Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Фаддеев, Новые динамические переменные теории тяготения Эйнштейна, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 3, 323–335

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6614>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:25:29

© 2011 г.

Л. Д. Фаддеев*

НОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Описан альтернативный формализм теории тяготения Эйнштейна. Роль динамических переменных играет набор из десяти векторных полей f_μ^A , $A = 1, \dots, 10$. Метрика является композитной переменной, $g_{\mu\nu} = f_\mu^A f_\nu^A$. Предложенная схема может дать дальнейшее развитие теории тяготения, в котором теория Эйнштейна будет играть роль эффективной теории, и константа Ньютона появится посредством введения аномальной функции Грина.

Ключевые слова: теория тяготения Эйнштейна, векторные поля, гамильтонова формулировка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория тяготения Эйнштейна [1] является величайшим достижением теоретической физики XX века. Ее создание из априорных принципов, опередившее экспериментальное подтверждение, представляет собой триумф теоретического подхода к изучению природы. Геометрические конструкции, лежащие в основе ее формулировки, замечательно иллюстрируют роль математики в описании фундаментальных законов физики.

Теория тяготения появилась как классическая теория поля; во время ее появления другим примером была только электродинамика. Создание квантовой механики и достаточно успешная формулировка квантовой электродинамики, а также появление других квантовых теоретико-полевых построений поставили задачу квантования теории тяготения. Начиная с фундаментальной работы Дирака [2] проблеме квантования гравитации было посвящено множество подходов и предложений. Мы сейчас знаем гамильтонову интерпретацию теории Эйнштейна и ее формальное квантование в рамках формализма континуального интеграла (см. работу [3] и приведенную в ней литературу). Однако результат все еще неудовлетворителен, и проблема квантования не решена. Техническая трудность состоит в том, что соответствующая теория возмущений неперенормируема. В процессе перенормировки появляются контрчлены, не входящие в классический лагранжиан. Формальной

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

причиной этого является тот факт, что константа связи (постоянная Ньютона) имеет размерность длины, $[\kappa] = [L]$, и высшие степени разложения по κ могут иметь коэффициенты с высшими производными от фундаментальных полей. Это обстоятельство отличает теорию тяготения Эйнштейна от электродинамики и теории Янга–Миллса, в которых константы связи безразмерны, расходимости логарифмические и количество безразмерных контрчленов конечно.

Схожая трудность, существовавшая в четырехфермионной теории слабых взаимодействий, была решена в теории Вайнберга–Салама [4], [5], где вместо размерной константы связи фигурирует поле Хиггса. Естественно, что аналогичные попытки предпринимались и в теории тяготения (см. обзор [6]), однако вполне удовлетворительной схемы все еще нет.

Настоящая работа представляет собой еще одну попытку найти новую схему, в которую теория Эйнштейна входила бы как эффективная теория. Имея в виду успех теории Вайнберга–Салама, я решил искать формулировку теории тяготения в терминах векторных полей. Пример такой формулировки уже существует. Он основан на теории погружения, согласно которой метрика четырехмерного пространства интерпретируется как индуцированная метрика при вложении этого пространства в десятимерное пространство:

$$g_{\mu\nu} = f_{\mu}^A f_{\nu}^A, \quad f_{\mu} = \partial_{\mu} f^A,$$

где f^A , $A = 1, \dots, 10$, – координаты погружения. Работы [7], [8] дают достаточно полную информацию об этом подходе.

Однако уравнения движения в этой теории отличаются от уравнений Гильберта–Эйнштейна. Действительно,

$$\delta S = \delta \left(\int \sqrt{g} R d^4 x \right) = \int \delta g_{\mu\nu} G^{\mu\nu} d^4 x = -2 \int \partial_{\nu} (G^{\mu\nu} \partial_{\mu} f^A) \delta f^A d^4 x,$$

так что соответствующее уравнение движения содержит производные тензора Риччи $G^{\mu\nu}$. Это обстоятельство послужило поводом к разочарованию в этом подходе для авторов работы [7], в то время как авторы работы [8] приводят основательные аргументы в его поддержку.

Мне очень понравились главные формулы теории погружения, и я решил их модифицировать, считая f_{μ}^A независимыми векторными полями, а не градиентами скаляров. Это должно было помочь избежать лишних производных. Получившийся формализм описан в заметках [9], [10]. Окончательный результат состоит в том, что возникшая схема эквивалентна теории Эйнштейна. Поэтому возникает естественный вопрос, зачем делать такую переформулировку? Мой ответ состоит в том, что новая схема может стать более естественным отправным пунктом для поиска более фундаментальной теории.

В разделе 2 настоящей статьи приводятся необходимые сведения из дифференциальной геометрии. В разделе 3 выписаны уравнения движения и обсуждается их эквивалентность уравнениям Гильберта–Эйнштейна. Раздел 4 содержит гамильтонову редукцию основного лагранжиана. В разделе 5 обсуждаются возможные направления обобщения теории тяготения Эйнштейна.

2. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

На протяжении всей работы я буду использовать евклидову сигнатуру, отличая пространство и время только в обозначениях для координат $x^\mu = (x^0, x^k)$. Это позволит мне не загружать формулы лишними знаками минус. Переход к псевдоевклидовой структуре происходит почти автоматически.

Пусть M^4 – четырехмерное пространство с локальными координатами x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. Динамические переменные составляют набор ковариантных векторных полей $f_\mu^A(x)$, $A = 1, \dots, D$, где D – достаточно большое число. В дальнейшем окажется, что следует взять $D = 10$.

