Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Мюлляри, С. Ю. Славянов, Интегрируемые динамические системы, порождаемые квантовыми моделями с адиабатическим параметром, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 2, 261–265

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6607>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:25:27

© 2011 г.

А. Мюллер^{*†}, С. Ю. Славянов[‡]

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ КВАНТОВЫМИ МОДЕЛЯМИ С АДИАБАТИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРОМ

В квантовой механике широко используются модели, решаемые в терминах специальных функций из класса Гойна. Все они характеризуются наличием параметра, который можно рассматривать как адиабатическую переменную. Процедура антиквантования, примененная к такой модели, порождает динамическую систему со свойствами уравнений Пенлеве. Указанный параметр играет роль времени. Рассматриваются примеры таких моделей.

Ключевые слова: задача двух кулоновских центров, эффект Штарка в водороде, уравнение Пенлеве, интегрируемая динамическая система.

1. ВВЕДЕНИЕ

Различные квантовые модели широко использовались для упрощенной интерпретации стационарных квантовых явлений. Часть из них решается в терминах классических специальных функций. Однако другие, более сложные, например задача двух кулоновских центров, эффект Штарка в водороде, изотонный осциллятор и другие, решаются в терминах функций из класса Гойна. Типичным для них является наличие дополнительного параметра, играющего роль адиабатической переменной. Нестационарные квантовые задачи, которые содержат время как адиабатическую переменную, часто моделируются в рамках стационарного подхода с адиабатической зависимостью, где время интерпретируется как параметр. Вышеуказанные модели имеют гамильтонову формулировку. Процедура антиквантования приводит к динамической модели (в классической механике), которая обладает свойством полной интегрируемости, поскольку сводится к уравнениям Пенлеве. Физическое понимание этих моделей разъясняется ниже.

^{*}University of Turku, Turku, Finland

[†]Åbo Akademi University, Turku, Finland

[‡]Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: slav@SS2034.spb.edu

2. ЗАДАЧА ДВУХ КУЛОНОВСКИХ ЦЕНТРОВ

Задача двух кулоновских центров часто рассматривается как важная модель в квантовых приложениях и приложениях в небесной механике. Детальный анализ этих проблем можно найти в монографиях [1], [2]. В небесной механике часто данную задачу называют ограниченной проблемой трех тел, или задачей двух центров Эйлера. Она была тщательно изучена в работе [3]. Исторический обзор и последние исследования на эту тему даны в [4].

В то время как уравнения для квантовой задачи двух кулоновских центров линейные, уравнения для соответствующей задачи небесной механики нелинейные. В обоих случаях существует полный набор интегралов движения. В квантовой механике решение задачи двух кулоновских центров используется как базис для задачи трех тел в адиабатическом приближении. Также определенный интерес представляют предельные и специальные решения.

В настоящей работе мы рассматриваем особую задачу, порожденную из квантовой задачи двух кулоновских центров в результате процедуры антиквантования. Если квантовая задача стационарна, то в динамической задаче нет физического времени, и его роль играет расстояние между центрами, рассматриваемое как независимая переменная и обозначаемое через t . Таким образом, движение понимается как изменение координаты и импульса с изменением этого расстояния. Физически это означает, что один из центров на самом деле представляет собой тяжелое тело, которое движется равномерно относительно другого тела. Важно, что соответствующий гамильтониан порождает частный случай уравнения Пенлеве P^5 . Это уравнение интегрируемо, и задача рассеяния для него разрешима [5], [6]. В безразмерных переменных стационарное уравнение Шредингера для задачи двух кулоновских центров, находящихся на расстоянии $2R$ друг от друга, имеет вид

$$\left(-\Delta_r - \frac{Z_1}{r_1} - \frac{Z_2}{r_2}\right)\Psi(r, R) = E\Psi(r, R), \quad (1)$$

где r_1 и r_2 – расстояния до центров с зарядами Z_1 и Z_2 соответственно ($Z_1 > Z_2$). В небесной механике заряды Z_1, Z_2 заменяются на массы M_1, M_2 .

