Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Д. С. Миненков, О фазовом сдвиге в анзаце Кузмака–Уизема, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 3, 350–365

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 07:43:35

© 2011 г. С. Ю. Доброхотов^{*†}, Д. С. Миненков^{*†}

О ФАЗОВОМ СДВИГЕ В АНЗАЦЕ КУЗМАКА–УИЗЕМА

Рассмотрены однофазовые (формальные) асимптотические решения в форме Кузмака–Уизема для нелинейного уравнения Клейна–Гордона и уравнения Кортевега–де Фриза. В этом случае главный член асимптотического решения представляется в форме $X(S(x, t)/h + \Phi(x, t), I(x, t), x, t) + O(h)$, где $h \ll 1$ – малый параметр, фаза $S(x, t)$ и медленно меняющиеся параметры $I(x, t)$ находятся из системы “осредненных” уравнений Уизема. Уравнение для фазового сдвига $\Phi(x, t)$ получается из исследования второй поправки к главному члену. При этом соответствующая процедура нахождения фазового сдвига неравномерна относительно перехода к линейному (и слабонелинейному) случаю. Наше наблюдение, по существу вытекающее из работ Хабермана и соавторов, состоит в том, что если включить фазовый сдвиг Φ в фазу и скорректировать параметр $\tilde{I}$, положив $\tilde{S} = S + h\Phi + O(h^2)$, $\tilde{I} = I + hI_1 + O(h^2)$, то функции $\tilde{S}(x, t, h)$, $\tilde{I}(x, t, h)$ будут решениями задачи Коши для той же системы Уизема, но с измененными начальными условиями. Эти функции уже полностью определяют главный член асимптотики, который равен $X(\tilde{S}(x, t, h)/h, \tilde{I}(x, t, h), x, t) + O(h)$.

Ключевые слова: быстроосциллирующие однофазовые асимптотики, нелинейные уравнения, метод Уизема, фазовый сдвиг.

1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения Клейна–Гордона

$$h^2(u_{tt} - c^2(x, t)\Delta u) + V_u(u, x, t) = 0 \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$u(x, t, h)|_{t=0} = u^0(x), \quad hu_t(x, t, h)|_{t=0} = v^0(x). \quad (1.2)$$

Здесь $V(u, x, t)$, $c(x, t)$, $u^0(x)$ и $v^0(x) \in \mathbb{R}$ – гладкие функции, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < h \ll 1$ – малый параметр. От функции $V(u, x, t)$ потребуем выполнения условия, обеспечивающего существование быстроосциллирующих вещественнозначных асимптотических решений уравнения (1.1) [1]: существуют гладкие функции $a(x, t) < b(x, t)$

^{*}Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
E-mail: dobr@ipmnet.ru, minenkov_ds@list.ru

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

такие, что при каждом фиксированных x, t на интервале $a < E < b$ уравнение $V(u, x, t) = E$ имеет по крайней мере два решения $u_{\min}(x, t, E)$, $u_{\max}(x, t, E)$, $u_{\min} < u_{\max}$, гладко зависящие от x, t, E и такие, что $V_u(u_{\min}, x, t) \neq 0$, $V_u(u_{\max}, x, t) \neq 0$ и $V(u, x, t) < E$ при $u_{\min} < u < u_{\max}$.

Потенциал V и начальные условия u^0, v^0 могут зависеть от вещественного параметра (или параметров) ε , например можно рассмотреть потенциал

$$V(u, x, t, \varepsilon) = \frac{1}{2} \omega(x, t) u^2 + \varepsilon V_1(u, x, t), \quad V_1(u, x, t) = O(u^3).$$

Параметр ε может быть связан с параметром h (в простейшем случае $\varepsilon = h$). Обычно случай

$$V = \frac{1}{2} \omega(x, t) u^2 + h V_1(u, x, t)$$

называют слабонелинейным, в противоположность сильнонелинейному случаю, когда $\partial^3 V / \partial u^3|_{h=0} \neq 0$. Это разделение носит условный характер и зависит от физической постановки задачи и начальных условий: при малых начальных отклонениях начальных условий от равновесного состояния можно сделать замену искомой функции и “переписать” задачу в слабонелинейной постановке (ср. [2]). Далее будем считать, что начальные условия (1.2) не зависят от h , и для упрощения обозначений зависимость V от ε будем опускать.

Анзац Кузмага–Уизема [1], [3]–[6] позволяет построить некоторые быстроосциллирующие (формальные¹⁾) асимптотические решения уравнения (1.1). В так называемом однофазовом случае этот анзац определяется асимптотическим разложением

$$u(x, t, h) = \tilde{X} \left(\frac{S(x, t)}{h} + \Phi(x, t), x, t, h \right), \quad (1.3)$$

$$\tilde{X}(\theta, x, t, h) = X(\theta, x, t) + h X_1(\theta, x, t) + h^2 X_2(\theta, x, t) + \dots,$$

где $X(\theta, x, t)$, $X_m(\theta, x, t)$ – гладкие функции, 2π -периодические по переменной θ . Функция $X(\theta, x, t)$, определяющая главный член асимптотики, является решением обыкновенного дифференциального уравнения по “быстрой” переменной θ при “замороженных” x, t (уравнения Ньютона):

$$\Omega^2(x, t) X_{\theta\theta} + V_u(X, x, t) = 0, \quad (1.4)$$

где $S_t^2 - c^2(x, t)(\nabla S)^2 = \Omega^2(x, t)$.

Это уравнение интегрируется в квадратурах, причем его решение $X(\theta, x, t)$ без ограничения общности можно выбрать четной по θ функцией (см. [1], [2]):

$$\theta = \pm \Omega(x, t) \int_{u_{\min}}^{X(\theta, x, t)} \frac{dz}{\sqrt{2(E(x, t) - V(z, x, t))}}, \quad (1.5)$$

где $E(x, t)$ – “константа интегрирования”, знак “+” берется для $\theta \geq 0$, знак “–” – для $\theta \leq 0$; здесь и далее $u = u_{\min}(x, t)$, $u = u_{\max}(x, t)$, $u_{\min} < u_{\max}$, – решения уравнения $E(x, t) = V(u, x, t)$. Вообще говоря, в этой формуле к аргументу θ функции $X(\theta, x, t)$

¹⁾То есть такие функции, которые при подстановке в исходное уравнение дают малую невязку.

надо добавить вторую “константу интегрирования” $C_0(x, t)$, но мы учитываем ее в фазовом сдвиге в (1.3), поэтому без ограничения общности ее можно положить равной нулю.