Инфинитезимальные преобразования координат $\delta x^\mu = \epsilon^\mu(x)$ действуют на f_μ^A обычным образом:

$$\delta f_\mu^A = -\partial_\mu \epsilon^\lambda f_\lambda^A - \epsilon^\lambda \partial_\lambda f_\mu^A.$$

Матрица Грама $g_{\mu\nu} = f_\mu^A f_\nu^A$ задает метрику на M^4 , а такой объект, как

$$\Omega_{\beta\mu}^\alpha = f^{\alpha A} \partial_\mu f_\beta^A = g^{\alpha\sigma} \Omega_{\sigma,\beta\mu} = g^{\alpha\sigma} f_\sigma^A \partial_\mu f_\beta^A,$$

где, как всегда, $f^{\alpha A} = g^{\alpha\beta} f_\beta^A$, $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta_\beta^\alpha$, определяет линейную связность. Действительно, при координатных преобразованиях матрица $g_{\mu\nu}$ преобразуется как ковариантный тензор, а в вариации $\Omega_{\beta\mu}^\alpha$, помимо обычных тензорных слагаемых, входит вторая производная от ϵ^α :

$$\delta \Omega_{\beta\mu}^\alpha = \dots + \partial_\mu \partial_\beta \epsilon^\alpha.$$

Связность $\Omega_{\beta\mu}^\alpha$ совместима с метрикой $g_{\mu\nu}$, поскольку

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda g_{\mu\nu} &= \partial_\lambda f_\mu^A f_\nu^A + f_\mu^A \partial_\lambda f_\nu^A - \Omega_{\mu\lambda}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Omega_{\nu\lambda}^\sigma g_{\mu\sigma} = \\ &= \partial_\lambda f_\mu^A f_\nu^A + f_\mu^A \partial_\lambda f_\nu^A - \partial_\lambda f_\mu^A f_\sigma^A g_{\sigma\nu} - \partial_\lambda f_\nu^A f_\sigma^A g_{\mu\sigma} = 0, \end{aligned}$$

однако она не является римановой, и кручение

$$T_{\alpha[\mu,\nu]} = \Omega_{\alpha,\mu\nu} - \Omega_{\alpha,\nu\mu}$$

отлично от нуля. Риманова связность $\Gamma_{\alpha,\beta\mu}$ выражается через $\Omega_{\alpha,\beta\mu}$ следующим образом:

$$\Gamma_{\alpha,\beta\mu} = \frac{1}{2}(\Omega_{\alpha,\beta\mu} + \Omega_{\alpha,\mu\beta}) + \frac{1}{2}(\Omega_{\mu,\alpha\beta} - \Omega_{\mu,\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(\Omega_{\beta,\alpha\mu} - \Omega_{\beta,\mu\alpha}),$$

так что Γ и Ω совпадают только при условии, что кручение T исчезает.

Вычислим тензор кривизны $S_{\beta,\mu\nu}^\alpha$ связности $\Omega_{\beta\mu}^\alpha$. Имеем по определению

$$\begin{aligned} S_{\beta,\mu\nu}^\alpha &= \partial_\mu \Omega_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Omega_{\beta\mu}^\alpha + \Omega_{\sigma\mu}^\alpha \Omega_{\beta\nu}^\sigma - \Omega_{\sigma\nu}^\alpha \Omega_{\beta\mu}^\sigma = \\ &= \partial_\mu (f^{\alpha A} \partial_\nu f_\beta^A) - \partial_\nu (f^{\alpha A} \partial_\mu f_\beta^A) + f^{\alpha A} \partial_\mu f_\sigma^A f^{\sigma B} \partial_\nu f_\beta^B - f^{\alpha A} \partial_\nu f_\sigma^A f^{\sigma B} \partial_\mu f_\beta^B. \end{aligned}$$

Вторые производные сокращаются; используя элементарное равенство

$$f^{\alpha A} \partial_\mu f_\sigma^A = -\partial_\mu f^{\alpha A} f_\sigma^A,$$

которое следует из условия ортонормированности $f_\mu^A f_\nu^A = \delta_\mu^\nu$, мы можем переписать $S_{\beta,\mu\nu}^\alpha$ следующим образом:

$$S_{\beta,\mu\nu}^\alpha = \Pi^{AB} (\partial_\mu f_\alpha^A \partial_\nu f_\beta^B - \partial_\nu f_\alpha^A \partial_\mu f_\beta^B),$$

где $\Pi^{AB} = \delta^{AB} - f_\sigma^A f^{\sigma B}$ есть проектор на $(D-4)$ -мерное подпространство в $\mathbb{R}^D$, ортогональное f_μ^A , рассматриваемым как векторы в $\mathbb{R}^D$:

$$\Pi^{AB} f_\mu^A = 0 = \Pi^{AB} f^{\mu A}.$$

В дальнейшем я буду называть Π^{AB} вертикальным проектором.

Хотя выражение $S_{\beta,\mu\nu}^\alpha$ содержит только локальные производные, оно общековариантно. Действительно, нековариантные слагаемые в $\partial_\mu f_\alpha^A$ пропорциональны f_α^A и обращаются в ноль при действии на них вертикального проектора. Это же соотношение позволяет элементарно опустить верхний индекс в $S_{\beta,\mu\nu}^\alpha$, так что

$$S_{\alpha\beta,\mu\nu} = g_{\alpha\sigma} S_{\beta,\mu\nu}^\sigma = \Pi^{AB} (\partial_\mu f_\alpha^A \partial_\nu f_\beta^B - \partial_\nu f_\alpha^A \partial_\mu f_\beta^B).$$

Теперь мы можем дать явно ковариантную запись для тензора кривизны. Введем тензор

$$b_{\alpha\mu}^A = \nabla_\mu f_\alpha^A = \partial_\mu f_\alpha^A - \Omega_{\alpha\mu}^\beta f_\beta^A = \partial_\mu f_\alpha^A - f^{\beta B} \partial_\mu f_\alpha^B f_\beta^A = \Pi^{AB} \partial_\mu f_\alpha^B.$$

Используя свойство проектора $\Pi^{AB} = \Pi^{AC} \Pi^{CB}$, мы можем записать $S_{\alpha\beta,\mu\nu}$ следующим образом:

$$S_{\alpha\beta,\mu\nu} = b_{\alpha\mu}^A b_{\beta\nu}^A - b_{\alpha\nu}^A b_{\beta\mu}^A,$$

откуда очевидно вытекает свойство антисимметрии при перестановках $\alpha \leftrightarrow \beta$ и $\mu \leftrightarrow \nu$. Однако симметрии по отношению к перестановке $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\mu\nu)$ нет. Заметим, впрочем, что для вычисления вариации использование локальных производных более удобно.