В вытянутых сфероидальных координатах

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r_1 + r_2}{2R}, & \xi &\in [0, \infty), \\ \eta &= \frac{r_1 - r_2}{2R}, & \eta &\in [-1, 1], \\ \phi &= \arctg \frac{y}{x}, & \phi &\in [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (2)$$

переменные в (1) разделяются, и возникают два уравнения

$$\left[\frac{d}{d\eta}(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta} + \left(\lambda^\eta t - t^2(1-\eta^2) + \beta t\eta - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right)\right]\Xi(t, \beta; \eta) = 0, \quad (3)$$

$$\left[\frac{d}{d\xi}(\xi^2-1)\frac{d}{d\xi} + \left(-\lambda^\xi t - t^2(\xi^2-1) + \alpha t\xi - \frac{m^2}{\xi^2-1}\right)\right]\Pi(t, \alpha; \xi) = 0 \quad (4)$$

для угловой функции $\Xi(\eta)$ по “угловой” координате η и для радиальной функции $\Pi(\xi)$ по “радиальной” координате ξ . Здесь $t = R\sqrt{-2E}$ – уже упоминавшаяся независимая переменная для динамической системы,

$$\alpha = \frac{2(Z_2 + Z_1)}{\sqrt{-2E}}, \quad \beta = \frac{2(Z_2 - Z_1)}{\sqrt{-2E}}.$$

Параметр m играет роль квантового числа, отвечающего координате ϕ , а λ – параметр разделения или собственное значение для стационарных состояний. Энергии стационарных состояний находятся из условия $\lambda^\eta = \lambda^\xi$. Ниже мы полагаем $m = 0$, что отвечает плоскому классическому движению.

3. УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Процедура антиквантования [7], [8] предполагает, что квантовые переменные в (3) и (4) заменяются на классические координаты ξ и η , в то время как λ отождествляется с энергией h (соответственно h^ξ и h^η для радиального (4) и углового (3) уравнений).

Рассмотрим радиальное уравнение (4). По причинам, поясненным ниже, вводится новая зависимая переменная $\Pi(\xi) = (\xi^2 - 1)^{-1/2} \cdot v(\xi)$. Уравнение для функции $v(\xi)$ имеет вид

$$(\xi^2 - 1)v'' + \left[-t^2(\xi^2 - 1) + t\alpha\xi + \frac{1}{\xi^2 - 1} \right] v = \lambda^\xi tv. \quad (5)$$

В квантовой терминологии с этим уравнением можно связать следующий гамильтониан:

$$h^\xi = \frac{1}{t} \left[p^2(\xi^2 - 1) - t^2(\xi^2 - 1) + t\alpha\xi + \frac{1}{\xi^2 - 1} \right].$$

Те же манипуляции с угловым уравнением приводят к гамильтониану

$$h^\eta = \frac{1}{t} \left[s^2(\eta^2 - 1) - t^2(\eta^2 - 1) - t\beta\eta + \frac{1}{\eta^2 - 1} \right].$$

В гамильтонианах, выписанных выше, p – радиальный момент, а s – угловой момент.

В результате процедуры антиквантования [7] квантовый гамильтониан заменяется на соответствующий классический гамильтониан, и возникает следующая система гамильтоновых уравнений:

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi} = \frac{\partial h^\xi}{\partial p} = \frac{2}{t} p(\xi^2 - 1), \quad (6)$$

$$\frac{dp}{dt} = \dot{p} = -\frac{\partial h^\xi}{\partial \xi} = -\frac{1}{t} \left[2(p^2 - t^2)\xi + t\alpha - \frac{2\xi}{\xi^2 - 1} \right], \quad (7)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \dot{\eta} = \frac{\partial h^\eta}{\partial s} = \frac{2}{t} s(\eta^2 - 1), \quad (8)$$

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s} = -\frac{\partial h^\eta}{\partial \eta} = -\frac{1}{t} \left[2(s^2 - t^2)\eta - t\beta - \frac{2\eta}{\eta^2 - 1} \right]. \quad (9)$$

Если ввести лагранжиан $L^{(\xi)}(\xi, \dot{\xi}) = p\dot{\xi} - h^{(\xi)}(p, \xi)$, то вместо (6), (7) можно выписать ньютоновское уравнение

$$\ddot{\xi} = \frac{\xi}{\xi^2 - 1} \dot{\xi}^2 - \frac{1}{t} \dot{\xi} + 4t\xi(\xi^2 - 1) - \frac{4\xi}{t(\xi^2 - 1)} - 2\alpha(\xi^2 - 1).$$

Это уравнение представляет собой специальный случай уравнения Пенлеве P^5 . Те же преобразования углового уравнения приводят к следующему ньютоновскому уравнению:

$$\ddot{\eta} = \frac{\eta}{\eta^2 - 1} \dot{\eta}^2 - \frac{1}{t} \dot{\eta} + 4t\eta(\eta^2 - 1) - \frac{4\eta}{t(\eta^2 - 1)} + 2\beta(\eta^2 - 1).$$

Важно подчеркнуть, что техника антиквантования не единственна. S-гомотопные преобразования (см. [8]) начальных квантовых уравнений приводят к слегка различающимся уравнениям P^5 , однако главные члены этих уравнений одни и те же. Для задачи небесной механики это означает изменение выбора момента.

