell+1} (2 \operatorname{ch} \chi - 2 \operatorname{ch} \zeta) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{d}{d \operatorname{ch} \zeta} \right)^\ell \left(\frac{e^{i\rho\zeta}}{\operatorname{sh} \zeta} \right) \right] = -\frac{2\mu\alpha}{m'\rho} \prod_{n=1}^{\ell} (\rho^2 + n^2) \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta e^{i\rho\zeta} R_\ell(\zeta, \chi). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Следует отметить, что решения этого уравнения, а значит и уравнения (2.15) уже не содержат i -периодических констант, которые появляются в решениях уравнения (2.11) из-за конечно-разностной природы гамильтониана (2.6). Также напомним, что квазипотенциал $V(\rho; E_q)$, входящий в правую часть уравнения (2.15), зависит параметрически от энергии $E_q = \text{ch } \chi$ эффективной релятивистской частицы массы m' (или от ее быстроты χ). Следовательно, параметр α в уравнении (3.2) также является функцией быстроты χ .

3.1. S -фактор. Для простоты изложения рассмотрим сначала случай $\ell = 0$. Интегрирование по частям уравнения (3.2) при $\ell = 0$ приводит к уравнению

$$\frac{d}{d\zeta}[(\text{ch } \chi - \text{ch } \zeta)R_0(\zeta, \chi)] - \frac{i\alpha\mu}{m'}R_0(\zeta, \chi) = 0 \quad (3.3)$$

с граничным условием

$$e^{i\rho\zeta}(\text{ch } \chi - \text{ch } \zeta)R_0(\zeta, \chi)\Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.3) с граничным условием (3.4) дается выражением

$$R_0(\zeta, \chi) = -C_0(\chi) \frac{e^\zeta}{(e^\zeta - e^\chi)^2} \left[\frac{e^\zeta - e^{-\chi}}{e^\zeta - e^\chi} \right]^{-1+iA}, \quad A = \frac{\alpha\mu}{m' \text{sh } \chi}, \quad (3.5)$$

где $C_0(\chi)$ – произвольная функция от χ .

Значения $\zeta = \pm\chi + 2\pi ni$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, являются точками ветвления функции (3.5) (см. рис. 1). Контур интегрирования в представлении (3.1) не должен пересекать разрезы, которые проводятся от $-\infty + 2\pi ni$ до $\pm\chi + 2\pi ni$. В случае, когда взаимодействие выключено, $\alpha \rightarrow 0$, решение $\varphi_\ell(\rho, \chi)$ должно воспроизводить известную свободную волновую функцию

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi_\ell(\rho, \chi) = \rho p_\ell(\rho, \text{ch } \chi) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sin(\rho\chi - \pi\ell/2)}{\text{sh } \chi}, \quad (3.6)$$

где функция $p_\ell(\rho, \text{ch } \chi)$ определена формулой (2.16). Принимая во внимание эти замечания и граничное условие (3.4), выбираем $\alpha_- = -R - i\varepsilon$, $\alpha_+ = -R + i\varepsilon$ при

Рис. 1. Контур интегрирования в представлении (3.1) и сингулярности решений (3.5) и (3.17) в комплексной ζ -плоскости.

$R \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Вертикальная часть контура интегрирования в правой его части выбрана в виде $\operatorname{Re} \zeta = +R$. Горизонтальную же часть контура интегрирования нам удобно выбрать в виде $\operatorname{Im} \zeta = \pm\pi$ (см. рис. 1), что позволит полученное нами решение в итоге выразить через гипергеометрическую функцию.

Подставляя решение (3.5) в представление (3.1) при $\ell = 0$, получаем следующее выражение для парциальной волновой РКП-функции $\varphi_0(\rho, \chi)$:

$$\varphi_0(\rho, \chi) = C_0(\chi) \frac{\rho}{\rho^{(1)}} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta \frac{e^{(i\rho+1)\zeta}}{(e\zeta - e\chi)^2} \left[\frac{e\zeta - e^{-\chi}}{e\zeta - e\chi} \right]^{-1+iA}, \quad (3.7)$$

где функция $\rho^{(1)}$ определена выражением (2.17), а параметр A – формулой (3.5).

