Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, Поляризация вакуума $(2+1)$ -мерной квантовой электродинамики с ненулевой плотностью фермионов внешним магнитным полем, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 1, 132–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf661>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 04:53:32

© 2000 г.

В. Р. Халилов*

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА $(2 + 1)$ -МЕРНОЙ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С НЕНУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ФЕРМИОНОВ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Построена функция Грина уравнения Дирака во внешнем постоянном и однородном магнитном поле в $(2 + 1)$ -мерной квантовой электродинамике ($КЭД_{2+1}$) с ненулевой плотностью фермионов. В однопетлевом приближении $КЭД_{2+1}$ получено выражение для поляризационного оператора во внешнем постоянном и однородном магнитном поле при ненулевом химическом потенциале. Вычислен вклад индуцированного члена Черна–Саймонса в поляризационный оператор и эффективный лагранжиан при плотности фермионов, соответствующей заполнению ими n релятивистских уровней Ландау во внешнем магнитном поле. Получено выражение для индуцированного члена Черна–Саймонса в магнитном поле при конечной температуре и ненулевом химическом потенциале.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительно возрос интерес к эффектам электродинамики в $(2 + 1)$ измерениях. Этот интерес стимулирован необходимостью изучения квантовых состояний электронов на границе раздела двух сред и целым рядом эффектов в физике конденсированных сред, указывающих на существование квантовых систем, которые хорошо описываются уравнением Дирака в $(2 + 1)$ измерениях [1]. Двумерные системы нерелятивистских заряженных фермионов, связанные с калибровочным электромагнитным полем и калибровочным полем Черна–Саймонса, также привлекают внимание в связи с их свойствами, позволяющими применять эти модели к изучению таких квантовых макроскопических явлений, как квантовый эффект Холла и высокотемпературная сверхпроводимость [2–5].

Свойства квантовых $(2 + 1)$ -мерных фермионов вызывают и чисто теоретический интерес в связи с теорией анионов – частиц, подчиняющихся дробной статистике в $(2 + 1)$ измерениях [6–8]. Проблемы неустойчивости непертурбативного вакуума и возникновения спонтанной намагниченности в $(2 + 1)$ -мерной квантовой электродинамике, индуцированной присутствием “затравочного” члена Черна–Саймонса, обсуждались в ра-

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: khalilov@thc.phys.msu.ru

боте [9]. Эффект рождения пар заряженных фермионов из вакуума сильным кулоновским полем протяженного источника в (2 + 1) измерениях рассмотрен в [10]. Некоторые аналитические решения уравнений Шредингера и Дирака во внешних кулоновском и магнитном полях в (2 + 1) измерениях, которые представимы в виде произведения весовой функции и конечного полинома, найдены в [11]. Показано, что такие аналитические решения и соответствующий им спектр энергий существуют при некоторых определенных соотношениях между параметрами, характеризующими интенсивность взаимодействия заряженного фермиона с кулоновским и магнитным полями, для бесчисленного множества значений напряженности магнитного поля. Такая квантово-механическая система представляет собой пример открытых недавно “квазитошно” решаемых моделей [12]. Значительный интерес могут представить эффекты, возникающие в присутствии постоянного однородного магнитного поля при конечной температуре [13].

Напомним, что радиационные эффекты определяют массовый оператор и уровни энергии электрона в рассматриваемом внешнем поле. Более того, свойства электромагнитных взаимодействий заряженных частиц во внешних электромагнитных полях с учетом радиационных поправок могут быть изучены с помощью поляризационного оператора. Впервые аналитические свойства поляризационного оператора во внешних постоянных электромагнитных полях различных конфигураций в однопетлевом приближении КЭД₃₊₁ были изучены в работах [14] и [15]. Интересные эффекты, обусловленные поляризацией вакуума КЭД₃₊₁ внешним нестационарным электромагнитным полем, изучались в [16]. Антисимметричная часть поляризационного оператора во внешнем постоянном однородном магнитном поле при ненулевой плотности фермионов в однопетлевом приближении КЭД₂₊₁ в пределе, когда 3-импульс фотона стремится к нулю, определяет общее выражение для электрической проводимости в КЭД₂₊₁ [17].

Значительную информацию о свойствах электромагнитных взаимодействий заряженных фермионов во внешних электромагнитных полях с учетом радиационных поправок можно получить с помощью эффективного лагранжиана [16, 18].

В данной работе изучается модель (2 + 1)-мерной квантовой электродинамики в аспекте физики конденсированных сред. А именно, рассматривается модель КЭД₂₊₁ с ненулевым химическим потенциалом μ в присутствии внешнего постоянного и однородного магнитного поля, описываемая лагранжианом

$$L = \bar{\psi}[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) + \gamma_0\mu - m]\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1)$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор электромагнитного поля, причем $A_\mu = A_\mu^{(e)} + A_\mu^{(q)}$, где $A_\mu^{(e)}$ – внешнее, $A_\mu^{(q)}$ – квантованное электромагнитные поля, а параметр m имеет смысл массы фермиона. Известно (см., например, [4]), что в (2 + 1) измерениях алгебра матриц Дирака может быть представлена с помощью матриц Паули. Мы выберем представление $\gamma^0 = \sigma_3$, $\gamma^k = i\sigma_k$. Метрический тензор пространства Минковского имеет вид $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$. Массовый член в модели (1) инвариантен относительно операций пространственной четности и обращения времени, поэтому член Черна–Саймонса вида [19]

$$L_{CS} = \frac{e^2 \text{sign } m}{16\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho \quad (2)$$

в эффективном лагранжиане Гайзенберга–Эйлера для рассматриваемой модели должен генерироваться в вакууме внешним полем “динамически”, несмотря на то что такой член отсутствует в “затравочном” лагранжиане (1). В формуле (2) $e^{\mu\nu\rho}$ есть полностью антисимметричный единичный псевдотензор 3-го ранга, у которого отличны от нуля лишь компоненты с тремя различными индексами. При перестановке любых двух индексов компоненты псевдотензора $e^{\mu\nu\rho}$ меняют знак, и мы полагаем, что $e^{012} = 1$.

В этой работе будет найдена функция Грина уравнения Дирака в присутствии внешнего постоянного магнитного поля в КЭД₂₊₁ с ненулевой плотностью фермионов. Используя построенную функцию Грина, мы получим выражение для поляризационного оператора во внешнем постоянном магнитном поле при ненулевом химическом потенциале в однопетлевом приближении КЭД₂₊₁. Мы вычислим вклад индуцированного члена Черна–Саймонса в поляризационный оператор и эффективный лагранжиан при плотности фермионов, соответствующей заполнению ими n релятивистских уровней Ландау во внешнем магнитном поле, а также получим выражение для индуцированного члена Черна–Саймонса при конечной температуре и при ненулевом химическом потенциале. Наконец, мы обсудим некоторые эффекты, обусловленные присутствием члена Черна–Саймонса в эффективном лагранжиане.

В статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$.

2. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Движение заряженного фермиона массы m и заряда e в $(2+1)$ измерениях во внешнем электромагнитном поле будем описывать уравнением Дирака, записанным в ковариантном виде

$$(\gamma^\mu P_\mu - m)\Psi = 0. \quad (3)$$

Здесь $P_\mu = p_\mu - eA_\mu \equiv (P_0, P_1, P_2)$ – оператор обобщенного импульса фермиона, $p_\mu = (i\partial_t, -i\partial_x, -i\partial_y) \equiv (p_0, p_1, p_2)$. Разумеется, вектор-потенциал A_μ описывает только внешнее магнитное поле. Вектор-потенциал магнитного поля выбран в калибровке Ландау $A_0 = A_1 = 0$, $A_2 = Bx$, а внешнее магнитное поле определено как $B = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$. Решение уравнения Дирака (3) можно найти методом собственных функций во внешнем электромагнитном поле, который был развит Ритусом в работе [18] для случая КЭД₃₊₁.

