Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ч. Хон, Энь-Гуй Фань, Суперквазипериодические волновые решения и асимптотический анализ $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричного уравнения типа Кортевега–де Фриза, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 3, 366–387

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:50:10

© 2011 г.

И. Ч. Хон*, Энь-Гуй Фань†

СУПЕРКВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ $\mathcal{N} = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА

Предложено обобщение метода Хироты с использованием общей многомерной тета-функции Римана и супербилинейной формы Хироты для явного построения суперквазипериодических (многопериодических) волновых решений суперсимметричных уравнений типа Кортевега–де Фриза в $\mathcal{N} = 1$ суперпространстве. Показано, что суперсимметричное уравнение Кортевега–де Фриза при $N \geq 2$ не имеет N -периодических волновых решений при произвольных параметрах. Кроме того, имеется интересная зона влияния, возникающая среди суперквазипериодических волн в присутствии грассмановой переменной. Отмечается, что суперквазипериодические волны симметричны относительно этой зоны, однако исчезают вместе с ней. Построена предельная процедура для анализа асимптотических свойств суперквазипериодических волн. Строго показано, что суперпериодические волновые решения стремятся к суперсолитонным решениям в некоторых предельных случаях “малых амплитуд”.

Ключевые слова: суперсимметричное уравнение типа Кортевега–де Фриза, супербилинейный метод Хироты, тета-функция Римана, суперквазипериодические волновые решения, суперсолитонные решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод билинейных производных, развитый Хиротой, стал мощным средством для построения точных решений нелинейных уравнений. Если нелинейное уравнение записано в билинейном виде с использованием преобразования зависимой переменной, то можно, как правило, получить его многосолитонные решения [1]–[7]. Данное Накамурой обобщение билинейного метода Хироты позволяет строить некоторые типы квазипериодических решений нелинейного уравнения [8], [9], благодаря чему были получены периодические волновые решения уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ)

*Department of mathematics, City University of Hong Kong, Hongkong SAR, China.
E-mail: maychon@cityu.edu.hk

†School of Mathematical Sciences and Key Laboratory of Mathematics for Nonlinear Science, Fudan University, Shanghai, China. E-mail: faneg@fudan.edu.cn

и Буссинеска. Этот обобщенный метод не только предлагает удобный способ получения периодических решений нелинейных уравнений, но и позволяет непосредственно получать явные соотношения между частотами, волновыми числами, сдвигами фаз и амплитудами волн. Недавно мы использовали этот метод для исследования дискретной решетки Тоды, $(2 + 1)$ -мерного уравнения Кадомцева–Петвиашвили и уравнения Богоявленского для опрокидывающихся солитонов [10]–[12].

В настоящей работе проводится дальнейшее развитие метода Хироты: мы представляем два новых результата, полностью отличающихся от полученных в предыдущих работах [8]–[12]. Для этого существующий метод переносится в суперсимметричный контекст. Хорошо известно, что квазипериодические решения нелинейных уравнений КдФ были исходно получены в рамках обратной задачи рассеяния и алгебро-геометрического метода, развитых в пионерских работах в конце 1970-х гг. [13]–[17]. В настоящее время теория развита до степени, дающей решения широкого класса нелинейных интегрируемых уравнений, включая уравнение синус-Гордон, уравнение Камассы–Холма, модель Тирринга, уравнение Кадомцева–Петвиашвили, решетку Абловица–Ладика и решетку Тоды [18]–[28]. Насколько нам известно, явные квазипериодические решения суперсимметричных уравнений пока не найдены. Налагая на общую тета-функцию Римана достаточное условие, обеспечивающее выполнение билинейного суперуравнения Хироты, мы предлагаем ключевую формулу для систематического построения суперпериодических волновых решений суперсимметричных систем.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующее суперсимметричное уравнение типа КдФ:

$$\Phi_t + 3\mathcal{D}^2(\Phi\mathcal{D}\Phi) + \mathcal{D}^6\Phi = 0, \quad (1.1)$$

где $\Phi = \Phi(x, t, \theta)$ – функция фермионного суперполя от независимых переменных x и t и грассмановой переменной θ . Символ $\mathcal{D} = \partial_\theta + \theta\partial_x$ обозначает дифференциальный оператор суперпроизводной. Со времени введения суперсимметричного уравнения КдФ (1.1) в работах [29], [30] основное внимание уделялось его математической структуре и свойствам интегрируемости. Например, бигамильтонова структура, свойство Пенлеве, бесконечный набор симметрий, преобразование Дарбу, преобразование Беклунда, билинейная форма и супермногосолитонные решения исследовались в работах [31]–[36]. В частности, соответствующие одно- и двухсолитонные решения уравнения (1.1) были получены в работах [35], [36] с использованием метода Хироты и преобразования Дарбу. В работе [36] было показано, что суперсимметричное уравнение КдФ (1.1) не имеет N -солитонных решений ($N \geq 3$) при произвольных параметрах, что воспринималось автором как довольно странный парадокс, поскольку суперсимметричное уравнение КдФ является интегрируемым в смысле Лакса.

В настоящей работе нас будет интересовать построение суперквазипериодических суперсимметричных решений уравнения КдФ (1.1) в суперпространстве, которые можно считать обобщением суперсолитонных решений, которые также отсутствуют. Более того, исходя из этого суперпространства нетрудно дать ясное толкование парадокса Карсти.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 кратко вводится билинейная суперформа Хироты для уравнения (1.1). В разделе 3 исходя из свойств тета-функции Римана мы предлагаем ключевую формулу для построения суперпе-

риодических волновых решений. В разделах 4 и 5 эта формула применяется соответственно для построения суперодно- и двухпериодических волновых решений уравнения (1.1). Супероднопериодические волны представляют собой хорошо известные кноидальные волны с одномерным рисунком на поверхности, а супердвухпериодические волны, поверхностный рисунок которых двумерен, служат прямым обобщением супероднопериодических волн. Кроме того, представлена предельная процедура для анализа свойств и асимптотического поведения суперодно- и двухпериодических волновых решений. Строго показано, что в пределе “малых амплитуд” суперпериодические решения стремятся к известным суперсолитонным решениям. Наконец, в разделе 6 кратко обсуждаются условия построения супермногопериодических волновых решений уравнения (1.1) с использованием билинейного метода Хироты.

2. СУПЕРБИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА ХИРОТЫ ДЛЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ КДФ

Чтобы ввести обозначения и сделать изложение полным, мы кратко напомним некоторые свойства суперанализа и супербилинейных операторов Хироты. Подробно вопросы суперанализа рассматриваются, например, в работах [37], [38].

Линейное пространство Λ называется $\mathbb{Z}_2$ -градуированным, если оно представимо как прямая сумма двух подпространств

$$\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1,$$

где элементы пространств Λ_0 и Λ_1 являются однородными. Будем считать, что Λ_0 – подпространство, состоящее из четных элементов, а Λ_1 – подпространство, состоящее из нечетных элементов. Для элемента $f \in \Lambda$ обозначим через f_0 и f_1 его четную и нечетную компоненты. Введем функцию четности для однородных элементов на Λ , а именно

$$|f| = \begin{cases} 0, & \text{если } f \in \Lambda_0, \\ 1, & \text{если } f \in \Lambda_1. \end{cases}$$

Введем аннулятор множества нечетных элементов:

$${}^\perp \Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : \lambda \Lambda_1 = 0\}.$$

Супералгебра представляет собой $\mathbb{Z}_2$ -градуированное пространство $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$, в котором кроме обычных операций сложения и умножения на числа определено произведение элементов с обычным свойством дистрибутивности:

$$a(\alpha b + \beta c) = \alpha ab + \beta ac, \quad (\alpha b + \beta c)a = \alpha ba + \beta ca,$$

где $a, b, c \in \Lambda$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Далее, на Λ вводится структура ассоциативной алгебры с единицей e и четным умножением, т.е. таким, что произведение двух четных и двух нечетных элементов является четным, а произведение четного элемента на нечетный – нечетным: $|ab| = |a| + |b| \pmod{2}$. Говорят, что супералгебра коммутативна, если суперкоммутатор обращается в нуль,

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba = 0,$$

для произвольных однородных элементов $a, b \in \Lambda$.

Коммутативная супералгебра с единицей $e = 1$ называется конечномерной грасмановой алгеброй, если она содержит систему антикоммутирующих генераторов ζ_j , $j = 1, \dots, n$, таких, что $\zeta_j \zeta_k + \zeta_k \zeta_j = 0$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, в частности $\zeta_j^2 = 0$. Грасманову алгебру будем обозначать как $G_n = G_n(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$.

Мономы $\{e_0, e_i = \zeta_{j_1} \dots \zeta_{j_n}\}$, $j = (j_1 < \dots < j_n)$, образуют базис в грасмановой алгебре G_n , $\dim G_n = 2^n$. Отсюда следует, что любой элемент алгебры G_n представляет собой линейную комбинацию мономов $\zeta_{j_1} \dots \zeta_{j_k}$, $j_1 < \dots < j_k$, т.е.

$$f = f_0 + \sum_{k \geq 0} \sum_{j_1 < \dots < j_k} f_{j_1 \dots j_k} \zeta_{j_1} \dots \zeta_{j_k},$$

с коэффициентами $f_{j_1 \dots j_k} \in \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ – коммутативная банахова супералгебра. Тогда банахово пространство

$$\mathbb{R}_{\Lambda}^{m,n} = \Lambda_0^m \times \Lambda_1^n$$

называется *суперпространством размерности (m, n) над Λ* . В частности, если $\Lambda_0 = \mathbb{C}$ и $\Lambda_1 = 0$, то $\mathbb{R}_{\Lambda}^{m,n} = \mathbb{C}^m$.

Говорят, что функция $f(\mathbf{x}): \mathbb{R}_{\Lambda}^{m,n} \rightarrow \Lambda$ супердифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}_{\Lambda}^{m,n}$, если в Λ существуют элементы $F_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m+n$, такие, что

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m+n} \langle F_j(\mathbf{x}), h_j \rangle + o(\mathbf{x}, \mathbf{h}),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$, причем компоненты x_j , $j = 1, \dots, m$, – четные переменные, а компоненты $x_{m+j} = \theta_j$, $j = 1, \dots, n$, – грасмановы. Вектор $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_m, h_{m+1}, \dots, h_{m+n})$, где $(h_1, \dots, h_m) \in \Lambda_0^m$ и $(h_{m+1}, \dots, h_{m+n}) \in \Lambda_1^n$. Кроме того,

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|o(\mathbf{x}, \mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Элемент $F_j(\mathbf{x})$ называется частной суперпроизводной f по x_j в точке $\mathbf{x}$ и обозначается как

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = F_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, m+n.$$

Производные $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_j$ по четным переменным x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, определены единственным образом. В то же время производные $\partial f(\mathbf{x})/\partial \theta_j$ по нечетным переменным $\theta_j = x_{j+n}$, $j = 1, 2, \dots, m$, определены не единственным образом, а с точностью до постоянного слагаемого $c\zeta_1 \dots \zeta_n$, $c \in \mathbb{C}$, из аннулятора ${}^{\perp}G_n$ конечномерной грасмановой алгебры G_n .

Суперпроизводные также удовлетворяют формуле Лейбница

$$\frac{\partial(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}))}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} g(\mathbf{x}) + (-1)^{|x_j||f|} f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, m+n. \quad (2.1)$$

Обозначим через $\mathcal{P}(\Lambda_1^n, \Lambda)$ множество многочленов, определенных на Λ_1^n со значениями в Λ . Суперинтеграл является отображением $I: \mathcal{P}(\Lambda_1^n, \Lambda) \rightarrow \Lambda$, удовлетворяющим следующим условиям:

1) линейность: $I(\mu f + \nu g) = \mu I(f) + \nu I(g)$, $\mu, \nu \in \Lambda$, $f, g \in \mathcal{P}(\Lambda_1^n, \Lambda)$;

2) трансляционная инвариантность: $I(f_\xi) = I(f)$, где $f_\xi = f(\theta + \xi)$ для всех $\xi \in \Lambda_1^n$, $f \in \mathcal{P}(\Lambda_1^n, \Lambda)$; будем говорить, что f является суперинтегралом по грассмановой переменной θ .

