Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, Рассеяние электрона на доменной стенке, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 2, 272–281

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:32:06

© 2011 г.

Ю. П. Чубурин*

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНА НА ДОМЕННОЙ СТЕНКЕ

Для гамильтониана спин-поляризованного электрона, проходящего через доменную стенку в ферромагнитной квантовой проволоке, изучаются коэффициенты прохождения и отражения. Доказано, что для энергий $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$ ($-\alpha$ – граница существенного спектра) как для достаточно малых, так и для достаточно больших λ имеется почти полное отражение, что согласуется с эффектом баллистического магнитосопротивления в ферромагнитных наноконтактах. Для энергий $\lambda > \alpha$ почти полное отражение сменяется почти полным прохождением; при этом то и другое происходит без переворачивания спина.

Ключевые слова: оператор Шредингера, спин-поляризованный электрон, коэффициенты прохождения и отражения, доменная стенка.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье рассматривается оператор Шредингера в $(L^2(\mathbb{R}))^2$ вида

$$H = H_0 + \alpha V(x),$$

где

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + \begin{pmatrix} \alpha \operatorname{sgn} x & 0 \\ 0 & -\alpha \operatorname{sgn} x \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} w(x) & -v(x) \\ -v(x) & -w(x) \end{pmatrix}.$$

Это математически удобная форма записи гамильтониана

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - \alpha \mathbf{M}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1)$$

где $\alpha \neq 0$ – обменный параметр (без ограничения общности считаем, что $\alpha > 0$), $\mathbf{M}(x) = (v(x), 0, -\operatorname{sgn} x - w(x))$ – вектор намагниченности, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ – набор матриц Паули. Здесь $v(x), w(x)$ – ненулевые вещественные функции такие, что

$$v^2(x) + (\operatorname{sgn} x + w(x))^2 = 1 \quad (2)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ и $v(x) = w(x) = 0$ для $x \notin [-d, d]$, где $d > 0$. Предполагается, что $v(x)$ – четная неотрицательная функция, $w(x)$ – нечетная функция, монотонно

*Физико-технический институт УрО РАН, Ижевск, Россия.
E-mail: chuburin@otf.pti.udm.ru

возрастающая и неотрицательная на промежутке $[-d, 0]$ и такая, что $|w(x)| \leq 1$ (функция $w(x)$ “сглаживает” функцию $\operatorname{sgn} x$).

Оператор (1) является гамильтонианом спин-поляризованного электрона, проходящего через доменную стенку в ферромагнитной квантовой проволоке (см., например, [1], [2]). Интерес к таким объектам возник в связи с их возможным применением в наноразмерных магнитоэлектронных устройствах, что связано с экспериментально наблюдаемым эффектом баллистического магнитосопротивления (БМС) (см. работы [3], [4]). Этот эффект состоит в резком увеличении (например, более чем в 30 раз [4]) сопротивления в ферромагнитных наноконтактах при появлении очень малого магнитного поля.

Целью настоящей работы является изучение коэффициентов прохождения и отражения для каждой из спиновых компонент волновой функции. Доказано, что для энергий $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$, где $-\alpha$ – граница существенного спектра, как для достаточно малых, так и для достаточно больших λ имеется почти полное отражение. Для энергий $\lambda > \alpha$ почти полное отражение сменяется почти полным прохождением, при этом то и другое происходит без переворачивания спина.

Заметим, что почти полное отражение для малых α в промежутке $(-\alpha, \alpha)$ согласуется с эффектом БМС.

2. УРАВНЕНИЕ ЛИППМАНА–ШВИНГЕРА

Обозначим через $G_0(x, y, \lambda, \alpha)$ ядро резольвенты $(h_0 - \lambda)^{-1}$ (функцию Грина) оператора $h_0 = -d^2/dx^2 + \alpha\theta(x)$, где $\theta(x)$ – функция Хевисайда. Очевидно, что функция Грина оператора H_0 имеет вид

$$\mathcal{G}_0(x, y, \lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} G_0(x, y, \lambda + \alpha, 2\alpha) & 0 \\ 0 & G_0(x, y, \lambda - \alpha, -2\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Введем обозначения $k = \sqrt{\lambda - \alpha}$, $k' = \sqrt{\lambda + \alpha}$ и положим

$$G_{01}(x, y, k, k') = G_0(x, y, \lambda + \alpha, 2\alpha), \quad G_{02}(x, y, k, k') = G_0(x, y, \lambda - \alpha, -2\alpha).$$