Выполняя в выражении (3.7) ζ -интегрирование в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками α_- и α_+ (так же, как в работе [36]), получим результирующее решение, не содержащее i -периодических констант, в форме

$$\varphi_0(\rho, \chi) = -2C_0(\chi) \frac{\rho \operatorname{sh}(\pi\rho)}{\rho^{(1)}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{(i\rho+1)x}}{(e^x + e\chi)^2} \left[\frac{e^x + e^{-\chi}}{e^x + e\chi} \right]^{-1+iA}. \quad (3.8)$$

Решение (3.8) также может быть выражено через гипергеометрическую функцию:

$$\varphi_0(\rho, \chi) = -N_0(\chi)(-\rho)^{(1)} e^{i\rho\chi + iA\chi} F(1 - iA, 1 - i\rho; 2; 1 - e^{-2\chi}), \quad (3.9)$$

где действительный нормировочный множитель $N_0(\chi) = -2\pi C_0(\chi)e^{-\chi - iA\chi}$ находится из условия (3.6) при $\ell = 0$, а функция $(-\rho)^{(1)}$ и параметр A определены формулами (2.17) и (3.5) соответственно.

Заметим, что функция Бете–Солпитера $\chi_{\text{BS}}(x=0)$ связана с волновой РКП-функцией $\Psi_q(\mathbf{p})$ соотношением (1.10). Тогда, принимая во внимание преобразования (2.9) и обозначения (2.13), ее связь с волновой РКП-функцией $\psi_q(\rho)$ дается выражением

$$\chi_{\text{BS}}(x=0) = \psi_q(\rho)|_{\rho=i}.$$

Поскольку при $\rho = i$ все обобщенные степени (2.17) при $\ell \neq 0$ в представлении (3.1) обращаются в нуль, то в разложении (2.14) для волновой функции $\psi_q(\rho)$ остается только s -волна, т.е. случай $\ell = 0$. Следовательно, используя соотношения (3.9) и (3.6), вычисляем $|\psi_q(i)|^2$. Это приводит к следующему выражению для релятивистского S -фактора для случая взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс:

$$S_{\text{RQP}}(\chi) = \lim_{\rho \rightarrow i} \left| \frac{\varphi_0(\rho, \chi)}{\rho} \right|^2 = \frac{X_{\text{RQP}}(\chi)}{1 - e^{-X_{\text{RQP}}(\chi)}}, \quad (3.10)$$

где

$$X_{\text{RQP}}(\chi) = \frac{2\pi\alpha\mu}{m' \operatorname{sh} \chi}, \quad (3.11)$$

а χ – быстрота, которая связана с полной энергией $\sqrt{s}$ соотношением

$$\frac{m'^2}{\mu} \operatorname{ch} \chi = \sqrt{s}. \quad (3.12)$$

3.2. P -фактор. При нахождении релятивистского P -фактора важным моментом является то, что при $\rho = i$ в разложении (2.14) для волновой функции $\psi_q(\rho)$ остается только s -волна, т.е. случай $\ell = 0$. Поэтому для p -волны релятивистский ресуммирующий P -фактор будет определяться через конечно-разностную производную от квазипотенциальной парциальной волновой функции $\varphi_1(\rho, \chi)$ при $\rho = i$ соотношением [55]

$$P_{\text{RQP}}(\chi) = \lim_{\rho \rightarrow i} \left| \frac{3}{\text{sh } \chi} \Delta^* \left(\frac{\varphi_1(\rho, \chi)}{\rho} \right) \right|^2, \quad (3.13)$$

где конечно-разностная производная дается выражением [37]

