Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Жарков, В. С. Кирчанов, Супергрупповой подход
к модели Хаббарда, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 2, 245–
260

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:42:27

© 2011 г.

В. М. Жарков*, В. С. Кирчанов†

СУПЕРГРУППОВОЙ ПОДХОД К МОДЕЛИ ХАББАРДА

На основе выявленной скрытой супергрупповой структуры развивается новый подход к модели Хаббарда. Выявлена связь четных операторов Хаббарда со спинорным представлением генераторов группы поворотов четырехмерных пространств. Предложена процедура построения матричного представления генераторов трансляций, дающая искривленное пространство, на котором определены динамические суперполя. Построена новая деформированная нелинейная супералгебра для режима бесспиновых фермионов модели Хаббарда в случае больших отталкиваний на узле. Вычислен эффективный функционал для бесспиновых фермионов.

Ключевые слова: модель Хаббарда, деформированная нелинейная супералгебра, эффективный функционал.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Хаббарда [1] продолжает оставаться основной площадкой для исследования сильных корреляционных эффектов между электронами. Традиционно эффекты сильного кулоновского взаимодействия играют важную роль в понимании механизмов высокотемпературной сверхпроводимости, физики перехода металл–диэлектрик мотт-хаббардовского типа и связанных с ними магнитных состояний. Экспериментальное обнаружение спиновой жидкости в органическом металле (BEDT–TTF)₂Cu₂(CN)₃ [2] еще более усложнило ситуацию: появилась необходимость учета спиновой жидкости в данной модели. По нашему мнению, это поставило в повестку дня задачу развития новых подходов к модели Хаббарда, основанных на теоретико-полевых методах и особенно на применении аппарата функционального интеграла.

В настоящей работе, используя интеграл по траекториям, предложенный для модели Хаббарда в работах [3], [4], мы продолжаем развитие суперполевого формулировки. Нами обнаружена нелинейная скрытая супергруппа, появляющаяся в сильно коррелированных системах, и показано, как можно ввести матричное представление для генераторов сдвига координат, позволяющих вводить эти координаты

*Естественнаучный институт Пермского государственного университета, Пермь, Россия. E-mail: vita@psu.ru

†Пермский государственный технический университет, Пермь, Россия.
E-mail: Kirchannovvs@pstu.ru

вместе с коллективными динамическими полями. Проведено вычисление эффективного функционала на основе новой нелинейной супералгебры, также полученной в настоящей работе.

Напомним основные моменты подхода работы [3]. В качестве стартовой формулировки берется атомное представление модели Хаббарда. Особенность данного описания состоит в том, что оно позволяет ввести локальную супергруппу, генераторы которой определяются полным набором операторов Хаббарда на узле. Генераторы супергруппы действуют глобально и не зависят от координат решетки. Далее строится суперкогерентное состояние, задающее суперорбиту введенной супергруппы и содержащее набор динамических, т. е. зависящих от времени и координат, фермионных и бозонных полей. Переход от операторной к суперполевой формулировке осуществляется с помощью эффективного функционала, имеющего следующий вид:

$$\hat{L} = \frac{\langle G | \partial / \partial \tau - H_{\text{Hub}} | G \rangle}{\langle G | G \rangle}. \quad (1)$$

Здесь $|G\rangle$ – суперкогерентное состояние, задающее орбиту супергруппы, которую мы определим ниже, H_{Hub} – операторное выражение для модели Хаббарда.

В настоящей работе мы хотим обратить внимание на один из фундаментальных вопросов сильно коррелированных систем, а именно на проблему существования скрытой супергрупповой структуры и процедуру ее ввода в модель Хаббарда. Обнаружение этой суперструктуры позволит прояснить вопрос о новых симметриях и суперсимметриях, развить процедуру вычисления эффективных суперполевых функционалов для систем с сильным кулоновским взаимодействием, описываемых моделями, нелинейными по динамическим бозонным и фермионным полям.

Центральным элементом предлагаемого подхода является процедура отождествления четных операторов Хаббарда с локальными генераторами группы Лоренца и других групп поворотов четырехмерных пространств. В сильно коррелированных системах под группой Лоренца мы будем понимать четырехмерную группу поворотов, содержащую гиперболические повороты с константой “скорости света”, зависящей от характерной энергии, например параметра ширины электронной зоны или обменного интеграла. Полный набор операторов Хаббарда отождествляется с суперрасширением группы Лоренца, являющимся подгруппой суперконформной группы.

Еще один важный момент состоит во введении матричного представления для группы трансляций. Данная подгруппа посредством факторгруппы позволяет ввести пространство координат, на котором определяются динамические бозонные и фермионные поля. Мы вводим подгруппу трансляций, используя процедуру деформации и сжатия алгебр, а не аффинизацию групп, как это делается в большинстве работ (см., например, [5]). Наш подход более сложен, но, по-видимому, он является единственным для модели Хаббарда. Введенные нами приемы позволяют вычислить эффективный функционал для некоторой деформации алгебры бесспиновых фермионов, являющейся нелинейной по ферми- и бозе-генераторам.

Покажем, как в модели Хаббарда появляется скрытая супергрупповая структура. Любая квантовая система характеризуется волновой функцией Ψ , которая является функцией от координат x, y, z и времени t , т. е. $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$. Самые

распространенные группы действуют на эту волновую функцию посредством операторов, заданных в дифференциальной форме. Например, одной из распространенных непрерывных групп, действующих на волновую функцию, является группа Пуанкаре, содержащая операторы трансляций в пространстве-времени

$$P_x = -i\frac{\partial}{\partial x}, \quad P_y = -i\frac{\partial}{\partial y}, \quad P_z = -i\frac{\partial}{\partial z}, \quad P_t = i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},$$

операторы пространственных вращений в плоскостях (x^i, x^j)

$$L_z = i\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad L_y = i\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad L_x = i\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

и операторы гиперболических поворотов (бустов) в плоскостях (ct, x^k)

$$L_1 = i\left(t\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad L_2 = i\left(t\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad L_3 = i\left(t\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Действие конечной группы на волновую функцию задается экспоненциальным отображением и имеет следующий вид:

$$e^{E_i P_i + H_j L_j + H_k \Sigma_k} \Psi(x, y, z, t) = e^{H_k \Sigma_k} \Psi(Ax + B), \quad (2)$$

где E_i , H_k – малые параметры, по индексам $i, j, k = 1, 2, 3$ предполагается суммирование, матрица A задает векторное представление группы вращений, матрица B – сдвиги. Отметим, что параметры H_k определяют как матрицу A , действующую на координаты, так и элементы группы вращений для функции Ψ в спинорном базисе. Волновая функция Ψ задана в спинорном представлении, и на нее действует элемент группы, параметризованной величинами H_k .