В дальнейшем будут использоваться следующие равенства (см. работу [5]):

$$\begin{aligned} G_{01}(x, y, k, k') &= -\theta(x)\theta(y) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{2ik} + \frac{(-k' + k)e^{ik(x+y)}}{2ik(k+k')} \right) - \\ &\quad - \theta(x)\theta(-y) \frac{e^{ikx-ik'y}}{i(k+k')} - \theta(-x)\theta(y) \frac{e^{-ik'x+iky}}{i(k+k')} - \\ &\quad - \theta(-x)\theta(-y) \left(\frac{e^{ik'|x-y|}}{2ik'} - \frac{(-k' + k)e^{-ik'(x+y)}}{2ik'(k+k')} \right) = \\ &= -\frac{(\theta(x)e^{ikx} + \theta(-x)e^{-ik'x})(\theta(y)e^{iky} + \theta(-y)e^{-ik'y})}{i(k+k')} + \gamma_1(x, y, k, k'), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1(x, y, k, k') &= -\frac{\theta(x)\theta(y)(e^{ik|x-y|} - e^{ik(x+y)})}{2ik} - \\ &\quad - \frac{\theta(-x)\theta(-y)(e^{ik'|x-y|} - e^{-ik'(x+y)})}{2ik'}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\chi_I(x)$ характеристическую функцию промежутка $I = [-d, d]$. Очевидно, что функция $\sqrt{|w(x)|} \gamma_1(x, y, k, k') \chi_I(y)$ является $L^2(\mathbb{R})$ -значной аналитической функцией переменных k, k' в достаточно малой комплексной окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^2$.

Аналогично вводится функция $\gamma_2(x, y, k, k')$. Заметим, что

$$G_{02}(x, y, k, k') = G_{01}(x, y, k', k), \quad \gamma_2(x, y, k, k') = \gamma_1(x, y, k', k).$$

Обозначим через $\sigma(A)$ и $\sigma_{\text{ess}}(A)$ спектр и существенный спектр оператора A соответственно.

Доказательство следующей теоремы стандартно (см. доказательство предложения 1 в работе [5]).

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие равенства:*

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H_0) = [-\alpha, \infty).$$

Запишем уравнение Липпмана–Швингера в виде

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \alpha \int_{\mathbb{R}} G_0(x, y, \lambda + i0, \alpha) V(y) \psi(y) dy \quad (5)$$

($+i0$ в дальнейшем опускаем), где

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}, \quad \psi_0(x) = \begin{pmatrix} \theta(-x)(e^{ik'x} + \frac{k'-k}{k'+k}e^{-ik'x}) + \theta(x)\frac{2k'}{k+k'}e^{ikx} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

(Функция ψ_0 удовлетворяет уравнению $(H_0 - \lambda)\psi_0 = 0$ и имеет требуемое для описания рассеяния поведение при $x \rightarrow \pm\infty$. Заметим, что выбор

$$\hat{\psi}_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta(-x)(e^{ikx} + \frac{k-k'}{k'+k}e^{-ikx}) + \theta(x)\frac{2k}{k+k'}e^{ik'x} \end{pmatrix}$$

малоинтересен, поскольку для $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$ волновой вектор k чисто мнимый.)

Обозначим через $a_1^+(k, k')$ и $a_2^+(k, k')$ ($a_1^-(k, k')$ и $a_2^-(k, k')$) коэффициенты прохождения (отражения) с сохранением и переворачиванием спина соответственно. Из уравнения (5) с учетом формул (4), (6) эти коэффициенты легко находятся. Имеем

$$\begin{aligned} a_1^-(k, k') &= \frac{k' - k}{k' + k} + \alpha \int_0^\infty \frac{e^{iky}}{i(k + k')} (w(y)\psi_1(y) - v(y)\psi_2(y)) dy + \\ &+ \alpha \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{ik'y}}{2ik'} - \frac{(-k' + k)e^{-ik'y}}{2ik'(k + k')} \right) (w(y)\psi_1(y) - v(y)\psi_2(y)) dy \end{aligned} \quad (7)$$