$$\Delta^* = \frac{1}{i} [e^{id/d\rho} - 1]. \quad (3.14)$$

Рассмотрим уравнение (3.2) при $\ell = 1$, в котором (как и в случае $\ell = 0$) выполним интегрирование по частям. Тогда получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{1}{\text{sh } \zeta} \frac{d}{d\zeta} \left[(\text{sh } \zeta)^2 (\text{ch } \chi - \text{ch } \zeta) \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{R_1(\zeta, \chi)}{\text{sh } \zeta} \right) \right] \right\} - \\ & - \frac{i\alpha\mu}{m'} \left[\frac{d^2}{d\zeta^2} (R_1(\zeta, \chi)) - R_1(\zeta, \chi) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} & e^{i\rho\zeta} (\text{ch } \chi - \text{ch } \zeta) R_1(\zeta, \chi) \Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0, \\ & - e^{i\rho\zeta} (\text{ch } \chi - \text{ch } \zeta) \left[\frac{\text{ch } \zeta}{\text{sh } \zeta} R_1(\zeta, \chi) + \text{sh } \zeta \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{R_1(\zeta, \chi)}{\text{sh } \zeta} \right) \right] + \\ & + \frac{i\alpha\mu}{m'} e^{i\rho\zeta} R_1(\zeta, \chi) \Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0, \\ & \frac{e^{i\rho\zeta}}{\text{sh } \zeta} \frac{d}{d\zeta} \left[(\text{sh } \zeta)^2 (\text{ch } \chi - \text{ch } \zeta) \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{R_1(\zeta, \chi)}{\text{sh } \zeta} \right) \right] - \\ & - \frac{i\alpha\mu}{m'} e^{i\rho\zeta} \frac{d}{d\zeta} (R_1(\zeta, \chi)) \Big|_{\zeta=\alpha_-}^{\zeta=\alpha_+} = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Решение уравнения (3.15) с граничными условиями (3.16) дается выражением

$$\begin{aligned} R_1(\zeta, \chi) = & B_1(\chi) e^\zeta + B_2(\chi) e^{-\zeta} - \\ & - \frac{C_1(\chi)}{2^4 \text{sh}^3 \chi} \left\{ e^\zeta \left[\frac{1}{1 + iA} \left(\frac{e^\zeta - e^{-\chi}}{e^\zeta - e^\chi} \right)^{1+iA} - \frac{2}{iA} \left(\frac{e^\zeta - e^{-\chi}}{e^\zeta - e^\chi} \right)^{iA} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{-1 + iA} \left(\frac{e^\zeta - e^{-\chi}}{e^\zeta - e^\chi} \right)^{-1+iA} \right] - e^{2\chi-\zeta} \left[\frac{1}{1 + iA} \left(\frac{e^\zeta - e^{-\chi}}{e^\zeta - e^\chi} \right)^{1+iA} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{2e^{-2\chi}}{iA} \left(\frac{e^\zeta - e^{-\chi}}{e^\zeta - e^\chi} \right)^{iA} + \frac{e^{-4\chi}}{-1 + iA} \left(\frac{e^\zeta - e^{-\chi}}{e^\zeta - e^\chi} \right)^{-1+iA} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где A то же самое, что и в формуле (3.5), а $B_1(\chi)$, $B_2(\chi)$ и $C_1(\chi)$ – произвольные функции от χ .

Подставляя решение (3.17) в представление (3.1) при $\ell = 1$ и выполняя необходимые интегрирования, получаем следующее выражение для парциальной волновой РКП-функции $\varphi_1(\rho, \chi)$:

$$\varphi_1(\rho, \chi) = -C_1(\chi) \frac{\rho}{\rho^{(2)}} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} d\zeta \frac{e^{(i\rho+2)\zeta}}{(e\zeta - e\chi)^4} \left[\frac{e\zeta - e^{-\chi}}{e\zeta - e\chi} \right]^{-2+iA}, \quad (3.18)$$

где функция $\rho^{(2)}$ определена формулой (2.17). Далее, выполняя в выражении (3.18) ζ -интегрирование в комплексной плоскости вдоль контура с концевыми точками α_- и α_+ (т.е. так же, как и в случае s -волны), получаем результирующее решение, не содержащее i -периодических констант, в форме

$$\varphi_1(\rho, \chi) = -2C_1(\chi) \frac{\rho \operatorname{sh}(\pi\rho)}{\rho^{(2)}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{(i\rho+2)x}}{(e^x + e\chi)^4} \left[\frac{e^x + e^{-\chi}}{e^x + e\chi} \right]^{-2+iA}. \quad (3.19)$$

Решение (3.19) также может быть представлено через гипергеометрическую функцию:

$$\varphi_1(\rho, \chi) = N_1(\chi)(-\rho)^{(2)} e^{i\rho\chi+iA\chi} F(2-iA, 2-i\rho; 4; 1-e^{-2\chi}), \quad (3.20)$$

где действительный нормировочный множитель $N_1(\chi) = -(\pi/3)C_1(\chi)e^{-2\chi-iA\chi}$ находится из условия (3.6) при $\ell = 1$, а обобщенная степень $(-\rho)^{(2)}$ определена формулой (2.17). Наконец, используя определения (3.13) и (3.14), решение (3.20) и условие (3.6), находим следующее выражение для релятивистского P -фактора в случае взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс:

$$P_{\text{RQP}}(\chi) = \left[1 + \left(\frac{\alpha\mu}{m' \operatorname{sh} \chi} \right)^2 \right] S_{\text{RQP}}(\chi), \quad (3.21)$$

где $S_{\text{RQP}}(\chi)$ дается выражением (3.10).