2. МОДЕЛЬ ХАББАРДА

Модель Хаббарда [1], [6] – это одна из фундаментальных моделей, описывающих системы сильно взаимодействующих электронов в твердом теле. Она является основной для описания зонного магнетизма и сверхпроводимости в сильно коррелированных металлах и фазового перехода металл–диэлектрик в твердых телах.

В модели Хаббарда рассматриваются невырожденные по орбитальному состоянию электроны, которые движутся прыжками по узлам кристаллической решетки, с кулоновским взаимодействием на одном узле. Гамильтониан модели Хаббарда в представлении вторичного квантования имеет вид

$$\hat{H} = -W \sum_{i,j,\sigma} a_{i\sigma}^+ a_{j\sigma} + U \sum_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} - \mu \sum_{i,\sigma} n_{i\sigma}, \quad (3)$$

где $a_{i\sigma}^+$ и $a_{i\sigma}$ – ферми-операторы рождения и уничтожения электрона со спином σ на i -м узле, $n_{i\sigma} = a_{i\sigma}^+ a_{i\sigma}$ – оператор числа электронов с заданным спином σ на i -м узле, спин σ принимает два значения $\uparrow (+)$ и $\downarrow (-)$.

Модель Хаббарда имеет всего три параметра: матричный элемент W перехода электрона на соседний узел, который связан с шириной электронной зоны, параметр U кулоновского отталкивания двух электронов на узле i , химический потенциал μ или электронная концентрация n (среднее число электронов на один узел решетки).

Ниже мы положим $W = 1$ и будем рассматривать наполовину заполненную зону при больших отталкиваниях. В данном режиме низшие состояния описываются магнитными полями вместе с фермионными степенями свободы. Параметр отталкивания фактически отсутствует в задаче.

Нас интересует двумерная модель Хаббарда, исследование которой мы начнем с атомного предела.

3. ОПЕРАТОРЫ ХАББАРДА

В условия сильного кулоновского отталкивания в качестве нулевого приближения выбирается кулоновский член в гамильтониане. Тогда задача нулевого приближения сводится к одноузельной и может быть решена в базисе локализованных атомных функций:

$$|ip\rangle: |i0\rangle, |i+\rangle, |i-\rangle, |i2\rangle, \quad (4)$$

где $|i0\rangle$ – состояние, при котором на i -м узле нет электрона, $|i+\rangle \equiv |i\uparrow\rangle$ – состояние с одним электроном со спином вверх на i -м узле, $|i-\rangle \equiv |i\downarrow\rangle$ – состояние с одним электроном со спином вниз на i -м узле, $|i2\rangle = |i\uparrow\downarrow\rangle$ – состояние с двумя электронами на i -м узле, из которых один имеет спин вверх, а другой – спин вниз. Любое состояние на узле i может быть представлено в виде суперпозиции этих локализованных функций:

$$\psi_i = \alpha_i|i0\rangle + \beta_i|i+\rangle + \gamma_i|i-\rangle + \delta_i|i2\rangle, \quad (5)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ – коэффициенты при функциях атомного базиса, причем β_i, γ_i должны быть грассмановыми числами. Ниже для представления коэффициентов данного разложения мы будем использовать матричные элементы суперспинорного представления локальной супергруппы.

Переходы между состояниями атомного базиса описываются матрицами размера 4×4 , соответствующими операторам Хаббарда:

$$X_i^{pq} = |ip\rangle\langle iq| = \begin{pmatrix} X_i^{00} & X_i^{0+} & X_i^{0-} & X_i^{02} \\ X_i^{+0} & X_i^{++} & X_i^{+-} & X_i^{+2} \\ X_i^{-0} & X_i^{-+} & X_i^{--} & X_i^{-2} \\ X_i^{20} & X_i^{2+} & X_i^{2-} & X_i^{22} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Каждому оператору Хаббарда соответствует матрица, в которой на пересечении p -й строки и q -го столбца стоит единица, а все остальные элементы матрицы равны нулю. Для операторов Хаббарда справедливы соотношения $X_i^{pq} X_i^{rs} = \delta_{qr} X_i^{ps}$, задающие их алгебру, и условие полноты $\sum_p X_i^{pp} = 4$ для диагональных элементов.

Фермиевскими операторами (операторами f-типа) являются $X_i^{0+}, X_i^{0-}, X_i^{+2}, X_i^{-2}, X_i^{+0}, X_i^{-0}, X_i^{2+}, X_i^{2-}$, так как они меняют число электронов в узле на нечетное число 1 или 3. Для них справедливы антикоммутационные соотношения

$$[X_i^{pq}, X_j^{rs}]_+ = X_i^{pq} X_j^{rs} + X_j^{rs} X_i^{pq} = \delta_{ij} (\delta_{qr} X_i^{ps} + \delta_{qr} X_i^{rq}). \quad (7)$$

Бозевские операторы (операторы b-типа) суть $X_i^{+-}, X_i^{-+}, X_i^{20}, X_i^{02}$. Они меняют число электронов на узле на четное число 0 или 2. Для них имеют место коммутационные соотношения

$$[X_i^{pq}, X_j^{rs}]_- = X_i^{pq} X_j^{rs} - X_j^{rs} X_i^{pq} = \delta_{ij} (\delta_{qr} X_i^{ps} - \delta_{sp} X_i^{rq}). \quad (8)$$

Эта формула также справедлива, если в ней участвует хотя бы один оператор b -типа или один из диагональных операторов $X_i^{00}, X_i^{++}, X_i^{--}, X_i^{22}$.

