Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алиев, Э. Х. Эйвазов, О существенной самосопряженности оператора Шредингера в магнитном поле, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 2, 266–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6608>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 09:48:26

© 2011 г.

А. Р. Алиев^{*†}, Э. Х. Эйвазов^{*}

О СУЩЕСТВЕННОЙ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматривается многомерный оператор Шредингера в магнитно-электрическом поле. При определенных условиях типа Штуммеля, налагаемых на магнитный и электрический потенциалы, доказываемая существенная самосопряженность магнитного оператора Шредингера.

Ключевые слова: магнитный оператор Шредингера, квантовая механика, существенная самосопряженность, магнитно-электрический потенциал.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе в пространстве $L_2(\mathbb{R}_n)$ исследуется существенная самосопряженность магнитного оператора Шредингера

$$H(a, V) = \sum_{k=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x) \right)^2 + V(x), \quad (1)$$

где $V(x)$ – электрический потенциал, $a(x) = (a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))$ – магнитный потенциал, причем все потенциалы считаются вещественными. Операторы Шредингера вида (1) играют исключительно важную роль в современной математике, физике и химии, особенно в квантовой механике при исследовании заряженных частиц в магнитном поле и в квантовой химии при изучении магнитооптических свойств молекулярных систем. Как известно (см., например, книгу [1], гл. X, а также [2]), эволюция квантовой системы, т.е. решение задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера, корректно определена в том и только в том случае, когда гамильтониан этой системы существенно самосопряжен. По этой причине на существенную самосопряженность часто ссылаются как на квантовую полноту. Физический смысл существенной самосопряженности – невозможность для системы уйти на бесконечность за конечное время. Следовательно, установление существенной самосопряженности оператора типа Шредингера должно быть начальной точкой любого дальнейшего исследования соответствующей квантовой системы, в которой

^{*}Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан.
E-mail: alievaraz@yahoo.com, eyvazovshad@mail.ru

[†]Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

этот оператор используется в качестве гамильтониана. Имеется много работ, посвященных изучению существенной самосопряженности оператора Шредингера в магнитном поле, первая из которых, вероятно, принадлежит Като [3]. Всесторонний обзор результатов о существенной самосопряженности операторов типа (1) можно найти в книгах [1], [4], [5] и в фундаментальной работе [2]. Следует отметить также работы [6], [7], где изучены некоторые спектральные свойства оператора типа (1).

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Оператор (1) можно записать в виде

$$H(a, V) = -\Delta - 2i \sum_{k=1}^n a_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + q_1(x) + q_2(x) - iq_3(x), \quad (2)$$

где $\Delta = \sum_{k=1}^n \partial^2 / \partial x_k^2$ — лапласиан, $q_1(x) = V(x)$, $q_2(x) = a^2(x) = \sum_{k=1}^n a_k^2(x)$, $q_3(x) = \sum_{k=1}^n \partial a_k(x) / \partial x_k$. Предполагается, что измеримые функции $q_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, $a_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют следующим условиям:

а) для всех $i = 1, 2, 3$ функция $q_i(x)$ принадлежит пространству Штуммеля $S_{n,\varepsilon}$ (см. работы [1], [5], [8], [9]), т.е. при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_n} \left\{ \int_{|x-y| \leq 1} \frac{|q_i(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\varepsilon}} dy \right\} < +\infty$$

в случае $n \geq 4$ и

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_n} \left\{ \int_{|x-y| \leq 1} |q_i(y)|^2 dy \right\} < +\infty$$

в случае $n \leq 3$;

б) для всех $k = 1, 2, \dots, n$, $a_k(x) \in W_{2,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_n)$ и при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_n} \left\{ \int_{|x-y| \leq 1} \frac{|a_k(y)|^2}{|x-y|^{n-3+\varepsilon}} dy \right\} < +\infty$$

в случае $n \geq 3$ и

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_n} \left\{ \int_{|x-y| \leq 1} |a_k(y)|^2 dy \right\} < +\infty$$

в случае $n \leq 2$.