Наряду с E для параметризации решения уравнения (1.4) удобно использовать переменную типа действия:

$$I(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \sqrt{2(E(x, t) - V(z, x, t))} dz. \quad (1.6)$$

Тогда $E(x, t) = E(I(x, t), x, t)$ и решение имеет вид $X(\theta, x, t) = \mathcal{X}(\theta, I(x, t), x, t)$. Необходимое условие существования 2π -периодического решения $X(\theta, x, t)$ уравнения (1.4) определяет зависимость Ω от параметра I (дисперсионное соотношение):

$$\Omega(x, t) = \Omega(I(x, t), x, t), \quad \Omega(I, x, t) \equiv \pi \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{2(E(I, x, t) - V(z, x, t))}}.$$

Чтобы определить *главный член асимптотики* надо найти функцию $\mathcal{X}(\theta, I, x, t)$, определить фазу $S(x, t)$, функцию $I(x, t)$, определяющую “нелинейную амплитуду”, и фазовый сдвиг $\Phi(x, t)$, тогда

$$u(x, t, h) = \mathcal{X}\left(\frac{S(x, t)}{h} + \Phi(x, t), I(x, t), x, t\right) + O(h). \quad (1.7)$$

Фаза $S(x, t)$ и параметр $I(x, t)$ определяются из системы Уизема: условия 2π -периодичности функции $\mathcal{X}$ (дисперсионного соотношения) и условия существования 2π -периодической поправки $X_1(\theta, x, t)$ к главному члену (условия ортогональности, см. [1], [3]–[8])

$$S_t^2 - c^2(x, t)(\nabla S)^2 = \Omega(I, x, t), \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{I}{\Omega(I, x, t)} S_t \right] - c^2(x, t) \left\langle \nabla, \frac{I}{\Omega(I, x, t)} \nabla S \right\rangle = 0, \quad (1.9)$$

операторы дифференцирования в последнем уравнении действуют также на функцию $I(x, t)$.

Уравнение для определения фазового сдвига $\Phi(x, t)$ записывается по-разному в слабонелинейном ($\Omega_I(I, x, t) \equiv 0$) и в сильнонелинейном ($\Omega_I(I, x, t) \neq 0$) случаях. Это различие имеет “топологическую природу”: в слабонелинейном и линейном случаях есть два условия, гарантирующих существование 2π -периодической функции X_1 в разложении (1.3), а в сильнонелинейном случае – только одно. Поэтому в слабонелинейном случае уравнение на фазовый сдвиг получается из исследования первого приближения и является уравнением первого порядка по времени:

$$S_t \Phi_t - c^2(x, t) S_x \Phi_x = 0, \quad \Phi(x, t)|_{t=0} = \Phi^0(x). \quad (1.10)$$

В сильнонелинейном случае уравнение на фазовый сдвиг получается из исследования второго приближения (из условия существования 2π -периодической второй

поправки $X_2(\theta, x, t)$ к главному члену) и является уравнением второго порядка по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{I}{\Omega} \Phi_t \right] - c^2 \left\langle \nabla, \frac{I}{\Omega} \nabla \Phi \right\rangle + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{I\Omega_I}{\Omega^2} \right) I_1 S_t \right] - c^2 \left\langle \nabla, \left(\frac{1}{\Omega} - \frac{I\Omega_I}{\Omega^2} \right) I_1 \nabla S \right\rangle = 0, \quad (1.11)$$

где

$$I_1 \equiv \frac{S_t \Phi_t - c^2 \langle \nabla S, \nabla \Phi \rangle}{\Omega \Omega_I}, \quad (1.12)$$

через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение. Здесь и далее считаем $\Omega = \Omega(I, x, t)$, $c = c(x, t)$.

Начальные условия $S(x, t)|_{t=0} = S^0(x)$, $I(x, t)|_{t=0} = I^0(x)$, $\Phi(x, t)|_{t=0} = \Phi^0(x)$ определяются в результате использования анзаца в (1.2) (аналогичный вывод для линейного осциллятора см. в работе [9]). Если функции u^0 , v^0 не зависят от h , то следует положить $S^0(x) = 0$. В случае нерегулярной зависимости u^0 , v^0 от h (быстроосциллирующие начальные условия) можно получать однофазовые решения задачи Коши с начальными условиями только специального “структурно подобного” вида (см. замечание 1 ниже). Функции $I^0(x)$, $\Phi^0(x)$ находятся из системы

$$u^0(x) = \mathcal{X}(\Phi^0(x), I^0(x), x, 0), \quad v^0(x) = \Omega^0(x) \mathcal{X}_\theta(\Phi^0(x), I^0(x), x, 0). \quad (1.13)$$

Здесь и далее $\Omega^0(x) = \Omega(I^0(x), x, 0)$, $\Omega_I^0(x) = \Omega_I(I^0(x), x, 0)$.

Поскольку в сильнонелинейном случае уравнение на фазовый сдвиг имеет второй порядок, нужно дополнительно определить значение производной $\Phi_t(x, t)$ в начальный момент:

$$\begin{aligned} \Phi_t(x, t)|_{t=0} &= \Omega_I^0(x) I_1^0(x), \\ I_1^0(x) &\equiv -\frac{1}{(\Omega^0(x))^2} \int_0^{\Phi^0(x)} V_t(X(\theta, x, 0)) - \langle V_t \rangle(x, 0) d\theta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь и далее $\langle \cdot \rangle$ означает среднее значение функции по переменной θ :

$$\langle V_t \rangle(x, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_t(X(\theta, x, t), x, t) d\theta.$$

Мы хотим обратить внимание на тот факт (по существу вытекающий из статьи Хабермана [3]), что уравнение для фазового сдвига можно не решать, а учесть фазовый сдвиг, включив его в фазу: $\tilde{S}(x, t, h) = S(x, t) + h\Phi(x, t) + O(h^2)$, и одновременно с этим нужным образом подправив параметр, определяющий “нелинейную амплитуду”: $\tilde{I}(x, t, h) = I(x, t) + hI_1(x, t) + O(h^2)$. При этом для определения функций $\tilde{S}(x, t, h)$, $\tilde{I}(x, t, h)$ нужно использовать ту же самую систему Уизема (1.8), (1.9), и функции $\tilde{S}(x, t, h)$, $\tilde{I}(x, t, h)$ будут полностью определять главный член асимптотики, т. е.

$$u(x, t, h) = \mathcal{X} \left(\frac{\tilde{S}(x, t, h)}{h}, \tilde{I}(x, t, h), x, t \right) + O(h). \quad (1.15)$$

Другими словами, при этом фазовый сдвиг становится равным нулю. Важно также, что при таком подходе асимптотика, по крайней мере по форме, оказывается

равномерной по отношению к переходу от сильнонелинейного к слабонелинейному и линейному случаям. В результате имеем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть существует положительное число t_0 и гладкие функции $a(x, t) < b(x, t)$ такие, что для $t \in [0, t_0]$, $I(x, t) \in [a(x, t), b(x, t)]$ выполнены следующие условия.

1. Существует 2π -периодическое по переменной θ решение $X(\theta, x, t) = \mathcal{X}(\theta, I(x, t), x, t)$ уравнения нулевого приближения (1.4) (задаваемое неявной формулой (1.5) с параметром типа действия (1.6)).

2. Существует решение $\tilde{S}(x, t, h)$, $\tilde{I}(x, t, h)$ задачи Коши для системы Уизе-ма (1.8), (1.9), удовлетворяющее начальным условиям

$$\tilde{S}(x, t, h)|_{t=0} = h\Phi^0(x), \quad (1.16)$$

$$\tilde{I}(x, t, h)|_{t=0} = I^0(x) + hI_1^0(x), \quad (1.17)$$

где поправка $I_1^0(x)$ определена в (1.14).