Гамильтониан модели Хаббарда в терминах X -операторов имеет следующий вид:

$$H = \sum_i \{-\mu X_i^{++} - \mu X_i^{--} + (U - 2\mu)X_i^{22}\} - \\ - W \sum_{ij} \{(X_i^{0+} + X_i^{2-})(X_j^{+0} + X_j^{-2}) + (X_i^{-0} + X_i^{2+})(X_j^{0-} + X_j^{+2})\}, \quad (9)$$

где в первую сумму включен член с химическим потенциалом μ . В этом представлении кулоновский член линеен, а член с кинетической энергией имеет вид билинейной формы по X -операторам. В дальнейшем мы будем следовать этой операторной формулировке, поскольку именно она приведет к супергрупповой конструкции, которая, по нашему мнению, является центральным элементом всех сильно коррелированных моделей.

4. МИНИМАЛЬНАЯ СУПЕРАЛГЕБРА В МОДЕЛИ ХАББАРДА

Будем использовать конструкцию “башни симметрии”, введенную для модели Хаббарда в работе [4]. Рассмотрим режим наполовину заполненной зоны при сильном отталкивании такой, что энергия состояний $|+\rangle$, $|-\rangle$ меньше, чем энергия состояний $|0\rangle$, $|2\rangle$, на $U/2$. При сильном отталкивании разумно взять за основу так называемую бесспиновую супералгебру, которая строится следующим образом:

1. Начнем с супералгебры операторов Хаббарда, которую мы обозначим через $S2$. Образует операторы рождения и уничтожения, учитывающие две ориентации спина σ , из восьми фермиоподобных операторов Хаббарда:

$$\begin{aligned} a_{\uparrow} &= X^{0+} + X^{-2}, & a_{\uparrow}^+ &= X^{+0} + X^{2-}, \\ a_{\downarrow} &= X^{0-} - X^{+2}, & a_{\downarrow}^+ &= X^{-0} - X^{2-}. \end{aligned} \quad (10)$$

Антикоммутиационные соотношения между ними следующие:

$$\{a_{\sigma}^+, a_{\sigma'}\}_+ = a_{\sigma}^+ a_{\sigma'} + a_{\sigma'} a_{\sigma}^+ = \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (11)$$

Эти операторы отличаются от операторов Хаббарда (анти)коммутиационными соотношениями, и поэтому дают новую алгебру, которая вместе с операторами плотности и спина описывает возбуждения в металлическом состоянии. В работе [4] эта алгебра была обозначена через $S1$. Она отличается от алгебры операторов Хаббарда $S2$.

2. Введем бесспиновые операторы a и a^+ по формулам

$$a = \frac{a_{\uparrow} + a_{\downarrow}}{\sqrt{2}}, \quad a^+ = \frac{a_{\uparrow}^+ + a_{\downarrow}^+}{\sqrt{2}}, \quad \rho = \frac{1}{2} a^+ a. \quad (12)$$

Операторы (a^+, a, ρ) образуют алгебру, которую мы обозначим через $S0$, так как справедливы следующие (анти)-коммутиационные соотношения:

$$\{a, a^+\}_+ = \hat{1}, \quad [\rho, a^+] = a^+, \quad [\rho, a] = -a. \quad (13)$$

В матричном представлении этой алгебры строится произведение набора динамических бозе- и ферми-полей на соответствующие генераторы. Именно это произведение войдет в нелинейное представление супергруппы через экспоненциальное отображение, которое имеет следующий вид:

$$U = \exp \begin{pmatrix} -E_z & \chi & \chi & 0 \\ \chi^* & H_z & H^+ & -\chi \\ \chi^* & H^- & -H_z & \chi \\ 0 & -\chi^* & \chi^* & E_z \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $E_z, H^\pm$ – полевые переменные, χ и χ^* – грассманы переменные.

3. Образует теперь вектор спина $\vec{s} = (s^+, s^-, s_z)$ из операторов, введенных в п. 1:

$$s^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} a_\uparrow^+ a_\downarrow, \quad s^- = \frac{1}{\sqrt{2}} a_\downarrow^+ a_\uparrow, \quad s_z = \frac{1}{2} (a_\uparrow^+ a_\uparrow - a_\downarrow^+ a_\downarrow). \quad (15)$$

Коммутационные соотношения для спиновых операторов следующие:

$$[s^+, s^-]_- = s_z, \quad [s_z, s^+]_- = s^+, \quad [s_z, s^-]_- = -s^-. \quad (16)$$

Эти операторы образуют спиновую алгебру для спина $1/2$.

Операторы спина задаются матрицей размера 2×2 , в четырехмерной квадратной матрице из формулы (14) произведение вектора магнитного поля на вектор спина даст матрицу следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_z & H^+ & 0 \\ 0 & H^- & -H_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Из операторов, введенных в п. 1, образуем также вектор $\vec{\rho} = (\rho^+, \rho^-, \rho_z)$ плотностного оператора:

$$\rho^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} a_\uparrow^+ a_\downarrow^+, \quad \rho^- = \frac{1}{\sqrt{2}} a_\downarrow^+ a_\uparrow^+, \quad \rho_z = \frac{1}{2} (a_\uparrow^+ a_\uparrow^+ - a_\downarrow^+ a_\downarrow^+). \quad (17)$$

Данные операторы образуют алгебру, так как справедливы коммутационные соотношения

$$[\rho^+, \rho^-]_- = \rho_z, \quad [\rho_z, \rho^+]_- = \rho^+, \quad [\rho_z, \rho^-]_- = -\rho^-. \quad (18)$$

Эта алгебра дает в матричном представлении следующую матрицу от плотностных полей:

$$\begin{pmatrix} E_z & 0 & 0 & E^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E^- & 0 & 0 & -E_z \end{pmatrix}.$$

Возможна вторая алгебра для плотностных операторов с компонентами оператора $\vec{\rho} = (a_\uparrow a_\downarrow, a_\downarrow^+ a_\uparrow^+, a_\downarrow a_\downarrow^+ - a_\uparrow^+ a_\uparrow)$ и такими же коммутационными соотношениями.