Введем в рассмотрение в $L_2(\mathbb{R}_n)$ следующие операторы с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$:

$$\begin{aligned} \tilde{H}\varphi &= \sum_{k=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x) \right)^2 \varphi(x) + V(x)\varphi(x), \\ \tilde{H}_0\varphi &= -\Delta\varphi; \quad \tilde{Q}_i\varphi = q_i(x)\varphi(x), \quad i = 1, 2, 3, \\ \tilde{D}_k\varphi &= ia_k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n). \end{aligned}$$

Замыкание оператора $\tilde{H}_0$ обозначим через H_0 .

Нашей целью является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА. При условиях (а) и (б) оператор $\tilde{H}$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть выполняется условие (а). Тогда симметричные операторы $\tilde{Q}_i$, $i = 1, 2, 3$, H_0 -ограниченны с H_0 -гранью меньше единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для достаточно больших положительных t нормы операторов $\tilde{Q}_i(H_0 + tE)^{-1}$, $i = 1, 2, 3$, меньше единицы. Используя идею метода, предложенного в книге [9] (см. стр. 7), имеем

$$\|\tilde{Q}_i(H_0 + tE)^{-1}\| \leq \sqrt{\alpha_{0,i}(t)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где

$$\alpha_{0,i}(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}_n} \left\{ \int_{\mathbb{R}_n} G(x, y, -t) |q_i(y)|^2 dy \right\}, \quad (4)$$

$G(x, y, -t)$ – ядро интегрального оператора $[(H_0 + tE)^{-1}]^2$.

Случай I: $n = 1, n = 3$. Используя явный вид ядра $G(x, y, -t)$,

$$G(x, y, -t) = \begin{cases} \left(\frac{|x-y|}{4t} + \frac{1}{t^{3/2}} \right) e^{-\sqrt{t}|x-y|}, & n = 1, \\ \frac{1}{8\pi t^{1/2}} e^{-\sqrt{t}|x-y|}, & n = 3, \end{cases}$$

из выражений (3), (4) и условия (а) заключаем, что существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{Q}_i(H_0 + tE)^{-1}\| = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Случай II: $n = 2$. Из асимптотики функции Ханкеля $H_0^{(1)}(z)$ [10]

$$H_0^{(1)}(z) \sim \begin{cases} \frac{2i}{\pi} \ln z, & z \rightarrow 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \pi/4)}, & |z| \rightarrow +\infty, \quad -\pi < \arg z < 2\pi, \end{cases}$$

равенства $G(x, y, -t) = ((-i/4)H_0^{(1)}(i\sqrt{t}|x-y|))'_{-t}$ и условия (а) следует, что выполняются равенства (5).

Случай III: $n \geq 4$. В этом случае мы будем использовать оценки Муртазина–Садовнического (см. оценки (5) в книге [9])

$$\alpha_{0,i}(t) \leq \begin{cases} c \sup_{x \in \mathbb{R}_n} \int_{|x-y| \leq 1} e^{-\sqrt{2t}|x-y|/2} |\ln t|x-y|| |q_i(y)|^2 dy + \\ \quad + ce^{-\sqrt{2t}/4} \sup_{x \in \mathbb{R}_n} N_{0,i}(x), & n = 4, \\ c \sup_{x \in \mathbb{R}_n} \int_{|x-y| \leq 1} e^{-\sqrt{2t}|x-y|/2} |x-y|^{-n+4} |q_i(y)|^2 dy + \\ \quad + ce^{-\sqrt{2t}/4} \sup_{x \in \mathbb{R}_n} N_{0,i}(x), & n \geq 5, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$N_{0,i}(x) = \begin{cases} \int_{|x-y| \leq 1} |q_i(y)|^2 \ln |x-y| dy, & n = 4, \\ \int_{|x-y| \leq 1} |q_i(y)|^2 |x-y|^{-n+4}, & n \geq 5, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем c – любая подходящая, не обязательно все время одна и та же, абсолютная постоянная.

Отметим, что если $|x-y| \leq 1$, то для всех $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $|x-y|^{-n+4-\varepsilon} \geq |x-y|^{-n+4}$. Поэтому из условия леммы вытекает, что $\sup_{x \in \mathbb{R}_n} N_{0,i}(x) < +\infty$, $i = 1, 2, 3$.