Объекты $\Omega_{\beta\mu}^\alpha$ и $b_{\beta\mu}^A$ являются горизонтальной и вертикальной проекциями производной $\partial_\mu f_\beta^A$,

$$\partial_\mu f_\beta^A = \Omega_{\beta\mu}^\sigma f_\sigma^A + b_{\beta\mu}^A.$$

Функция Лагранжа задается через скалярную кривизну S ,

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} S = \sqrt{g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} S_{\alpha\beta,\mu\nu} = \sqrt{g} \Pi^{AB} (\partial_\mu f^{\mu A} \partial_\nu f^{\nu B} - \partial_\nu f^{\mu A} \partial_\mu f^{\nu B}),$$

и представляет собой квадратичную форму от первых производных контравариантных компонент полей f_μ^A .

Приведенные формулы схожи с формулой Гаусса, выражающей тензор кривизны подмногообразия через вторую квадратичную форму, однако тензор второй формы $b_{\alpha\mu}^A$ в нашем случае не симметричен.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В лагранжиане $\mathcal{L}$, приведенном выше, в качестве динамических переменных взяты контравариантные поля $f^{\mu A}$. Запишем вариацию действия в следующем виде:

$$\delta \int \mathcal{L} d^4x = \int \Sigma_\alpha^A \delta f^{\alpha A} d^4x.$$

Здесь Σ_α^A дает нам набор ковариантных векторных полей. С помощью прямых вычислений получаем следующее выражение для этих полей:

$$\Sigma_\alpha^C = \sqrt{g} (2Q_\mu^{ABC} S_\alpha^{\mu AB} - Q_\alpha^{ABC} S^{AB}),$$

где

$$\begin{aligned} Q_\mu^{ABC} &= \Pi^{AB} f_\mu^C + \Pi^{AC} f_\mu^B + \Pi^{BC} f_\mu^A, \\ S_\alpha^{\mu AB} &= \partial_\alpha f^{\mu A} \partial_\nu f^{\nu B} - \partial_\nu f^{\mu A} \partial_\alpha f^{\nu B}, \\ S^{AB} &= \partial_\mu f^{\mu A} \partial_\nu f^{\nu B} - \partial_\nu f^{\mu A} \partial_\mu f^{\nu B}. \end{aligned}$$

Объект $S_\alpha^{\mu AB}$ не ковариантен, но его вклад в Σ_α^A ковариантен благодаря коэффициенту Q_μ^{ABC} .

Рассмотрим в отдельности вертикальную и горизонтальную части Σ_α^A :

$$\Sigma_\alpha^A = 2\sqrt{g} (f^{\mu A} H_{\alpha\mu} + \Pi^{AB} V_\alpha^B).$$

Вертикальная часть V_α^A имеет такой явный вид:

$$V_\alpha^A = \sqrt{g} ((\Pi^{AC} f_\mu^B + \Pi^{AB} f_\mu^C) S_\alpha^{\mu BC} - \Pi^{AC} f_\alpha^B S^{BC}).$$

При выводе этого соотношения мы использовали симметрию тензора Q_μ^{ABC} . С учетом определений $\Omega_{\beta\mu}^\alpha$ и $b_{\beta\mu}^A$ мы можем переписать V_α^A следующим образом:

$$V_\alpha^A = b_{\beta\mu}^{\beta A} (\Omega_{\mu\alpha}^\mu - \Omega_{\alpha\mu}^\mu) + b_{\beta\mu}^{\beta A} (\Omega_{\beta\mu}^\mu - \Omega_{\mu\beta}^\mu) + b_\sigma^{\beta A} (\Omega_{\alpha\beta}^\sigma - \Omega_{\beta\alpha}^\sigma).$$

Мы видим, что это выражение представляет собой линейную комбинацию компонент тензора кручения связности $\Omega_{\beta\mu}^\alpha$.

Индекс A в системе уравнений $V_\alpha^A = 0$ эффективно пробегает $D-4$ значений, так что всего мы имеем $4(D-4)$ вертикальных уравнений движения. С другой стороны, мы имеем $4 \cdot 6 = 24$ компонент кручения. При $D = 10$ эти два числа совпадают, и вертикальная система уравнений становится линейной системой для $T_{[\mu,\nu]}^\alpha$ с квадратной (24×24) -матрицей, составленной из коэффициентов $b_{\beta\mu}^A$. Записать определитель этой матрицы в аналитическом виде все еще является задачей, недоступной для компьютеров. Однако численный эксперимент, проведенный С. Пастоном, показал, что при выборе случайных значений для коэффициентов $b_{\beta\mu}^A$ этот определитель не равен нулю. В результате я предлагаю положить $D = 10$ и считать, что вертикальные уравнения движения эквивалентны исчезновению кручения: $T_{[\mu,\nu]}^\alpha = 0$.