3.3. L -фактор. Для d -волны ($\ell = 2$) релятивистский ресуммирующий D -фактор определяется соотношением

$$D_{\text{RQP}}(\chi) = \lim_{\rho \rightarrow i} \left| \frac{\Gamma(6)}{(2 \operatorname{sh} \chi)^2 \Gamma^2(3)} (\Delta^*)^2 \left[\frac{\varphi_2(\rho, \chi)}{\rho} \right] \right|^2, \quad (3.22)$$

где парциальная волновая функция $\varphi_2(\rho, \chi)$ находится через решение уравнения (3.2) при $\ell = 2$ подобно случаям $\ell = 0$ и 1. Это приводит к следующему выражению:

$$\varphi_2(\rho, \chi) = -N_2(\chi)(-\rho)^{(3)} e^{i\rho\chi+iA\chi} F(3-iA, 3-i\rho; 6; 1-e^{-2\chi}). \quad (3.23)$$

Действительный нормировочный множитель $N_2(\chi)$ находится из условия (3.6) при $\ell = 2$, а функция $(-\rho)^{(3)}$ и параметр A определены выражениями (2.17) и (3.5) соответственно. Используя соотношения (3.14), (3.22) и (3.23), находим искомое выражение для релятивистского D -фактора:

$$D_{\text{RQP}}(\chi) = \prod_{n=1}^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha\mu}{nm' \operatorname{sh} \chi} \right)^2 \right] S_{\text{RQP}}(\chi), \quad (3.24)$$

где релятивистский S -фактор $S_{\text{RQP}}(\chi)$ дается выражением (3.10).

Проведенное выше изложение метода вывода новых S -, P - и D -факторов позволяет, решив уравнение (3.2), найти выражение (не содержащее i -периодических констант) для произвольной парциальной волновой функции $\varphi_\ell(\rho, \chi)$ и затем выразить его через гипергеометрическую функцию:

$$\begin{aligned} \varphi_\ell(\rho, \chi) = N_\ell(\chi)(-\rho)^{(\ell+1)} e^{i\rho\chi + iA\chi + i\pi(\ell+1)} \times \\ \times F(\ell+1-iA, \ell+1-i\rho; 2\ell+2; 1-e^{-2\chi}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь нормировочный множитель $N_\ell(\chi)$ находится из условия (3.6), а обобщенная степень $(-\rho)^{(\ell+1)}$ и параметр A определяются выражениями (2.17) и (3.5) соответственно.

Релятивистский ресуммирующий пороговый фактор для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$ определяется через конечно-разностную производную (3.14) выражением [45], [46], [53]

$$L_{\text{RQP}}(\chi) = \lim_{\rho \rightarrow i} \left| \frac{\Gamma(2\ell+2)}{(2 \operatorname{sh} \chi)^\ell \Gamma^2(\ell+1)} (\Delta^*)^\ell \left[\frac{\varphi_\ell(\rho, \chi)}{\rho} \right] \right|^2. \quad (3.26)$$

Теперь, используя соотношения (3.14), (3.25) и (3.26), получаем выражение для релятивистского L -фактора для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$ в случае взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс:

$$L_{\text{RQP}}(\chi) = \prod_{n=1}^{\ell} \left[1 + \left(\frac{\alpha\mu}{nm' \operatorname{sh} \chi} \right)^2 \right] S_{\text{RQP}}(\chi), \quad (3.27)$$

где быстрота χ связана с полной энергией $\sqrt{s}$ соотношением (3.12).