Таким образом, из фермиоподобных операторов Хаббарда мы образовали три алгебры – одну фермионную бесспиновую и две бозонные. Фермионная алгебра описывает рождение и уничтожение бесспиновых электронов в узлах, спиновая алгебра

применяется для учета взаимодействия магнитных моментов электронов, плотностная бозонная алгебра предназначена для описания взаимодействия плотностных флуктуаций, например для анализа волн зарядовой плотности.

4.1. Деформация и сжатие алгебры Ли. Сжатие (контракция) алгебры Ли – это предельная операция деформации алгебры Ли. Поскольку в модели Хаббарда данный инструментарий до сих пор не использовался, мы ниже будем давать нужные нам определения, ссылаясь на работы [7]–[10].

ПРИМЕР. Пусть G – группа Лоренца, g – алгебра Ли группы Лоренца, a – подалгебра группы вращений трехмерного пространства. Тогда сжатие алгебры g дает алгебру Ли неоднородной группы вращений. В самом деле, пусть $\{c_{ij}^k\}$ – набор структурных констант алгебры Ли g в фиксированном базисе $e_1, \dots, e_n$, $A(t)$ – кривая в группе невырожденных линейных преобразований пространства группы g такая, что $A(1) = E$. Пусть $e_i(t) = A(t)e_i$ и $c_{ij}^k(t)$ – структурные константы алгебры g в базисе $\{e_i(t)\}$. Если при изменении t структурные константы изменяются, то такая алгебра называется деформированной. Если при стремлении t к нулю или бесконечности некоторые структурные константы обращаются в нуль, то такой процесс изменения алгебры называется контракцией алгебры [7]–[10].

4.2. Локальная супергруппа в модели Хаббарда. Операторы Хаббарда зависят от индекса, параметризующего координаты, т. е. они задаются прямыми произведениями локальных копий набора генераторов, определенных на выделенном узле. Отметим, что этот набор генераторов, не зависящих от координат, образует глобальную, т. е. определенную на всем пространстве, супералгебру. С ее помощью можно построить локальную супергруппу в модели Хаббарда путем экспоненциального отображения. Динамика системы при этом задается динамическими ферми-и бозе-полями в экспоненциальном представлении. Ниже рассмотрен бесспиновый случай.

5. ЧЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ХАББАРДА КАК ГЕНЕРАТОРЫ ГРУППЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ПОВОРОТОВ

Введем две тройки операторов: $(X^{00} - X^{22}, X^{02}, X^{20})$ и $(X^{++} - X^{--}, X^{+-}, X^{-+})$. Коммутаторы этих операторов выражаются только через операторы из той же тройки. Это означает, что операторы разделились на две группы, которые коммутируют друг с другом, т. е. задают либо прямое произведение двух групп $SU(2)$, либо прямое произведение двух подгрупп $SU(2) \otimes SU(1,1)$. Естественно, выбор одного из этих двух типов групп должен отвечать определенному выбору полей.

Отметим, что если выбрать коммутационные соотношения второй подалгебры так, чтобы она образовала алгебру $su(1,1)$, то в функциональном интеграле это приведет к тому, что часть полей умножится на мнимую единицу (виковский поворот), тогда группа и пространство станут гиперболическими.

Если взять линейные комбинации (полусумму и полуразность) генераторов этих двух групп, то нетрудно убедиться, что их коммутационные соотношения совпадают с коммутационными соотношениями четырехмерной группы Лоренца [11]. В зависимости от того, вводятся или нет гиперболические повороты, данную группу поворотов можно сделать группой поворотов четырехмерного евклидова пространства.

Мы получаем следующую структуру коммутационных соотношений для шести генераторов:

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k. \quad (19)$$

Здесь L_i , $i = 1, 2, 3$, задают генераторы пространственных поворотов, K_j , $j = 1, 2, 3$, – генераторы поворотов временной оси, ε_{ijk} – тензор Леви-Чивита. Каждая из этих групп, построенная на данных генераторах, является трехпараметрической. Три параметра, умноженные на генераторы поворотов в экспоненциальном отображении, отвечают за вращения, и три – за гиперболические повороты (бусты). Операторы Хаббарда пропорциональны следующим комбинациям: спиновые операторы $s_i = L_i + K_i$, плотностные операторы $\rho_i = L_i - K_i$, $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что бозевские операторы Хаббарда можно разделить на две подгруппы, из которых можно сконструировать полный набор генераторов группы Лоренца в спинорном базисе.

Отметим тот факт, что группа Лоренца является подгруппой конформной группы, представляющей собой наибольшую нелинейную группу четырехмерного пространства-времени, на котором определена волновая функция системы. Распиряя таким образом группу поворотов четырехмерного пространства до конформной и далее до суперконформной группы, мы можем построить локальную (супер)группу модели Хаббарда. Поскольку атомный базис является центральным моментом практически всех сильно взаимодействующих систем, мы выявили скрытую симметрию в сильно коррелированных системах и указали способ ввода локальных (супер)групп для часто встречающихся моделей.

Еще один важный момент – это ввод матричного представления для генераторов сдвигов. Обычно генераторы сдвигов задаются дифференциальными операторами (производными). В модели Хаббарда необходимо именно матричное представление, отличное от того, которое получается с помощью процедуры аффинизации [5]. Мы вводим операторы сдвигов через понижение размерности группы поворотов и процедуру деформации алгебры генераторов группы Лоренца в четырехмерном пространстве. Эта процедура является более сложной, чем процедура аффинизации, но для модели Хаббарда, по нашему мнению, она является единственно возможной.