Теперь перейдем к горизонтальной части уравнений движения

$$H_{\alpha\mu} = \sqrt{g} \Pi^{BC} \left(S_{\alpha\mu}^{BC} - \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} S^{BC} \right),$$

которая означает исчезновение тензора Риччи,

$$S_{\alpha\mu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} S = 0,$$

где $S_{\alpha\mu} = g^{\nu\beta} S_{\alpha\beta,\mu\nu}$. Как мы видели выше, связности $\Omega_{\beta\mu}^\alpha$ и $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$ при исчезновении кручения совпадают, таким образом, тензор $S_{\alpha\mu}$ становится симметричным, 6 уравнений из 16 горизонтальных уравнений выполняются тривиально, а остальные 10 совпадают с уравнениями Гильберта–Эйнштейна.

Мы видим, что действительно наш подход дает еще одну формулировку теории тяготения Эйнштейна.

В заключение этого раздела подчеркнем, что в наши уравнения движения входят только первые производные векторных полей f_α^A . На первый взгляд, это противоречит утверждаемой нами эквивалентности. Действительно, уравнения Гильберта–Эйнштейна представляют собой систему уравнений второго порядка для метрики $g_{\mu\nu}$. Выход из этого парадокса дает следующее утверждение: риманов тензор кривизны $R_{\alpha\beta,\mu\nu}$ содержит вторые производные только через компоненты кручения $T_{[\mu,\nu]}^\alpha$. Действительно, вторые производные от $g_{\mu\nu}$ входят в $R_{\alpha\beta,\mu\nu}$ линейно в комбинации

$$A_{\alpha\beta,\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\beta g_{\nu\alpha} + \partial_\nu \partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu \partial_\beta g_{\mu\alpha}.$$

Рассмотрим выражение

$$B_{\alpha\beta,\mu\nu} = \partial_\mu (T_{\alpha[\beta,\nu]} + T_{\nu[\beta,\alpha]} - T_{\beta[\alpha\nu]}) - \partial_\nu (T_{\alpha[\beta,\mu]} + T_{\mu[\beta,\alpha]} - T_{\beta[\alpha\mu]}).$$

Прямой проверкой можно убедиться, что сумма $A_{\alpha\beta,\mu\nu} + B_{\alpha\beta,\mu\nu}$ не содержит вторых производных от f_μ^A , что и доказывает приведенное выше утверждение.

4. (3 + 1)-РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

В этом разделе мы перепишем основные формулы, используя явное выделение одной из четырех координат $x^\mu = (x^0, x^k)$, $k = 1, 2, 3$. В случае лоренцевой сигнатуры это означает отделение времени x^0 от пространственных координат x^k . В евклидовой формулировке, которой мы следуем в этой работе, такое выделение одной координаты имеет более условный характер, однако, как я уже упомянул выше, переход к лоренцевой сигнатуре является почти автоматическим.

Итак, мы имеем набор динамических переменных f_0^A, f_k^A , $k = 1, 2, 3$. По отношению к трехмерным координатным преобразованиям, полученным из четырехмерных $\epsilon^\mu(x)$ при ограничениях $\epsilon^0(x) = 0$, $\partial_0 \epsilon^i(x) = 0$, эти переменные дают набор ковариантных векторов $\delta f_k^A = -\partial_k \epsilon^l f_l^A - \epsilon^l \partial_l f_k^A$ и скаляров $\delta f_0^A = -\epsilon^l \partial_l f_0^A$. Введем трехмерную метрику $\gamma_{ik} = f_i^A f_k^A$; пусть γ^{ik} – соответствующий контравариантный тензор, $\gamma^{ik} \gamma_{ln} = \delta_n^i$. Компоненты g^{ik} четырехмерной метрики и ее определитель выглядят так:

$$g^{ik} = \gamma^{ik} + \frac{g^{0i} g^{0k}}{g^{00}}, \quad g = \frac{\gamma}{g^{00}},$$

где $\gamma = \det \gamma_{ik}$.

Далее мы увидим, что вместо f_0^A удобнее использовать соответствующее контравариантное поле $f^{0A} = g^{00} f_0^A + g^{0k} f_k^A$ и считать динамическими переменными набор f_k^A, g^{0k}, g^{00} и f^{0A} . Полное число компонент в этом наборе равно 44, однако они удовлетворяют четырем связям $g^{00} = f^{0A} f^{0A}$, $f^{0A} f_k^A = 0$, так что число независимых переменных равно 40.

Запишем функцию Лагранжа в виде

$$\sqrt{g} S = \Sigma + \mathcal{H},$$

где в Σ собраны члены с производной по x^0 , а $\mathcal{H}$ этих производных не содержит. Замечательно, что производные по x^0 входят в Σ линейно,

$$\Sigma = 2\sqrt{g} \Pi^{AB} g^{\mu l} (\partial_l f_\mu^A \partial_0 f^{0B} - \partial_l f^{0A} \partial_0 f_\mu^B),$$

и $\mathcal{H}$ представляет собой квадратичную форму от пространственных производных,

$$\mathcal{H} = \sqrt{g} g^{k\sigma} g^{l\rho} (\partial_k f_\sigma^A \partial_l f_\rho^B - \partial_l f_\sigma^A \partial_k f_\rho^B).$$