Тогда для решения исходной задачи Коши (1.1), (1.2) на временах $t \in [0, t_0]$ справедливо представление с “нулевым фазовым сдвигом” (1.15).

Доказательство по существу следует из работ [1], [3], приведем его для полноты изложения, упростив при этом некоторые вычисления с помощью соображения из работы [10].

Используя анзац $u(x, t, h) = \tilde{X}(\theta, x, t, h)$ в исходном уравнении (1.1), получим

$$(S_t^2 + (\nabla S)^2)\tilde{X}_{\theta\theta} + V_u(\tilde{X}, x, t) = -\tilde{f}(\theta, x, t, h), \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\theta, x, t, h) \equiv & h[2(\Phi_t S_t - c^2 \langle \nabla \Phi, \nabla S \rangle)\tilde{X}_{\theta\theta} + \\ & + 2(S_t \tilde{X}_{\theta t} - c^2 \langle \nabla S, \nabla \tilde{X}_\theta \rangle) + (S_{tt} - c^2 \Delta S)\tilde{X}_\theta] + \\ & + h^2[(\Phi_t^2 - c^2 (\nabla \Phi)^2)\tilde{X}_{\theta\theta} + 2(\Phi_t \tilde{X}_{\theta t} - c^2 \langle \nabla \Phi, \nabla \tilde{X}_\theta \rangle) + \\ & + (\Phi_{tt} - c^2 \Delta \Phi)\tilde{X}_\theta + \tilde{X}_{tt} - c^2 \Delta \tilde{X}] + O(h^3). \end{aligned}$$

Приравнявая нулю выражения при разных степенях h , получим цепочку уравнений для определения функций $X(\theta, x, t)$, $X_m(\theta, x, t)$:

$$(S_t^2 - c^2 (\nabla S)^2)X_{\theta\theta} + V'_u(X, x, t) = 0, \quad (1.19)$$

$$\hat{L}X_m \equiv \left[(S_t^2 - c^2 (\nabla S)^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + V''_{uu}(X, x, t) \right] X_m = -f_m, \quad m = 1, \dots, N. \quad (1.20)$$

В первом приближении правая часть (1.20) равна

$$f_1 = 2(S_t \Phi_t - c^2 \langle \nabla S, \nabla \Phi \rangle)X_{\theta\theta} + 2(S_t X_{\theta t} - c^2 \langle \nabla S, \nabla X_\theta \rangle) + (S_{tt} - c^2 \Delta S)X_\theta. \quad (1.21)$$

У однородного уравнения $\hat{L}Z = 0$ имеется два линейно независимых решения [1], [3]:

$$Z^1(\theta, x, t) = \mathcal{X}_\theta(\theta, x, t), \quad Z^2 = \Omega(I, x, t)\mathcal{X}_I(\theta, I, x, t) + \Omega_I(I, x, t)\theta\mathcal{X}_\theta(\theta, I, x, t).$$

В слабонелинейном случае $\Omega_I = 0$, и обе эти функции являются периодическими. Поэтому ядро самосопряженного оператора $\hat{L}$ в пространстве $L_2(S^1)$ на окружности $S^1 = [0, 2\pi]$ состоит из этих функций. Условия ортогональности Z^1 , Z^2 правой

части f_1 в $L_2(S^1)$ приводит к уравнениям (1.9), (1.10). В сильнонелинейном случае $\Omega_I \neq 0$ и функция Z^2 не является периодической, поэтому на каждом шаге процедуры теории возмущений мы имеем всего одно условие ортогональности. В частности, условие ортогональности Z^1 и f_1 дает лишь уравнение (1.9), а уравнение для фазового сдвига следует из условия ортогональности при рассмотрении второго приближения и включает, вообще говоря, X_1 . Поэтому прямое исследование этого условия ортогональности оказывается весьма непростым, и более эффективным представляется использование следующего соображения (см. [10]). Умножим “полное” уравнение (1.18) на функцию $\tilde{X}_\theta(\theta, x, t, h)$ из ядра оператора $\hat{L}$ и проинтегрируем по θ от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta, x, t, h) \tilde{X}_\theta(\theta, x, t, h) d\theta = \\ &= -h \int_0^{2\pi} [2(S_t \tilde{X}_{\theta t} - c^2 \langle \nabla S, \nabla \tilde{X}_\theta \rangle) + (S_{tt} - c^2 \Delta S) \tilde{X}_\theta] \tilde{X}_\theta d\theta - \\ &\quad - h^2 \int_0^{2\pi} [2(\Phi_t \tilde{X}_{\theta t} - c^2 \langle \nabla \Phi, \nabla \tilde{X}_\theta \rangle) + (\Phi_{tt} - c^2 \Delta \Phi) \tilde{X}_\theta + \tilde{X}_{tt} - c^2 \Delta \tilde{X}] \tilde{X}_\theta d\theta. \end{aligned}$$

Теперь, подставив разложение $\tilde{X} = X + hX_1 + \dots$, получим при каждой степени h^m необходимые условия существования m -й поправки X_m к главному члену. Нетрудно убедиться, что они эквивалентны условиям ортогональности и в то же время имеют более простую структуру. В силу четности функции $X(\theta, x, t)$ по θ некоторые слагаемые после интегрирования дают ноль. В частности, в условие ортогональности для второго приближения входит только X_1^{even} – четная по θ часть функции X_1 . После сокращений нечетных слагаемых условия ортогональности для первого и второго приближений примут вид

$$\int_0^{2\pi} [2(S_t X_{\theta t} - c^2 \langle \nabla S, \nabla X_\theta \rangle) + (S_{tt} - c^2 \Delta S) X_\theta] X_\theta d\theta = 0, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [2(S_t X_{\theta t} - c^2 \langle \nabla S, \nabla X_\theta \rangle) + (S_{tt} - c^2 \Delta S) X_\theta] X_{1\theta}^{\text{even}} d\theta + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} [2(S_t X_{1\theta t}^{\text{even}} - c^2 \langle \nabla S, \nabla X_{1\theta}^{\text{even}} \rangle) + (S_{tt} - c^2 \Delta S) X_{1\theta}^{\text{even}}] X_\theta d\theta + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} [2(\Phi_t X_{\theta t} - c^2 \langle \nabla \Phi, \nabla X_\theta \rangle) + (\Phi_{tt} - c^2 \Delta \Phi) X_\theta] X_\theta d\theta = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Решение уравнения (1.19) задается формулой (1.5). Решение $X_1(\theta, x, t)$ уравнения первого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x, t) &= X_1^{\text{even}}(\theta, x, t) + X_1^{\text{odd}}(\theta, x, t), \\ X_1^{\text{even}}(\theta, x, t) &= \frac{1}{\Omega \Omega_I} (S_t \Phi_t - c^2 \langle \nabla S, \nabla \Phi \rangle) \mathcal{X}_I(\theta, I, x, t) = I_1(x, t) \mathcal{X}_I(\theta, I, x, t), \\ X_1^{\text{odd}} &= C_1(x, t) \mathcal{X}_\theta - \int_0^\theta (Z^1(\theta) Z^2(\eta) - Z^1(\eta) Z^2(\theta)) (-f_1^{\text{odd}}(\eta)) d\eta, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где $f_1^{\text{odd}} = 2(S_t X_{\theta t} - c^2 \langle \nabla S, \nabla X_{\theta} \rangle) + (S_{tt} - c^2 \Delta S) X_{\theta} -$ нечетная составляющая правой части в уравнении первого приближения; функция $I_1(x, t)$ определяется формулой (1.12); $C_1(x, t)$ – некоторая функция (“константа интегрирования”), которая определяется из более высоких приближений и не влияет на главный член асимптотики.