(этот коэффициент отвечает $e^{-ik'x}$). Для $\lambda > \alpha$

$$\begin{aligned} a_2^-(k, k') &= \alpha \int_0^\infty \frac{e^{ik'y}}{i(k + k')} (-v(y)\psi_1(y) - w(y)\psi_2(y)) dy + \\ &+ \alpha \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{iky}}{2ik} - \frac{(-k + k')e^{-iky}}{2ik(k + k')} \right) (-v(y)\psi_1(y) - w(y)\psi_2(y)) dy \end{aligned} \quad (8)$$

(этот коэффициент отвечает e^{-ikx} ; для $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$ имеем $a_2^-(k, k') = 0$, поскольку e^{-ikx} в этом случае экспоненциально убывает). Далее, для $\lambda > \alpha$

$$\begin{aligned} a_1^+(k, k') &= \frac{2k'}{k' + k} + \\ &+ \alpha \int_0^\infty \left(\frac{e^{-iky}}{2ik} + \frac{(-k' + k)e^{iky}}{2ik(k + k')} \right) (w(y)\psi_1(y) - v(y)\psi_2(y)) dy + \\ &+ \alpha \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-ik'y}}{2ik'} (w(y)\psi_1(y) - v(y)\psi_2(y)) dy \end{aligned} \quad (9)$$

(этот коэффициент отвечает e^{ikx} ; для $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$ имеем $a_1^+(k, k') = 0$),

$$\begin{aligned} a_2^+(k, k') &= \alpha \int_0^\infty \left(\frac{e^{-ik'y}}{2ik'} + \frac{(-k + k')e^{ik'y}}{2ik'(k + k')} \right) (-v(y)\psi_1(y) - w(y)\psi_2(y)) dy + \\ &+ \alpha \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-iky}}{i(k + k')} (-v(y)\psi_1(y) - w(y)\psi_2(y)) dy \end{aligned} \quad (10)$$

(этот коэффициент отвечает $e^{ik'x}$).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} I_v^\pm(\kappa) &= \int_{-\infty}^\infty \theta(\pm y)v(y)e^{i\kappa y} dy, & I_w^\pm(\kappa) &= \int_{-\infty}^\infty \theta(\pm y)v(y)e^{i\kappa y} dy, \\ a(k, k') &= I_w^+(2k) + I_w^-(-2k'), \\ b(k, k') &= c(k, k') = I_v^+(k + k') + I_v^-(-k - k'), \\ d(k, k') &= I_w^+(2k') + I_w^-(-2k), \\ e(k, k') &= 2k'I_w^+(2k) + (k + k')I_w^-(0) + (k' - k)I_w^-(-2k'), \\ f(k, k') &= -2k'I_v^+(k + k') - (k + k')I_v^-(k' - k) + (k - k')I_v^-(-k - k'). \end{aligned}$$

В следующей теореме ищется решение уравнения Липпмана–Швингера в классе функций ψ таких, что $\sqrt{|w|}\psi \in (L^2(\mathbb{R}))^2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\lambda > 0$ фиксировано (и не зависит от α) или $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$. Тогда для всех достаточно малых α существует единственное решение уравнения Липпмана–Швингера (5) $\psi \in (L^\infty(\mathbb{R}))^2$ вида

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \begin{pmatrix} C_1(\theta(x)e^{ikx} + \theta(-x)e^{-ik'x}) \\ C_2(\theta(x)e^{ik'x} + \theta(-x)e^{-ikx}) \end{pmatrix} + O(\alpha), \quad (11)$$

где константы C_1, C_2 находятся из системы

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} i(k + k') - \alpha a(k, k') + O(\alpha^2) & \alpha b(k, k') + O(\alpha^2) \\ \alpha c(k, k') + O(\alpha^2) & i(k + k') + \alpha d(k, k') + O(\alpha^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\alpha}{k + k'} \begin{pmatrix} e(k, k') + O(\alpha) \\ f(k, k') + O(\alpha) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

а $O(\alpha)$ имеет следующий смысл:

$$\|\sqrt{|w|}O(\alpha)\|_{(L^2(\mathbb{R}))^2} \leq C\alpha. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (2) имеем $v(x) = \sqrt{|w(x)|} \sqrt{2 - |w(x)|}$. Введем обозначения (ср. с книгой [6])

$$\begin{aligned}\sqrt{w(x)} &= \sqrt{|w(x)|} \operatorname{sgn} w(x) = -\sqrt{|w(x)|} \operatorname{sgn} x, \\ \varphi_j &= \sqrt{|w|} \psi_j, \quad j = 1, 2, \quad \varphi_{01} = \sqrt{|w|} \psi_{01}.\end{aligned}$$