Введем матричную функцию E_p , удовлетворяющую уравнению с квадратованным оператором Дирака [18]:

$$(\gamma P)^2 E_p \equiv (P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - e\sigma_3 B) E_p = p^2 E_p, \quad (4)$$

где собственное значение p^2 – любое вещественное число. Функция E_p является также собственной функцией следующих операторов:

$$i\partial_t E_p = p_0 E_p, \quad -i\partial_y E_p = p_2 E_p, \quad (P_1^2 + P_2^2 - e\sigma_3 B) E_p = 2|eB|k E_p. \quad (5)$$

Эти операторы коммутируют с (γP) , а их собственные значения p_0 , p_2 и $2|eB|k$ нумеруют решения уравнения Дирака (3). Операторы (4) и (5) коммутируют с σ_3 , и поэтому

их собственные функции также различаются собственными значениями $\sigma = \pm 1$ оператора σ_3 .

Собственные функции $E_{p\sigma}(z)$ имеют вид

$$E_{p\sigma}(z) = \frac{|eB|^{\frac{1}{4}}}{(\pi)^{\frac{1}{4}}(n!)^{\frac{1}{2}}} e^{-ip_0t + ip_2y} D_n(\eta) w_\sigma, \quad (6)$$

где w_σ – собственные векторы матрицы σ_3 , $D_n(\eta)$ – функции параболического цилиндра с индексом $n = k + (\sigma/2) \text{sign}(eB) - 1/2$, $n = 0, 1, \dots$, и аргументом $\eta = \sqrt{2|eB|}(x - p_2/eB)$. Два спинора w_1 и w_{-1} образуют первый и второй столбцы единичной матрицы в пространстве γ -матриц, т.е. $w_\sigma(\alpha) = I_{\alpha\beta}$, если собственным значениям σ сопоставить номер столбца.

Матричные функции $E_p(z)$ ортогональны:

$$\int \bar{E}_{p'}(z) E_p(z) d^3z = \delta(p'_0 - p_0) \delta(p'_2 - p_2) \delta_{k'k}, \quad (7)$$

и удовлетворяют условию полноты

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int dp_0 dp_2 E_p(z) \bar{E}_p(z') = \delta(z - z'). \quad (8)$$

В формулах (7) и (8) $\bar{E}_p = \gamma^0 E_p^\dagger \gamma^0$, а $E_p^\dagger$ – эрмитово-сопряженная матричная функция.

Так как [18]

$$(\gamma P) E_p = E_p(\gamma \bar{p}), \quad (9)$$

то “3-вектор” $\bar{p}_\mu$ имеет компоненты

$$\bar{p}_\mu = (p_0, 0, \text{sign}(eB) \sqrt{2|eB|k}), \quad (10)$$

а $p^2 = \bar{p}^2$. Вектор $\bar{p}$ зависит только от “динамических” квантовых чисел p_0 и k .

Решение уравнения Дирака (3) можно получить, подействовав оператором $(\gamma P + m)$ на E_p -матрицу, взятую при $p^2 = m^2$,

$$\Psi_p(z) = (\gamma P + m) E_p = E_p(\gamma \bar{p} + m). \quad (11)$$

Решение имеет вид

$$\Psi_p(z) = E_p(z) u_{\bar{p}}, \quad (12)$$

где $u_{\bar{p}}$ – спинор, удовлетворяющий свободному уравнению Дирака

$$(\gamma \bar{p} - m) u_{\bar{p}} = 0, \quad (13)$$

а матрицу E_p следует взять при $p^2 = m^2$.

Спектр энергий и нормированные решения уравнения (13) имеют вид

$$\bar{p}_0 \equiv E_k = \sqrt{m^2 + 2|eB|k}, \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} u_{\bar{p}}^1 \\ u_{\bar{p}}^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_+^1 \\ u_+^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \begin{pmatrix} \sqrt{E_k + m} \\ -\text{sign}(eB) \sqrt{E_k - m} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Решения (12), (15), взятые с матрицами (6), представляют собой положительно-частотные решения уравнения Дирака.

Уравнение для спинора $u_{-\bar{p}}$, описывающее решения уравнения Дирака с отрицательными энергиями, можно получить из уравнения (13), заменив в последнем оператор $\bar{p}$ на $-\bar{p}$:

$$(\gamma\bar{p} + m)u_{-\bar{p}} = 0. \quad (16)$$

Нормированные решения уравнения (16) имеют вид

$$\begin{pmatrix} u_{-\bar{p}}^1 \\ u_{-\bar{p}}^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_-^1 \\ u_-^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_+^2 \\ u_+^1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Решения (12), (17) с комплексно-сопряженными матрицами (6) представляют решения уравнения Дирака с отрицательными частотами. Заметим, что отрицательно-частотные решения уравнения Дирака, описывающие античастицу, можно получить из решений (12) и (13) операцией зарядового сопряжения.

Найденные решения являются собственными функциями оператора $(\gamma P)^2 - P_0^2$:

$$[(\gamma P)^2 - P_0^2]\Psi_{p\sigma} = (|eB|(2k+1) + eB\sigma)\Psi_{p\sigma}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

и оператора $f = \sigma_3/2$:

$$f\Psi_{p\sigma} = \left(\frac{\sigma}{2}\right)\Psi_{p\sigma}, \quad \sigma = \pm 1.$$

Все уровни энергии, за исключением уровня с $k = 0$, $\sigma = -1$ (для $\text{sign}(eB) > 0$) и уровня с $k = 0$, $\sigma = +1$ (для $\text{sign}(eB) < 0$), двукратно вырождены: совпадают уровни с k , $\sigma = +1$ и $k+1$, $\sigma = -1$ (для $\text{sign}(eB) > 0$) и уровни с k , $\sigma = -1$ и $k+1$, $\sigma = +1$ (для $\text{sign}(eB) < 0$). Оператор $f = \sigma_3/2$ имеет смысл оператора фермионного числа в суперсимметричной модели квантовой механики [20]. Собственные функции гамильтониана уравнения Дирака не являются собственными функциями оператора σ_3 .

Состояния электрона в постоянном магнитном поле характеризуем положительно-частотными решениями уравнения Дирака

$$\Psi^+(t, \mathbf{x}) = \exp(-iE_n^+ t)\psi_n^+(\mathbf{x}) \equiv \exp(-iE_n^+ t + ip_2 y) \begin{pmatrix} \psi_+^1(x) \\ \psi_+^2(x) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

соответствующими собственному значению энергии (уровень Ландау) $E_n^+ = E_n \equiv \sqrt{m^2 + 2n|eH|}$. Две компоненты зависящего от x спинора $\psi(x)$, найденные выше, приведем в явном виде:

$$\begin{pmatrix} \psi_+^1(x) \\ \psi_+^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_+^1(n)U_n(\eta) \\ u_+^2(n)U_{n-1}(\eta) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Здесь $u_+^1(n)$, $u_+^2(n)$ определяются формулой (15), в которой индекс k следует заменить индексом n . Нормированные функции

$$U_n(\eta) = \frac{|eB|^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \pi^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) H_n\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)$$

выражены через полиномы Эрмита $H_n(\eta/\sqrt{2})$ с использованием формулы [21]

$$D_n(z) = 2^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

Нормированные решения уравнения Дирака, относящиеся к отрицательным энергиям ($E_n^- = -E_n$), можно получить из положительно-частотных решений операцией зарядового сопряжения:

$$\Psi^-(t, \mathbf{x}) = \exp(iE_n^- t) \psi_n^-(\mathbf{x}) \equiv \exp(iE_n^- t - ip_2 y) \begin{pmatrix} \psi_-^1(x) \\ \psi_-^2(x) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где

$$\begin{pmatrix} \psi_-^1(x) \\ \psi_-^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_-^1(n) U_{n-1}(\eta) \\ u_-^2(n) U_n(\eta) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

а $u_-^1(n)$, $u_-^2(n)$ определяются формулами (17), (15), где индекс k нужно заменить индексом n .