4. СВОЙСТВА L -ФАКТОРА

Покажем, что фактор (3.27) можно формально привести к виду, который имеет нерелятивистский фактор (1.2). Для этого рассмотрим квадрат относительного 3-импульса $\mathbf{k}'$ эффективной релятивистской частицы, имеющей массу m' и выступающей в качестве двухчастичной системы, связанный с полной энергией взаимодействующих частиц в СЦИ $\sqrt{s}$ и с релятивистской относительной скоростью $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц выражениями (2.2) и (2.8). Обратно, из соотношений (2.2) и (2.8) следует, что релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц выражается через их полную энергию в СЦИ $\sqrt{s}$ соотношением (2.7). Отсюда, принимая во внимание определение скорости (1.9), находим

$$|\mathbf{v}| = \frac{2u}{1+u^2}. \quad (4.1)$$

Тогда из выражений (2.8) и (4.1) следует

$$\mathbf{k}'^2 = \mu^2 (u'_{\text{rel}})^2, \quad (4.2)$$

где μ – приведенная масса, а относительная скорость u'_{rel} эффективной релятивистской частицы массы m' , выступающей в качестве двухчастичной системы, определяется выражением

$$u'_{\text{rel}} = \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (4.3)$$

Этот результат отражает физический смысл уравнения (2.1), которое является релятивистским обобщением уравнения Шредингера в духе геометрии Лобачевского. Подчеркнем, что как 3-импульс $\mathbf{k}'$, так и скорость (4.3) эффективной релятивистской частицы в силу выражений (2.8) и (4.2) являются инвариантами преобразований Лоренца. Тем самым функция $X_{\text{RQP}}(\chi)$ в формуле (3.10) выражается в терминах относительной скорости u'_{rel} эффективной релятивистской частицы, определяемой формулой (4.3), как

$$X_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel}}) = \frac{2\pi\alpha}{u'_{\text{rel}}}. \quad (4.4)$$

Таким образом, в терминах относительной скорости эффективной релятивистской частицы релятивистский S -фактор (3.10) и, как обобщение, L -фактор (3.27) ($\ell \geq 0$) даются выражениями

$$S_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel}}) = \frac{X_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel}})}{1 - e^{-X_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel}})}}, \quad (4.5)$$

$$L_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel}}) = \prod_{n=1}^{\ell} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{nu'_{\text{rel}}} \right)^2 \right] S_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel}}). \quad (4.6)$$

Отметим, что фактор (4.6) лишь формально имеет ту же форму, что и нерелятивистский фактор (1.2). Тем не менее фактор (4.6) имеет явно выраженный релятивистский характер, поскольку как аргумент r (модуль радиус-вектора $\mathbf{r}$) в кулоновском потенциале (1.1), так и релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц (см. работу [51]) являются релятивистскими инвариантами. Значит, в силу соотношений (2.8) и (4.2) и скорость эффективной релятивистской частицы (4.3) также обладает этим свойством.

Релятивистские пороговые ресуммирующие факторы (4.5) и (4.6) имеют следующие важные свойства.

- В нерелятивистском пределе $u \ll 1$ они воспроизводят известные нерелятивистские результаты.
- В релятивистском пределе $u \rightarrow 1$ факторы (4.5) и (4.6) стремятся к единице.
- Для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс факторы (4.5) и (4.6) совпадают с S - и L -факторами (1.5) и (1.6).
- Случай, когда одна из частиц покоится, означает, что $m_1 \rightarrow \infty$. Это дает следующее предельное выражение для скорости u :

$$u \xrightarrow{m_1 \rightarrow \infty} \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{m_2^2 + \mathbf{k}^2} + m_2}.$$

- В ультрарелятивистском пределе, как было показано в работах [56], спектр связанных состояний исчезает, когда масса $m' \rightarrow 0$, так как масса частицы является единственным размерным параметром. Эта особенность отражает существенное различие между потенциальными моделями и КТП, где появляется дополнительный размерный параметр Λ . Поэтому можно заключить, что S - и L -факторы, которые соответствуют непрерывному спектру, при $m' \rightarrow 0$ должны стремиться к единице. Тем самым в отличие от нерелятивистского случая релятивистские пороговые

Рис. 2. Поведение релятивистских S -, P - и D -факторов как функций переменной u при различных значениях α . S -фактору (4.5) соответствует сплошная линия, а штриховая и штрихпунктирная линии – релятивистским P - и D -факторам, которые определяются выражением (4.6) при $\ell = 1$ и $\ell = 2$ соответственно. Пунктирная линия соответствует значению $\alpha = 0$.