С учетом формул (4), (6) уравнение (5) для новой неизвестной функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ примет вид

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_{01}(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha \sqrt{|w(x)|}}{i(k + k')} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} \theta(x) \begin{pmatrix} e^{ikx}(\theta(y)e^{iky} + \theta(-y)e^{-ik'y}) \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \\ e^{ik'x}(\theta(y)e^{ik'y} + \theta(-y)e^{-iky}) \end{pmatrix} + \\ &+ \theta(-x) \begin{pmatrix} e^{-ik'x}(\theta(y)e^{iky} + \theta(-y)e^{-ik'y}) \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \\ e^{-ikx}(\theta(y)e^{ik'y} + \theta(-y)e^{-iky}) \end{pmatrix} \Bigg) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \sqrt{w(y)} \varphi_1(y) - \sqrt{2 - |w(y)|} \varphi_2(y) \\ -\sqrt{2 - |w(y)|} \varphi_1(y) - \sqrt{w(y)} \varphi_2(y) \end{pmatrix} dy + \alpha K(k, k') W \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (14)\end{aligned}$$

где $K(k, k')$ – оператор Гильберта–Шмидта с ядром

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \sqrt{|w(x)|} \gamma_1(x, y, k, k') \chi_I(y) & 0 \\ 0 & \sqrt{|w(x)|} \gamma_2(x, y, k, k') \chi_I(y) \end{pmatrix}, \\ &W = \begin{pmatrix} \sqrt{w(x)} & -\sqrt{2 - |w(x)|} \chi_I(x) \\ -\sqrt{2 - |w(x)|} \chi_I(x) & -\sqrt{w(x)} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Положим по определению

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = (1 - \alpha K(k, k') W) \varphi. \quad (15)$$

Для малых α перепишем уравнение (14) в виде

$$\begin{aligned}\xi(x) &= \varphi_0(x) + \frac{\alpha \sqrt{|w(x)|}}{i(k + k')} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} \theta(x) \begin{pmatrix} e^{ikx}(\theta(y)e^{iky} + \theta(-y)e^{-ik'y}) \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \\ e^{ik'x}(\theta(y)e^{ik'y} + \theta(-y)e^{-iky}) \end{pmatrix} + \\ &+ \theta(-x) \begin{pmatrix} e^{-ik'x}(\theta(y)e^{iky} + \theta(-y)e^{-ik'y}) \\ 0 \end{pmatrix} & 0 \\ e^{-ikx}(\theta(y)e^{ik'y} + \theta(-y)e^{-iky}) \end{pmatrix} \Bigg) \times \\ &\times W(1 - \alpha K(k, k') W)^{-1} \xi(y) dy. \quad (16)\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\xi(x) = \varphi_0(x) + \sqrt{|w(x)|} \begin{pmatrix} C_1(\theta(x)e^{ikx} + \theta(-x)e^{-ik'x}) \\ C_2(\theta(x)e^{ik'x} + \theta(-x)e^{-ikx}) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где C_1, C_2 – некоторые константы. Из выражений (16), (17) получаем систему

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\alpha}{i(k+k')} \int_{\mathbb{R}} (\theta(y)e^{iky} + \theta(-y)e^{-ik'y}) \times \\
 &\quad \times \left[w(y)(\theta(y)e^{iky} + \theta(-y)e^{-ik'y})C_1 - v(y)(\theta(y)e^{ik'y} + \theta(-y)e^{-iky})C_2 + \right. \\
 &\quad + w(y) \left(\theta(-y) \left(e^{ik'y} + \frac{k'-k}{k'+k} e^{-ik'y} \right) + \theta(y) \frac{2k'}{k'+k} e^{iky} \right) + \\
 &\quad \left. + \alpha(a_{11}(y, \alpha)C_1 + a_{12}(y, \alpha)C_2 + b_1(y, \alpha)) \right] dy, \\
 C_2 &= \frac{\alpha}{i(k+k')} \int_{\mathbb{R}} (\theta(y)e^{ik'y} + \theta(-y)e^{-iky}) \times \\
 &\quad \times \left[-v(y)(\theta(y)e^{iky} + \theta(-y)e^{-ik'y})C_1 - w(y)(\theta(y)e^{ik'y} + \theta(-y)e^{-iky})C_2 - \right. \\
 &\quad - v(y) \left(\theta(-y) \left(e^{ik'y} + \frac{k'-k}{k'+k} e^{-ik'y} \right) + \theta(y) \frac{2k'}{k'+k} e^{iky} \right) + \\
 &\quad \left. + \alpha(a_{21}(y, \alpha)C_1 + a_{22}(y, \alpha)C_2 + b_2(y, \alpha)) \right] dy,
 \end{aligned} \tag{18}$$