Если $n = 4$, то из неравенства (6) в силу известного предела $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^\varepsilon \ln \alpha = 0$, $\varepsilon > 0$, получим

$$\alpha_{0,i}(t) \leq c \frac{1}{t^\varepsilon} \sup_{x \in \mathbb{R}_n} \int_{|x-y| \leq 1} \frac{|q_i(y)|^2}{|x-y|^\varepsilon} dy + ce^{-\sqrt{2t}/4} \sup_{x \in \mathbb{R}_n} N_{0,i}(x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$ в формуле (8) и принимая во внимание условие (а), снова получим выражение (5). Пусть теперь $n \geq 5$. Покажем, что для каждого $\eta > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}_n$ справедливы неравенства

$$\alpha_{0,i}(t) \leq \eta + (ce^{-\sqrt{2t}\delta/2} + ce^{-\sqrt{2t}/4}) \sup_{x \in \mathbb{R}_n} N_{0,i}(x), \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Прежде всего заметим, что для любого $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \int_{|x-y| \leq 1} e^{-\sqrt{2t}|x-y|/2} |x-y|^{-n+4} |q_i(y)|^2 dy &\leq \int_{|x-y| \leq \delta} |x-y|^{-n+4} |q_i(y)|^2 dy + \\ &+ e^{-\sqrt{2t}\delta/2} \int_{\delta \leq |x-y| \leq 1} |x-y|^{-n+4} |q_i(y)|^2 dy \leq \\ &\leq \int_{|x-y| \leq \delta} |x-y|^{-n+4} |q_i(y)|^2 dy + e^{-\sqrt{2t}\delta/2} \int_{|x-y| \leq 1} |x-y|^{-n+4} |q_i(y)|^2 dy \leq \\ &\leq \delta^\varepsilon \int_{|x-y| \leq \delta} |x-y|^{-n+4-\varepsilon} |q_i(y)|^2 dy + e^{-\sqrt{2t}\delta/2} \int_{|x-y| \leq 1} |x-y|^{-n+4} |q_i(y)|^2 dy \leq \\ &\leq \delta^\varepsilon \int_{|x-y| \leq 1} \frac{|q_i(y)|^2}{|x-y|^{n-4+\varepsilon}} dy + e^{-\sqrt{2t}\delta/2} N_{0,i}(x). \end{aligned}$$

Учитывая полученное неравенство и условие (а), получаем оценки (9).

Пусть $\eta > 0$ – любое число. Переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$ в неравенствах (9), получим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_{0,i}(t) \leq \eta, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Из неравенств (3) и (10) имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{Q}_i(H_0 + tE)^{-1}\| \leq \sqrt{\eta}.$$

Отсюда и из произвольности положительного числа η получаем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{Q}_i(H_0 + tE)^{-1}\| = 0.$$

Так как H_0 -грань операторов $\tilde{Q}_i$, $i = 1, 2, 3$, равна (см. монографии [1], [5]) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{Q}_i(H_0 + tE)^{-1}\|$, получаем, что H_0 -грань этих операторов равна нулю. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть выполняется условие (6). Тогда операторы $\tilde{D}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, H_0 -ограниченны с H_0 -гранью меньше единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для достаточно больших положительных t нормы операторов $\tilde{D}_k(H_0 + tE)^{-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, меньше единицы. Обозначим через $R_{0,n,k}(-t)$ интегральный оператор с ядром

$$R_{0,n,k}(x, y, -t) = -2\pi(x_k - y_k)R_{0,n+2}(x, y, -t), \quad (11)$$

где $R_{0,n}(x, y, -t)$ – ядро интегрального оператора $(H_0 + tE)^{-1}$ в $L_2(\mathbb{R}_n)$. Используя интегральное представление для ядра $R_{0,n}(x, y, -t)$ [9]

$$R_{0,n}(x, y, -t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ts}}{s^{n/2}} e^{-|x-y|^2/(2s)} ds,$$

