Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Чжи-Минь Ли, Структура ветвления и максимальная степень эволюционирующего случайного дерева, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 2, 312–319

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:24:42

© 2011 г.

Чжи-Минь Ли*

СТРУКТУРА ВЕТВЛЕНИЯ И МАКСИМАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕГО СЛУЧАЙНОГО ДЕРЕВА

Вводится понятие эволюционирующего случайного дерева. Предложенная модель представляет собой комбинацию модели предпочтительного присоединения и равномерной модели. Рассматриваются структура ветвления и максимальная степень эволюционирующего случайного дерева, с помощью которых можно частично объяснить устойчивость по отношению к случайному нападению и уязвимость по отношению к преднамеренному нападению во всемирной паутине.

Ключевые слова: случайное рекуррентное дерево, граф без масштаба, последовательность степеней.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возрастает интерес к пониманию свойств реальных широко-масштабных сложных сетей, описывающих широкий круг систем как в природе, так и в обществе – таких, как Интернет, сети взаимодействующих белков, клетки мозга, графы научного сотрудничества, сеть человеческих половых контактов, сети телефонных переговоров, электрические и нейронные сети и т.д. [1]. В стремлении к этому пониманию математики, биологи и физики обычно используют случайные графы для моделирования всех этих реальных сетей. Основную постановку проблемы можно найти в работах [2]–[6].

Экспериментальные исследования авторов работы [3] показали, что относительное число вершин с заданной степенью в WWW-сетях изменяется в соответствии с обратным степенным законом. Кроме того, эксперименты, проведенные авторами работ [7], [8], показали, что WWW-сеть демонстрирует устойчивость по отношению к случайному нападению и уязвимость по отношению к преднамеренной атаке. Каковы причины столь странного поведения? Должны существовать вершины, функционирующие как центр сети. Сколько ветвящихся сетей имеется в WWW-сети? Для решения этой задачи мы вводим модель эволюционирующего случайного дерева. Начнем с одиночной вершины, на первом временном шаге добавим к ней

*School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Anhui, China.
E-mail: zmli08@ahpu.edu.cn

вершину и ребро, соединяющее две вершины, а начиная со второго временного шага будем на каждом шаге добавлять вершину и ребро, соединяющее новую вершину с одной из старых, согласно следующему правилу. С вероятностью α действуем в соответствии с моделью предпочтительного присоединения: выбираем старую вершину с вероятностью, пропорциональной ее степени, т.е. с вероятностью k/S_n , где k – степень выбранной вершины, а $S_n = 2n$ – полная степень вершин; с вероятностью $1 - \alpha$ действуем в соответствии с равномерной моделью: выбираем любую из старых вершин равномерно. Предлагаемая модель представляет собой обобщение модели из работы [2], однако она имеет и ряд отличий, что будет показано в следующих разделах.

2. СТРУКТУРА ВЕТВЛЕНИЯ ДЕРЕВА

Для эволюционирующего случайного дерева возьмем первый узел в качестве корня дерева и обозначим через $b(n)$ число ветвлений для данного корня; это также можно рассматривать как ветвящуюся сеть в WWW-сети. Получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для эволюционирующего случайного дерева*

$$Eb(n) \approx \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \frac{2^{1-\alpha/2}(1-\alpha)}{\alpha} \right) n^{\alpha/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно структуре и построению дерева имеем

$$\begin{aligned} E(b(n+1)|b(n)) &= \alpha \left[\frac{b(n)}{2n}(b(n)+1) + \left(1 - \frac{b(n)}{2n} \right) b(n) \right] + \\ &\quad + (1-\alpha) \left[\frac{1}{n}(b(n)+1) + \left(1 - \frac{1}{n} \right) b(n) \right] = \\ &= \alpha \left[b(n) + \frac{b(n)}{2n} \right] + (1-\alpha) \left[b(n) + \frac{1}{n} \right] = \left(1 + \frac{\alpha}{2n} \right) b(n) + (1-\alpha) \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Взяв математическое ожидание для обеих частей, получим