где $a_{ij}(y, \alpha), b_i(y, \alpha)$ – равномерно ограниченные по α семейства функций с носителями в I . Легко видеть, что систему (18) можно записать в виде (12). Используя выражение (15) и (17), получаем формулу (11) и неравенство (13). Ограниченность функции ψ легко вытекает из уравнения (5) с учетом формул (4), (6).

Для завершения доказательства покажем, что определитель системы (12) не равен нулю для достаточно малых α . Если $\lambda > 0$ фиксировано, то, очевидно, определитель стремится к $-4\lambda \neq 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Предположим теперь, что $-\alpha < \lambda < \alpha$, тогда $k = O(\sqrt{\alpha})$, $k' = O(\sqrt{\alpha})$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
 I_w^+(2k) + I_w^-(-2k') &= I_w^+(0) + I_w^-(0') + O(\sqrt{\alpha}) = \\
 &= \int_{\mathbb{R}} w(x) dx + O(\sqrt{\alpha}) = O(\sqrt{\alpha}), \\
 I_w^+(2k') + I_w^-(-2k) &= O(\sqrt{\alpha}), \quad I_v^+(k+k') + I_v^-(-k-k') = \bar{v} + O(\sqrt{\alpha}),
 \end{aligned}$$

где $\bar{v} = \int_{\mathbb{R}} v(x) dx$. Далее, в силу сделанного предположения $|k+k'|^2 = |i\sqrt{\alpha} - \lambda + \sqrt{\lambda + \alpha}|^2 = 2\alpha$. Следовательно, определитель системы (12)

$$\begin{vmatrix} i(k+k') + O(\alpha^{3/2}) & \alpha\bar{v} + O(\alpha^{3/2}) \\ \alpha\bar{v} + O(\alpha^{3/2}) & i(k+k') + O(\alpha^{3/2}) \end{vmatrix} = -(k+k')^2 + O(\alpha^2) = 2\alpha e^{i\varphi} + O(\alpha^2) \neq 0$$

для малых α (здесь $\varphi \in \mathbb{R}$). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В случае фиксированного $\lambda > 0$ имеем $\psi = \psi_0 + O(\alpha)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обозначим через $R_0(\lambda)$ и $R(\lambda)$ резольвенты операторов H_0 и H соответственно. Нетрудно видеть (ср. с работой [5]), что операторы $\sqrt{V}R_0(\lambda)$, $R_0(\lambda)\sqrt{V}$, а значит, и оператор

$$\sqrt{V}R(i) = \sqrt{V}R_0(i) - \sqrt{V}R_0(i)VR(i)$$

являются операторами Гильберта–Шмидта. Но тогда оператор

$$R(i) - R_0(i) = -R_0(i)VR(i)$$

является оператором со следом. Из теоремы Куроды–Бирмана [6] вытекает, что волновые операторы $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют и полны, а следовательно, существует унитарный оператор рассеяния.

3. РАССЕЯНИЕ ДЛЯ МАЛЫХ α

Обозначим через $P_1^+(k, k') = |a_1^+(k, k')|^2$ и $P_2^+(k, k') = |a_2^+(k, k')|^2$ ($P_1^-(k, k') = |a_1^-(k, k')|^2$ и $P_2^-(k, k') = |a_2^-(k, k')|^2$) вероятности прохождения (отражения) с сохранением и переворачиванием спина соответственно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\lambda > 0$ фиксировано. Тогда

$$P_1^+(k, k') = 1 + O(\alpha), \quad P_2^+(k, k') = O(\alpha^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью формул (9), (10), а также следствия теоремы 2 получаем равенства

$$a_1^+(k, k') = \frac{2k'}{k + k'} + O(\alpha) = 1 + O(\alpha), \quad a_2^+(k, k') = O(\alpha),$$

которые и доказывают теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко видеть, что оценка $|O(\alpha)| \leq C|\alpha|$ равномерна по $\lambda \in [a, b]$, где $a > 0$.