ресуммирующие S - и L -факторы (4.5) и (4.6) воспроизводят как известный нерелятивистский, так и ожидаемый ультрарелятивистский пределы $S, L \rightarrow 1$. Следует подчеркнуть, что такое ультрарелятивистское поведение S - и L -факторов (4.5) и (4.6) приводит к такому выражению для отношения Дрелла $R(s)$, из которого следует, что в случае векторного и аксиально-векторного кварковых токов поправки по α_S становятся асимптотически равными и воспроизводится известная безмассовая формула: $R(s) \sim 1 + \alpha_S/\pi$ (см. работу [55]).

Для того чтобы проиллюстрировать поведение L -фактора при различных ℓ , на рис. 2 показаны релятивистские S -, P - и D -факторы как функции переменной u при различных значениях α . Видно, что в области вблизи порога рождения кварковой пары (при нерелятивистских значениях $u \lesssim 0.2$) влияние этих факторов наиболее сильное и зависит от значения α . С ростом же значений u зависимость от α ослабевает, и все кривые приближаются к единице.

Рис. 3 демонстрирует различия в поведении релятивистского и нерелятивистского P -факторов как функций переменной u при различных значениях α . При этом поведение релятивистских и нерелятивистских S - и D -факторов как функций переменной u при различных значениях α имеет тот же характер, что и поведение релятивистского и нерелятивистского P -факторов. Видно, что полученный релятивистский L -фактор в области нерелятивистских значений $u \lesssim 0.2$, где его влияние велико, фактически совпадает с его нерелятивистским аналогом (1.2). Однако с увеличением значения u различие в поведении релятивистского и нерелятивистского L -факторов становится все более существенным, особенно при значениях u , близких к единице.

Рис. 3. Поведение P -фактора как функции переменной u при различных значениях α . Сплошные линии соответствуют релятивистскому выражению (4.6) при $\ell = 1$, а штриховые линии – нерелятивистскому.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получен новый релятивистский ресуммирующий L -фактор (4.6) для произвольного орбитального момента $\ell \geq 0$ в случае взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс. Для этой цели была использована формулировка квазипотенциального метода в трехмерном релятивистском конфигурационном представлении [48] для системы взаимодействия двух релятивистских частиц произвольных масс с кулоновоподобным квазипотенциалом.

Релятивистский L -фактор (4.6) воспроизводит известное нерелятивистское поведение при малых скоростях u . В то же время этот фактор дает ожидаемый ультрарелятивистский предел ($u \rightarrow 1$), равный единице, что позволяет воспроизвести известную безмассовую формулу для отношения Дрелла $R(s)$.

По форме релятивистский L -фактор (4.6) совпадает с его нерелятивистским аналогом (1.2), однако роль параметра скорости в выражении (4.6) играет не релятивистская относительная скорость $\mathbf{v}$ взаимодействующих частиц, а определяемая выражением (4.3) скорость эффективной релятивистской частицы, выступающей в качестве двухчастичной системы.

Выполненный анализ показал (см. рис. 2), что при нерелятивистских значениях $u \lesssim 0.2$ величина этого фактора при любых значениях $\ell \geq 0$ существенно больше единицы, т.е. его влияние в этой области наиболее сильное и зависит от значения α . С ростом же значений u зависимость от α ослабевает, и все кривые приближаются к единице. Также было показано, что имеется существенное отличие (см. рис. 3) в поведении нового выражения (4.6) от поведения его нерелятивистского аналога (1.2).

Поскольку L -фактор (4.6) получен нами в рамках полностью ковариантного метода, то можно ожидать, что он более полно учитывает релятивистский характер взаимодействующих частиц.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность Д. В. Ширкову и Р. Н. Фаустову за проявленный интерес к работе и ценные замечания, Ю. С. Вернову и М. Н. Мнацакановой за поддержку и полезные обсуждения, а также А. Е. Дорохову, А. В. Киселеву и И. С. Сапункевичу за стимулирующие дискуссии. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00686), гранта БелРФФИ-ОИЯИ-2010 и ГПФИ “Поля и частицы”.