Выражения для операторов поля фермионов в схеме вторичного квантования можно записать в виде следующих разложений:

$$\psi = \sum_n [a_n \psi_n^+ \exp(-iE_n^+ t) + b_n^+ \psi_n^- \exp(iE_n^- t)], \quad (23)$$

$$\bar{\psi} = \sum_n [a_n^+ \bar{\psi}_n^+ \exp(iE_n^+ t) + b_n \bar{\psi}_n^- \exp(-iE_n^- t)]. \quad (24)$$

Здесь $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, а $\psi^\dagger$ – эрмитово-сопряженный спинор. Операторы уничтожения фермионов a_n , как и операторы уничтожения антифермионов b_n , стоят в виде коэффициентов при найденных нормированных решениях одночастичного уравнения Дирака. Операторы поля фермионов удовлетворяют стандартным антикоммутиационным соотношениям.

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА ФЕРМИОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Функция Грина уравнения Дирака в постоянном магнитном поле имеет особенно простой вид в E_p -представлении:

$$S_F(p) = \frac{1}{\gamma p - m + i\delta_e} \equiv \frac{\gamma p + m}{p^2 - m^2 + i\delta_e}. \quad (25)$$

Здесь согласно правилу Фейнмана введен “причинный” фактор $i\delta_e$ ($\delta_e > 0$), смещающий полюсы $p_0 = \pm E_k \equiv \pm \sqrt{m^2 + 2|eB|k}$ с вещественной оси p_0 .

Функция Грина уравнения Дирака в так называемом собственно временном представлении [22, 23] была найдена в [24]:

$$\begin{aligned} S^c(z, z') = & -\frac{i^{\frac{1}{2}} eB}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{ds}{s^{\frac{1}{2}} \sin \alpha} \exp \left[-i(m^2 - i\delta_e)s - \frac{i(t-t')^2}{4s} + \right. \\ & + \frac{i\alpha((x-x')^2 + (y-y')^2)}{4s \operatorname{tg} \alpha} + \frac{ieB(x+x')(y-y')}{2} \left. \right] \times \\ & \times \left[\left(\frac{\gamma^0(t-t')}{2s} + m \right) e^{i\sigma_3 \alpha} - \frac{\alpha[\gamma^1(x-x') + \gamma^2(y-y')]}{2s \sin \alpha} \right], \quad (26) \end{aligned}$$

где $\alpha = eBs$.

Для построения функции Грина уравнения Дирака при ненулевой плотности фермионов необходимо предварительно найти функцию Грина в импульсном представлении. Для этого, выполняя интегрирование по времени и координатам в (26) с использованием интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{it^2}{4s} - ip_0 t} dt = \sqrt{-2i\pi s} e^{is p_0^2}, \quad (27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha \operatorname{ctg} \alpha (\frac{z^2}{4s}) + ip_1 z} dz = \sqrt{\frac{2i\pi s}{\alpha \operatorname{ctg} \alpha}} e^{-\frac{is p_1^2 \operatorname{tg} \alpha}{\alpha}}, \quad (28)$$

получим

$$S^c(p) = -\frac{i}{|eB|} \int_0^\infty \frac{dx}{\cos x} \exp \left[\frac{ix}{|eB|} \left(p_0^2 - m^2 + i\delta_e - \mathbf{p}^2 \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) \right] \times \\ \times \left[(\gamma^0 p^0 + m) e^{i\sigma_3 x} - \frac{(\gamma^1 p^1 + \gamma^2 p^2)}{\cos x} \right], \quad (29)$$

где мы положили $x \equiv |eB|s$. В выражении (29) сдвинем переменную p_0 следующим образом $p_0 \rightarrow p_0 + \mu + i \operatorname{sign}(p_0)\epsilon$, где μ – химический потенциал [25]. Случаю заполнения релятивистских уровней Ландау в магнитном поле реальными частицами соответствуют значения $\mu > m$. Если $\mu < m$, то реальных частиц нет. Далее без ограничения общности рассмотрения мы будем подразумевать, что $\mu > 0$.

Окончательное выражение для функции Грина уравнения Дирака при ненулевой плотности фермионов принимает вид

$$S^c(p^0, \mathbf{p}, \mu) = -\frac{i}{|eB|} \int_0^\infty \frac{dx}{\cos x} \exp \left[\frac{ix}{|eB|} \left((p_0 + \mu + i \operatorname{sign}(p_0)\epsilon)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - m^2 + i\delta_e - \mathbf{p}^2 \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) \right] \times \\ \times \left[(\gamma^0 (p^0 + \mu) + m) e^{i\sigma_3 x} - \frac{(\gamma^1 p^1 + \gamma^2 p^2)}{\cos x} \right]. \quad (30)$$

Заметим, что особенности подынтегрального выражения в (30) обходятся снизу. В физических задачах при различных интегрированиях с участием функции Грина наличие бесконечно малой мнимой части $i \operatorname{sign}(p_0)\epsilon$ существенно вблизи полюсов, когда $p_0 = \pm E_n - \mu$ [25], поэтому $\operatorname{sign} p_0$ в функции Грина можно заменить на $\operatorname{sign}(\pm E_n - \mu)$. В таком виде функция Грина оказывается единой аналитической функцией во всей плоскости комплексной переменной p_0 [25].

Свойства функции Грина (30) с химическим потенциалом μ в импульсном представлении состоят в том, что, во-первых, ее полюсы могут лежать только в точках $p_0 = \pm E_n - \mu$, где E_n – дискретные уровни Ландау, и, во-вторых, что она имеет мнимую часть, обусловленную присутствием реальных фермионов. Как функция переменной p_0 она является предельным значением некоторой аналитической функции $S(p_0)$. Действительно, поворачивая контур интегрирования по x в интеграле (30) в нижнюю полуплоскость,

можно распространить $S^c(p^0, \mathbf{p}, \mu) \equiv S(p^0)$ на всю плоскость комплексной переменной p_0 с разрезами $[p_+, \infty)$, $[-p_-, -\infty)$ на действительной оси. Если обозначить через $S(x)$ подынтегральное выражение в (30), то значения $S(p^0)$ на физическом и нефизическом берегах разрывов определяются как $\int_0^\infty S(x) dx$ и $\int_0^{-\infty} S(x) dx$, соответственно. Тогда скачки на разрывах ΔS равны

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x) dx. \quad (31)$$

Представим мнимую часть функции Грина (скачки ΔS) в виде суммы вкладов состояний реальных фермионов, которые заполняют уровни Ландау при ненулевой плотности фермионов. Подобный прием использовался для вычисления скачков поляризационного оператора в КЭД₃₊₁ в постоянном однородном магнитном поле в [26] и в случае суперпозиции постоянного магнитного поля и поля плоской электромагнитной волны в [27].

Введем векторы

$$P^0 = \bar{p}_0 \cos x + i m \sin x \equiv \frac{1}{2}(\bar{p}_0 + m)e^{ix} + \frac{1}{2}(\bar{p}_0 - m)e^{-ix}, \quad (32)$$

$$M = m \cos x + i \bar{p}_0 \sin x \equiv \frac{1}{2}(\bar{p}_0 + m)e^{ix} - \frac{1}{2}(\bar{p}_0 - m)e^{-ix}, \quad (33)$$

где мы обозначили $\bar{p}_0 \equiv p_0 + \mu$.