Введем процедуру деформации, а затем контракции четных генераторов Хаббарда. Умножим генераторы гиперболических поворотов на константу R , $K'_i = RK_i$, $i = 1, 2, 3$, так, чтобы коммутационные соотношения имели следующий вид:

$$[K'_i, K'_j] = i\left(\frac{1}{R^2}\right)\varepsilon_{ijk}L_k. \quad (20)$$

В дальнейшем аналогично работе [12] мы будем рассматривать L_i как генераторы поворотов в трехмерном пространстве, а K'_i – как генераторы трансляций. Из формулы (20) видно, что путем такого перехода от четырехмерного пространства к трехмерному мы совершили переход от четырехмерной группы поворотов к неоднородной трехмерной группе поворотов, содержащей трансляции в искривленном пространстве. В пределе $R \rightarrow \infty$ мы получаем трехмерную группу Пуанкаре $ISO(3)$, имеющую следующую алгебру генераторов:

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k, \quad [L_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k, \quad [P_i, P_j] = 0, \quad (21)$$

где $P_i = K'_j$ – генераторы трансляций в плоском пространстве. Таким образом, генераторы бустов задают трансляции в искривленном пространстве, радиус которого определяется выражением $E^2 = E_z^2 + E^+ E^-$, и их отождествление с генераторами трансляций в искривленном пространстве позволяет ввести координаты базового пространства путем замены (E^+, E^-, E_z) на (x, y, z) . Ниже мы увидим, что данное выражение естественным образом входит в матричные элементы супергруппы и задает радиус того пространства, в котором возникают магнитные динамические флуктуации.

6. ГРУППОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Выявленная нами групповая структура на четных генераторах Хаббарда обладает подгруппой и факторгруппой. На основании этого можно ввести группу движения, задающую координаты функций и сами функции, являющиеся динамическими полями нашей задачи [3]. Рассмотрим конечную непрерывную группу G , зависящую от параметров E_z, E^+, E^- и H_z, H^+, H^- . Далее мы будем использовать обозначения E_z, E^+, E^- , подразумевая возможность замены их на (x, y, z) там, где это необходимо. Параметры $\{a, b\} = \{E_z, E^+, E^-; H_z, H^+, H^-\}$ можно рассматривать как координаты точки в $(3 + 3)$ -мерном групповом пространстве. Каждой точке пространства поставлено в соответствие преобразование из группы G . Точку, соответствующую тождественному преобразованию, назовем начальной точкой пространства. Совокупность начальной и произвольной точек пространства задает вектор. Любое бесконечно малое преобразование выражается через генераторы факторгруппы X_k и подгруппы Y_α :

$$dG = i(da^k X_k + db^\alpha Y_\alpha), \quad (22)$$

где a^k, b^α – параметры группы, $k = 1, 2, 3$ и $\alpha = 1, 2, 3$. Отметим еще раз, что факторгруппа задает здесь “настоящие” координаты (x, y, z) .

Через групповые элементы 1-формы задаются следующим образом:

$$G dG^{-1} = G^{-1} dG = i(\omega^i X_i + \theta^\alpha Y_\alpha), \quad (23)$$

где X_i – генератор факторгруппы [13].

7. СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГРУППОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Структурные уравнения для группового пространства совпадают по форме со структурными уравнениями Мауэра–Картана для риманова пространства с нулевым кручением и ненулевой кривизной [14]–[17]:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= [\omega^k \omega_k^i] \equiv \omega^k \wedge \omega_k^i, \\ d\omega_i^j &= [\omega_i^k \omega_k^j] + R_{i[kh]}^j [\omega^k \omega^h] \equiv \omega_i^k \wedge \omega_k^j + R_{i[kh]}^j \omega^k \wedge \omega^h. \end{aligned} \quad (24)$$

Формы ω^i суть компоненты бесконечно малого смещения начала репера относительно репера в точке a . Формы ω_i^j – это изменение компонент самого репера. Преобразование группы G является вращением, если оно принадлежит подгруппе H .

Преобразования подгруппы H оставляют неподвижным начало координат группового пространства и образуют так называемую стационарную подгруппу данного пространства. Преобразование является сдвигом, если оно порождено бесконечно малым преобразованием $\omega^i X_i$.

Общее преобразование группы G представим в виде произведения:

$$G = K(a)H(b), \quad (25)$$

где $K(a) = e^{ia^j X_j}$ – преобразование, принадлежащее левому смежному классу G/H группы G по подгруппе H , $H(b) = e^{ib^\alpha Y_\alpha}$ – преобразование, принадлежащее подгруппе H .

8. ФОРМЫ КАРТАНА ДЛЯ ВОЗЕВСКИХ ОПЕРАТОРОВ ХАББАРДА

Рассмотрим векторы (x, y, z) координат пространства групп $SO(3)$, или $SO(2, 1)$, которые в матрице (14) выражаются компонентами электрического поля E_z , E^+ , E^- , магнитного поля $H_z(x, y, z)$, $H^+(x, y, z)$, $H^-(x, y, z)$ и грассмановыми $\chi(x, y, z)$ и сопряженными $\chi^*(x, y, z)$ фермионными полями как функциями от координат (x, y, z) пространства-времени. Используем локальные сферические координаты (E, θ, φ) и (H, σ, ϑ) для записи векторов электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} E_z &= E \cos \theta, & E^+ &= E \sin \theta \cdot e^{i\varphi}, & E^- &= E \sin \theta \cdot e^{-i\varphi}, \\ H_z &= H \cos \sigma, & H^+ &= H \sin \sigma \cdot e^{i\vartheta}, & H^- &= H \sin \sigma \cdot e^{-i\vartheta}, \end{aligned}$$

тогда

$$E^2 = E_z^2 + E^+ E^-, \quad H^2 = H_z^2 + H^+ H^-. \quad (26)$$

Поместим данные поля в суперматрицу и запишем экспоненциальное отображение следующего вида:

$$U = \exp \begin{pmatrix} E_z & \chi_1 & \chi_2 & E^+ \\ \chi_1^* & H_z & H^+ & \chi_3 \\ \chi_2^* & H^- & -H_z & \chi_4 \\ E^- & \chi_3^* & \chi_4^* & -E_z \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Здесь и далее в выражении для экспоненциального отображения мы не будем писать обычного знака минус перед матрицей в экспоненте. Этот знак легко компенсировать на заключительном этапе путем переопределения полей. В результате получаем нелинейное представление для супергруппы, которая локально осуществляет суперповороты атомного базиса. Возникает задача вычисления матричных элементов данной супергруппы. Отметим, что в общем случае данная задача очень сложна. В работе [18] нам удалось вычислить киральное представление, когда в матрице (27) присутствуют только грассмановы поля, помеченные звездочкой, и бозонные поля. Далее мы будем следовать следующей схеме.