Мы можем интерпретировать Σ как 1-форму при подстановке $\partial_0 f_\mu^A \rightarrow df_\mu^A$. Тогда функция Лагранжа приобретает канонический вид: 1-форма + 0-форма dt . Общий подход к приведению таких лагранжианов к обобщенному гамильтонову виду описан в работе [11] (см. также [12]). Мы применим этот подход к нашему примеру. Как показано в [11], при таком приведении можно использовать уравнения движения, не содержащие производных по времени. В нашем случае такими уравнениями являются соотношения

$$\Omega_{mn}^0 = \Omega_{nm}^0, \quad \Omega_{mn}^i = \Omega_{nm}^i.$$

Итак, приступим к приведению, начиная с 1-формы Σ . Запишем ее более подробно:

$$\begin{aligned} \Sigma = 2\sqrt{g} \Pi^{AB} \Bigg[& \left(\gamma^{ml} + \frac{g^{0m} g^{0l}}{g^{00}} \right) (\partial_l f_m^A \partial_0 f^{0B} - \partial_l f^{0A} \partial_0 f_m^B) + \\ & + g^{0l} (\partial_l f_0^A \partial_0 f^{0B} - \partial_l f^{0A} \partial_0 f_0^B) \Bigg]. \end{aligned}$$

Мы видим, что коэффициенты при g^{0l} содержат комбинации

$$\begin{aligned} \frac{g^{0m}}{g^{00}} \partial_l f_m^A + \partial_l f_0^A &= \frac{1}{g^{00}} \partial_l f^{0A} - \frac{1}{g^{00}} (\partial_l g^{0m} f_m^A + \partial_l g^{00} f_0^A), \\ \frac{g^{0m}}{g^{00}} \partial_0 f_m^A + \partial_0 f_0^A &= \frac{1}{g^{00}} \partial_0 f^{0A} - \frac{1}{g^{00}} (\partial_0 g^{0m} f_m^A + \partial_0 g^{00} f_0^A), \end{aligned}$$

и вторые слагаемые в правых частях обращаются в ноль при действии на них проектора Π^{AB} . В результате мы приходим к удовлетворительному выражению

$$\Sigma = 2\sqrt{g} \Pi^{AB} \gamma^{kl} (\partial_l f_k^A \partial_0 f^{0B} - \partial_l f^{0A} \partial_0 f_k^B).$$

Перейдем теперь к 0-форме $\mathcal{H}$. Разделим сумму по ρ и σ на четыре в соответствии с разделением

$$(\sigma, \rho) = (0, 0), (m, 0), (0, n), (m, n).$$

Слагаемое $(0, 0)$ исчезает вследствие антисимметрии. Слагаемые $(m, 0)$ и $(0, n)$ после замены значков суммирования совпадают и дают

$$Q_1 = 2\sqrt{g} \Pi^{AB} \gamma^{ln} g^{k0} (\partial_k f_0^A \partial_l f_n^B - \partial_l f_0^A \partial_k f_n^B).$$

Наконец, слагаемое (m, n) можно записать в виде

$$Q_2 = \sqrt{g} \Pi^{AB} g^{km} g^{ln} S_{kl, mn}^{AB},$$

где

$$S_{kl, mn}^{AB} = \partial_k f_m^A \partial_l f_n^B - \partial_k f_n^A \partial_l f_m^B.$$

Выражая g^{km} через γ^{km} , g^{k0} , g^{0m} , мы получаем $Q_2 = Q_3 + Q_4$, где

$$Q_3 = \sqrt{g} \Pi^{AB} \gamma^{km} \gamma^{ln} S_{kl,mn}^{AB}, \quad Q_4 = 2\sqrt{g} \frac{g^{0k}}{g^{00}} \gamma^{ln} g^{0m} S_{kl,mn}^{AB}.$$

Собирая вместе Q_1 и Q_4 и используя свойство проектора Π^{AB} , уже объясненное выше, мы имеем

$$Q_1 + Q_4 = 2\sqrt{g} \frac{g^{0k}}{g^{00}} \Pi^{AB} \gamma^{ln} (\partial_k f^{0A} \partial_l f_n^B - \partial_l f^{0A} \partial_k f_n^B).$$

Итак, мы получили

$$\mathcal{H} = T_0 + T_1, \quad T_1 = Q_1 + Q_4, \quad T_0 = Q_3.$$

В формулы, как и в Σ , входят проектор Π^{AB} и переменные f_k^A , f^{0A} , g^{i0} , g^{0n} и g^{00} . Теперь мы должны преобразовать проектор. Имеем

$$\begin{aligned} \Pi^{AB} &= \delta^{AB} - g^{\mu\nu} f_\mu^A f_\nu^B = \\ &= \delta^{AB} - g^{ik} f_i^A f_k^B - g^{i0} f_i^A f_0^B - g^{0k} f_0^A f_k^B - g^{00} f_0^A f_0^B = \\ &= \delta^{AB} - \gamma^{ik} f_i^A f_k^B - \left(\frac{g^{0i} g^{0k}}{g^{00}} f_i^A f_k^B + g^{0k} f_0^A f_k^B + g^{i0} f_i^A f_0^B + f_0^A f_0^B g^{00} \right). \end{aligned}$$

Два первых слагаемых в правой части определяют семимерный вертикальный проектор. Остальные слагаемые можно переписать в виде

$$\frac{1}{g^{00}} (g^{0i} f_i^A + g^{00} f_0^A) (g^{0k} f_k^B + g^{00} f_0^B) = \frac{1}{g^{00}} f^{0A} f^{0B},$$

так что окончательно получаем

$$\Pi^{AB} = \delta^{AB} - \gamma^{ik} f_i^A f_k^B - \frac{1}{g^{00}} f^{0A} f^{0B}.$$

Последнее слагаемое здесь дает одномерный проектор в силу условия нормировки для f^{0A} .