Положим $I(\theta^\varepsilon) = I_\varepsilon$, где ε принадлежит множеству мультииндексов $N_n = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_j = 0, 1, \theta^\varepsilon = \theta_1^{\varepsilon_1} \dots \theta_n^{\varepsilon_n} \neq 0\}$. При $I_\varepsilon = 0$, $\varepsilon \in N_n$, $|\varepsilon| \leq n (= n-1)$, интегралы такого типа имеют вид

$$I(f) = J(f)I(1, \dots, 1),$$

где

$$J(f) = \frac{\partial^n f(0)}{\partial \theta_1 \dots \partial \theta_n}.$$

Поскольку производная определена с точностью до постоянного слагаемого из аннулятора ${}^\perp L_n$, $L_n = \{\theta_1 \dots \theta_n, \theta \in \Lambda_1^n\}$, получаем, что отображение $J: \mathcal{P} \rightarrow \Lambda/{}^\perp L_n$ однозначно. Оно удовлетворяет также условиям 1 и 2, поэтому мы назовем его интегралом и обозначим как

$$J(f) = \int f(\theta) d\theta = \int \theta_1 \dots \theta_n d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

При этом выполнены следующие свойства:

$$\begin{aligned} \int \theta_1 \dots \theta_n d\theta_1 \dots d\theta_n &= 1, \\ \int \frac{\partial f}{\partial \theta_j} d\theta_1 \dots d\theta_n &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \int f(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_j} d\theta &= (-1)^{1+|g|} \int \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_j} g(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для функций $f(x, t, \theta), g(x, t, \theta): \mathbb{R}_\Lambda^{2,1} \rightarrow \Lambda$ билинейные дифференциальные операторы Хироты D_x и D_t по обыкновенным переменным x, t определяются как

$$D_x^m D_t^n f(x, t) \cdot g(x, t) = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n f(x, t) g(x', t')|_{x'=x, t'=t}.$$

Супербилинейный оператор Хироты определен в работах [29], [36]:

$$S_x^N f \cdot g = \sum_{j=0}^N (-1)^{j|f|+j(j+1)/2} \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix} \mathcal{D}^{N-j} f \mathcal{D}^j g,$$

где $N \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{D}$ – суперпроизводная, f и g – функции со значениями в грассманновой алгебре, а супербиномиальные коэффициенты определяются выражением

$$\begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} [N/2] \\ [j/2] \end{pmatrix}, & \text{если } (N, j) \neq (0, 1) \pmod{2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $[k]$ – целая часть вещественного числа k ($[k] \leq k \leq [k] + 1$), а $|f|$ – грассманова четность функции f , которая определяется следующим образом:

$$|f| = \begin{cases} 1, & \text{если } f \text{ нечетна,} \\ 0, & \text{если } f \text{ четна.} \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть заданы функции $f(x, t, \theta), g(x, t, \theta): \mathbb{R}_\Lambda^{2,1} \rightarrow \Lambda$. Тогда билинейные операторы Хироты D_x, D_t и супербилинейный оператор Хироты S_x имеют следующие свойства [36]:

$$\begin{aligned} S_x^{2N} f \cdot g &= D_x^N f \cdot g, \\ D_x^m D_t^n e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_2} &= (\alpha_1 - \alpha_2)^m (\omega_1 - \omega_2)^n e^{\xi_1 + \xi_2}, \\ S_x e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_2} &= [(\zeta_1 - \zeta_2) + \theta(\alpha_1 - \alpha_2)] e^{\xi_1 + \xi_2}, \end{aligned}$$

где $\xi_j = \alpha_j x + \omega_j t + \theta \zeta_j + \delta_j$, $\alpha_j, \omega_j, \zeta_j, \delta_j \in \Lambda_0$, – параметры, $j = 1, 2$.

Третья формула в приведенном выше выражении на самом деле определена с точностью до постоянного слагаемого $c\zeta \in {}^\perp \Lambda_1$. Более общо, имеем

$$F(S_x, D_x, D_t) e^{\xi_1} \cdot e^{\xi_2} = F(\zeta(\beta_1 - \beta_2) + \theta(\alpha_1 - \alpha_2), \alpha_1 - \alpha_2, \omega_1 - \omega_2) e^{\xi_1 + \xi_2},$$

где $F(S_t, D_x, D_t)$ – многочлен по операторам S_t, D_x и D_t . Эти свойства полезны при выводе билинейной формы Хироты и построении квазипериодических волновых решений суперсимметричных уравнений.

Используя преобразование зависимых переменных

$$\Phi = 2[\mathcal{D} \ln f(x, t, \theta)]_x,$$

можно переписать уравнение (1.1) в супербилинейном виде:

$$(S_x D_t + S_x D_x^3) f(x, t, \theta) \cdot f(x, t, \theta) = 0. \quad (2.2)$$

В работе [36] исходя из уравнения (2.2) были получены суперодносолитонное и супердвухсолитонное решения:

$$\Phi_1 = 2[\mathcal{D} \ln(1 + e^{\eta_1})]_x, \quad (2.3)$$

$$\Phi_2 = 2[\mathcal{D} \ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}})]_x, \quad (2.4)$$

где $\eta_j = p_j x - p_j^3 t + \theta \zeta_j + r_j$, $j = 1, 2$, и

$$e^{A_{12}} = \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2 + 2 \frac{p_1 - p_2}{(p_1 + p_2)^2} \zeta_1 \zeta_2 + 2\theta \frac{(p_1 - p_2)(p_1 \zeta_2 - p_2 \zeta_1)}{(p_1 + p_2)^2}. \quad (2.5)$$

Здесь $p_j \in \Lambda_0$, $j = 1, 2$, – четные параметры, а $\zeta_1, \zeta_2 \in \Lambda_1$ – нечетные. В работе [36] было также показано, что суперсимметричное уравнение КдФ (1.1) не имеет N -солитонных решений ($N \geq 3$) при произвольных параметрах кроме случая, когда $p_i \zeta_j = p_j \zeta_i$. В этом случае формула (2.5) принимает более простой вид:

$$e^{A_{12}} = \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^2, \quad (2.6)$$