Сначала вычислим матрицу, состоящую только из компонент электрического поля E и магнитного поля H , что даст нам нулевой по фермионным полям вклад в

эффективный функционал:

$$\Omega = \exp \begin{pmatrix} E_z & 0 & 0 & E^+ \\ 0 & H & H^+ & 0 \\ 0 & H^- & -H_z & 0 \\ E^- & 0 & 0 & -E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} E + E_z \frac{\operatorname{sh} E}{E} & 0 & 0 & E^+ \frac{\operatorname{sh} E}{E} \\ 0 & \operatorname{ch} H + H_z \frac{\operatorname{sh} H}{H} & H^+ \frac{\operatorname{sh} H}{H} & 0 \\ 0 & H^- \frac{\operatorname{sh} H}{H} & \operatorname{ch} H - H_z \frac{\operatorname{sh} H}{H} & 0 \\ E^- \frac{\operatorname{sh} E}{E} & 0 & 0 & \operatorname{ch} E - E_z \frac{\operatorname{sh} E}{E} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Дифференциальная форма Картана имеет следующий вид:

$$\Omega^{-1} d\Omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 & \omega_{14} \\ 0 & \omega_{22} & \omega_{23} & 0 \\ 0 & \omega_{32} & \omega_{33} & 0 \\ \omega_{41} & 0 & 0 & \omega_{44} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

или

$$\Omega^{-1} d\Omega = \omega_{11} X^{00} + \omega_{14} X^{02} + \omega_{41} X^{20} + \omega_{44} X^{22} + \omega_{22} X^{++} + \omega_{23} X^{+-} + \omega_{32} X^{-+} + \omega_{33} X^{--}. \quad (30)$$

Мы рассматриваем трехмерное искривленное пространство с радиусом кривизны, который определяется через инвариант E . Аналогичные рассуждения можно привести и для вектора H , что означает их независимость от координат, т. е. мы считаем, что $E = \operatorname{const}$, $dE = 0$ и $H = \operatorname{const}$, $dH = 0$. Это приведет к следующим связям для компонент векторов E и H :

$$dE^2 = 2E_z dE_z + E^+ dE^- + E^- dE^+ = 0, \quad dH^2 = 0, \quad (31)$$

что еще раз говорит об искривленном характере как базового пространства, так и пространства, в котором существуют динамические поля.

Для удобства представим 1-формы Картана в виде матричных элементов двух матриц размера 2×2 : имеем

$$\begin{pmatrix} \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \frac{\operatorname{sh} H}{H} dH_z - \frac{\operatorname{sh}^2 H}{H^2} H^+ dH^- & \frac{\operatorname{sh}^2 H}{H^2} H^+ dH_z + g_1 \frac{\operatorname{sh} H}{H} dH^+ \\ -\frac{\operatorname{sh}^2 H}{H^2} H^- dH_z + g_2 \frac{\operatorname{sh} H}{H} dH^+ & -g_2 \frac{\operatorname{sh} H}{H} dH_z - \frac{\operatorname{sh}^2 H}{H^2} H^- dH^+ \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где

$$dH_z = \frac{\partial H_z}{\partial x} dx + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy + \frac{\partial H_z}{\partial z} dz$$

и аналогично для $dH^\pm$, $g_2 = \operatorname{ch} H - H_z \operatorname{sh} H/H$, $g_1 = \operatorname{ch} H + H_z \operatorname{sh} H/H$. Матрица $\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{14} \\ \omega_{41} & \omega_{44} \end{pmatrix}$ для компонент электрического поля полностью эквивалентна матрице (32)

с заменой $H_z \rightarrow E_z$, $H^\pm \rightarrow E^\pm$. Далее выражение (32) мы будем использовать, чтобы получить эффективный функционал для динамических магнитных полей.

Формы Картана для фермионных генераторов Хаббарда составляют аналогично бозонному случаю, с той лишь разницей, что появляются нечетные грассмановы поля и соответствующие дифференциалы от таких полей, а обратная матрица вычисляется по-другому. В конечном счете эти 1-формы Картана дадут функционал фермионных динамических полей.

9. ЭФФЕКТИВНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ

В работе [4] была предложена конструкция “башни симметрии”. В ее основе лежит следующее наблюдение: переменные сильно коррелированных систем как образующие неких супералгебр при изменении хаббардовского отталкивания и химического потенциала образуют цепочку супералгебр $(S2, S1, S0)$, задающих возбуждения тех фаз, которые появляются при росте отталкивания. Эта цепочка, названная “башней симметрии”, характеризуется числом нечетных генераторов супералгебр и начинается с минимальной супералгебры, имеющей два фермионных генератора алгебры бесспиновых фермионов.

В данном разделе мы возьмем за основу эту супералгебру и построим ее деформацию, нелинейную по входящим (супер)генераторам. Потом вычислим нелинейное экспоненциальное представление полученной нами супералгебры. Затем, используя формулу (1) с гамильтонианом (3), получим эффективный функционал для полей, принимающих значения в выбранной супергруппе. Отметим, что квантовый суперъангиан как пример нелинейной супералгебры в одномерной модели Хаббарда впервые был приведен в работе [19].

Выражение для супергруппы, дающее суперкогерентные состояния $|G\rangle = U|0\rangle$ для данного режима, который наблюдается в модели Хаббарда при сильном отталкивании и при половинном заполнении зоны, мы возьмем в следующем виде:

$$U = \exp \begin{pmatrix} E_z & \chi & \chi & E^+ \\ \chi^* & H_z & H^+ & \chi \\ \chi^* & H^- & -H_z & \chi \\ E^- & \chi^* & \chi^* & -E_z \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Входящие в данное выражение генераторы $(c^+, c, c^+c, (1 - \gamma_5)/2)$, равные соответствующим матрицам при динамических полях в показателе экспоненты, образуют замкнутую супералгебру нелинейного типа. Приведем матричные выражения для входящих генераторов:

$$\begin{aligned} c^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & c &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ c^+c &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & \frac{1 - \gamma_5}{2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