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$. Тогда

$$P_1^-(k, k') = 1 + O(\alpha), \quad P_2^-(k, k') = 0, \quad (19)$$

причем в оценке $|O(\alpha)| \leq C\alpha$ константа C не зависит от λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае система (12) примет вид (см. доказательство теоремы 2)

$$\begin{pmatrix} i(k + k') + O(\alpha^{3/2}) & \alpha\bar{v} + O(\alpha^{3/2}) \\ \alpha\bar{v} + O(\alpha^{3/2}) & i(k + k') + O(\alpha^{3/2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{\alpha}{k + k'} \begin{pmatrix} O(\alpha) \\ -2k'\bar{v} + O(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Отсюда, учитывая, что $|k + k'| = \sqrt{2\alpha}$, находим

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha O(\alpha^{3/2})}{(-(k + k')^2 + O(\alpha^2))(k + k')} = O(\alpha), \\ C_2 &= \frac{\alpha O(\alpha)}{(-(k + k')^2 + O(\alpha^2))(k + k')} = O(\alpha^{1/2}). \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно формулам (6), (11) и (20) получаем

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \theta(-x) \left(e^{ik'x} + \frac{k' - k}{k' + k} e^{-ik'x} \right) + \theta(x) \frac{2k'}{k + k'} e^{ikx} + O(\alpha) \\ O(\alpha^{1/2}) \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (7), имеем

$$\begin{aligned} a_1^-(k, k') &= \frac{k' - k}{k' + k} + \frac{\alpha}{i(k + k')} \int_0^\infty w(y) \frac{2k'}{k' + k} dy + \\ &+ \frac{\alpha}{2ik'} \int_{-\infty}^0 \frac{2k'}{k + k'} w(y) \frac{2k'}{k + k'} dy + O(\alpha) = \frac{k' - k}{k' + k} + O(\alpha). \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку

$$\left| \frac{k' - k}{k' + k} \right| = \left| \frac{k'^2 - k^2}{(k' + k)^2} \right| = 1,$$

из формулы (21) вытекает первое из равенств (19). Второе равенство получаем из равенства $a_2^-(k, k') = 0$ (см. объяснение после (7)). То, что константа C в оценке $O(\alpha)$ не зависит от λ , следует из оценок величин $k, k', k + k'$ (см. конец доказательства теоремы 2) и аналитичности $K(k, k')$. Теорема доказана.

4. РАССЕЯНИЕ ДЛЯ БОЛЬШИХ α

Рассмотрим теперь случай $\alpha \gg 1$. Предположим, что функции $v(x)$ и $w(x)$ дополнительно обладают следующими свойствами: функция $\alpha v(x)$ близка к $a\delta(x)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, а функция $\alpha w(x)$ близка к нулю (в смысле теории обобщенных функций). Покажем, что такие функции существуют. Выберем последовательности положительных чисел $\alpha_n \rightarrow \infty$ и $d_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), а также функции $v(x) = v_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие, помимо ранее наложенных условий, оценкам

$$\frac{a}{2} = \alpha_n \int_0^{d_n} v_n(x) dx \geq C_0 \alpha_n d_n,$$

где $a, C_0 > 0$ – некоторые константы, не зависящие от n . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n v_n = a\delta(x)$$

в смысле сходимости обобщенных функций. Далее, для соответствующих функций $w_n(x)$ имеем

$$\alpha_n \int_0^{d_n} |w_n(x)| dx \leq \alpha_n d_n \leq \frac{a}{2C_0}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \alpha_n w_n(x) &= \theta(-x) \alpha_n w_n(x) + \theta(x) \alpha_n w_n(x) = \\ &= \alpha_n \int_0^{d_n} |w_n(y)| dy \left(\frac{\theta(-x) \alpha_n w_n(x)}{\alpha_n \int_0^{d_n} |w_n(y)| dy} + \frac{\theta(x) \alpha_n w_n(x)}{\alpha_n \int_0^{d_n} |w_n(y)| dy} \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ в смысле обобщенных функций.