где $\eta_j = p_j x - p_j^3 t + \theta \zeta_j + r_j$, $j = 1, 2$, и $p_1 \zeta_2 = p_2 \zeta_1$. Решения такого типа при наличии наложенных на параметры условий были получены в работе [35].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Этот факт нетрудно объяснить с точки зрения суперпространства $\mathbb{R}_{\Lambda}^{2,1}$ над грассмановой алгеброй $\Lambda = G_1(\zeta) = G_{1,0} \oplus G_{1,1}$. Нечетное подпространство $\Lambda_1 = G_{1,1}$ одномерно, поэтому существует линейное соотношение $p_i \zeta_j = p_j \zeta_i$ между антикоммутирующими параметрами ζ_i , $i = 1, \dots, N$. Суперсимметричное уравнение КдФ имеет N -солитонные решения. В то же время Карсти рассматривал N -солитонные решения в суперпространстве $\mathbb{R}_{\Lambda}^{2,1}$ над грассмановой алгеброй $\Lambda = G_N(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = G_{N,0} \oplus G_{N,1}$. Нечетное подпространство $\Lambda_1 = G_{N,1}$ является 2^{N-1} -мерным, его размерность больше двух при $N \geq 2$. В этом случае не существует линейных соотношений между антикоммутирующими параметрами ζ_i , $i = 1, \dots, N$. Суперсимметричное уравнение КдФ не имеет N -солитонных решений стандартного вида в случае $N \geq 2$ при произвольных параметрах.

В настоящей работе рассматриваются функции с двумя обычными четными переменными x, t и грассмановой нечетной переменной θ . Соответствующее пространство $\mathbb{R}_{\Lambda}^{2,1} = \Lambda_0^2 \times \Lambda_1$ (где можно взять $\Lambda_0 = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) является суперпространством над грассмановой алгеброй $G_1(\zeta)$, элементы которой имеют вид

$$f = f_0 + f_1 \zeta,$$

где $e = 1$ – единица, а ζ – антикоммутирующий генератор. Мономы $\{1, \zeta\}$ образуют базис пространства $G_1(\zeta)$, $\dim G_1(\zeta) = 2$. Поэтому всякое $\mu \in \Lambda_1 = G_{1,1}$ имеет вид $\mu = \beta \zeta$, $\beta \in \mathbb{C}$. В системе движущейся волны в пространстве $\mathbb{R}_{\Lambda}^{2,1}$ фазовая переменная должна иметь вид $\xi = \alpha x + \omega t + \beta \theta \zeta + \delta$. При $\Lambda_1 = G_{1,1}$ имеем $\zeta_j = q_j \zeta$ и $\zeta_1 \zeta_2 = 0$. Поэтому формула (2.5) редуцируется к формуле (2.6) в пространстве $\mathbb{R}_{\Lambda}^{2,1}$ при выполнении условия $p_1 q_2 = p_2 q_1$.

Чтобы построить супермногопериодические волновые решения уравнения (1.1) с применением билинейного метода Хироты, рассмотрим несколько обобщенный вид билинейного уравнения (2.2). Будем искать его решение в виде

$$\Phi = \Phi_0 + 2(\mathcal{D} \ln f)_x, \quad (2.7)$$

где $\Phi_0 = \Phi_0(\theta): \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_1$ – специальное решение уравнения (1.1). Подставляя формулу (2.7) в (1.1) и интегрируя по x , получаем билинейную форму

$$G(S_x, D_x, D_t) f \cdot f = (S_x D_t + S_x D_x^3 + 3\Phi_0 D_x^2 + c) f \cdot f = 0, \quad (2.8)$$

где $c = c(\theta, t): \mathbb{R}_{\Lambda}^{1,1} \rightarrow \Lambda_1$ – постоянная интегрирования. Нас будут интересовать супермногопериодические решения билинейного уравнения (2.8), выраженные в терминах тета-функции Римана.

3. ТЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА И ЕЕ СВОЙСТВА

В настоящем разделе мы вводим многомерную супертета-функцию Римана на суперпространстве $\mathbb{R}_{\Lambda}^{2,1}$ и обсуждаем ее квазипериодичность, которая играет центральную роль при построении квазипериодических решений суперсимметричных уравнений. Многомерная тета-функция Римана имеет вид

$$\vartheta(\xi, \varepsilon, \mathbf{s} \mid \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} e^{2\pi i(\xi + \varepsilon, \mathbf{n} + \mathbf{s}) - \pi(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} + \mathbf{s}), \mathbf{n} + \mathbf{s})}. \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)^T \in \mathbb{Z}^N$ – вектор с целочисленными компонентами, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)^T, \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T \in \mathbb{C}^N$ – векторы комплексных параметров. Комплексные фазовые переменные $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$, $\xi_j = \alpha_j x + \omega_j t + \beta_j \theta \zeta + \delta_j$, $\alpha_j, \omega_j, \beta_j, \delta_j \in \Lambda_0$, $j = 1, 2, \dots, N$, где x, t – обыкновенные переменные, а θ – грассманова переменная. Более того, скалярное произведение двух векторов $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T$ и $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_N)^T$ определяется как

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_N g_N;$$

$\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})$ – положительно-определенная и вещественнозначная симметричная $(N \times N)$ -матрица, которая не зависит от θ и ζ из суперпространства $\mathbb{R}_\Lambda^{2,1}$. Элементы τ_{ij} матрицы периодов $\boldsymbol{\tau}$ можно рассматривать как свободные параметры тета-функции (3.1).