(Анти)коммутационные соотношения таковы:

$$\begin{aligned}
 \{c^+, c\}_+ &= 2(1 + s^+ + s^-), \\
 [c^+, s^+]_- &= c^+ \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 - s_z}{2} - \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 + s_z}{2} c^+, \\
 [c^+, s^-]_- &= c^+ \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 + s_z}{2} - \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 - s_z}{2} c^+, \\
 [c, s^+]_- &= c \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 - s_z}{2} - \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 + s_z}{2} c, \\
 [c, s^-]_- &= c \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 + s_z}{2} - \frac{1 - \gamma_5}{2} \frac{1 - s_z}{2} c, \\
 [c^+ c, s^+]_- &= -s_z, \quad [c^+ c, s^-]_- = s_z, \quad [c^+ c, s_z]_- = s^- - s^+, \\
 [c^+, \rho^+] &= c \frac{1 - \gamma_5}{2} - \frac{1 - \gamma_5}{2} c, \quad [c^+, \rho^-] = 0, \quad [c^+, \rho_z] = c^+, \\
 [c, \rho^+] &= 0, \quad [c, \rho^-] = c \frac{1 + \gamma_5}{2} - \frac{1 + \gamma_5}{2} c, \quad [c, \rho_z] = -c, \\
 [c^+ c, \rho^+] &= -2\rho^+, \quad [c^+ c, \rho^-] = -2\rho^-, \quad [c^+ c, \rho_z] = 0.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь мы не учитываем коэффициенты при матричных представлениях операторов (15) и (17).

Вычисление нелинейного представления приведенной выше (супер)группы является громоздким и достаточно трудоемким. Особенно сложна задача расчета обратной (супер)матрицы, которая необходима для вычисления (супер)дифференциальных форм Картана. Мы использовали при вычислениях компьютер с 2 Гб оперативной памяти и систему аналитических вычислений *Mathematica 7.0* с установленной на ней программой *superEDC* [20] для работы с грассмановыми числами, (супер)матрицами и (супер)дифференциальными формами Картана. (Супер)матричные элементы для матрицы U (33) и 1-формы Картана были вычислены в работе [21], где также приведены все обозначения, используемые в настоящей работе. Суммарное время вычисления эффективного функционала, приведенного ниже, при отлаженном алгоритме работы с суперполями, принимающими значения в (супер)матрицах, составило около 50 часов.

При вычислении функционала (1) использовались разложение кинетической энергии из формулы (3) и представление произведения операторов на соседних узлах в виде ряда по постоянной решетки. В первом порядке получим

$$\begin{aligned}
 a(j)a^+(j+b) &= a(j) \exp\left(b \frac{\partial}{\partial x}\right) a^+(j) = \\
 &= a(j) \left[1 + (b \cdot \nabla) + \frac{(b \cdot \nabla)^2}{2!} + \dots\right] a^+(j) = \\
 &= a(x)a^+(x) + a(x)(b \cdot \nabla)a^+(x) + \dots
 \end{aligned} \tag{36}$$

Мы заменили индекс j на координату $x = bj$ для дальнейшего использования при выводе представления эффективного функционала. Отметим, что операторы a и a^+ выражаются через генераторы Хаббарда.

Разлагая экспоненту в ряд, с использованием формулы (36) и выражения для (супер)дифференциалов Картана в первом порядке по постоянной решетки получаем

эффективный фермионный функционал в виде следующей суммы:

$$\hat{L}_1 = (k_1 + k_2)\chi(r)(b \cdot \nabla)\chi^*(r) + k_3\chi(r)\chi^*(r). \quad (37)$$

Данный функционал квадратичен по бесспиновым фермионным полям и содержит динамические поля H_i , а также зависимость от координат, которая дает метрику искривленного пространства. Коэффициенты k_i в формуле (37) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} k_0 &= EH[f_3 + f_2h_3 + f_2(x+z)], \\ k_1 &= f'_2 + f'_{2h} + 2f'_{1hh}(h_1 + x + y + z) + f'_{hh}[H_zh_2 + zh_2 + (x+y)(H_z + z)], \\ k_2 &= k_0[E^2(f_3 - f_2h_4) + (y+z)(zf_3 - E^2f_2) + (H_z - z)(f_4 - f_3h_4)], \\ k_3 &= k_0\{2(f_4 - h_4f) + (x - y - h_5)(f_3 - h_4f_2) - (y+z)[2f_3 + (x-y)f_2]\}. \end{aligned} \quad (38)$$

В этих выражениях присутствуют также вклады от производных магнитных полей, точные формулы для которых будут приведены в отдельной работе. Остальные сокращенные обозначения выписаны в приложении.

Матрица (32) дает нам дифференциалы динамических полей. Из выражения (1) мы можем видеть, какие производные появляются у этих полей. Отметим, что из формулы (1) следует, что в эффективный функционал входит только выражение для ω_{22} . Учитывая сказанное выше, получаем следующее выражение для эффективного функционала бозонных полей:

$$\hat{L}_0 = -[H^-(b \cdot \nabla H^+) + H^+(b \cdot \nabla H^-) + H_z(b \cdot \nabla H_z)] \frac{\text{sh}^2 H}{H^2} + H_z(b \cdot \nabla H_z) \frac{\text{sh} H}{H} \text{ch} H. \quad (39)$$

Если в разложении кинетической энергии (36) удержать второй порядок по постоянной решетки, то можно получить эффективный функционал, содержащий квадратичные вклады от производных магнитных полей. Таким образом, получается нелинейная сигма-модель, являющаяся в функциональном интеграле для модели Хаббарда аналогом модели Гейзенберга. Функционал, линейный по производным, подобен функционалу модели Черна–Саймонса, естественному для нашей задачи.