С учетом этих обозначений функция Грина (30) примет вид

$$S^c(\bar{p}_0, \mathbf{p}, m) = -\frac{i}{|eB|} \int_0^\infty \frac{dx}{\cos x} [(\gamma P) + M] \times \\ \times \exp \left[\frac{ix}{|eB|} \left((\bar{p}_0 + i \operatorname{sign}(\bar{p}_0)\epsilon)^2 - m^2 + i\delta_e - \mathbf{p}^2 \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) \right], \quad (34)$$

здесь $\mathbf{P} = -\mathbf{p}/\cos x$.

Процедуру нахождения искомого представления покажем на примере интеграла

$$J = -\frac{i}{|eB|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cos x} \exp \left[\frac{ix}{|eB|} \left((p_0 + \mu)^2 - m^2 - \mathbf{p}^2 \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) \right]. \quad (35)$$

Для этого разложим экспоненту в (35) в ряд по степеням

$$-i \frac{\mathbf{p}^2}{|eB|} \operatorname{tg} x \equiv -iz \operatorname{tg} x$$

и представим тригонометрические функции в числителе в виде экспонент. Тогда получим

$$J = -\frac{i}{|eB|} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cos^{l+1} x} \sum_{k=0}^l \frac{(-z)^l (-1)^k}{2^l (l-k)! k!} \exp[ix(l-2k-A)], \quad (36)$$

где

$$A = \frac{m^2 - (p_0 + \mu)^2}{|eB|}.$$

Если не выполняется условие

$$R \equiv -2k - A - 1 \geq 0, \quad (37)$$

то контур интегрирования в (36) можно дополнить дугой бесконечного радиуса в нижней полуплоскости, интеграл по которой равен нулю. Так как в нижней полуплоскости подынтегральное выражение (36) не имеет особенностей, то члены с данными k не дадут вклада в интеграл.

Если неравенство (37) выполняется, то контур интегрирования в (36) замыкается дугой бесконечного радиуса в верхней полуплоскости, и мы получаем вклад, определяемый суммой вычетов в точках $x = \pi(2r - 1)/2$:

$$\begin{aligned} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \oint_{C_r} \frac{dx}{\cos^{l+1} x} e^{ix(B+l+1)} = \\ = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (-1)^{r(l+1)} e^{i\pi(R+l+1)(r-\frac{1}{2})} \oint_{C_0} \frac{dx}{\sin^{l+1} x} e^{ix(R+l+1)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Интегрирование по x сводится к интегрированию по замкнутому контуру малого радиуса, охватывающему точку $x = 0$. Сумму по r можно преобразовать к виду

$$2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(R - 2r),$$

а из неравенства (37) следует, что индекс суммирования положителен, т.е. $r \geq 0$.

Учитывая значение интеграла

$$\oint_{C_0} \frac{\sin^{l+1} x}{e^{ix(2r+l+1)}} dx = \pi(2i)^{l+1} \frac{(r+l)!}{r!l!},$$

после простых преобразований находим

$$J = -\frac{4i\pi}{|eB|} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-z)^l (-1)^{r+k} (r+l)!}{r!l!(l-k)!k!} \delta(R - 2r). \quad (39)$$

Так как в аргумент δ -функции индексы r и k входят в виде суммы, введем новый индекс $n = r + k$ и изменим порядок суммирования в (39). Суммирование по r, l приводит к соотношению

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \frac{(-z)^l (-1)^{r+k} (r+l)!}{r!l!(l-k)!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{nn}(2z). \quad (40)$$

Здесь $I_{nk}(2z)$ — функция Лагерра аргумента $2z$,

$$I_{nk}(2z) = (n!k!)^{-\frac{1}{2}} \exp(-z) (2z)^{\frac{n-k}{2}} L_k^{n-k}(2z), \quad (41)$$

где $L_s^k(2z)$ — обобщенный полином Лагерра, который в приведенном примере (так как $k = 0$) сводится к простому полиному Лагерра. Следовательно,

$$J = -\frac{4i\pi}{|eB|} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{nn}(2z) \delta(R(k \rightarrow n)), \quad (42)$$

при этом аргумент δ -функции имеет вид

$$R(k \rightarrow n) = -2n - \frac{m^2 - (p_0 + \mu)^2}{|eB|} - 1. \quad (43)$$

Так преобразуются члены в ΔS с P^0 и M , однако, как следует из (32), аргументы δ -функций в этих выражениях будут отличаться от (43) на ± 1 , а именно,

$$R(k \rightarrow n) = -2n - \frac{m^2 - (p_0 + \mu)^2}{|eB|} - 1 \pm 1. \quad (44)$$

Аналогично преобразуется и член в ΔS с $\mathbf{P}$, только на последнем этапе вычислений при суммировании по r, l используется формула

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l \frac{(-z)^l (-1)^k (r+l+1)!}{r!(l+1)!(l-k)!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-z} L_n^1(0). \quad (45)$$

Этот член будет содержать δ -функцию аргумента (43). В результате получим следующее выражение для функции Грина уравнения Дирака при ненулевой плотности фермионов:

$$S^c(\bar{p}_0, \mathbf{p}, m) \equiv S_v(p) + S_p(p) = -\frac{i}{|eB|} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\cos x} [(\gamma P) + M] \times \\ \times \exp \left[\frac{ix}{|eB|} \left((\bar{p}_0 + i \operatorname{sign}(\bar{p}_0) \epsilon)^2 - m^2 + i \delta_\epsilon - \mathbf{p}^2 \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) \right] - 2i\pi[(\gamma \bar{P}) + \bar{M}], \quad (46)$$

где

$$\bar{P}^0 = (\bar{p}_0 + m) \delta(\bar{p}_0^2 - m^2) \exp \left(-\frac{\mathbf{p}^2}{|eB|} \right) + \\ + 2m \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{nn} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{|eB|} \right) \delta(\bar{p}_0^2 - m^2 - 2n|eB|), \quad (47)$$

$$\bar{M} = (\bar{p}_0 + m) \delta(\bar{p}_0^2 - m^2) \exp \left(-\frac{\mathbf{p}^2}{|eB|} \right) + \\ + 2\bar{p}_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{nn} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{|eB|} \right) \delta(\bar{p}_0^2 - m^2 - 2n|eB|). \quad (48)$$

Члены, пропорциональные $\mathbf{P}$, содержат δ -функцию аргумента (43). В рассматриваемой нами задаче при интегрировании с участием функции Грина их вклад равен нулю, поэтому мы их не приводим.

Представление (46) удобно для изучения вопроса о локализации особенностей функции Грина по переменной p_0 . В частности, видно, что полюсы функции Грина по переменной p_0 лежат в точках $p^0 = \pm E_n - \mu$, где E_n — дискретные уровни Ландау

$$p_0 + \mu = \pm \sqrt{m^2 + 2n|eB|}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (49)$$

4. ТЕНЗОРНАЯ СТРУКТУРА ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ОПЕРАТОРА В КЭД₂₊₁

Поляризационный оператор (ПО) в постоянном и однородном внешнем поле диагонален по 3-импульсу фотона. В импульсном представлении он определяется формулой

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \text{tr}[\gamma^\mu S^c(p+k, \mu, B) \gamma^\nu S^c(p, \mu, B)]. \quad (50)$$

Информацию о свойствах ПО, его тензорной структуре, а также о свойствах связанной с ПО так называемой полной функции Грина фотона $D^{\mu\nu}(p, q)$ можно получить исходя из ограничений, накладываемых требованиями релятивистской и калибровочной инвариантности теории, а также симметрией внешнего поля. Так, из релятивистской инвариантности следует, что ПО и функция Грина $D^{\mu\nu}(p, q)$ могут зависеть только от скаляров. Такие скаляры конструируются в результате различных сверток 3-импульсов “фотона” p, q и тензора внешнего поля. В постоянном и однородном магнитном поле ПО диагонален по 3-импульсу “фотона”, поэтому $p = q$, и, следовательно, можно построить всего 3 независимых скаляра:

$$p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2, \quad s = p_\mu F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} p^\rho \equiv B^2(p_1^2 + p_2^2), \quad g = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \equiv B^2. \quad (51)$$

Таким образом, в постоянном и однородном магнитном поле ПО (50) является функцией трех инвариантов (51).