В настоящей работе мы полагаем $\boldsymbol{\tau}$ чисто мнимой, чтобы тета-функция (3.1) была вещественнозначной. В определении тета-функции (3.1) в случае $\mathbf{s} = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ здесь и далее для простоты полагаем $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \mid \boldsymbol{\tau})$. Кроме того, имеем $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{0} \mid \boldsymbol{\tau}) = \vartheta(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\tau})$. Очевидно, что тета-функция Римана (3.1) сходится абсолютно и супердифференцируема на суперпространстве $\mathbb{R}_\Lambda^{2,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Матрица периодов $\boldsymbol{\tau}$ в алгебро-геометрической теории, обсуждаемой в работах [13]–[28], обычно строится с помощью компактной римановой поверхности Γ рода $N \in \mathbb{N}$. Возьмем два набора регулярных замкнутых путей $a_1, a_2, \dots, a_N; b_1, b_2, \dots, b_N$ на Γ таким образом, чтобы индексы пересечений циклов удовлетворяли соотношениям

$$a_k \circ a_j = b_k \circ b_j = 0, \quad a_k \circ b_j = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, N.$$

Выбирая нормированные голоморфные дифференциалы ω_j , $j = 1, \dots, N$, на Γ и полагая

$$a_{jk} = \int_{a_k} \omega_j, \quad b_{jk} = \int_{b_k} \omega_j,$$

получаем, что $(N \times N)$ -матрицы $\mathbf{A} = (a_{jk})$ и $\mathbf{B} = (b_{jk})$ обратимы. Более того, если определить матрицы $\mathbf{C}$ и $\boldsymbol{\tau}$ как

$$\mathbf{C} = (c_{jk}) = \mathbf{A}^{-1}, \quad \boldsymbol{\tau} = (\tau_{jk}) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B},$$

то можно показать, что матрица $\boldsymbol{\tau}$ симметрична и имеет положительно-определенную мнимую часть.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Функции Φ_0 и c не зависят от грассмановых переменных и являются нечетными. Их можно положить равными нулю при построении суперсолитонных решений [36]. Однако в нашем построении суперквазипериодического решения ненулевые постоянные Φ_0 и c играют важную роль и их нельзя отбросить, поскольку периодические решения, как правило, не удовлетворяют уравнениям с нулевыми постоянными интегрирования. Например, рассмотрим обыкновенное уравнение КдФ

$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx}.$$

Полагая $u = u(\xi) = u(x - \nu t)$, после элементарного интегрирования получим

$$-4\nu u'^2 = 2u^3 + 2c_1 u + c_2,$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования. Если постоянная интегрирования равна нулю, то получаем хорошо известное солитонное решение, а при ненулевой постоянной интегрирования получаем периодическое решение

$$u = -2\wp(\xi) + \gamma,$$

где $\wp$ – функция Вейерштрасса $\wp(\xi)$, и γ зависят от постоянных интегрирования c_1 и c_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Говорят, что функция $g(\mathbf{x}, t)$ на $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$ квазипериодична по t с фундаментальными периодами $T_1, \dots, T_k \in \mathbb{C}$, если $T_1, \dots, T_k$ линейно зависимы над $\mathbb{Z}$ и существует такая функция $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ из $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^k$, что

$$G(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_j + T_j, \dots, y_k) = G(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_j, \dots, y_k)$$

для всех $y_j \in \mathbb{C}$ и

$$G(\mathbf{x}, t, \dots, t, \dots, t) = g(\mathbf{x}, t).$$

В частности, $g(x, t)$ становится периодической, если и только если $T_j = m_j T$.

Периодичность тета-функции $\vartheta(\xi)$ выражается следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathbf{e}_j$ – j -й столбец единичной $(N \times N)$ -матрицы I_N , $\boldsymbol{\tau}_j$ – j -й столбец матрицы $\boldsymbol{\tau}$, а τ_{jj} – (j, j) -й элемент матрицы $\boldsymbol{\tau}$. Тогда тета-функция $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ обладает следующими свойствами периодичности [39]:

$$\vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\tau}) = \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}), \quad (3.2)$$

$$\vartheta(\boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}) = e^{-2\pi i \xi_j + \pi \tau_{jj}} \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}). \quad (3.3)$$

В случае $(N \times 2N)$ -матриц $\boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{I}_N, i\boldsymbol{\tau})$ и $\boldsymbol{\Lambda} = (\mathbf{0}, -I_N)$ можно объединить уравнения (3.2) и (3.3) в выражение

$$\vartheta(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\Omega} \bar{\mathbf{e}}_j, \boldsymbol{\tau}) = e^{2\pi i \langle \boldsymbol{\Lambda} \bar{\mathbf{e}}_j, \boldsymbol{\xi} \rangle + \varsigma_j} \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}), \quad (3.4)$$

где $\bar{\mathbf{e}}_j$, $j = 1, \dots, 2N$, обозначает $2N$ столбцов единичной $(2N \times 2N)$ -матрицы, а ς_j – j -я компонента $2N$ -мерного вектора $\boldsymbol{\varsigma} = (0, \dots, 0, \pi \tau_{11}, \dots, \pi \tau_{NN})^T$.

Тета-функция $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$, удовлетворяющая условию (3.4), называется мультипликативной функцией. Будем рассматривать векторы $\{\mathbf{e}_j, j = 1, \dots, N\}$ и $\{i\boldsymbol{\tau}_j, j = 1, \dots, N\}$ как периоды тета-функции $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ с множителями 1 и $e^{-2\pi i \xi_j + \pi \tau_{jj}}$ соответственно. Здесь только первые N векторов действительно являются периодами тета-функции $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$, а последние N векторов являются периодами функции $\partial_{\xi_k \xi_l}^2 \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$, $k, l = 1, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathbf{e}_j$ и $\boldsymbol{\tau}_j$ определяются как и в предложении 2. Имеем

$$\partial_{\xi_k \xi_l}^2 \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e}_j, \boldsymbol{\tau}) = \partial_{\xi_k \xi_l}^2 \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}), \quad k, l, j = 1, \dots, N; \quad (3.5)$$

$$\partial_{\xi_k \xi_l}^2 \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}) = \partial_{\xi_k \xi_l}^2 \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}), \quad k, l, j = 1, \dots, N. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (3.5) очевидно выводится из уравнения (3.2). Используя выражение (3.4), легко проверить, что

$$\frac{\partial_{\xi_k} \vartheta(\boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau})}{\vartheta(\boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau})} = -2\pi i \delta_{jk} + \frac{\partial_{\xi_k} \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}.$$

Тем самым мы имеем

$$\partial_{\xi_k} \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi} + i\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}) = -2\pi i \delta_{jk} + \partial_{\xi_k} \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}). \quad (3.7)$$

Дифференцирование этой формулы по ξ_l немедленно приводит к уравнению (3.6). Уравнения (3.5) и (3.6) означают, что для любого $j = 1, \dots, N$ функция $\partial_{\xi_k \xi_l}^2 \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ является периодической с двумя фундаментальными периодами $\mathbf{e}_j$ и $i\boldsymbol{\tau}_j$.