Чем представленная теория может быть полезна практически? В квантовой механике она описывает ситуацию, когда две тяжелые частицы приближаются или удаляются друг относительно друга в присутствии легкой частицы. Качественное понимание такого физического явления облегчает более глубокое изучение соответствующей задачи трех тел. Можно надеяться, что это справедливо также и для задачи трех тел в классической механике.

4. ЭФФЕКТ ШТАРКА В ВОДОРОДЕ

Уравнение Шредингера для атома водорода в однородном электрическом поле с напряженностью $2F$ имеет вид

$$\left(\frac{1}{2} \Delta + E + \frac{1}{r} - Fz \right) \psi = 0.$$

Разделение переменных в параболических координатах ζ, η в соответствии с представлением волновой функции ψ в виде $\psi = V(\zeta)U(\eta)$ приводит к уравнениям

$$(\zeta V')' + \left(\frac{E}{2} \zeta - F\zeta^2 \right) V = -\beta_1 V, \quad (\eta U')' + \left(\frac{E}{2} \eta + F\eta^2 \right) U = -\beta_2 U,$$

причем $\beta_1 + \beta_2 = 1$. С первым уравнением мы ассоциируем квантовый гамильтониан $H_1 = -(\zeta p^2 + p + \eta E/2 - F\zeta^2)$. Процедура антиквантования позволяет рассматривать его как гамильтониан классического движения, для которого мы введем новые переменные

$$q = F^{-1/2} \zeta, \quad p \rightarrow F^{1/4} p, \quad c = F^{1/4}, \quad t = F^1 \cdot 4E/2.$$

В этих переменных $H_1 = -(qp^2 + cp + tq - q^2)$. Следовательно, в результате антиквантования мы имеем уравнение Пенлеве, которое эквивалентно уравнению P^2 :

$$q_{tt} = \frac{q_t^2}{2q} - \frac{c^2}{2q} + 4q^2 + 2tq.$$

Это уравнение определяет движение заряженной частицы (электрона) в однородном электрическом поле с адиабатически возрастающей или убывающей интенсивностью в присутствии постоянного кулоновского поля. Уравнение для второй параболической координаты находится подобным образом.

Благодарности. С. Ю. Славянов благодарен обсерватории Туорла и профессору Маури Валтонену за гостеприимство во время его пребывания в Турку. А. Мюлляри благодарит Vilh, Yrjo and Kalle Visln Foundation за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] C. L. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, Walter de Gruyter, Berlin, 1927.
- [2] И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*, Наука, М., 1975.
- [3] L. Euler, “Problme: un corps tant attir en raison rciproque quarre des distances vers deux points fixes donns, trouver les cas ou la courbe dcrite par ce corps sera algbrique”, *Mmoires de l’acadmie des sciences de Berlin*, v. XVI, 1767, 228–249; *Commentationes mechanicae ad theorim motus punctorum pertinentes*, Opera Omnia. Ser. 2. Opera Mechanica et Astronomica, **6**, Soc. Sci. Natur. Helv., Lausanne, 1764, 209–293.
- [4] И. А. Герасимов, *Задача двух неподвижных центров Л. Эйлера*, Век 2, Фрязино, 2007.
- [5] A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev, V. Yu. Novokshenov, *Painlev Transcendents: a Riemman–Gilbert Approach*, Math. Surv. Monogr., **128**, AMS, Providence, RI, 2006.
- [6] V. I. Gromak, I. Laine, S. Shimomura, *Painlev Differential Equations in the Complex Plane*, de Gruyter Stud. Math., **28**, de Gruyter, Berlin, 2002.
- [7] С. Ю. Славянов, Ф. Р. Вукайлович, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 143–151.
- [8] С. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский диалект, СПб., 2002.

Поступила в редакцию 4.09.2010