$$Eb(n+1) = \left(1 + \frac{\alpha}{2n} \right) b(n) + (1-\alpha) \frac{1}{n}.$$

Продолжая итерации и замечая, что $Eb(1) = 1$, получаем

$$\begin{aligned} Eb(n+1) &= \prod_{j=1}^n \frac{2j+\alpha}{2j} + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j-1} \prod_{i=j}^n \frac{2i+\alpha}{2i} (1-\alpha) + (1-\alpha) \frac{1}{n} = \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n)} + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j-1} \frac{\Gamma(n+\alpha/2)\Gamma(j-1)}{\Gamma(j+\alpha/2-1)\Gamma(n)} (1-\alpha) + (1-\alpha) \frac{1}{n} \approx \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha/2} + (1-\alpha) \frac{1}{j-1} \sum_{j=2}^n n^{\alpha/2} j^{-\alpha/2} \approx \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha/2} + (1-\alpha) n^{\alpha/2} \int_2^n \frac{1}{j^{1+\alpha/2}} dj \approx \end{aligned}$$

$$\approx \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \frac{2^{1-\alpha/2}(1-\alpha)}{\alpha} \right) n^{\alpha/2}.$$

Во втором из приведенных выше уравнений мы использовали формулу Стирлинга.

Обозначим через $Y(n, k)$ число узлов на расстоянии k от корня в момент времени n . Тогда имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для эволюционирующего случайного дерева*

$$EY(n, k) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=k}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} C_j^k \frac{(2-\alpha)^k \alpha^{j-k}}{2^j},$$

где $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ – число Стирлинга, т.е. коэффициент при x^j в произведении $\langle x \rangle_n = x(x+1) \dots (x+n-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно построению случайного дерева имеем

$$\begin{aligned} E[Y(n+1, k) | Y(n, k), Y(n, k-1)] &= \\ &= \alpha \left[\frac{Y(n, k) + Y(n, k-1)}{2n} (Y(n, k) + 1) + \left(1 - \frac{Y(n, k) + Y(n, k-1)}{2n} \right) Y(n, k) \right] + \\ &\quad + (1-\alpha) \left[\frac{Y(n, k-1)}{n} (Y(n, k) + 1) + \left(1 - \frac{Y(n, k-1)}{n} \right) Y(n, k) \right] = \\ &= \alpha \left[Y(n, k) + \frac{Y(n, k) + Y(n, k-1)}{2n} \right] + (1-\alpha) \left[Y(n, k) + \frac{Y(n, k-1)}{n} \right] = \\ &= \left(1 + \frac{\alpha}{2n} \right) Y(n, k) + \frac{2-\alpha}{2n} Y(n, k-1). \end{aligned}$$

Взяв математическое ожидание для обеих частей, получаем

$$EY(n+1, k) = \left(1 + \frac{\alpha}{2n} \right) EY(n, k) + \frac{2-\alpha}{2n} EY(n, k-1). \quad (2.1)$$

Теперь введем многочлен

$$L_n(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} EY(n, k) z^k.$$

Умножая обе части выражения (2.1) на z^k и суммируя от 0 до ∞ , получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} EY(n+1, k) z^k = \left(1 + \frac{\alpha}{2n} \right) \sum_{k=0}^{\infty} EY(n, k) z^k + \frac{2-\alpha}{2n} \sum_{k=0}^{\infty} EY(n, k-1) z^k.$$

Замечая, что $EY(n, 0) = EY(n, -1) = 0$, приходим к выражению

$$\begin{aligned} L_{n+1}(z) &= \left(1 + \frac{\alpha}{2n} \right) L_n(z) + \frac{2-\alpha}{2n} z L_n(z) = \\ &= \left(1 + \frac{\alpha + (2-\alpha)z}{2n} \right) L_n(z). \end{aligned}$$

Так как $L_1(z) = z$, получаем

$$\begin{aligned} L_n(z) &= z \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2j + \alpha + (2 - \alpha)z}{2j} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} z \prod_{j=1}^{n-1} \left[j + \left(\frac{2-\alpha}{2} \right) \left(z + \frac{\alpha}{2-\alpha} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} EY(n, k) &= [z^k] L_n(z) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=k}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} C_j^k \left(\frac{2-\alpha}{2} \right)^j \left(\frac{\alpha}{2-\alpha} \right)^{j-k} = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=k}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} C_j^k \frac{(2-\alpha)^k \alpha^{j-k}}{2^j}. \end{aligned}$$

3. СТЕПЕНЬ ЗАДАННОГО УЗЛА И МАКСИМАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ

Будем называть узел j -узлом, если он появляется на j -м временном шаге. Обозначим через $X(n, j)$ степень j -узла в момент времени n , а через $\Delta(n, j)$ – увеличение степени j -узла от момента времени n до момента времени $n + 1$. Очевидно, что $X(n + 1, j) = X(n, j) + \Delta(n, j)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для эволюционирующего случайного дерева математическое ожидание $X(n, j)$ удовлетворяет соотношению*

$$EX(n, j) \approx \left(1 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} \right) \left(\frac{n-1}{j} \right)^{\alpha/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку дерево формируется добавлением одного узла на каждом временном шаге, имеем

$$\begin{aligned} E(X(n+1, j) \mid \mathfrak{F}_n) &= \alpha \left[(X(n, j) + 1) \frac{X(n, j)}{2n} + X(n, j) \left(1 - \frac{X(n, j)}{2n} \right) \right] + \\ &\quad + (1 - \alpha) \left[(X(n, j) + 1) \frac{1}{n} + X(n, j) \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] = \\ &= \alpha \left[X(n, j) + \frac{X(n, j)}{2n} \right] + (1 - \alpha) \left[X(n, j) + \frac{1}{n} \right] = \\ &= X(n, j) + \frac{\alpha X(n, j)}{2n} + \frac{1 - \alpha}{n}. \end{aligned}$$

Пусть $T(n, j) = X(n, j) + 2(1 - \alpha)/\alpha$. Тогда

$$E(T(n+1, j) \mid \mathfrak{F}_n) = \frac{2n + \alpha}{2n} T(n, j). \quad (3.1)$$

Здесь и далее $\mathfrak{F}_n = \sigma\{X(2, 1), X(2, 2), X(3, 1), X(3, 2), \dots, X(n, 1), X(n, 1), \dots, X(n, n)\}$.

Взяв математическое ожидание обеих частей, получаем

$$ET(n+1, j) = \frac{2n + \alpha}{2n} ET(n, j).$$

Решая предыдущее уравнение с граничным условием $ET(j, j) = (1 + 2(1 - \alpha)/\alpha)$, получаем

$$ET(n+1, j) = \prod_{i=j}^n \frac{2j+\alpha}{2j} \left(1 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\right) \approx \left(1 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\right) \left(\frac{n}{j}\right)^{\alpha/2}.$$

Пусть $C(n, \alpha) = \prod_{i=1}^n 2i/(2i + \alpha)$. Обозначив $Z(n+1, j, \alpha) = T(n+1, j)C(n, \alpha)$, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.2. *В случайном процессе эволюционирующего дерева величина $(Z(n, j, \alpha), \mathfrak{F}_n)$ является положительным мартингалом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случайной переменной $Z(n+1, j, \alpha)$, взяв математическое ожидание для $\mathfrak{F}_n$, получаем

$$\begin{aligned} E(Z(n+1, j, \alpha) \mid \mathfrak{F}_n) &= E(T(n+1, j)C(n, \alpha) \mid \mathfrak{F}_n) = \\ &= C(n, \alpha) \frac{2n+\alpha}{2n} E(T(n, j) \mid \mathfrak{F}_n) = \\ &= C(n-1, \alpha)T(n, j) = Z(n, j, \alpha). \end{aligned}$$

Очевидно, что случайная переменная $Z(n, j, \alpha)$ положительна, поэтому она является положительным мартингалом.

Можно обобщить теорему 3.2. Пусть

$$Z(n, j_1, \dots, j_r, k_1, \dots, k_r) = C(n, k_1 + k_2 + \dots + k_r, \alpha) \prod_{i=1}^r \binom{T(n, j_i) + k_i + 1}{k_i},$$

где

$$C(n, k, \alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{2i}{2i + k\alpha}.$$

Имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.3. *Для эволюционирующего случайного дерева при положительном числе $j_1, \dots, j_r, k_1, \dots, k_r$ случайная переменная $(Z(n, j_1, \dots, j_r; k_1, \dots, k_r), \mathfrak{F}_n)$ является положительным мартингалом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замечая, что

$$\begin{aligned} \binom{T(n+1, j) + k - 1}{k} &= \binom{T(n, j) + k - 1}{k} + \Delta(n, j) \binom{T(n, j) + k - 1}{k-1} = \\ &= \binom{T(n, j) + k - 1}{k} \left(1 + \frac{k\Delta(n, j)}{T(n, j)}\right), \end{aligned}$$

можно получить

$$\prod_{i=1}^r \binom{T(n+1, j_i) + k_i - 1}{k_i} = \prod_{i=1}^r \binom{T(n, j_i) + k_i - 1}{k_i} \left(1 + \sum_{i=1}^r \frac{\Delta(n, j_i)k_i}{T(n, j_i)}\right),$$

так как не более одной из степеней $\Delta(n, j_i), i = 1, \dots, r$, отлична от 0.