Введем ортонормированную систему 3-векторов l_i^μ [15],

$$\begin{aligned} l_1^\mu &= \frac{F^{\mu\nu} p_\nu}{\sqrt{s}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p}^2}}(0, -p_2, p_1), \\ l_2^\mu &= e^{\mu\nu\rho} l_{0,\nu} l_{1,\rho} \equiv \frac{1}{\sqrt{p^2 \mathbf{p}^2}}(\mathbf{p}^2, p_0 p_1, p_0 p_2), \\ l_3^\mu &= \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{p^2}}(p_0, p_1, p_2), \end{aligned} \quad (52)$$

где $\mathbf{p}^2 = p_1^2 + p_2^2$, а $e^{\mu\nu\rho}$ — полностью антисимметричный единичный псевдотензор 3-го ранга. Легко проверить, что

$$g_{\mu\nu} l_i^\mu l_k^\nu = g_{ik}, \quad \sum_{i,k} g^{ik} l_i^\mu l_k^\nu = g^{\mu\nu}, \quad (53)$$

где $g^{\mu\nu}$ — тензор Минковского, а у тензора g^{ij} отличные от нуля диагональные компоненты суть $g^{11} = g^{22} = -g^{33} = -1$. Вообще говоря, векторы l_i^μ , $i = 1, 2$, не являются собственными векторами ПО, однако именно эти векторы образуют его тензорную структуру в однородном магнитном поле в КЭД₂₊₁. Собственное значение ПО, соответствующее собственному вектору l_3^μ , равно нулю, что является следствием калибровочной инвариантности,

$$p_\mu \Pi^{\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu} p_\nu = 0. \quad (54)$$

В КЭД₂₊₁ ПО (50) можно представить в виде разложения

$$\Pi^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \Pi_0 + \mathbf{p}^2 \Pi_1 l_1^\mu l_1^\nu + i(l_1^\mu l_2^\nu - l_2^\mu l_1^\nu) C, \quad (55)$$

где Π_0, Π_1, C – скалярные функции, зависящие от инвариантов (51). Последний член в (55) есть так называемый индуцированный член Черна–Саймонса [19]. ПО можно представить в полностью поперечном виде

$$\Pi^{\mu\nu} = \pi_1 l_1^\mu l_1^\nu + \pi_2 l_2^\mu l_2^\nu + i(l_1^\mu l_2^\nu - l_2^\mu l_1^\nu) C, \quad (56)$$

если учесть, что

$$-\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) = \sum_{i=1,2} l_i^\mu l_i^\nu. \quad (57)$$

В выражении (56) π_1, π_2 – скалярные функции, определяемые функциями Π_0, Π_1 . Следует подчеркнуть, что в отличие от случая КЭД₃₊₁ ПО (56) в КЭД₂₊₁ не симметричен по индексам μ, ν .

В КЭД₃₊₁ собственные векторы ПО описывают поляризацию электромагнитных волн с импульсом p^μ во внешнем поле. Отметим, что если $p^2 > 0$, то векторы l_i^μ ($i = 1, 2$) пространственноподобны, т.е. $(l_1^\mu)^2 < 0, (l_2^\mu)^2 < 0$. Если же $p^2 = 0$, то вектор l_1^μ остается пространственноподобным, а $l_2^\mu \rightarrow p^\mu / \sqrt{p^2}$, так что “второй моды” в этом пределе не существует. Собственные векторы ПО в КЭД₂₊₁ можно построить по аналогии со случаем КЭД₃₊₁. Уравнения Максвелла для векторного потенциала электромагнитных волн (элементарных возбуждений) $A^\mu(p)$ с волновым вектором p^μ , распространяющихся в некоторой эффективной среде (во внешнем поле), в линейном приближении

$$p^2 A^\mu(p) = - \int d^3 q \Pi^{\mu\nu}(p, q, B) A_\nu(q) \quad (58)$$

должны иметь решения вида

$$A^\mu(p) = \sum_{k=1,2} e_k^\mu(p) \delta(p^2 + \chi_k(p)). \quad (59)$$

Мы учли свойство диагональности ПО в постоянном и однородном внешнем поле по 3-импульсу “фотона”.

Подставляя (56) в (58), получаем уравнение для определения собственных векторов ПО

$$[\pi_1 l_1^\mu l_1^\nu + \pi_2 l_2^\mu l_2^\nu + i(l_1^\mu l_2^\nu - l_2^\mu l_1^\nu) C] e_{\nu k}(p) = \chi_k(p) e_k^\mu(p). \quad (60)$$

Решение уравнения (60) ищем в виде

$$e_k^\mu(p) = a_k l_1^\mu + i b_k l_2^\mu, \quad (61)$$

где $a_k(p), b_k(p)$ – амплитуды “собственных волн”. В результате получим систему уравнений для определения коэффициентов a_k, b_k

$$\begin{aligned} (\chi_k + \pi_1) a_k - C b_k &= 0, \\ -C a_k + (\chi_k + \pi_2) b_k &= 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Введенные выше “правые” собственные векторы ПО нормированы следующим образом:

$$e_k^{\mu*}(p)e_{j\mu}(p) = -\delta_{kj}. \quad (63)$$

Векторы $e_k^{\mu*}(p)$ являются “левыми” собственными векторами ПО. Учитывая условие нормировки (63), находим

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}}, \quad b_k = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}, \quad (64)$$

где $f = C/(\chi_k + \pi_2)$. Собственные значения χ_k находятся из условия обращения в нуль детерминанта системы уравнений (62):

$$(\chi_k + \pi_1)(\chi_k + \pi_2) = C^2. \quad (65)$$

Если нас интересуют решения уравнений Максвелла, то, учитывая, что из (59) следует условие на собственные значения ПО в виде $\chi_k = p^2$, из (65) получим уравнение дисперсии “фотона”

$$(p^2 + \pi_1)(p^2 + \pi_2) - C^2 = 0. \quad (66)$$

Дальнейший анализ свойств ПО в постоянном и однородном магнитном поле можно провести, вычислив функции π_1 , π_2 , C . Приведем только схему вычислений.

5. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР В КЭД₂₊₁ С НЕНУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ФЕРМИОНОВ

В однопетлевом приближении КЭД₂₊₁ искомым ПО в постоянном и однородном магнитном поле удобно записать в виде двух слагаемых, описывающих вклады в ПО виртуальных (вклад вакуума) и реальных (вклад частиц) фермионов:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) &= ie^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{tr}[\gamma^\mu S^c(q+p, \mu, B) \gamma^\nu S^c(q, \mu, B)] = \\ &= ie^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{tr}[\gamma^\mu S_v(q+p, B) \gamma^\nu S_v(q, B)] + \\ &\quad + ie^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{tr}[\gamma^\mu S_v(q+p, \mu, B) \gamma^\nu S_p(q, \mu, B) + \\ &\quad + \gamma^\mu S_p(q+p, \mu, B) \gamma^\nu S_v(q, \mu, B)]. \end{aligned} \quad (67)$$

Первое слагаемое правой части последнего равенства формулы (67) дает вклад вакуума в ПО, члены второго слагаемого дают вклады, связанные с присутствием реальных фермионов.