Теперь обратимся к исследованию периодичности решения (2.5). Полагая $f = \theta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$, получаем из предложения 3, что

$$\Phi = \Phi_0 + 2 \sum_{k,l=1}^N \alpha_k (\zeta_l + \theta \alpha_l) \partial_{\xi_k \xi_l}^2 \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}),$$

откуда видно, что решение Φ является квазипериодической функцией с $2N$ фундаментальными периодами $\{\mathbf{e}_j, j = 1, \dots, N\}$ и $\{i\boldsymbol{\tau}_j, j = 1, \dots, N\}$. Квазипериодичность означает, что Φ периодична по каждой из N фаз $\{\xi_j, j = 1, \dots, N\}$, если остальные $N - 1$ фаз фиксированы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Предположим, что $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{0} \mid \boldsymbol{\tau})$ и $\vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{0} \mid \boldsymbol{\tau})$ являются тета-функциями Римана на $\mathbb{R}_\Lambda^{2,1}$, для которых $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, $\boldsymbol{\varepsilon}' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_N)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\xi_j = \alpha_j x + \omega_j t + \beta_j \theta \zeta + \delta_j$, $j = 1, 2, \dots, N$. Тогда операторы D_x , D_t и S_x при действии на тета-функции Римана имеют следующие свойства:*

$$\begin{aligned} D_x \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}' \mid \boldsymbol{\tau}) \cdot \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s} \mid \boldsymbol{\tau}) &= \\ &= \sum_{\boldsymbol{\mu}} \partial_x \vartheta \left(2\boldsymbol{\xi}, \frac{\mathbf{s}' - \mathbf{s} - \boldsymbol{\mu}}{2} \middle| 2\boldsymbol{\tau} \right) \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=0} \vartheta \left(2\boldsymbol{\xi}, \frac{\mathbf{s}' + \mathbf{s} + \boldsymbol{\mu}}{2} \middle| 2\boldsymbol{\tau} \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} S_x \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}' \mid \boldsymbol{\tau}) \cdot \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s} \mid \boldsymbol{\tau}) &= \\ &= \sum_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{D} \vartheta \left(2\boldsymbol{\xi}, \frac{\mathbf{s}' - \mathbf{s} - \boldsymbol{\mu}}{2} \middle| 2\boldsymbol{\tau} \right) \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=0} \vartheta \left(2\boldsymbol{\xi}, \frac{\mathbf{s}' + \mathbf{s} + \boldsymbol{\mu}}{2} \middle| 2\boldsymbol{\tau} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_N)$, а обозначение $\sum_{\boldsymbol{\mu}}$ представляет 2^N различных преобразований, отвечающих всем возможным комбинациям $\mu_1 = 0, 1; \dots; \mu_N = 0, 1$.

Вообще говоря, для полиномиального по S_x , D_x и D_t оператора $G(S_x, D_x, D_t)$ имеем

$$G(S_x, D_x, D_t) \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) \cdot \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\boldsymbol{\mu}} C(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\tau}) \vartheta \left(2\boldsymbol{\xi}, \frac{\boldsymbol{\mu}}{2} \middle| 2\boldsymbol{\tau} \right), \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_j &= \alpha_j x + \omega_j t + \beta_j \theta \zeta + \delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ C(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\tau}) &= \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} G \left\{ 4\pi i \sum_{j=1}^N \left(n_j - \frac{\mu_j}{2} \right) \alpha_j, 4\pi i \sum_{j=1}^N \left(n_j - \frac{\mu_j}{2} \right) \omega_j, \right. \\ &\quad \left. 4\pi i \sum_{j=1}^N \left(n_j - \frac{\mu_j}{2} \right) (\zeta_j + \theta \alpha_j) \right\} \exp \left[-2\pi \sum_{j,k=1}^N \left(n_j - \frac{\mu_j}{2} \right) \tau_{jk} \left(n_k - \frac{\mu_k}{2} \right) \right], \\ \mu_j &= 0, 1, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты докажем формулу (3.9) только в одномерном случае. Доказательство в N -мерном случае можно провести аналогично, заменяя одномерные векторы N -мерными. Имеем

$$\begin{aligned}
 F &\equiv S_x \vartheta(\xi, s' \mid \tau) \cdot \vartheta(\xi, s \mid \tau) = \\
 &= \sum_{m', m=-\infty}^{\infty} \mathcal{D} e^{2\pi i(m'+s')\xi - \pi(m'+s')^2\tau} e^{2\pi i(m+s)\xi - \pi(m+s)^2\tau} = \\
 &= \sum_{m', m=-\infty}^{\infty} 2\pi i(\zeta + \theta\alpha)(m' - m + s' - s) e^{2\pi i(m'+m+s'+s)\xi - \pi\tau[(m'+s')^2 + (m+s)^2]} \stackrel{m=l'-m'}{=} \\
 &\stackrel{m=l'-m'}{=} \sum_{l', m'=-\infty}^{\infty} 2\pi i(\zeta + \theta\alpha)(2m' - l' + s' - s) e^{2\pi i(l'+s'+s)\xi - \pi[(m'+s')^2 + (l'-m'+s)^2]\tau} \stackrel{l'=2l+\mu}{=} \\
 &\stackrel{l'=2l+\mu}{=} \sum_{\mu=0,1} \sum_{l, m'=-\infty}^{\infty} 2\pi i(\zeta + \theta\alpha)(2m' - 2l + s' - s - \mu) \times \\
 &\quad \times e^{4\pi i\xi[l+(s'+s+\mu)/2] - \pi[(m'+s')^2 + (m'-2l-s-\mu)^2]\tau}.
 \end{aligned}$$