Список литературы

- [1] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, *Nuovo Cimento*, **29**:2 (1963), 380–399.
- [2] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, I. T. Todorov, O. A. Khrustalev, *Nuovo Cimento*, **30**:1 (1963), 134–142.
- [3] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, O. A. Khrustalev, *Phys. Lett.*, **4**:6 (1963), 325–326.
- [4] Б. А. Арбузов, А. А. Логунов, А. Н. Тавхелидзе, Р. Н. Фаустов, А. Т. Филипов, *ЖЭТФ*, **44** (1963), 1409.
- [5] В. Г. Кадышевский, А. Н. Тавхелидзе, “Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел”, *Проблемы теоретической физики*, Сборник, посвященный 60-летию Н. Н. Боголюбова, Наука, М., 1969.
- [6] Р. Н. Фаустов, *ТМФ*, **3**:2 (1970), 240–254; *ЭЧАЯ*, **3**:1 (1972), 238–268; *Ann. Phys.*, **78**:1 (1973), 176–189.
- [7] П. Н. Боголюбов, *ТМФ*, **5**:2 (1970), 244–252.
- [8] А. А. Логунов, В. И. Саврин, Н. Е. Тюрин, О. А. Хрусталеv, *ТМФ*, **6**:2 (1971), 157–165.
- [9] В. Р. Гарсеванишвили, А. Н. Квинихидзе, В. А. Матвеев, А. Н. Тавхелидзе, Р. Н. Фаустов, *ТМФ*, **23**:3, 310–321.
- [10] V. G. Kadyshevsky, *Nucl. Phys. B*, **6**:2 (1968), 125–148.
- [11] V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev, *Nuovo Cimento A*, **55**:2 (1968), 275–300.
- [12] В. Г. Кадышевский, *ЖЭТФ*, **46**:2 (1964), 654–662; **46**:3 (1964), 872–883; *ДАН СССР*, **160**:3 (1965), 573–574.
- [13] Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, *ЯФ*, **30**:4 (1979), 1079–1088; **31**:5 (1980), 1332–1340; *ТМФ*, **43**:3 (1980), 330–342; **54**:2 (1983), 183–192.
- [14] V. N. Kapshay, A. D. Linkevich, N. B. Skachkov, V. I. Savrin, *Nuovo Cimento A*, **66**:1 (1981), 45–62; А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, *ТМФ*, **53**:1 (1982), 20–31; *ЯФ*, **37** (1983), 391–399; А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, В. В. Санадзе, Н. Б. Скачков, *ЯФ*, **37** (1983), 959–965.
- [15] А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ТМФ*, **64**:2 (1985), 179–185.
- [16] Б. А. Арбузов, Э. Э. Боос, В. И. Саврин, С. А. Шичанин, *ТМФ*, **83**:2 (1990), 175–185.
- [17] В. А. Матвеев, В. И. Саврин, А. Н. Сисакян, А. Н. Тавхелидзе, *ТМФ*, **132**:2 (2002), 267–287.
- [18] А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, *ЯФ*, **61**:3 (1998), 534–539; **63**:5 (2000), 915–919; **64**:7 (2001), 1358–1363.
- [19] D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin, *Phys. Rev. D*, **62**:3 (2000), 034014, 11 pp., arXiv: hep-ph/9911283; **67**:1 (2003), 014027, 19 pp., arXiv: hep-ph/0210381; **72**:3 (2005), 034026, 7 pp., arXiv: hep-ph/0504112; **75**:7 (2007), 074008, 15 pp., arXiv: hep-ph/0611307; *Modern Phys. Lett. A*, **20**:25 (2005), 1887–1893, arXiv: hep-ph/0503238; *Phys. Lett. B*, **634**:2–3 (2006), 214–219, arXiv: hep-ph/0512230; **659**:3 (2008), 612–620, arXiv: 0705.2957.