Рассмотрим вначале вакуумную часть ПО. Учтем следующие легко проверяемые соотношения:

$$\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu}, \quad \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] = -2ie^{\mu\nu\rho}, \quad \text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\epsilon \gamma^\nu] = 2e^{\mu\rho\sigma} e_\sigma^{\epsilon\nu}, \quad (68)$$

$$e^{\mu\rho\sigma} e_\sigma^{\epsilon\nu} = g^{\mu\epsilon} g^{\rho\nu} - g^{\mu\nu} g^{\rho\epsilon}. \quad (69)$$

Вместо переменных x_1 и x_2 , от которых зависят вакуумные части функций Грина (34), удобно ввести переменные

$$x = x_1 + x_2, \quad v = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x}, \quad (70)$$

области изменения которых суть $0 \leq x < \infty$ и $-1 \leq v \leq 1$.

В результате вычислений мы представили вакуумную часть ПО в следующем (полностью поперечном) виде:

$$\begin{aligned} \Pi_V^{\mu\nu}(p, B) = & \frac{i^{\frac{1}{2}} e^2}{16\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{|eB|}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{\sin x} \int_{-1}^1 dv \left[\pi_1 l_1^\mu l_1^\nu + \pi_2 l_2^\mu l_2^\nu - i e^{\mu\nu\rho} p_\rho C' \right] \times \\ & \times \exp \left[\frac{ix}{|eB|} \left(\frac{p_0^2(1-v^2)}{4} - \frac{\mathbf{p}^2 \sin(\frac{x}{2}(1+v)) \sin(\frac{x}{2}(1-v))}{x \sin x} - m^2 + i\epsilon \right) \right], \end{aligned} \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} \pi_1 = & p_0^2 (\cos(vx) - v \operatorname{ctg} x \sin(vx)) - \\ & - \mathbf{p}^2 \frac{1}{\sin^2 x} [v \sin(2vx) \sin x - 2 \cos(vx) + \cos x (1 + \cos(2vx))], \end{aligned} \quad (72)$$

$$\pi_2 = p^2 (\cos(vx) - v \operatorname{ctg} x \sin(vx)), \quad (73)$$

$$C' = 2m \cos(vx). \quad (74)$$

При получении формулы (71) в новом виде мы использовали соотношение

$$l_1^\mu l_2^\nu - l_2^\mu l_1^\nu = -\frac{e^{\mu\nu\rho} p_\rho}{\sqrt{p^2}}. \quad (75)$$

Из формул (71)–(74) видно, что вакуумную часть ПО в постоянном и однородном магнитном поле можно рассматривать как функцию p_0^2 , $\mathbf{p}^2$ и безразмерного параметра $\kappa = e\hbar B/m^2 c^3$, в который входят заряд фермиона, внешнее поле и постоянная Планка. Из (71) видно также, что ПО неаналитичен по параметру κ . Отметим, что неаналитичность ПО по заряду, внешнему полю и постоянной Планка проявляется одновременно. Неаналитичность в выражениях для вероятностей различных квантовых процессов по заряду в присутствии внешних постоянных электромагнитных полей была исследована в ряде статей Ритуса (см. [18] и цитируемую там литературу).

Из (71) нетрудно получить выражение для ПО в КЭД₂₊₁ в отсутствие внешнего магнитного поля, т.е. в пределе $eB \rightarrow 0$. В этом пределе основной вклад в интеграл по переменной x дает область малых значений x , так что все тригонометрические функции подынтегрального выражения ПО можно разложить в ряды, сохранив только основные члены. В итоге мы получим

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) = & \frac{i^{\frac{1}{2}} e^2}{16\pi^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_{-1}^1 dv [(1-v^2)(g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) - 2im e^{\mu\nu\rho} p_\rho] \times \\ & \times \exp \left[is \left(\frac{p^2(1-v^2)}{4} - m^2 + i\epsilon \right) \right]. \end{aligned} \quad (76)$$

ПО в отсутствие внешних полей является функцией только одного скаляра p^2 . Обозначив переменную p^2/m^2 через t , можно аналогично случаю КЭД₃₊₁ изучить аналитические свойства ПО в плоскости комплексного t . В частности, из (76) видно, что на отрицательной вещественной полуоси ПО является вещественной функцией, а особые точки этой функции лежат на положительной вещественной полуоси переменной t при значениях, являющихся пороговыми для рождения виртуальным “фотоном” различных совокупностей реальных частиц. Точка $t = 4$ является пороговой для рождения пары фермионов (частицы и античастицы); области $t < 0$ и $t > 4$ являются физическими областями, а область $0 \leq t \leq 4$ — нефизической.

Интегрирование в формуле (76) легко выполнить, считая $t < 0$ (тогда мнимую добавку в показателе экспоненты подынтегрального выражения можно опустить). Окончательное выражение для ПО в отсутствие магнитного поля можно представить в виде

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{8\pi|m|} \left\{ (g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu) \left[\frac{2}{\sqrt{-t}} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{t} \right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-t}}{2} + \frac{1}{\sqrt{-t}} \right] - \right. \\ \left. - ime^{\mu\nu\rho} p_\rho \frac{4}{\sqrt{-t}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-t}}{2} \right\}, \quad (77)$$

где $t = p^2/m^2$. Для получения выражения ПО, справедливого во всей области значений переменной t , формулу (77) можно аналитически продолжить. При этом удобно ввести новую переменную z , определив ее [28] как $t = -(1-z)^2/z$.

Рассмотрим теперь члены во втором слагаемом правой части последнего равенства формулы (67). Эти члены описывают вклад реальных фермионов в ПО. Во втором члене этого слагаемого заменим q на $q - p$ и преобразуем его к виду

$$ie^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \operatorname{tr} [\gamma^\mu S_v(q+p, \mu, B) \gamma^\nu S_p(q, \mu, B) + \gamma^\mu S_p(q, \mu, B) \gamma^\nu S_v(q-p, \mu, B)]. \quad (78)$$

На примере типичных интегралов в формуле (78) поясним, как выполнить интегрирование по $\mathbf{q}$.

Имеем интеграл

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \exp \left[\frac{ix}{b} \left((\bar{q}_0 \pm p_0)^2 - m^2 - (\mathbf{q} \pm \mathbf{p})^2 \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) \right] I_{nn} \left(\frac{\mathbf{q}^2}{b} \right) \delta(\bar{q}_0^2 - m^2 - 2nb), \quad (79)$$

где мы обозначили $b = |eB|$, а знаки $\pm$ в показателе экспоненты появляются при интегрировании первого и второго членов формулы (78), соответственно. Преобразуем интегралы, содержащие двумерные векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$,

$$\int d\mathbf{q} \exp[-i(\mathbf{q} \pm \mathbf{p})^2 b^{-1} \operatorname{tg} x] I_{nn} \left(\frac{\mathbf{q}^2}{b} \right) = \\ = \int d\mathbf{q} \exp[-i(\mathbf{q}^2 \pm 2\mathbf{q}\mathbf{p} + \mathbf{p}^2) b^{-1} \operatorname{tg} x] I_{nn} \left(\frac{\mathbf{q}^2}{b} \right). \quad (80)$$

Вычисление проводим в полярных координатах. Учтем соотношение [29]

$$\exp[\mp(i2qpb^{-1} \operatorname{tg} x) \cos \vartheta] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\mp i)^l J_l(qy) \exp[\mp(i\vartheta)], \quad (81)$$