Итак, мы выразили Σ и $\mathcal{H}$ через выбранный набор динамических переменных. Подставим теперь последнее выражение для проектора Π^{AB} в Σ и $\mathcal{H}$. Начнем с Σ и рассмотрим по очереди три выражения, соответствующие трем слагаемым в проекторе Π^{AB} . Первое имеет вид

$$\Sigma_1 = 2\sqrt{g} \gamma^{kl} (\partial_l f_k^A \partial_0 f^{0A} - \partial_l f^{0A} \partial_0 f_k^A).$$

Запишем множитель в круглых скобках как

$$\partial_0 (\partial_l f_k^A f^{0A}) - \partial_l (\partial_0 f_k^A f^{0A}) = \partial_0 \Omega_{kl}^0 - \partial_l \Omega_{k0}^0.$$

Получаем

$$\Sigma_1 = 2\sqrt{g} \gamma^{kl} (\partial_0 \Omega_{kl}^0 - \partial_l \Omega_{k0}^0).$$

Первое слагаемое здесь имеет форму, почти совпадающую с формой Дарбу.

Перейдем ко второму вкладу в Σ :

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= -2\sqrt{g}\gamma^{kl}\gamma^{mn}[(f_m^A\partial_l f_k^A)(f_n^B\partial_0 f^{0B}) - (f_m^A\partial_l f^{0A})(f_n^B\partial_0 f_k^B)] = \\ &= 2\sqrt{g}\gamma^{kl}\gamma^{mn}(\omega_{m,kl}\Omega_{n0}^0 - (f_n^B\partial_0 f_k^B)\Omega_{ml}^0).\end{aligned}$$

Здесь я использовал ортогональность f_k^A и f_0^A ,

$$f_n^B\partial_0 f^{0B} = -\partial_0 f_n^B f^{0B} = -\Omega_{n0}^0, \quad f_m^A\partial_l f^{0A} = -\partial_l f_m^A f^{0A} = -\Omega_{ml}^0,$$

и ввел трехмерную связность $\omega_{m,kl} = f_m^A\partial_l f_k^A$.

Наконец, последний вклад в Σ имеет вид

$$\Sigma_3 = -\sqrt{g}\gamma^{kl}\frac{1}{g^{00}}(\Omega_{kl}^0\partial_0 g^{00} - \partial_l g^{00}\Omega_{k0}^0).$$

Я использовал здесь соотношения

$$f^{0A}\partial_0 f^{0A} = \frac{1}{2}\partial_0 g^{00}, \quad f^{0A}\partial_l f^{0A} = \frac{1}{2}\partial_l g^{00}.$$

Соберем слагаемые, содержащие Ω_{k0}^0 . Пусть

$$\Lambda = 2\sqrt{g}\gamma^{kl}\left(-\partial_l\Omega_{k0}^0 + \omega_{kl}^m\Omega_{m0}^0 + \frac{1}{2}\frac{\partial_l g^{00}}{g^{00}}\Omega_{k0}^0\right);$$

сравним это выражение с

$$\begin{aligned}\partial_l(\sqrt{g}\gamma^{kl}\Omega_{k0}^0) &= \partial_l\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g^{00}}}\gamma^{kl}\Omega_{k0}^0\right) = \\ &= \sqrt{g}\left(\omega_{ml}^m - \frac{1}{2}\frac{\partial_l g^{00}}{g^{00}}\right)\gamma^{kl}\Omega_{k0}^0 + \sqrt{g}\partial_l\gamma^{kl}\Omega_{k0}^0 + \sqrt{g}\gamma^{kl}\partial_l\Omega_{k0}^0.\end{aligned}$$

Связность ω_{ml}^k совместна с метрикой γ_{ik} , так что

$$\partial_l\gamma^{kl} + \omega_{ml}^k\gamma^{ml} + \omega_{ml}^l\gamma^{mk} = 0.$$

В результате мы получаем

$$\Lambda = -2\partial_l(\sqrt{g}\gamma^{kl}\Omega_{k0}^0) + 2\sqrt{g}\gamma^{kl}\Omega_{k0}^0(\omega_{ml}^m - \omega_{lm}^m).$$

Последнее слагаемое исчезает в силу упомянутых выше уравнений движения. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned}\Omega_{ik}^m &= f^{mA}\partial_k f_i^A = g^{m\sigma}f_\sigma^A\partial_k f_i^A = \\ &= \left(\gamma^{mn} + \frac{g^{m0}g^{n0}}{g^{00}}\right)f_n^A\partial_k f_i^A + g^{m0}f_0^A f_i^A = \omega_{ik}^m + \frac{g^{m0}}{g^{00}}\Omega_{ik}^0,\end{aligned}$$

и ω_{ik}^m симметрично по отношению к перестановке $i \leftrightarrow k$ вместе с Ω_{ik}^m и Ω_{ik}^0 .

Итак, мы получили, что Λ представляет собой выражение типа дивергенции и может быть опущено в действии.

Теперь рассмотрим первое слагаемое в Σ_2 . В силу симметрии Ω_{kl}^0 мы можем записать

$$\gamma^{kl}\gamma^{mn}\Omega_{ml}^0(f_n^A\partial_0f_k^A) = \frac{1}{2}\gamma^{kl}\gamma^{mn}(f_n^A\partial_0f_k^A + f_k^A\partial_0f_n^A)\Omega_{ml}^0 = -\frac{1}{2}\partial_0\gamma^{ml}\Omega_{ml}^0.$$

В результате всех этих преобразований мы получаем

$$\Sigma = \sqrt{g} \left(2\gamma^{kl}\partial_0\Omega_{kl} + \partial_0\gamma^{kl}\Omega_{kl}^0 - \gamma^{kl}\Omega_{kl} \frac{\partial_0 g^{00}}{g^{00}} \right) = q^{kl}\partial_0\Pi_{kl} + \partial_0(\sqrt{g}\gamma^{kl}\Omega_{kl}),$$

где

$$q^{kl} = \gamma\gamma^{kl}, \quad \Pi_{kl} = \frac{1}{\sqrt{g}g^{00}}\Omega_{kl}^0.$$

Полную производную по x^0 можно исключить из действия. Таким образом, 1-форма Σ получает явно канонический вид:

$$\Sigma = q^{ik} d\Pi_{ik}$$

с каноническими переменными q^{ik} и Π_{ik} . Их конформные веса, равные $+1$ для q^{ik} и $-1/2$ для Π_{ik} , естественно связаны с нормировкой δ -функции. Эти канонические пары впервые появились в работе [13]. В работах [2] и [14] использовались другие веса.