Взяв условное математическое ожидание относительно случайной переменной $Z(n, j_1, \dots, j_r; k_1, \dots, k_r)$, получаем

$$\begin{aligned}
 E(Z(n+1, j_1, \dots, j_r; k_1, \dots, k_r) \mid \mathfrak{F}_n) &= \\
 &= E\left(C(n+1, k_1 + \dots + k_r, \alpha) \prod_{i=1}^r \binom{T(n+1, j_i) + k_i - 1}{k_i} \mid \mathfrak{F}_n\right) = \\
 &= C(n+1, k_1 + \dots + k_r, \alpha) \prod_{i=1}^r \binom{T(n, j_i) + k_i - 1}{k_i} E\left(1 + \sum_{i=1}^r \frac{\Delta(n, j_i) k_i}{T(n, j_i)} \mid \mathfrak{F}_n\right) = \\
 &= \frac{C(n+1, k_1 + k_2 + \dots + k_r, \alpha)}{C(n, k_1 + k_2 + \dots + k_r, \alpha)} Z(n, j_1, \dots, j_r; k_1, \dots, k_r) \times \\
 &\quad \times \left(1 + \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{T(n, j_i)} \left[\alpha \frac{X(n, j_i)}{2n} + (1 - \alpha) \frac{1}{n}\right]\right) = \\
 &= Z(n, j_1, \dots, j_r; k_1, \dots, k_r) \frac{C(n+1, k_1 + k_2 + \dots + k_r, \alpha)}{C(n, k_1 + \dots + k_r, \alpha)} \left(1 + \sum_{i=1}^r \frac{\alpha k_i}{2n}\right) = \\
 &= Z(n, j_1, \dots, j_r; k_1, \dots, k_r).
 \end{aligned}$$

Таким образом, $Z(n, j_1, \dots, j_r; k_1, \dots, k_r)$ – положительный мартингал.

Согласно теореме о сходимости мартингала можно считать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z(n, j_1, \dots, j_r; k_1, \dots, k_r) = \zeta_{j_1}^{k_1} \dots \zeta_{j_r}^{k_r}.$$

Получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.4. Для случайных переменных $\zeta_i, \zeta_j, i < j$, имеем следующий результат:

1) две случайные переменные являются положительно коррелированными, если

$$\frac{j}{i} < \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha/2)}\right)^{2/\alpha};$$

2) две случайные переменные являются отрицательно коррелированными, если

$$\frac{j}{i} > \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha/2)}\right)^{2/\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала вычислим ожидание для переменных $\zeta_0^{k_0} \zeta_1^{k_1} \dots \zeta_r^{k_r}$. Согласно свойству мартингала

$$\begin{aligned}
 E(\zeta_0^{k_0} \zeta_1^{k_1} \dots \zeta_r^{k_r}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E(Z(n, 0, 1, \dots, r; k_0, \dots, k_r)) = \\
 &= E(Z(r, 0, 1, \dots, r; k_0, \dots, k_r)) = \\
 &= C(r, k_0 + k_1 + \dots + k_r, \alpha) E\left[\prod_{i=0}^{r-1} \binom{T(r, r) + k_r - 1}{k_r} \binom{T(r, i) + k_i - 1}{k_i}\right] = \\
 &= \frac{C(r, k_0 + \dots + k_r, \alpha)}{C(r, k_0 + \dots + k_{r-1}, \alpha)} \binom{2(1 - \alpha)/\alpha + k_r}{k_r} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times E(Z(r, 0, 1, \dots, r-1; k_0, \dots, k_{r-1})) = \\ & = \prod_{i=0}^r \binom{k_i + 2(1-\alpha)/\alpha}{k_i} C(r, k_0 + \dots + k_r, \alpha). \end{aligned}$$

Для произвольного $i < j$ положим $k_0 = k_1 = \dots = k_{i_1} = k_{i_1+1} = \dots = k_{j-1} = 0$ и $r = j$, тогда

$$E\zeta_i\zeta_j = \left(1 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\right)^2 C(j, 2, \alpha) = \left(1 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\right)^2 \prod_{i=1}^j \frac{2i}{2i+2\alpha}.$$

Поэтому ковариации имеют вид

$$\begin{aligned} \text{cov } \zeta_i \zeta_j &= E\zeta_i \zeta_j - E\zeta_i E\zeta_j = \\ &= \left(1 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\right)^2 \prod_{i=1}^j \frac{2i}{2i+2\alpha} - \left(1 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\right)^2 \prod_{s=1}^j \frac{2s}{2s+\alpha} \prod_{v=1}^i \frac{2v}{2v+\alpha} = \\ &= \left(1 + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\right)^2 \prod_{i=1}^j \frac{2i}{2i+2\alpha} \left(1 - \frac{\Gamma(\alpha/2)^2}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{j}{i}\right)^{\alpha/2}\right). \end{aligned}$$

Очевидно, что при $j/i < (\Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha/2)^2)^{2/\alpha}$ случайные переменные ζ_i, ζ_j положительно коррелированы, а при $j/i > (\Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha/2)^2)^{2/\alpha}$ отрицательно коррелированы.