где ϑ – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, $J_l(z)$ – функция Бесселя целого индекса l и мы обозначили $y = 2p \operatorname{tg} x / b$. Направив полярную ось вектора $\mathbf{q}$ по вектору $\mathbf{p}$, в результате интегрирования по полярному углу вектора $\mathbf{q}$ получим $2\pi\delta_{l0}$. Суммируя по l , найдем $J_0(qy)$. Интегрирование по модулю вектора $\mathbf{q}$ выполним с помощью формулы [29]

$$\int_0^\infty dz z e^{-\frac{az^2}{2}} J_0(zy) L_n\left(\frac{cz^2}{2}\right) = \frac{(a-c)^n}{a^{n+1}} e^{-\frac{y^2}{2a}} L_n\left(\frac{cy^2}{2a(c-a)}\right). \quad (82)$$

Вводя переменную $z = q/\sqrt{b}$ и учитывая, что в нашем случае $a = 2(1 + i \operatorname{tg} x) = 2e^{ix}/\cos x$, $c - a = 2e^{-ix}/\cos x$, получим

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{q} \exp[-i(\mathbf{q}^2 \pm 2\mathbf{q}\mathbf{p} + \mathbf{p}^2)b^{-1} \operatorname{tg} x] I_{nn}\left(\frac{\mathbf{q}^2}{b}\right) = \\ = \pi b (-1)^n \exp\left\{-2ix\left(n + \frac{1}{2}\right)\right\} \times \\ \times \exp\left\{-\mathbf{p}^2 \frac{(1 - \cos 2x + i \sin 2x)}{2b}\right\} \cos x L_n\left(\frac{2\mathbf{p}^2 \sin^2 x}{b}\right). \end{aligned} \quad (83)$$

Интегрирование по q_0 проводится с помощью δ -функций. Заметим, что согласно замечанию, сделанному в разделе 3 (после формулы (48)), вклад дают только члены, содержащие $\bar{P}_0$ и $\bar{M}$, которые определены формулами (47) и (48). После интегрирования по $\mathbf{q}$ типичные интегралы по q_0 принимают вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{P}^0}{\bar{M}}\right) = \pi \cos x \exp\left\{-\frac{\mathbf{p}^2(1 - \cos 2x + i \sin 2x)}{2b}\right\} \int dq_0 \exp\left\{\frac{ix[(p_0 \pm \bar{q}_0)^2 - m^2 + i\epsilon]}{b}\right\} \times \\ \times \left[\left(\frac{1}{1}\right) (\bar{q}_0 + m) \delta\left(\frac{\bar{q}_0^2 - m^2}{b}\right) e^{-ix} + \right. \\ \left. + 2\left(\frac{m}{\bar{q}_0}\right) \sum_{n=1}^\infty e^{-2ix(n+\frac{1}{2})} L_n\left(\frac{2\mathbf{p}^2 \sin^2 x}{b}\right) \delta\left(\frac{\bar{q}_0^2 - m^2 - 2n|eB|}{b}\right)\right]. \end{aligned} \quad (84)$$

Здесь верхний знак в показателе экспоненты относится к первому члену формулы (78), а нижний – ко второму.

После интегрирования по q_0 экспоненты подынтегрального выражения принимают вид

$$\exp\left\{\frac{ix(p_0^2 \pm 2p_0 E_n - b)}{b} - \frac{\mathbf{p}^2(1 - \cos 2x + i \sin 2x)}{2b} - \epsilon x\right\}, \quad (85)$$

где $E_n = \sqrt{m^2 + 2|eB|n}$ – релятивистские уровни энергии частиц в однородном магнитном поле (уровни Ландау). Мы предполагаем, что $\mu > m$. Это соответствует случаю, когда уровни Ландау заполнены частицами, а реальные античастицы отсутствуют. Следовательно, дельта-функции существенны только в том случае, когда $\mu > m$, что дает ограничение на индекс суммирования и фактически оставляет только один член ряда по n . Предполагается также, что $\mu \neq m, E_n$. Это означает, что среди n уровней Ландау нет уровней, заполненных частично. Все n уровней Ландау заполнены полностью.

В результате вычислений выражение для части ПО, вклад в которую дают реальные частицы, можно получить в виде

$$\Pi_p^{\mu\nu}(p, B) = \frac{e^2}{2\pi} \int_0^\infty dx \left[\pi_p p^2 l_2^\mu l_2^\nu + i e^{\mu\nu\rho} p_\rho m C_p \right] \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i x p_0^2}{b} - i x - \frac{\mathbf{p}^2 (1 - \cos 2x + i \sin 2x)}{2b} - \epsilon x \right\}, \quad (86)$$

где

$$\pi_p = \sin \left(\frac{2 m x p_0}{b} \right) + \frac{m}{E_n} L_n(2b^{-1} \mathbf{p}^2 \sin^2 x) \sin(2E_n x p_0 b^{-1}) \left[\frac{\mu^2 - m^2}{2|eB|} \right], \quad (87)$$

$$C_p = i \cos \left(\frac{2 m x p_0}{b} \right) + i L_n(2b^{-1} \mathbf{p}^2 \sin^2 x) \cos(2E_n x p_0 b^{-1}) \left[\frac{\mu^2 - m^2}{2|eB|} \right]. \quad (88)$$

Первые члены в формулах (87), (88) описывают вклад основного уровня Ландау (с $n = 0$), $[z]$ обозначает целую часть z . Аргумент $(\mu^2 - m^2)/2|eB|$ функции $[(\mu^2 - m^2)/2|eB|]$ не должен быть равен целому числу, так как при этих значениях аргумента функция становится неоднозначной.

Полный ПО в постоянном и однородном магнитном поле в однопетлевом приближении КЭД₂₊₁ можно записать в виде суммы двух слагаемых, представляющих вклады вакуума (формула (71)) и реальных частиц (формула (86)):

$$\Pi_t^{\mu\nu}(p, B) = \Pi_v^{\mu\nu}(p, B) + \Pi_p^{\mu\nu}(p, B). \quad (89)$$

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Так как функции π_1 , π_2 и C' в формулах (72)–(74) являются функциями p_0 , $\mathbf{p}^2$, B и μ и оператор $\Pi_{\mu\nu}$ конечен в длинноволновом пределе $p \rightarrow 0$, то единственный член, который не исчезает в этом пределе в выражении для ПО, – это антисимметричный член. Соответствующий член в эффективном лагранжиане – это индуцированный член Черна–Саймонса [19, 30]. Действительно, в матрице квантовой электродинамики член второго порядка содержит слагаемые, отвечающие только собственным энергиям фермиона и фотона, причем поправка к лагранжиану электромагнитного поля в однопетлевом приближении КЭД определяется членом [31]

$$S_2 = -i A_\mu(x) \Pi^{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y). \quad (90)$$

Коэффициент при члене $i e^{\mu\nu\rho} p_\rho$ при $p_\mu = 0$ в выражении для ПО называют индуцированным коэффициентом Черна–Саймонса. Известно [32], что ненулевой вклад в коэффициент Черна–Саймонса в пределе $p \rightarrow 0$ возникает только в однопетлевом приближении КЭД₂₊₁.