Первое условие ортогональности (1.22) и дисперсионное соотношение (1.8) дают замкнутую систему для определения функций $S(x, t)$ и $I(x, t)$. В сильнонелинейном случае условие ортогональности для второго приближения (1.23) после подстановки в него выражения для X_1^{even} и совершения ряда преобразований (см. [1]) дает уравнение (1.11) для определения фазового сдвига $\Phi(x, t)$. Функции $\mathcal{X}(\theta, I, x, t)$, $S(x, t)$, $I(x, t)$, $\Phi(x, t)$ определяют главный член асимптотики по формуле (1.7).

Заметим, что поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\theta, I(x, t) + hI_1(x, t), x, t) &= \mathcal{X}(\theta, I(x, t), x, t) + hI_1(x, t)\mathcal{X}_I(\theta, I(x, t), x, t) + O(h^2) = \\ &= X(\theta, x, t) + hX_1^{\text{even}}(\theta, x, t) + O(h^2), \end{aligned}$$

то, подставляя в первое условие ортогональности (1.22) вместо $S(x, t)$ и $I(x, t)$ функции $S(x, t) + h\Phi(x, t)$ и $I(x, t) + hI_1(x, t)$ и разлагая по h , в первом приближении получим (1.23).

Рассмотрим возмущенные фазу $\tilde{S}(x, t, h) = S(x, t) + h\delta S(x, t)$ и параметр $\tilde{I}(x, t, h) = I(x, t) + h\delta I(x, t)$. Подставим их вместо $S(x, t)$ и $I(x, t)$ в систему Уизема (1.8), (1.9), получим систему в вариациях для определения поправок $\delta S(x, t)$, $\delta I(x, t)$ к фазе S и параметру I :

$$S_t \delta S_t - c^2 \langle \nabla S, \nabla \delta S \rangle = \Omega_I \delta I + O(h), \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{I}{\Omega} \delta S_t \right] - c^2 \left\langle \nabla, \frac{I}{\Omega} \nabla \delta S \right\rangle + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{\Omega} - \frac{I\Omega_I}{\Omega^2} \right) \delta I S_t \right] - c^2 \left\langle \nabla, \left(\frac{1}{\Omega} - \frac{I\Omega_I}{\Omega^2} \right) \delta I \nabla S \right\rangle = O(h), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где $\Omega = \Omega(I, x, t)$,

$$\Omega_I = \frac{\partial \Omega}{\partial I}(I, x, t), \quad \frac{\tilde{I}}{\Omega(\tilde{I}, x, t)} = \frac{I}{\Omega} + h \left(\frac{1}{\Omega} - \frac{I\Omega_I}{\Omega^2} \right) \delta I + O(h^2).$$

В слабонелинейном случае $\Omega_I = 0$, и из (1.25) сразу получаем уравнение на δS , которое с точностью до $O(h)$ совпадает с уравнением на фазовый сдвиг (1.10). В сильнонелинейном случае ($\Omega_I \neq 0$) выразим δI из уравнения (1.25) через поправку к фазе δS , получим формулу, которая совпадает с формулой (1.12) для I_1 и Φ с точностью до $O(h)$. Исключим δI из уравнения (1.26), получим уравнение на δS , которое с точностью до $O(h)$ совпадает с уравнением (1.11).

Если определить начальные условия в задаче Коши для системы Уизема, как в утверждении 1:

$$\tilde{S}(x, t, h)|_{t=0} = S^0(x) + h\Phi^0(x), \quad \tilde{I}(x, t, h)|_{t=0} = I^0(x) + hI_1^0(x), \quad (1.27)$$

то в обоих случаях решение $\tilde{S}(x, t, h)$, $\tilde{I}(x, t, h)$ будет удовлетворять соотношениям

$$\tilde{S}(x, t, h) = S(x, t) + h\Phi(x, t) + O(h^2), \quad \tilde{I}(x, t, h) = I(x, t) + O(h).$$

Здесь $S(x, t)$, $I(x, t)$, $\Phi(x, t)$ – решение задачи Коши для системы Уизема (1.8), (1.9) и уравнения на фазовый сдвиг (1.11) или (1.10) с начальными условиями $S^0(x)$, $I^0(x)$, $\Phi^0(x)$, $\Phi_t(x, t)|_{t=0} = \Omega_I^0(x)I_1^0(x)$. Отсюда следует справедливость искомого представления (1.15) для главного члена асимптотики.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение 1 сформулировано для случая, когда начальные условия не зависят от h (см. [11]). Когда начальные условия (1.2) зависят от h , можно искать решение в виде (1.3) для начальных условий специального вида: таких, что асимптотика решения задачи Коши (1.1), (1.2) будет однофазовой. Именно, если функции $\tilde{S}(x, t, h)$, $\tilde{I}(x, t, h)$ дают решение задачи Коши для системы Уизема (1.8), (1.9) для начальных условий (1.27), то функция $\mathcal{X}(\tilde{S}(x, t, h)/h, \tilde{I}, x, t)$ будет главным членом асимптотики решения $u(x, t, h)$ задачи Коши для исходного уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2), где

$$\begin{aligned} u^0(x, h) &= \mathcal{X}(\theta^0(x, h), I^0(x), x, 0) + hX_1(\theta^0(x, h), x, 0) + O(h^2), \\ v^0(x, h) &= \Omega^0(x)\mathcal{X}_\theta(\theta^0, I^0(x), x, 0) + \\ &\quad + h\left(I_1^0(x)\Omega_I^0(x)\mathcal{X}_\theta(\theta^0, I^0(x), x, 0) + \left[\frac{\partial}{\partial t}X(\theta, x, t)\right]\Big|_{t=0} + \right. \\ &\quad \left. + \Omega^0(x)X_{1\theta}(\theta^0, x, 0)\right) + O(h^2), \\ \theta^0(x, h) &= \frac{S^0(x)}{h} + \Phi^0(x) + O(h). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Представленные результаты связаны со своего рода “неустойчивостью” асимптотического разложения: при некотором изменении начальных данных на величину порядка $O(h)$ (что соответствует изменению функции $I_1^0(x)$) главный член меняется на $O(1)$. Это происходит оттого, что такое изменение начальных условий приводит к изменению фазы на $O(h)$, а это значит, что фазовый сдвиг и вместе с ним главный член асимптотики изменяются на $O(1)$. При этом изменение огибающих (которые можно определить, например, как $u = u_{\text{up}}(x, t) = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} X(\theta, x, t)$, $u = u_{\text{lo}}(x, t) = \min_{\theta \in [0, 2\pi]} X(\theta, x, t)$) имеет порядок $O(h)$. В небесной механике в таких случаях говорят об *орбитальной устойчивости* [12]. Этот эффект связан с нелинейностью задачи и возникает и в других нелинейных задачах, в частности в уравнениях Навье–Стокса [13]. Такая “неустойчивость” асимптотического разложения не противоречит устойчивости по Ляпунову задачи Коши (1.1), (1.2): если параметр δ , характеризующий величину возмущения начальных условий, взять много меньше h , то изменение решения останется в пределах $O(h)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае обыкновенного дифференциального уравнения для нелинейного осциллятора $h^2 u_{tt} + V_u(u, t) = 0$ (системы с одной степенью свободы и с одной частотой) использование анзаца Кузмака–Уизема аналогично переходу от переменных $u(t, h)$, $p(t, h) = h du/dt$ к переменным типа действие–угол $\tilde{S}, \tilde{I}$ с помощью формул $\mathcal{X}(\tilde{S}(t, h)/h, \tilde{I}(t, h), t)$, $p(t, h) \equiv h du/dt = \mathcal{P}(\tilde{S}(t, h)/h, \tilde{I}(t, h), t) \equiv \Omega\mathcal{X}_\theta$ и