Пусть $m' = n + l$. Используя соотношения

$$\begin{aligned}
 n + l + s' &= \left[n + \frac{s' - s - \mu}{2} \right] + \left[l + \frac{s' + s + \mu}{2} \right], \\
 n - l - s - \mu &= \left[n + \frac{s' - s - \mu}{2} \right] - \left[l + \frac{s' + s + \mu}{2} \right],
 \end{aligned}$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_{\mu=0,1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} 4\pi i(\zeta + \theta\alpha) \left[n + \frac{s' - s - \mu}{2} \right] e^{-2\pi\tau[n+(s'-s-\mu)/2]^2} \right] \times \\
 &\quad \times \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i[l+(s'+s+\mu)/2]2\xi - 2\pi\tau[l+(s'+s+\mu)/2]^2} \right] = \\
 &= \sum_{\mu=0,1} \mathcal{D} \vartheta\left(2\xi, \frac{s' - s - \mu}{2} \middle| 2\tau\right) \Big|_{\xi=0} \vartheta\left(2\xi, \frac{s' + s + \mu}{2} \middle| 2\tau\right).
 \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать формулу (3.8). В специальном случае тета-функции Римана (3.1), соответствующем $s = 0$, используя формулы (3.8) и (3.9), можно доказать формулу (3.10).

Из формул (3.10) и (3.11) видно, что если уравнения

$$C(\mu, \tau) = 0$$

выполнены для всех возможных комбинаций $\mu_1 = 0, 1; \mu_2 = 0, 1; \dots; \mu_N = 0, 1$, то $\vartheta(\xi, \tau)$ является решением билинейного уравнения

$$G(S_x, D_x, D_t) \vartheta(\xi, \tau) \cdot \vartheta(\xi, \tau) = 0.$$

Отсюда следует единая формула, которая играет ключевую роль при построении суперпериодических волновых решений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Введем дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}\nabla &= (\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}, \dots, \partial_{\xi_N}), \\ \partial_x &= \alpha_1 \partial_{\xi_1} + \alpha_2 \partial_{\xi_2} + \dots + \alpha_N \partial_{\xi_N} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla, \\ \partial_t &= \omega_1 \partial_{\xi_1} + \omega_2 \partial_{\xi_2} + \dots + \omega_N \partial_{\xi_N} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla, \\ \mathcal{D} &= (\zeta_1 + \theta \alpha_1) \partial_{\xi_1} + (\zeta_2 + \theta \alpha_2) \partial_{\xi_2} + \dots + (\zeta_N + \theta \alpha_N) \partial_{\xi_N} = (\boldsymbol{\zeta} + \theta \boldsymbol{\alpha}) \cdot \nabla.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \partial_x^k \partial_t^j \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \tau) &= [(\boldsymbol{\zeta} + \theta \boldsymbol{\alpha}) \cdot \nabla] (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)^k (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)^j \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \\ &= (\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla) (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)^k (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)^j \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \\ &\quad + \theta (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)^{k+1} (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)^j \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \tau), \quad j, k = 0, 1, \dots\end{aligned}\quad (3.12)$$

Это предположение доказывается прямым вычислением.

4. СУПЕРОДНОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ И ИХ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

В настоящем разделе мы сначала построим однопериодические волновые решения уравнения (1.1). Рассмотрим простой случай $N = 1$, $s = 0$. Супертега-функция (3.1) становится обыкновенной тета-функцией

$$f(x, t, \theta) = \vartheta(\xi_1, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \xi_1 - \pi n^2 \tau}, \quad (4.1)$$

где $\xi_1 = \alpha_1 x + \omega_1 t + \beta_1 \theta \zeta + \delta_1$ – фазовая переменная, а $\tau > 0$ – параметр.

Чтобы показать, что тета-функция (4.1) является решением билинейного уравнения (2.6), используем формулу (3.11). Получим

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-16\pi^2 \left(n - \frac{\mu}{2} \right)^2 (\beta_1 \zeta + \theta \alpha_1) \omega_1 + 256\pi^4 \left(n - \frac{\mu}{2} \right)^4 (\beta_1 \zeta + \theta \alpha_1) \alpha_1^3 - \right. \\ \left. - 48\pi^2 \left(n - \frac{\mu}{2} \right)^2 \alpha_1^2 \Phi_0 + c \right] e^{-2\pi(n-\mu/2)^2 \tau} = 0, \quad \mu = 0, 1.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\lambda &= e^{-\pi \tau / 2}, \quad \vartheta_1(\xi_1, \lambda) = \vartheta(2\xi_1, 0, 2\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{4n^2} e^{4i\pi n \xi_1}, \\ \vartheta_2(\xi_1, \lambda) &= \vartheta\left(2\xi_1, -\frac{1}{2}, 2\tau\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{(2n-1)^2} e^{2i\pi(2n-1)\xi_1}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Используя формулы (4.3), уравнение (4.2) можно записать в виде линейной системы

$$(\beta_1 \zeta + \theta \alpha_1) \vartheta_j'' \omega_1 + (\beta_1 \zeta + \theta \alpha_1) \alpha_1^3 \vartheta_j^{(4)} + 3\alpha_1^2 \vartheta_j'' \Phi_0 + \vartheta_j c = 0, \quad j = 1, 2, \quad (4.4)$$

где $\omega_1 \in \Lambda_0$ – четное, а $c, \Phi_0 \in \Lambda_1$ – нечетные, и мы обозначили производную $\vartheta_j(\xi_1, \lambda)$ по $\xi_1 = 0$ просто как

$$\vartheta_j^{(l)} = \vartheta_j^{(l)}(0, \lambda) = \left. \frac{d^l \vartheta_j(\xi_1, \lambda)}{d\xi_1^l} \right|_{\xi_1=0}, \quad j = 1, 2, \quad l = 0, 1, \dots$$

Более того, видно, что функции ϑ_j и их производные не зависят от грассмановой переменной θ и антикоммутирующей постоянной ζ .