При сделанных предположениях заменим гамильтониан (1) на оператор вида

$$H' = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha \operatorname{sgn} x \sigma_3 - a\delta(x) \sigma_1.$$

Уравнение Липпмана–Швингера (5) примет вид (с учетом непрерывности функции G_0 в точке $y = 0$)

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(-x)(e^{ik'x} + \frac{k'-k}{k'+k}e^{-ik'x}) + \theta(x)\frac{2k'}{k+k'}e^{ikx} \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \frac{a\theta(x)}{i(k+k')} \begin{pmatrix} -e^{ikx}\psi_2(0) \\ -e^{ik'x}\psi_1(0) \end{pmatrix} + \frac{a\theta(-x)}{i(k+k')} \begin{pmatrix} -e^{-ik'x}\psi_2(0) \\ -e^{-ikx}\psi_1(0) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Отсюда получаем линейную систему относительно $\psi_1(0)$, $\psi_2(0)$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{i(k+k')} \\ \frac{a}{i(k+k')} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2k'}{k+k'} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\psi_1(0) = \frac{2k'(k+k')}{(k+k')^2 + a^2}, \quad \psi_2(0) = \frac{2iak'}{(k+k')^2 + a^2}. \quad (23)$$

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что $\lambda = A\alpha^p$, где $A > 0$, $p > 1$. Тогда для всех достаточно больших α*

$$P_1^+(k, k') = 1 + O\left(\frac{1}{\alpha^{p-1}}\right), \quad P_2^+(k, k') = O\left(\frac{1}{\alpha^p}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$k = \sqrt{A\alpha^p - \alpha} = \sqrt{A\alpha^p} + O(\alpha^{1-p/2}), \\ k' = \sqrt{A\alpha^p + \alpha} = \sqrt{A\alpha^p} + O(\alpha^{1-p/2}).$$

Из (22), (23) находим

$$\begin{aligned} a_1^+(k, k') &= \frac{2k'}{k+k'} - \frac{a}{i(k+k')} \frac{2iak'}{(k+k')^2 + a^2} = \\ &= \frac{2k'(k+k')}{(k+k')^2 + a^2} = \frac{4A\alpha^p + O(\alpha)}{4A\alpha^p + O(\alpha) + a^2} = 1 + O\left(\frac{1}{\alpha^{p-1}}\right), \end{aligned}$$

что доказывает первое утверждение теоремы, и

$$\begin{aligned} a_2^+(k, k') &= -\frac{a}{i(k+k')} \frac{2k'(k+k')}{(k+k')^2 + a^2} = \\ &= \frac{2iak'}{(k+k')^2 + a^2} = O\left(\frac{1}{\alpha^{p/2}}\right), \end{aligned}$$

что доказывает второе утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *Предположим, что $\lambda \in (-\alpha, \alpha)$. Тогда для всех достаточно больших α*

$$P_1^-(k, k') = 1 + O\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad P_2^-(k, k') = 0. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие соотношений (22) и (23) имеем $a_2^-(k, k') = 0$. Для доказательства первого из равенств (24) найдем

$$a_1^-(k, k') = \frac{k' - k}{k + k'} - \frac{a}{i(k + k')} \frac{2iak'}{(k + k')^2 + a^2}.$$

Далее,

$$|k + k'| = \sqrt{2\alpha}, \quad k' = O(\sqrt{\alpha}), \quad \left| \frac{k' - k}{k + k'} \right| = 1,$$

откуда вытекает первое равенство. Второе равенство является следствием равенства $a_2^-(k, k') = 0$. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] V. K. Dugaev, J. Barnaś, J. Berakdar, *J. Phys. A*, **36**:35 (2003), 9263–9274.
- [2] R. Sýkora, I. Turek, *Acta Phys. Polonica A*, **113**:1 (2008), 15–18.
- [3] N. García, M. Muñoz, Y.-W. Zhao, *Phys. Rev. Lett.*, **82**:14 (1999), 2923–2926.
- [4] H. D. Chopta, S. Z. Hua, *Phys. Rev. B*, **66**:2 (2002), 020403(R), 3 pp.
- [5] Ю. П. Чубурин, *ТМФ*, **120**:2 (1999), 277–290.
- [6] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 3: *Теория рассеяния*, Мир, М., 1982.

Поступила в редакцию 8.06.2010,
после доработки 30.08.2010