последующему разложению в асимптотический ряд по h только фазы $\tilde{S}(t, h)$ и действия $\tilde{I}(t, h)$ (без исправления $\mathcal{X}, \mathcal{P}$). В случае уравнения Клейна–Гордона (с точки зрения теории обыкновенных дифференциальных уравнений представляющего собой “систему с бесконечным числом степеней свободы”) для построения асимптотики $u(x, t, h)$ разложения в ряд по h фазы $\tilde{S}(x, t, h)$ и параметра $\tilde{I}(x, t, h)$ оказывается недостаточно: необходимо одновременно “подправлять” и функцию $\tilde{X}(\theta, I, x, t, h)$. Разумеется, поправки к фазе и параметру $\tilde{I}$ можно “перекачивать” в поправки к $\tilde{X}(\theta, I, x, t, h)$, что означает неоднозначность в определении разложений по параметру функций $\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{X}$. При выборе способа соответствующего разложения следует руководствоваться соображениями простоты окончательного результата и построения асимптотик, равномерных по отношению к переходу от сильнонелинейного случая к слабонелинейному (см. [14], [15]).

2. ОДНОФАЗОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

Теперь рассмотрим задачу о построении однофазовых асимптотических решений уравнения Кортевега–де Фриза:

$$u_t - 6uu_x + h^2 u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

где, как и раньше, $0 < h \ll 1$ – малый параметр.

Некоторые формальные асимптотические решения этого уравнения представляются в виде анзаца Кузмака–Уизема (1.3) (см. [1], [6], [16]). Кратко напомним основные формулы и конструкции, связанные с однофазовыми асимптотиками уравнения (2.1). Покажем, что и в этом случае фазовый сдвиг может быть учтен в уравнениях Уизема.

Функция $X(\theta, x, t)$, определяющая главный член асимптотики, находится из уравнения нулевого приближения – обыкновенного дифференциального уравнения по переменной θ при “замороженных” x, t :

$$\Omega(x, t)X_\theta - 6K(x, t)XX_\theta + K^3(x, t)X_{\theta\theta\theta} = 0, \quad (2.2)$$

где $K(x, t) \equiv S_x(x, t)$, $\Omega(x, t) \equiv S_t(x, t)$ – волновое число и частота. Это уравнение после двукратного интегрирования по переменной $\psi = \theta/K(x, t)$ принимает вид

$$(\mathcal{X}_\psi)^2 = R^2(\mathcal{X}, x, t), \quad R^2(z, x, t) \equiv z^3 - \frac{\Omega(x, t)}{2K(x, t)}z^2 + A_1(x, t)z + A_2(x, t), \quad (2.3)$$

где $A_1(x, t)$, $A_2(x, t)$ – константы интегрирования уравнения (2.2) по переменной θ . Функцию $X(\theta, x, t)$ можно определить как решение уравнения:

$$\theta = K(x, t) \int_0^{X(\theta, x, t)} \frac{d\xi}{R(\xi, x, t)}. \quad (2.4)$$

Третью “константу интегрирования” уравнения (2.2) – добавку $C(x, t)$ к аргументу θ в левой части (2.4) – выберем, как и в предыдущем примере, равной нулю.

Главный член асимптотики $X(\theta, x, t)$ имеет ту же структуру, что и в предыдущем разделе, только для его параметризации надо использовать три параметра, например две “константы интегрирования” $A_1(x, t)$, $A_2(x, t)$ и волновое число $K(x, t)$. Другая параметризация, которую мы будем использовать (см. [1], [5], [16]–[21]), задается корнями многочлена $R^2(z, x, t) = R^2(z, E) = (z - E_0)(z - E_1)(z - E_2)$. Тогда для главного члена асимптотики имеем представление

$$X\left(\frac{S(x, t)}{h} + \Phi(x, t), x, t\right) = \mathcal{X}\left(\frac{S(x, t)}{h} + \Phi(x, t), E(x, t)\right),$$

и для его определения надо найти функцию $\mathcal{X}(\theta, E)$, определить фазу $S(x, t)$, медленно меняющиеся параметры $E(x, t) = \{E_0(x, t), E_1(x, t), E_2(x, t)\}$, а также фазовый сдвиг $\Phi(x, t)$. При этом волновое число K также выражается через параметры $E(x, t)$, и условие существования 2π -периодического решения $X(\theta, x, t)$ уравнения (2.2) дает зависимость волнового числа K и частоты Ω от параметров $E(x, t)$:

$$K(x, t) = k(E(x, t)), \quad \Omega(x, t) = \Omega(E(x, t)). \quad (2.5)$$

Чтобы определить динамику параметров $E(x, t)$ и фазу $S(x, t)$, к этим дисперсионным соотношениям надо добавить два условия существования 2π -периодической по θ поправки $X_1(\theta, x, t)$ к главному члену.

Корни $E_2 < E_1 < E_0$ являются концами зон римановой поверхности 2-го рода функции $R^2(z, E)$. Эта поверхность состоит из двух листов, склеенных по разрезам (E_2, E_1) и (E_0, ∞) . Выберем на ней базис циклов a, b : цикл a расположен на верхнем листе и охватывает лишь один разрез (E_2, E_1) , цикл b расположен на двух листах, пересекает разрезы (E_2, E_1) и (E_0, ∞) , причем переход с нижнего листа на верхний и обратно при движении по циклу b осуществляется в точках пересечения цикла с разрезами (E_2, E_1) и (E_0, ∞) соответственно. Движение по циклам a, b происходит по часовой стрелке. Зафиксируем аргумент $\text{Arg } R(z, E)$, так что для аналитической функции $\varphi(z)$ интегралы по циклам будут выражаться через интегралы по отрезкам между концами зон следующим образом:

$$\oint_a \varphi(z) \frac{dz}{R(z, E)} = 2 \int_{E_2}^{E_1} \varphi(x) \frac{dx}{R(x, E)},$$

$$\oint_b \varphi(z) \frac{dz}{R(z, E)} = 2i \int_{E_1}^{E_0} \varphi(x) \frac{dx}{|R(x, E)|}.$$