Теперь перейдем к 0-форме $\mathcal{H}$. Начнем с выражения для T_1 ,

$$T_1 = 2\sqrt{g} \frac{g^{k0}}{g^{00}} \Pi^{AB} \gamma^{lm} (\partial_k f^{0A} \partial_l f_m^B - \partial_l f^{0A} \partial_k f_m^B),$$

и опять рассмотрим три вклада в соответствии с представлением проектора Π^{AB} . В первом слагаемом используем равенства

$$\partial_k f^{0A} \partial_l f_m^A - \partial_l f^{0A} \partial_k f_m^A = \partial_k (f^{0A} \partial_l f_m^A) - \partial_l (f^{0A} \partial_k f_m^A) = \partial_k \Omega_{ml}^0 - \partial_l \Omega_{mk}^0,$$

во втором получим

$$-\gamma^{pq} [(f_p^A \partial_k f^{0A})(f_q^B \partial_l f_m^B) - (f_p^A \partial_l f^{0A})(f_q^B \partial_k f_m^B)] = \omega_{ml}^p \Omega_{pk}^0 - \omega_{mk}^p \Omega_{pl}^0,$$

а третье дает

$$-\frac{1}{g^{00}} [(f^{0A} \partial_k f^{0A})(f^{0B} \partial_l f_m^B) - (f^{0A} \partial_l f^{0A})(f^{0B} \partial_k f_m^B)] = -\frac{1}{2} \frac{\partial_k g^{00}}{g^{00}} \Omega_{ml}^0 + \frac{1}{2} \frac{\partial_l g^{00}}{g^{00}} \Omega_{mk}^0.$$

Собрав все слагаемые вместе, имеем

$$T_1 = 2 \frac{g^{k0}}{g^{00}} \sqrt{g} \gamma^{lm} \left[\partial_k \Omega_{ml}^0 - \partial_l \Omega_{mk}^0 - \frac{1}{2} \frac{\partial_k g^{00}}{g^{00}} \Omega_{ml}^0 + \frac{1}{2} \frac{\partial_l g^{00}}{g^{00}} \Omega_{mk}^0 + \omega_{ml}^p \Omega_{pk}^0 + \omega_{mn}^p \Omega_{pl}^0 \right].$$

Используя симметрию ω_{ml}^p и Ω_{pl}^0 , запишем T_1 в виде $T_1 = \lambda^k \mathcal{H}_k$, где введены множители Лагранжа $\lambda^k = g^{0k}/g^{00}$ и связи

$$\mathcal{H}_k = 2[\nabla_k(q^{ml}\Pi_{ml}) - \nabla_l(q^{ml}\Pi_{mk})].$$

Здесь использованы трехмерные ковариантные производные

$$\nabla_k T_m^l = \partial_k T_m^l + \omega_{mk}^l T_m^n - \omega_{mk}^n T_n^l.$$

Теперь перейдем к T_0 . Трехмерный проектор ${}^3\Pi^{AB}$, участвующий в Π^{AB} , дает вклад

$$\sqrt{g} \gamma^{km} \gamma^{ln} {}^3\Pi^{AB} S_{kl,mn}^{AB} = \sqrt{g} S^{(3)},$$

где $S^{(3)}$ – скалярная кривизна метрики γ_{ik} и связности ω_{nl}^m . Последнее слагаемое в Π^{AB} дает

$$-\frac{f^{0A} f^{0B}}{g^{00}} S_{kl,mn}^{AB} = -\frac{1}{g^{00}} (\Omega_{mk}^0 \Omega_{nl}^0 - \Omega_{nk}^0 \Omega_{ml}^0).$$

Собирая все слагаемые вместе, получаем

$$T_0 = \lambda^0 \mathcal{H}_0,$$

где множитель Лагранжа λ^0 дается выражением

$$\lambda^0 = \frac{\sqrt{g}}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g^{00}} \gamma} = \frac{1}{\sqrt{g} g^{00}},$$

а связь $\mathcal{H}_0$ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{H}_0 = \gamma S^{(3)} - q^{km} q^{ln} (\Pi_{km} \Pi_{ln} - \Pi_{lm} \Pi_{kn}).$$

Итак, мы выразили действие через динамические переменные q^{ik} , Π_{ik} и множители Лагранжа λ^0 , λ^k . Другими словами, из 40 динамических компонент f_α^A у нас осталось 16, а именно 6 канонических пар и четыре множителя Лагранжа, и действие имеет вид

$$A = \int d^3x \int (q^{ik} \Pi_{ik} + \lambda^0 \mathcal{H}_0 + \lambda^k \mathcal{H}_k) dt,$$

эквивалентный формулам из работ [2] и [14].

5. $O(6)$ -СИММЕТРИЯ

Здесь я приведу предварительное обсуждение возможного обобщения теории Эйнштейна путем введения новых полей. Естественная идея состоит в использовании вертикального пространства, дополняющего в $\mathbb{R}^{10}$ базис, образованный полями f_μ^A . Пусть e_a^A , $a = 1, \dots, 6$, – ортонормированная система векторов, ортогональных векторам f_μ^A :

$$f_\mu^A e_a^A = 0, \quad e_a^A e_b^A = \delta_{ab}.$$

Будем считать набор e_a^A скалярами по отношению к координатным преобразованиям $\delta e_a^A = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda e_a^A$. Тогда соотношения ортогональности ковариантны. Они также инвариантны по отношению к локальным вращениям $e_a^A \rightarrow O_{ab} e_b^A$, $f_\mu^A \rightarrow f_\mu^A$, где O_{ab} – ортогональные матрицы, образующие группу $O(6)$.