В рассматриваемой модели КЭД₂₊₁ вклад вакуума в этот коэффициент в отсутствие магнитного поля есть

$$\gamma = -(\text{sign } m) \frac{e^2}{4\pi}. \quad (91)$$

В присутствии внешнего постоянного магнитного поля индуцированный коэффициент Черна–Саймонса также вычисляется точно,

$$\gamma = \frac{i^{\frac{1}{2}} e^2 m}{8\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{|eB|}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{\sin x} \int_{-1}^1 \cos vx \exp\left(-\frac{ixm^2}{|eB|}\right) dv = -(\text{sign } m) \frac{e^2}{4\pi}. \quad (92)$$

Заметим, что в последнем равенстве формулы (92) вместо знаковой функции $\text{sign } m$ можно поставить функцию $\text{sign}(eB)$, так как во внешнем электромагнитном поле античастицы можно отличить от частиц и по знаку заряда. Вклад в индуцированный коэффициент Черна–Саймонса в этом случае дают только вакуумные фермионы низшего уровня Ландау, поскольку вклады состояний с $n \geq 1$ должны обращаться в нуль в пределе $p_\mu = 0$. Возникновение ненулевого индуцированного коэффициента Черна–Саймонса в отсутствие реальных частиц – это проявление эффекта поляризации вакуума внешним электромагнитным полем.

При ненулевой плотности частиц полный вклад в индуцированный коэффициент Черна–Саймонса определяется суммой вакуумного члена и коэффициента при члене $ie^{\mu\nu\rho} p_\rho$ для $p_\mu = 0$ в формуле (86). Этот коэффициент можно вычислить точно, так что в результате (полный) индуцированный коэффициент Черна–Саймонса можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \gamma(\mu, B) = & -(\text{sign } m) \frac{e^2}{4\pi} \theta(|m| - \mu) + \\ & + \text{sign}(eB) \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \left[\frac{\mu^2 - m^2}{2|eB|} \right] \theta(\mu - |m|) \right). \end{aligned} \quad (93)$$

Здесь $\theta(x)$ – функция Хэвисайда, $[\cdot]$ обозначает целую часть числа и предполагается, что аргумент $(\mu^2 - m^2)/2|eB|$ функции $[(\mu^2 - m^2)/2|eB|]$ не равен целому числу. Отметим, что полный коэффициент Черна–Саймонса меняет знак по отношению к вакуумному коэффициенту, если заполнен хотя бы один уровень Ландау.

Появление в эффективном лагранжиане члена Черна–Саймонса означает, что фотон приобретает “массу” динамически. Это можно увидеть из общего анализа уравнений дисперсии для квантованного поля излучения, проведенного выше с помощью ПО. Полезно, однако, связать это явление непосредственно с эффективным лагранжианом. Первая пара уравнений Максвелла не меняется, так как не меняется связь напряженностей полей с потенциалом A_μ . Вторая же пара уравнений получается при варьировании по A_μ действия

$$S = - \int d^3x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma(\mu, B) e^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho \right\}, \quad (94)$$

что приводит к уравнению

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} - \gamma(\mu, B) e^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho = 0 \quad (95)$$

для компонент электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$.

В рассмотренной модели при определенных условиях может иметь место релятивистский целочисленный квантовый эффект Холла. Индуцированный коэффициент Черна–Саймонса в этом случае имеет физический смысл недиагональной электрической проводимости [17]. Определенная таким образом электрическая проводимость является кусочно-непрерывной функцией магнитного поля при постоянном химическом потенциале (и наоборот), терпящей разрывы при $\mu = -m, \pm E_n$. Поэтому для физических приложений интерес представляет обобщение полученного выражения для коэффициента Черна–Саймонса на случай конечной (ненулевой) температуры T .

Для вычисления коэффициента Черна–Саймонса при $T \neq 0$ нам нужна функция Грина идеального релятивистского ферми-газа в постоянном магнитном поле при конечной температуре. Как показано в работе [25], функция Грина свободного идеального нерелятивистского ферми-газа при конечной температуре совпадает с соответствующей функцией Грина (в импульсном представлении) при нулевой температуре с точностью до множителя $\text{th}(p_0/2T)$, который следует поставить перед $\delta(p_0 - \mu - \mathbf{p}^2/2m)$. Можно показать, что функция Грина идеального релятивистского ферми-газа в постоянном магнитном поле при $T \neq 0$ определяется формулой (46), в которой перед членом, пропорциональным δ -функции, следует ввести аналогичный множитель $\text{th}(p_0/2T)$. В результате такой замены для коэффициента Черна–Саймонса при $T \neq 0$ получим

$$\gamma(\mu, B, T) = -(\text{sign } m) \frac{e^2}{4\pi} \theta(|m| - \mu) + \text{sign}(eB) \frac{e^2}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\text{th} \left(\frac{\mu - E_n}{2T} \right) + \text{th} \left(\frac{\mu + E_n}{2T} \right) \right]. \quad (96)$$

Здесь первый (не зависящий от температуры) член дает вклад вакуума. Отметим, что при $T = 0$ полученная формула переходит в формулу (93).

Благодарности. В заключение я хотел бы поблагодарить Чон Лин Хо (Choon-Lin Ho) за полезные дискуссии и ценные замечания.

Список литературы

- [1] *A. M. J. Schakel, G. W. Semenoff*. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2653.
- [2] The Quantum Hall Effect. 2nd ed. Eds. R. E. Prange, S. M. Girvin. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [3] *F. Wilczek*. Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. Singapore: World Scientific, 1990.
- [4] *A. M. J. Schakel*. Phys. Rev. D. 1991. V. 43. P. 1428.
- [5] *A. Neagu, A. M. J. Schakel*. Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 1785.
- [6] *J. M. Leinaas, J. Myrheim*. Nuovo Cim. B. 1977. V. 37. P. 1.
- [7] *G. A. Goldin, R. Menikoff, D. H. Sharp*. J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1664.
- [8] *F. Wilczek*. Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1144; V. 49. P. 957.
- [9] *Y. Hosotani*. Phys. Lett. B. 1993. V. 319. P. 332; Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 2022.
- [10] *V. R. Khalilov, C. L. Ho*. Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 615.
- [11] *B. P. Халилов*. ТМФ. 1999. Т. 119. С. 105; *C. L. Ho, V. R. Khalilov*. Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 032104.
- [12] *A. V. Turbiner*. Commun. Math. Phys. 1988. V. 118. P. 467; *M. A. Shifman, A. V. Turbiner*. Commun. Math. Phys. 1989. V. 126. P. 347.

- [13] *V. R. Khalilov, C. L. Ho.* Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 033003.
- [14] *В. И. Рутус.* ЖЭТФ. 1969. Т. 57. С. 2176.
- [15] *И. А. Баталин, А. Е. Шабад.* ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 894.
- [16] *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
- [17] *V. Zeitlin.* Phys. Lett. B. 1995. V. 352. P. 422.
- [18] *В. И. Рутус.* Тр. ФИАН СССР. 1979. Т. 111. С. 5.
- [19] *S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton.* Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 975; Ann. Phys. (N. Y.). 1982. V. 140. P. 372.
- [20] *И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов.* Квантовые процессы в сильном внешнем поле. М.: МГУ, 1989.
- [21] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [22] *V. A. Fock.* Sov. Phys. 1937. V. 12. P. 404.
- [23] *J. Schwinger.* Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 664.
- [24] *В. Р. Халилов.* ТМФ. 1999. Т. 121. С. 412.
- [25] *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский.* Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
- [26] *А. Е. Шабад.* Особенности поляризационного оператора фотона в магнитном поле. Препринт ФИАН № 60. М.: ФИАН, 1974.
- [27] *А. Е. Лобанов, В. Р. Халилов.* ЖЭТФ. 1979. Т. 77. С. 548.
- [28] *В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
- [29] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963.
- [30] *A. Redlich.* Phys. Rev. D. 1984. V. 29. P. 2366.
- [31] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
- [32] *T. Bernstein, A. Lee.* Phys. Rev. D. 1985. V. 32. P. 1020; *S. Coleman, B. Hill.* Phys. Lett. B. 1985. V. 159. P. 184; *Y. Nagahami.* Z. Phys. C. 1986. V. 37. P. 583.

Поступила в редакцию 21.11.2000 г.