Функцию $\mathcal{X}(\theta, E)$ можно представить в терминах тета-функции Якоби (см. [14]):

$$\mathcal{X}(\theta, E) = C(E) - 2 \left(k(E) \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \ln \Theta(\theta | B(E)), \quad (2.6)$$

где

$$\Theta(\theta | B) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{Bl^2/2} e^{il\theta},$$

$$C(E) = E_0 + E_1 + E_2 - 2 \int_{E_2}^{E_1} \frac{z dz}{R(z)} \bigg/ \int_{E_2}^{E_1} \frac{dz}{R(z)}, \quad (2.7)$$

$$B(E) = -2\pi \int_{E_1}^{E_0} \frac{dz}{|R(z)|} \bigg/ \int_{E_2}^{E_1} \frac{dz}{R(z)} < 0.$$

Волновое число и частота выражаются через концы зон по формулам

$$k(E) = -2 \int_{E_2}^{E_1} \Omega_1, \quad \Omega(E) = -24 \int_{E_2}^{E_1} \Omega_2, \quad (2.8)$$

где

$$\Omega_1 \equiv (-z + 2D_{11}) \frac{dz}{2R(z)}, \quad \Omega_2 \equiv \left(-z^2 + \frac{1}{2}(E_0 + E_1 + E_2)z + 2D_{21} \right) \frac{dz}{2R(z)},$$

$$D_{11}(E) = \int_{E_1}^{E_0} \frac{x dx}{|R(x)|} \bigg/ 2 \int_{E_1}^{E_0} \frac{dx}{|R(x)|},$$

$$D_{21}(E) = \int_{E_1}^{E_0} \frac{(x^2 - \frac{1}{2}(E_0 + E_1 + E_2)x) dx}{|R(x)|} \bigg/ 2 \int_{E_1}^{E_0} \frac{dx}{|R(x)|}.$$

Фаза $S(x, t)$ находится интегрированием уравнения

$$dS = \Omega(E) dt + k(E) dx. \quad (2.9)$$

Ее существование гарантируется выполнением условия совместности, известного как “закон сохранения волн”:

$$\frac{\partial}{\partial t} k(E(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \Omega(E(x, t)). \quad (2.10)$$

Система уравнений для концов зон имеет простую структуру (см. [5], [8], [20]):

$$\frac{\partial}{\partial t} E_l = -\Lambda_l(E) \frac{\partial}{\partial x} E_l, \quad l = 0, 1, 2, \quad (2.11)$$

где

$$\Lambda_l(E) = 6 \left(E_0 + E_1 + E_2 - 2E_l - 2 \int_{E_1}^{E_0} (E_l - x) \frac{x dx}{|R(x)|} \bigg/ \int_{E_1}^{E_0} (E_l - x) \frac{dx}{|R(x)|} \right).$$

Чтобы получить уравнение для фазового сдвига, необходимо исследовать уравнение второго приближения. Так же как и в случае волнового уравнения, уравнение для фазового сдвига можно не решать, если включить его в фазу $\tilde{S}(x, t, h) = S(x, t) + h\Phi(x, t)$ и одновременно скорректировать концы зон $\tilde{E}(x, t, h) = E(x, t) + h \delta E(x, t)$.

Чтобы описать вид начальных условий, которым соответствуют однофазовые асимптотические решения, нужно вычислить первую поправку $X_1(\theta, x, t)$ к главному члену. Чтобы получить цепочку уравнений для нахождения функций $X_m(\theta, x, t)$, нужно подставить (1.3) в уравнении (2.1), сгруппировать слагаемые при одинаковых степенях h^m и приравнять их нулю. Это дает

$$\hat{L}X_m(\theta, x, t) \equiv S_t \frac{\partial}{\partial \theta} X_m - 6S_x \frac{\partial}{\partial \theta} (X X_m) + S_x^3 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} X_m = -f_m(\theta, x, t), \quad (2.12)$$

где правая часть для первого приближения $m = 1$ имеет вид

$$f_1(\theta, x, t) = X_t - 6X X_x + \Phi_t X_\theta - 6\Phi_x X X_\theta + 3S_x^2 \Phi_x X_{\theta\theta\theta} + 3S_x^2 X_{\theta\theta x} + 3S_x S_{xx} X_{\theta\theta}. \quad (2.13)$$

У однородного уравнения $\hat{L}Z = 0$ имеется три линейно независимых решения:

$$\left\{ \mathcal{X}_\theta, \mathcal{X}_{E_0} - \frac{\Omega_{E_0} k_{E_2} - \Omega_{E_2} k_{E_0}}{\Omega_{E_1} k_{E_2} - \Omega_{E_2} k_{E_1}} \mathcal{X}_{E_1} - \frac{\Omega_{E_0} k_{E_1} - \Omega_{E_1} k_{E_0}}{\Omega_{E_2} k_{E_1} - \Omega_{E_1} k_{E_2}} \mathcal{X}_{E_2}, \right. \\ \left. \mathcal{X} + \frac{1}{2} \theta \mathcal{X}_\theta - \frac{\Omega k_{E_2}}{\Omega_{E_1} k_{E_2} - \Omega_{E_2} k_{E_1}} \mathcal{X}_{E_1} - \frac{\Omega k_{E_1}}{\Omega_{E_2} k_{E_1} - \Omega_{E_1} k_{E_2}} \mathcal{X}_{E_2} \right\}.$$

Последняя функция не является периодической, поэтому ядро оператора $\hat{L}$ в пространстве $L_2(S^1)$ на окружности $S^1 = [0, 2\pi]$ задается первыми двумя функциями. Ядро сопряженного ему оператора $\hat{L}^*$ в том же пространстве задается функциями $1, \mathcal{X}$, и условия ортогональности этих функций правым частям f_m в $L_2(S^1)$ дают необходимые условия существования 2π -периодических решений X_m уравнений (2.12).

Функция $X_1(\theta, x, t)$ является решением уравнения первого приближения и зависит от двух “констант интегрирования” ($B_1(x, t)$ при четной функции из ядра оператора $\hat{L}$ и $C_1(x, t)$ при нечетной). Нетрудно проверить, что

$$X_1(\theta, E, \Phi, \Phi_t, B_1, C_1) = X_1^{\text{even}}(\theta, E, \Phi, \Phi_t, B_1) + X_1^{\text{odd}}(\theta, E, C_1), \quad (2.14)$$

$$X_1^{\text{even}}(\theta, E, \Phi, \Phi_t, B_1) = B_1 \mathcal{X}_{E_0}(\theta, E) + \alpha_1(E, \Phi, \Phi_t, B_1) \mathcal{X}_{E_1}(\theta, E) + \\ + \alpha_2(E, \Phi, \Phi_t, B_1) \mathcal{X}_{E_2}(\theta, E), \quad (2.15)$$

где

$$\alpha_1(E, \Phi, \Phi_t, B_1) = \frac{\Phi_t k_{E_2} - \Phi_x \Omega_{E_2} - B_1(\Omega_{E_0} k_{E_2} - \Omega_{E_2} k_{E_0})}{\Omega_{E_1} k_{E_2} - \Omega_{E_2} k_{E_1}}, \\ \alpha_2(E, \Phi, \Phi_t, B_1) = \frac{\Phi_t k_{E_1} - \Phi_x \Omega_{E_1} - B_1(\Omega_{E_0} k_{E_1} - \Omega_{E_1} k_{E_0})}{\Omega_{E_2} k_{E_1} - \Omega_{E_1} k_{E_2}}, \\ X_1^{\text{odd}}(\theta, E, C_1) = C_1 \mathcal{X}_\theta - \frac{1}{k^3(E)} \mathcal{X}_\theta \int_0^\theta \mathcal{X}_\theta^{-2}(\theta_1, E) \int_0^{\theta_1} \mathcal{X}_\theta(\theta_2, E) \times \\ \times \int_0^{\theta_2} f_1^{\text{even}}(\theta_3, E) d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1, \quad (2.16)$$

где $f_1^{\text{even}}(\theta, E(x, t)) = X_t(\theta, x, t) - 6X X_x + 3S_x^2 X_{\theta\theta x} + 3S_x S_{xx} X_{\theta\theta} -$ четная составляющая правой части в уравнении первого приближения. Функция $C_1(x, t)$ определяется из более высоких приближений и не влияет на главный член асимптотики.