Проектор Π^{AB} записывается как $\Pi^{AB} = e_a^A e_a^B$, что позволяет переписать основной лагранжиан $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} (f^{\mu A} f^{\nu B} - f^{\nu A} f^{\mu B}) \partial_\mu e_a^A \partial_\nu e_a^B,$$

напоминающем сигма-модель. Производные $\partial_\mu e_a^A$ здесь можно заменить на $O(6)$ -ковариантные, если ввести связность $\Gamma_{\mu,ab} = \partial_\mu e_a^A e_b^A$. Действительно,

$$\nabla_\mu^\Gamma e_a^A = \partial_\mu e_a^A - \Gamma_{\mu,ab} e_b^A = \partial_\mu e_a^B (\delta^{AB} - e_b^A e_b^B) = \partial_\mu e_a^B f^{\sigma B} f_\sigma^A$$

и, таким образом,

$$f^{\nu A} \nabla_\mu^\Gamma e_a^A = f^{\nu A} \partial_\mu e_a^A.$$

Следующий естественный шаг – введение набора скалярных полей X^A таких, что $\delta X^A = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda X^A$, и соответствующих горизонтальных и вертикальных компонент – векторного поля $Y_\mu = X^A f_\mu^A$ и набора скаляров $Z_a = e_a^A X^A$. Найдём их ковариантные производные:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu Y_\nu &= \partial_\mu (f_\nu^A X^A) - f^{\beta B} \partial_\mu f_\nu^B f_\beta^A X^A = f_\nu^A \partial_\mu X^A + \partial_\mu f_\nu^B (\delta^{AB} - f^{\beta B} f_\beta^A) X^A = \\ &= f_\nu^A \partial_\mu X^A + \Pi^{AB} \partial_\mu f_\nu^B X^A = f_\nu^A \partial_\mu X^A + b_{\nu\mu}^A X^A. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \nabla_\mu^\Gamma Z_a &= \partial_\mu Z_a - \Gamma_{\mu,ab} Z_b = e_a^A \partial_\mu X^A + \partial_\mu e_a^A (\delta^{AB} - \Pi^{AB}) X^B = \\ &= e_a^A (\partial_\mu X^A - b_\mu^{\sigma A} Y_\sigma). \end{aligned}$$

Заметим, что в членах без производных от X^A участвует вертикальная компонента $\Pi^{AB} X^B$ в $\nabla_\mu Y_\nu$ и горизонтальная компонента Y_ν в $\nabla_\mu^\Gamma Z_a$. Оба этих слагаемых содержат тензор $b_{\nu\mu}^A$. Вклад в ковариантную комбинацию

$$\sqrt{g} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \nabla_\mu Y_\alpha \nabla_\nu Y_\beta,$$

не содержащий производных от X^A , имеет вид

$$\sqrt{g} (b_\mu^A b_\nu^B - b_\mu^B b_\nu^A) X^A X^B,$$

и мы получим гравитационное действие, если предположим, что у нас есть аномальная функция Грина

$$\langle X^A X^B \rangle = \frac{1}{\kappa^2} \Pi^{AB}.$$

Конечно, в настоящее время это замечание есть всего лишь спекуляция. Дальнейшая работа должна показать, насколько эта идея или ее модификация имеют смысл. На этом замечании о такой перспективе я закончу данную работу.

Благодарности. Я хочу поблагодарить В. Франке и в особенности С. Пастона за критическое обсуждение этой работы и С. Дезера за моральную поддержку. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00638, 09-01-93108-НЦНИЛ) и Программы президиума РАН “Математические проблемы нелинейной динамики”.

Список литературы

- [1] A. Einstein, *Ann. Phys.*, **354:7** (1916), 769–822; **14:Suppl. 1** (2005), 517–571.
- [2] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A*, **246:1246** (1958), 333–343.
- [3] Л. Д. Фаддеев, В. Н. Попов, *УФН*, **111** (1973), 427–450.

- [4] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:21 (1967), 1264–1266.
- [5] A. Salam, “Weak and Electromagnetic Interactions”, *Elementary Particle Theory*, Proc. Nobel Symposium (Lerum, Sweden, 1968), ed. N. Svartholm, Almquist and Wiksell, Stockholm, 1968, 367–377.
- [6] S. L. Adler, *Rev. Modern Phys.*, **54**:3 (1982), 729–766.
- [7] S. Deser, F. A. E. Pirani, D. C. Robinson, *Phys. Rev. D*, **14**:12 (1976), 3301–3303.
- [8] С. А. Пастон, В. А. Франке, *ТМФ*, **153**:2 (2007), 271–288, arXiv: 0711.0576.
- [9] L. D. Faddeev, *New variables for the Einstein theory of gravitation*, arXiv: 0911.0282.
- [10] L. D. Faddeev, *3 + 1 decomposition in the new action for the Einstein theory of gravitation*, arXiv: 1003.2311.
- [11] L. D. Faddeev, R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:17 (1988), 1692–1694.
- [12] Л. Д. Фаддеев, *УФН*, **136**:3 (1982), 435–457.
- [13] J. S. Schwinger, *Phys. Rev.*, **130**:3 (1963), 1253–1258.
- [14] R. L. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Phys. Rev.*, **117**:6 (1960), 1595–1602.

Поступила в редакцию 6.09.2010