после несложных выкладок получим равенство

$$R_{0,n,k}(x, y, -t) = \frac{\partial}{\partial x_k} R_{0,n}(x, y, -t).$$

Используя неравенство

$$\|a_k(x)R_{0,n,k}(-t)\| \leq \sqrt{\|a_k(x)R_{0,n,k}^2(-t)a_k(x)\|},$$

можно показать, что для всех $\varepsilon > 0$ существует $T_0 > 0$ такое, что при любых $t > T_0$ и $k = 1, 2, \dots, n$ справедливо неравенство $\|a_k(x)R_{0,n,k}(-t)\| < \varepsilon$. Положим

$$\beta_{0,k}(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}_n} \left\{ \int_{\mathbb{R}_n} G_{n,k}(x, y, -t) |a_k(y)|^2 dy \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $G_{n,k}(x, y, -t)$ – ядро интегрального оператора $R_{0,n,k}^2(-t)$. Так как

$$G_{n,k}(-t) = R_{0,n,k}^2(-t) = (R_{0,n,k}(-t))'_{-t},$$

то из выражения (11) имеем

$$G_{n,k}(x, y, -t) = 2\pi(x_k - y_k)R'_{0,n+2}(x, y, -t). \quad (12)$$

Воспользовавшись интегральным представлением для ядра $R_{0,n+2}(x, y, -t)$, из равенства (12) получим

$$G_{n,k}(x, y, -t) = (x_k - y_k)R_{0,n}(x, y, -t). \quad (13)$$

Отсюда, используя явный вид ядра $R_{0,n}(x, y, -t)$, имеем

$$|G_{n,k}(x, y, -t)| \leq \begin{cases} c \frac{|x_k - y_k|}{\sqrt{t}} e^{-\sqrt{t}|x-y|}, & n = 1, \\ c|x_k - y_k| |\ln t| |x - y| e^{-\sqrt{2t}|x-y|/2}, & n = 2, \\ c \frac{|x_k - y_k|}{|x - y|^{n-2}} e^{-\sqrt{2t}|x-y|/2}, & n \geq 3. \end{cases} \quad (14)$$

Из формулы (14) и оценок Муртазина–Садовниченко [9] получим

$$\beta_{0,k}(t) \leq \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |a_k(y)|^2 dy, & n = 1, \\ \frac{c}{\sqrt[4]{t}} \int_{\mathbb{R}_2} |a_k(y)|^2 dy, & n = 2, \\ c \sup_{x \in \mathbb{R}_n} \int_{|x-y| \leq 1} \frac{e^{-\sqrt{2t}|x-y|/2}}{|x-y|^{n-3}} |a_k(y)|^2 dy + \\ + ce^{-\sqrt{2t}/4} \sup_{x \in \mathbb{R}_n} \int_{|x-y| \leq 1} \frac{|a_k(y)|^2}{|x-y|^{n-3}} dy, & n \geq 3. \end{cases} \quad (15)$$

Далее, поступая так же, как при доказательстве леммы 1, из формулы (15) заключаем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{D}_k(H_0 + tE)^{-1}\| = 0. \quad (16)$$

Лемма 2 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из лемм 1 и 2 следует, что оператор

$$Q = \sum_{i=1}^3 \tilde{Q}_i + \sum_{k=1}^n \tilde{D}_k$$

бесконечно мал по отношению к H_0 , т.е. его H_0 -грань равна нулю. Следовательно, согласно теореме Като–Реллиха [1] оператор

$$\tilde{H} = \sum_{k=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_k} + a_k(x) \right)^2 + V(x)$$

самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$.

Список литературы

- [1] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 2: *Гармонический анализ. Самосопряженность*, Мир, М., 1978.
- [2] М. Ш. Браверман, О. Милатович, М. А. Шубин, *УМН*, **57:4**(346) (2002), 3–58, arXiv: math/0201231.
- [3] Т. Kato, *Israel J. Math.*, **13:1–2** (1972), 135–148.
- [4] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.
- [5] Х. Цикон, Р. Фрезе, В. Кирш, Б. Саймон, *Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии*, Мир, М., 1990.
- [6] М. Б. Губайдуллин, Х. Х. Муртазин, *ТМФ*, **126:3** (2001), 443–454.
- [7] М. Б. Губайдуллин, *ТМФ*, **130:2** (2002), 267–274.
- [8] F. Stummel, *Math. Ann.*, **132:2** (1956), 150–176.
- [9] Х. Х. Муртазин, В. А. Садовнический, *Спектральный анализ многочастичного оператора Шредингера*, Изд-во МГУ, М., 1988.
- [10] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979.