Рассмотрим задачу Коши (2.1) с начальными условиями из того же класса, что и функция (2.6), т.е. такими, что для некоторых заданных функций $S^0(x)$, $E^0(x)$, $\Phi^0(x)$, $\Psi^0(x) \equiv \Phi_t(x, t)|_{t=0}$, $B_1^0(x)$, $C_1^0(x)$

$$u^0(x, h) = \mathcal{X}(\theta^0(x, h), E^0(x)) + \\ + h X_1(\theta^0(x, h), E^0(x), \Phi^0(x), \Psi^0(x), B_1^0(x), C_1^0(x)) + O(h^2), \quad (2.17) \\ \theta^0(x, h) = \frac{S^0(x)}{h} + \Phi^0(x).$$

Имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть существует положительное число t_0 и гладкие функции $a_l(x, t) < b_l(x, t)$, $l \in \{0, 1, 2\}$ такие, что для $t \in [0, t_0]$, $E_l(x, t) \in [a_l(x, t), b_l(x, t)]$ выполнены следующие условия:

1. Существует решение $X(\theta, x, t) = \mathcal{X}(\theta, E(x, t))$ (2.6) уравнения нулевого приближения (2.2).

2. Существует решение $\tilde{E}(x, t, h) = \{\tilde{E}_0, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2\}$ задачи Коши для системы Уилема (2.11) с начальными условиями

$$\begin{aligned}\tilde{E}_0(x, t, h)|_{t=0} &= E_0^0(x) + h \delta E_0^0(x) = E_0^0(x) + h B_1^0(x), \\ \tilde{E}_1(x, t, h)|_{t=0} &= E_1^0(x) + h \delta E_1^0(x) = E_1^0(x) + h \alpha_1(\Phi^0(x), \Psi^0(x), B_1^0(x), E^0(x)), \\ \tilde{E}_2(x, t, h)|_{t=0} &= E_2^0(x) + h \delta E_2^0(x) = E_2^0(x) + h \alpha_2(\Phi^0(x), \Psi^0(x), B_1^0(x), E^0(x)).\end{aligned}\quad (2.18)$$

Здесь поправки α_1, α_2 определены формулами (2.16).

3. Функции $C(E)$ и $B(E)$ определены формулами (2.7), частота $\Omega(E)$ и волновое число $k(E)$ определены формулами (2.8), фаза $\tilde{S}(x, t, h)$ равна

$$\tilde{S}(x, t, h) = S^0(0) + h \Phi^0(0) + \int_{(0,0)}^{(x,t)} \Omega(\tilde{E}(x, t, h)) dt + k(\tilde{E}(x, t, h)) dx. \quad (2.19)$$

Тогда главный член асимптотики решения задачи Коши (2.1), (2.17) имеет вид

$$u(x, t, h) = C(\tilde{E}(x, t, h)) - 2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big|_{B=\text{const}} \ln \Theta \left(\frac{\tilde{S}(x, t, h)}{h} \Big|_B \right) \right]_{B=B(\tilde{E}(x, t, h))} + O(h). \quad (2.20)$$

Доказательство по существу следует из работ [1], [10], [16] и похоже на рассуждения для волнового уравнения, но несколько отличается от него, поскольку оператор $\hat{L}$ в уравнениях в вариациях не является самосопряженным. Поэтому приведем его для полноты изложения.

Преобразуем исходное уравнение с помощью анзаца $u(x, t, h) = \tilde{X}(\theta, x, t, h)$, умножим полученное уравнение на функции $\{1, \mathcal{X}(\theta, E)\}$ из ядра оператора $\hat{L}^*$ в пространстве $L_2(S^1)$ на окружности $S^1 = [0, 2\pi]$ и затем проинтегрируем по θ от 0 до 2π . Получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \tilde{X} d\theta - 3 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} \tilde{X}^2 d\theta + h^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \int_0^{2\pi} \tilde{X} d\theta &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \tilde{X}^2 d\theta - 2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} \tilde{X}^3 d\theta + \\ + \frac{3}{2} h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{S_x}{h} + \Phi_x \right)^2 \int_0^{2\pi} \tilde{X} \tilde{X}_{\theta\theta} d\theta \right] + h^2 \int_0^{2\pi} \tilde{X} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \tilde{X} d\theta &= 0.\end{aligned}$$

Подставив асимптотическое разложение $\tilde{X} = X + hX_1 + \dots$, получим для каждой степени h^m по два необходимых условия существования m -й поправки X_m к главному члену (условия ортогональности). Учитывая, что функция X четна по θ , получим,

что некоторые слагаемые после интегрирования дадут ноль. В частности, во второе условие ортогональности входит только четная по θ часть X_1^{even} функции X_1 . После сокращения нечетных слагаемых условия ортогональности для первого и второго приближений примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} X d\theta - 3 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} X^2 d\theta &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} X^2 d\theta - 2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} X^3 d\theta + \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[S_x^2 \int_0^{2\pi} X X_{\theta\theta} d\theta \right] &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} X_1^{\text{even}} d\theta - 6 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} X X_1^{\text{even}} d\theta &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} X X_1^{\text{even}} d\theta - 6 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} X^2 X_1^{\text{even}} d\theta + \\ + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left[S_x \Phi_x \int_0^{2\pi} X X_{\theta\theta} d\theta + S_x^2 \int_0^{2\pi} X_1^{\text{even}} X_{\theta\theta} d\theta \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Функция X_1^{even} находится из уравнения первого приближения и имеет вид (2.15). Уравнения (2.21) вместе с соотношениями (2.5) определяют функции $E(x, t)$ и фазу $S(x, t)$. Из уравнений (2.22) определяются функции $\Phi(x, t)$, $B_1(x, t)$. Таким образом, определен главный член асимптотики исходной задачи Коши:

$$u(x, t, h) = \mathcal{X} \left(\frac{S(x, t)}{h} + \Phi(x, t), E(x, t) \right) + O(h).$$

Заметим, что в силу (2.15), (2.16) имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\theta, E_0(x, t) + hB_1(x, t), E_1 + h\alpha_1(x, t), E_2 + h\alpha_2(x, t)) = \\ = \mathcal{X}(\theta, E(x, t), x, t) + hX_1^{\text{even}}(\theta, x, t) + O(h^2). \end{aligned}$$

Поэтому если подставить в условия ортогональности (2.21) вместо S и E_0, E_1, E_2 функции $S + h\Phi$ и $E_0 + hB_1, E_1 + h\alpha_1, E_2 + h\alpha_2$ и разложить в ряд по h , то в первом приближении получим (2.22).