Окончательно полный эффективный функционал для бесспинового варианта модели Хаббарда имеет вид

$$\hat{L}_{\text{eff}} = \hat{L}_0 + \hat{L}_1. \quad (40)$$

Мы полагаем, что выбранный нами режим модели Хаббарда имеет отношение к фазе спиновой жидкости, обнаруженной в органическом металле $(\text{BEDT-TTF})_2\text{Cu}_2(\text{CN})_3$. Для этого соединения нужно взять двумерную решетку с гексагональной симметрией.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено дальнейшее развитие подхода, сформулированного в работах [3], [4]. Показано, что суперкогерентное состояние вида (33) задает нелинейное представление минимального (супер)расширения группы Лоренца. Продолжение данной процедуры (супер)расширения приводит к нелинейному по фермионным полям представлению суперконформной группы в суперспинорном базисе. Построено новое

нелинейное матричное представление для генераторов трансляций в $(2 + 1)$ -мерном пространстве-времени. Оно задает нелинейную супералгебру, расширяющую набор (супер)алгебр, которые были предложены в “башне симметрии”. Отметим, что после работы [19] поиск квантовой алгебры в модели Хаббарда велся очень активно, но, к сожалению, безуспешно. Нами указан способ ввода подобных структур в модель Хаббарда. Супералгебра (35) содержит пару нечетных генераторов, антикоммутирующих на оператор сдвига (для сферического пространства сдвиг эквивалентен повороту), как и полагается в стандартной суперсимметричной алгебре.

Эффективный функционал вида (40) содержит в явном виде координаты пространств групп $SO(2, 1)$ или $SO(3)$ и описывает динамику бозе- и ферми-полей в трехмерном искривленном пространстве-времени. Функционал такого типа, насколько нам известно, впервые получен в модели Хаббарда.

Отметим в связи с данной работой совершенно новую проблему для модели Хаббарда: вычисление групп когомологий, в особенности второй и третьей, для изучения супералгебр, входящих в “башню симметрии”. Данный подход открывает возможность изучения механизма перехода металл–диэлектрик мотт-хаббардовского типа как спонтанного нарушения (супер)конформной (супер)группы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Дополнительные обозначения к формулам (38):

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\frac{\text{sh}(\alpha E)}{E} - \frac{\text{sh}(\alpha H)}{H}}{E^2 - H^2}, & f_{hh} &= \frac{\partial}{\partial(H^2)}[H^2 f(\alpha)]_{\alpha=1}, \\ f_{1hh} &= \frac{\partial}{\partial \alpha}(f_{hh})_{\alpha=1}, & f_{2h} &= \frac{\partial}{\partial H}(H f_2), \\ f_2 &= \frac{\frac{\text{sh} E}{E} - \frac{\text{sh} H}{H}}{E^2 - H^2}, & f_3 &= \frac{\text{ch} E - \text{ch} H}{E^2 - H^2}, & f_4 &= \frac{E \text{sh} E - H \text{sh} H}{E^2 - H^2}, \\ f'_{hh} &= \frac{\text{sh} H}{H} f_{hh}, & f'_{1hh} &= \frac{\text{sh} H}{H} f_{1hh}, & f'_2 &= \frac{\text{sh} H}{H} f_2, & f'_{2h} &= \frac{\text{sh} H}{H} f_{2h}, \\ h_0 &= H^+ - H^-, & h_1 &= H^+ + H^-, & h_2 &= H^- + H_z, \\ h_3 &= H^- - H_z, & h_4 &= H^+ + H_z, & h_5 &= H^+ - H_z. \end{aligned}$$

Благодарности. В.М. Жарков выражает признательность В.В. Киселеву и А.Б. Борисову за дискуссии по затронутым в работе вопросам.

Список литературы

- [1] J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc. A*, **276**:1365 (1963), 238–257.
- [2] Y. Shimizu, K. Miyagawa, K. Kanoda, M. Maesato, G. Saito, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:10 (2003), 107001, 4 pp., arXiv: cond-mat/0307483.
- [3] В.М. Жарков, *ТМФ*, **60**:3 (1984), 404–412; **77**:1 (1988), 107–117.
- [4] В.М. Жарков, *ТМФ*, **90**:1 (1992), 75–83.
- [5] S.M. Kuzenko, *J. Phys. A*, **43**:44 (2010), 443001, 46 pp., arXiv: 1004.0880.
- [6] Ю.А. Изюмов, М.И. Кацнельсон, Ю.Н. Скрябин, *Магнетизм коллективизированных электронов*, Физматлит, М., 1994.
- [7] А.К. Толпыго, “Сжатие алгебры Ли”, *Математическая энциклопедия*, т. 4, Сов. энциклопедия, М., 1984, 1125.

- [8] E. Inönü, E. P. Wigner, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39**:6 (1953), 510–524.
- [9] E. J. Saletan, *J. Math. Phys.*, **2**:1 (1961), 1–21.
- [10] А. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения*, т. 1, Мир, М., 1980.
- [11] Дж. Элиот, П. Добер, *Симметрия в физике*, т. 1, 2, Мир, М., 1983.
- [12] C. Meusburger, *Comm. Math. Phys.*, **273**:3 (2007), 705–754, arXiv: gr-qc/0607121.
- [13] М. К. Волков, В. М. Первушин, *Существенно нелинейные квантовые теории, динамические симметрии и физика мезонов*, Атомиздат, М., 1978.
- [14] Э. Картан, *Геометрия групп Ли и симметрические пространства*, ИЛ, М., 1949.
- [15] Э. Картан, *Риманова геометрия в ортогональном репере*, Изд-во МГУ, М., 1960.
- [16] Д. В. Волков, *ЭЧАЯ*, **4**:1 (1973), 3–41.
- [17] А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Нелинейные волны, солитоны и локализованные структуры в магнетиках*, т. 1: Квазиодномерные магнитные солитоны, Изд-во УрО РАН, ИФМ, Екатеринбург, 2009.
- [18] V. Zharkov, V. Kirchanov, *New path integral representation for Hubbard model: I. Supercoherent state*, arXiv: 1002.3043.
- [19] D. B. Uglov, V. E. Korepin, *Phys. Lett. A*, **190**:3–4 (1994), 238–242, arXiv: hep-th/9310158.
- [20] S. Bonanos, *Graded Exterior Differential Calculus and Mathematica*.
<http://www.inp.demokritos.gr/~sbonano/superEDC/>.
- [21] V. Zharkov, V. Kirchanov, *New path integral representation for Hubbard model: II. Spinless case*, arXiv: 1006.1511.

Поступила в редакцию 16.06.2010