- [20] Н. М. Атакишиев, Р. М. Мир-Касимов, Ш. М. Нагиев, *ТМФ*, **44**:1, 47–62.
- [21] Е. А. Дей, В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков, *ТМФ*, **69**:1 (1986), 55–68; **82**:2 (1990), 188–198.
- [22] Л. Д. Блохинцев, А. М. Мухамеджанов, А. Н. Сафронов, *ЭЧАЯ*, **15**:6 (1984), 1296–1337.
- [23] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.
- [24] G. Gamov, *Z. Phys.*, **51**:3–4 (1928), 204–212.
- [25] А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, т. 2, Гостехиздат, М., 1956.
- [26] А. Д. Сахаров, *ЖЭТФ*, **18**:7 (1948), 631–635.
- [27] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. III: *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, 2-е изд., Физматлит, М., 1963.
- [28] Р. Ньютон, *Теория рассеяния волн и частиц*, Мир, М., 1969.
- [29] T. Appelquist, H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.*, **34**:1 (1975), 43–45; *Phys. Rev. D*, **12**:5 (1975), 1404–1414.
- [30] E. C. Poggio, H. R. Quinn, S. Weinberg, *Phys. Rev. D*, **13**:7 (1976), 1958–1968.
- [31] В. Н. Байер, В. С. Фадин, *ЖЭТФ*, **57**:1(7) (1969), 225–231.
- [32] В. С. Фадин, В. А. Хозе, *ЯФ*, **48** (1988), 487–493; V. S. Fadin, V. A. Khoze, T. Sjöstrand, *Z. Phys. C*, **48**:4 (1990), 613–621.
- [33] V. S. Fadin, V. A. Khoze, A. D. Martin, A. Chapovsky, *Phys. Rev. D*, **52**:3 (1995), 1377–1385, arXiv: hep-ph/9501214.
- [34] A. H. Hoang, *Phys. Rev. D*, **56**:11 (1997), 7276–7283, arXiv: hep-ph/9703404.
- [35] J.-H. Yoon, C.-Y. Wong, *Phys. Rev. C*, **61**:4 (2000), 044905, 10 pp., arXiv: nucl-th/9908079; *J. Phys. G*, **31**:2 (2005), 149–160, arXiv: nucl-th/0412019.
- [36] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, *Modern Phys. Lett. A*, **16**:34 (2001), 2213–2219, arXiv: hep-ph/0005175.
- [37] V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, N. B. Skachkov, *Nuovo Cimento A*, **55**:2 (1968), 233–257.
- [38] V. I. Savrin, N. B. Skachkov, *Nuovo Cimento Lett.*, **29**:11 (1980), 363–369; *Preprint TH.2822-CERN*, CERN, Geneva, 1980.
- [39] B. Durand, L. Durand, *Phys. Rev. D*, **28**:2 (1983), 396–406.
- [40] M. Freeman, M. D. Mateev, R. M. Mir-Kasimov, *Nucl. Phys. B*, **12**:1 (1969), 197–215.
- [41] В. Н. Капшай, Н. Б. Скачков, *ТМФ*, **55**:2 (1983), 236–245.
- [42] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, *Phys. Rev. D*, **64**:1 (2001), 016005, 6 pp., arXiv: hep-ph/0102254.
- [43] I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, *Nonlin. Phenom. Complex Syst.*, **5** (2002), 51–58.
- [44] K. A. Milton, I. L. Solovtsov, O. P. Solovtsova, *Modern Phys. Lett. A*, **21**:17 (2006), 1355–1368, arXiv: hep-ph/0512209.
- [45] И. Л. Соловцов, Ю. Д. Черниченко, *Весці Нац. Акад. Навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*, **2** (2007), 103.
- [46] И. Л. Соловцов, Ю. Д. Черниченко, *Актуальные проблемы физики микромира*, Труды Международной школы-семинара (28 июля–8 августа 2007 г., Гомель, Белоруссия), т. 2, ОИЯИ, Дубна, 2008, 33, E2-2008-64.
- [47] О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, *ЯФ*, **73** (2010), 1–16, arXiv: 0904.0754.
- [48] В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, *ЯФ*, **11**:3 (1970), 692–700.
- [49] A. B. Arbuzov, *Nuovo Cimento A*, **107**:8 (1994), 1263–1273.
- [50] R. Barbieri, P. Christillin, E. Remiddi, *Phys. Rev. A*, **8**:5 (1973), 2266–2271.
- [51] В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, *ЭЧАЯ*, **2**:3 (1972), 635–690.
- [52] В. Н. Капшай, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, *ТМФ*, **69**:3 (1986), 400–410.

- [53] И. Л. Соловцов, Ю. Д. Черниченко, Международный семинар по современным вопросам физики элементарных частиц, посвященный памяти И. Л. Соловцова. Труды семинара (Дубна, 17–18 янв. 2008), 2008, 73, Д4-2008-65.
- [54] Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, *ТМФ*, **54**:2 (1983), 183–192.
- [55] И. Л. Соловцов, О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, *Письма в ЭЧАЯ*, **2**:4(127) (2005), 17–23.
- [56] W. Lucha, F. F. Schöberl, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:23 (1990), 2733–2735; *Phys. Lett. B*, **387**:3 (1996), 573–576, arXiv: hep-ph/9607249.

Поступила в редакцию 14.07.2010