В качестве специального случая в предыдущем доказательстве можно получить

$$E(\zeta_i)^k = \binom{k + 2(1-\alpha)/\alpha}{k} \prod_{j=1}^i \frac{2j}{2j + k\alpha}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь максимальную степень дерева. Обозначим через M_n максимальную степень дерева на шаге n , и пусть $M(n, j) = \max\{Z(n, i, 1), 0 \leq i < j\}$. Тогда, очевидно, $M(n, n) = C(n, 1, \alpha)(M_n + 2(1-\alpha)/\alpha)$. Получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.5. *Для эволюционирующего случайного дерева существует такое $k > \lfloor 4/\alpha \rfloor$ и такая переменная μ , что в L^k*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}} M_n = \mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\{M(n, n), \mathfrak{F}_n\}$ является последовательностью подмартингалов, поскольку $\{Z(n, j, 1), \mathfrak{F}_n\}$ – мартингал. Докажем, что подмартингал ограничен в смысле L^k :

$$\begin{aligned} E(M(n, n))^k &\leq \sum_{j=1}^n E(Z(n, j, 1)^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} E\zeta_j^k = \\ &= \binom{k + 2(1-\alpha)/\alpha}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^j \frac{2i}{2i + k\alpha} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{k + 2(1 - \alpha)/\alpha}{k} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-k\alpha/2} + o(1) \leq \\
&\leq \binom{k + 2(1 - \alpha)/\alpha}{k} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} < \infty.
\end{aligned}$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы доказать, что $\{M(n, j)\}_{j=1}^n$ представляет собой последовательность Коши в смысле L^k . Для произвольного $i < j < n$ имеем

$$E(M(n, j) - M(n, i))^k \leq \sum_{s=i}^j EZ(n, s, 1)^k.$$

Пусть $n \rightarrow \infty$, тогда

$$\sum_{s=i}^j EZ(n, s, 1)^k \leq \sum_{s=i}^j E\zeta_s^k \leq \binom{k + 2(1 - \alpha)/\alpha}{k} \sum_{s=i}^j s^{-2}. \quad (3.3)$$

Последний член в выражении (3.3) может быть произвольно малым при достаточно больших i, j . Поэтому существует такая переменная n , что $\lim_{n \rightarrow \infty} M(n, n) = \mu$. Коль скоро $M(n, n) = C(n, 1, \alpha)(M_n + 2(1 - \alpha)/\alpha)$, теорема доказана.

Благодарности. Эта работа была поддержана National Natural Science Foundation of China (грант № 10826098), Anhui Provincial Natural Science Foundation (грант № 10040606Q03) и Aihui Polytechnic University Foundation for Recruiting Talent (грант № 2009YQQ005).

Список литературы

- [1] R. T. Smythe, H. M. Mahmoud, *Theory Probab. Math. Statist.*, **51** (2001), 1–27.
- [2] R. Albert, A.-L. Barabási, *Science*, **286**:5439 (1999), 509–512, arXiv:cond-mat/9910332.
- [3] B. Bollobás, O. Riordan, J. Spencer, G. Tusnády, *Random Structures Algorithms*, **18**:3 (2001), 279–290.
- [4] M. E. J. Newman, *SIAM Rev.*, **45**:2 (2003), 167–256, arXiv:cond-mat/0303516.
- [5] T. F. Móri, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **39**:1–2 (2002), 143–155.
- [6] Z. Katona, T. F. Móri, *Statist. Probab. Lett.*, **76**:15 (2006), 1587–1593.
- [7] D. S. Callaway, M. E. J. Newman, S. H. Strogatz, D. J. Watts, *Phys. Rev. Lett.*, **85**:25 (2000), 5468–5471, arXiv:cond-mat/0007300.
- [8] D. J. Watts, *Small Worlds: the Dynamics of Networks Between Order and Randomness*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2004.

Поступила в редакцию 3.07.2010,
после доработки 2.09.2010