Рассмотрим возмущенные фазу $\tilde{S}(x, t, h) = S(x, t) + h\delta S(x, t)$ и концы зон $\tilde{E}(x, t, h) = E(x, t) + h\delta E(x, t)$. Подставим их вместо $S(x, t)$ и $E(x, t)$ в формулы для волнового числа $\tilde{S}_x(x, t, h) = k(\tilde{E}(x, t, h))$ в дисперсионное соотношение $\tilde{S}_t(x, t, h) = \Omega(\tilde{E}(x, t, h))$ и в условия ортогональности (2.21), в результате получим систему в вариациях для определения поправок $\delta S(x, t)$, $\delta E(x, t) = \{\delta E_0, \delta E_1, \delta E_2\}$ к фазе и концам зон:

$$\begin{aligned} \delta S_t &= \delta E_0 \Omega_{E_0} + \delta E_1 \Omega_{E_1} + \delta E_2 \Omega_{E_2} + O(h), \\ \delta S_x &= \delta E_0 k_{E_0} + \delta E_1 k_{E_1} + \delta E_2 k_{E_2} + O(h) \end{aligned} \quad (2.23)$$

и

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \delta X d\theta - 6 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} X \delta X d\theta = O(h), \\
& \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} X \delta X d\theta - 6 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2\pi} X^2 \delta X d\theta + \\
& + 3 \frac{\partial}{\partial x} \left[S_x \delta S_x \int_0^{2\pi} X X_{\theta\theta} d\theta + S_x^2 \int_0^{2\pi} \delta X X_{\theta\theta} d\theta \right] = O(h),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

где

$$\begin{aligned}
X(\theta, \tilde{E}_l) &= X(\theta, E) + h \delta X(\theta, E, \delta E) + O(h^2), \\
\delta X(\theta, E, \delta E) &= \mathcal{X}_{E_0} \delta E_0 + \mathcal{X}_{E_1} \delta E_1 + \mathcal{X}_{E_2} \delta E_2.
\end{aligned}$$

Из уравнений (2.23) выразим δE_1 , δE_2 через δE_1 , δS и подставим в (2.24). Полученные уравнения на δE_0 и δS с точностью до $O(h)$ совпадают с условиями ортогональности (2.22) на B_1 и Φ . Если определить начальные условия задачи Коши для системы Уизема по формулам (2.18) из утверждения 2, то решение $\tilde{E}(x, t, h)$ будет удовлетворять соотношениям

$$\tilde{E}(x, t, h) = E(x, t) + O(h),$$

где $E(x, t)$ – решение задачи Коши для системы Уизема (2.11) с начальными условиями $E^0(x)$. Отсюда следует, что и фаза $\tilde{S}(x, t, h)$ после интегрирования дифференциала (2.9) с выбором глобальной константы интегрирования в соответствии с условием $\tilde{S}(x, t, h)|_{t=0} = S^0(x) + h\Phi^0(x)$ будет удовлетворять соотношению

$$\tilde{S}(x, t, h) = S(x, t) + h\Phi(x, t) + O(h^2),$$

где $S(x, t)$ получена в результате интегрирования (2.9) с глобальной константой, соответствующей начальному условию $S(x, t)|_{t=0} = S^0(x)$, и $\Phi(x, t)$ – решение системы (2.22) с начальными условиями $\Phi(x, t)|_{t=0} = \Phi^0(x)$, $\Phi_t(x, t)|_{t=0} = \Psi^0(x)$, $B_1(x, t)|_{t=0} = B_1^0(x)$. Отсюда следует искомое представление (1.15) для главного члена асимптотики.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Начальные условия (2.18) отличаются от (2.17) на $O(h)$: $\tilde{u}|_{t=0} = u^0(x) + O(h)$. В случае уравнения Кортевега–де Фриза также имеет место “неустойчивость асимптотического разложения” (2.20), которая отмечалась в разделе 1.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, подправляя на $O(h)$ подходящим образом решения уравнений Уизема (например, немного изменяя начальные условия для них), можно добиться обращения в нуль фазового сдвига в анзаде Кузмага–Уизема для главного члена. Тем самым эволюция главного члена полностью определяется решениями уравнений Уизема. Хотя этот факт установлен для двух уравнений, у нас практически нет сомнений, что он имеет место и для других нелинейных уравнений. Он, конечно, требует доказательства, и в первую очередь для асимптотик уравнений, интегрируемых методом обратной задачи [8], и уравнений Навье–Стокса [13].

Благодарности. Авторы благодарны И. М. Кричеверу за обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00726) и Министерства образования и науки РФ (грант 2.1.1/4540).

Список литературы

- [1] С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, “Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях”, *Современные проблемы математики*, Итоги науки и техники, **15**, ред. Р. В. Гамкрелидзе, ВИНТИ, М., 1980, 3–94.
- [2] S. Yu. Dobrokhotov, D. S. Minenkov, *Regul. Chaotic Dyn.*, **15**:2–3 (2010), 285–299.
- [3] R. Haberman, *SIAM J. Appl. Math.*, **51**:6 (1991), 1638–1652.
- [4] J. C. Luke, *Proc. Roy. Soc. A*, **292**:1430 (1966), 403–412.
- [5] G. B. Whitham, *Proc. Roy. Soc. A*, **283**:1393 (1965), 238–261.
- [6] G. B. Whitham, *J. Fluid Mech.*, **44**:2 (1970), 373–395.
- [7] А. М. Ильин, *ТМФ*, **118**:3 (1999), 383–389.
- [8] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:3 (1988), 37–52.
- [9] F. J. Bourland, R. Haberman, *SIAM J. Appl. Math.*, **48**:4 (1988), 737–748.
- [10] С. Ю. Доброхотов, И. М. Кричевер, *Матем. заметки*, **49**:6 (1991), 42–58.
- [11] В. П. Маслов, *ТМФ*, **1**:3 (1969), 378–383.
- [12] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1997.
- [13] В. П. Маслов, *УМН*, **41**:6(252) (1986), 19–35.
- [14] А. Я. Мальцев, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:2 (2008), 28–43.
- [15] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, М., 1989.
- [16] R. Haberman, *Stud. Appl. Math.*, **78**:1 (1988), 73–90.
- [17] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, “Об одном классе решений уравнений Кортевега–де Фриза”, *Проблемы математической физики*, т. 8, ЛГУ, Л., 1976, 70–92.
- [18] V. B. Matveev, *Abelian functions and solitons*, Preprint № 373, Inst. Theor. Phys., Univ. Wroclaw, 1976.
- [19] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, *УМН*, **31**:1(187) (1976), 55–136.
- [20] H. Flashka, M. G. Forest, D. W. McLaughlin, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **33**:6 (1980), 739–784.
- [21] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.

Поступила в редакцию 6.09.2010