Покажем, что существуют решения ω_1, c, Φ_0 системы (4.4). Поскольку $c = c(\theta, \zeta)$ и $\Phi = \Phi_0(\theta, \zeta)$ являются функциями грассмановой переменной θ , их можно записать в виде разложения

$$c = b_1 + b_2\theta, \quad \Phi_0 = f_1 + f_2\theta, \quad (4.5)$$

где $b_1, f_1 \in \Lambda_1$ – нечетные, а $b_2, f_2 \in \Lambda_0$ – четные. Подстановка разложения (4.5) в систему (4.4) приводит к формуле

$$\begin{aligned} \beta_1 \zeta \vartheta_j'' \omega_1 + \vartheta_j b_1 + \zeta \alpha_1^3 \vartheta_j^{(4)} + 3\alpha_1^2 \vartheta_j'' f_1 + \\ + \theta(3\alpha_1^2 \vartheta_j'' f_2 + \vartheta_j b_2 + \alpha_1 \vartheta_j'' \omega_1 + \alpha_1^4 \vartheta_j^{(4)}) = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где ω, b_1, b_2, f_1 и f_2 – параметры, подлежащие определению.

Поскольку θ является грассмановой переменной, система (4.6) будет выполнена, если

$$\beta_1 \zeta \vartheta_j'' \omega_1 + \vartheta_j b_1 + \beta_1 \zeta \alpha_1^3 \vartheta_j^{(4)} + 3\alpha_1^2 \vartheta_j'' f_1 = 0, \quad j = 1, 2; \quad (4.7)$$

$$3\alpha_1^2 \vartheta_j'' f_2 + \vartheta_j b_2 + \alpha_1 \vartheta_j'' \omega_1 + \alpha_1^4 \vartheta_j^{(4)} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (4.8)$$

Очевидно, что в системах (4.7) и (4.8) векторы $(\vartheta_1, \vartheta_2)^T$ и $(\vartheta_1'', \vartheta_2'')^T$ линейно независимы, а $(\vartheta_1^{(4)}, \vartheta_2^{(4)})^T \neq 0$. Поэтому система (4.7) допускает решение

$$\omega_1 = -3\nu\alpha_1^2 + \frac{(\vartheta_2^{(4)}\vartheta_1 - \vartheta_1^{(4)}\vartheta_2)\alpha_1^3}{\vartheta_1''\vartheta_2 - \vartheta_2''\vartheta_1}, \quad b_1 = \frac{(\vartheta_2^{(4)}\vartheta_1'' - \vartheta_1^{(4)}\vartheta_2'')\beta_1\alpha_1^3\zeta}{\vartheta_1''\vartheta_2 - \vartheta_2''\vartheta_1}, \quad (4.9)$$

где мы для простоты положили $f_1 = \nu\zeta \in {}^\perp\Lambda_1$, $\nu \in \Lambda_0$, а другие параметры α_1, τ, β_1 считали свободными.

Используя выражения (4.9) и решая систему (4.8), получаем

$$f_2 = \nu\omega_1, \quad b_2 = \frac{(\vartheta_1^{(4)}\vartheta_2'' - \vartheta_2^{(4)}\vartheta_1'')\alpha_1^4}{\vartheta_1''\vartheta_2 - \vartheta_2''\vartheta_1}. \quad (4.10)$$

Таким образом, получаем супероднопериодическое волновое решение уравнения (1.1)

$$\Phi = \nu(\beta_1\zeta + \omega_1\theta) + 2[\mathcal{D} \ln \vartheta(\xi_1, \tau)]_x \quad (4.11)$$

с тета-функцией $\vartheta(\xi_1, \tau)$, задаваемой формулой (3.1), и с параметрами c и ω_1 , определяемыми уравнениями (4.5) и (4.9); при этом остальные параметры $\alpha_1, \beta_1, \tau, \delta_1$ являются свободными. Среди них три параметра – α, ζ, τ – полностью определяют однопериодическую волну. Таким образом, супероднопериодическая волна (4.11) характеризуется следующими простыми свойствами.

1. Она является грассманозначной функцией и ограничена для всех комплексных переменных (x, t, θ) .

2. Она является одномерной, так что имеется одна фазовая переменная ξ_1 , для которой параметр скорости дается уравнением (4.9).

3. Она имеет два фундаментальных периода (1 и $i\tau$) по фазовой переменной ξ_1 .

4. Супероднопериодическая волна отличается от классической однопериодической волны. Для классической однопериодической волны характерен один и тот же волновой рисунок по всем направлениям, и ее можно рассматривать как параллельную суперпозицию пересекающихся одиночных односолитонных волн. Однако полученная супероднопериодическая волна периодична по направлениям пространственной (x) и временной (t) переменных, но не по направлению грассмановой переменной θ .

На рис. 1 показана супероднопериодическая волна для одного набора параметров. Имеется интересная “зона влияния”, возникающая для суперквазипериодических волн. Видно, что суперквазипериодические волны симметричны относительно этой зоны, но исчезают вместе с ней. Более того, амплитуды суперквазипериодических волн увеличиваются, когда волна удаляется от зоны.

Рассмотрим далее асимптотические свойства супероднопериодического волнового решения. Соотношение между однопериодическим волновым решением (4.5) и суперодносолитонным решением (2.3) можно установить следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для супероднопериодического волнового решения (4.11)

$$\nu = 0, \quad \alpha_1 = \frac{p_1}{2\pi i}, \quad \beta_1 = \frac{q_1}{2\pi i}, \quad \delta_1 = \frac{r_1 + \pi\tau}{2\pi i}, \quad (4.12)$$

где p_1 , q_1 и r_1 – те же, что и в решении (2.3). Тогда имеют место следующие асимптотические свойства:

$$c \rightarrow 0, \quad \xi_1 \rightarrow \frac{\eta_1 + \pi\tau}{2\pi i}, \quad \vartheta(\xi_1, \tau) \rightarrow 1 + e^{\eta_1}. \quad (4.13)$$

при $\lambda \rightarrow 0$. Другими словами, супероднопериодическое решение (4.11) стремится к суперодносолитонному решению (2.3) в пределе малых амплитуд, т.е. $\Phi \rightarrow \Phi_1$ при $\lambda \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для анализа асимптотических свойств однопериодического решения мы будем непосредственно использовать систему (4.4): это проще и эффективнее нашего основного метода, основанного на решении системы [10]–[28]. Поскольку коэффициенты в системе (4.4) представляют собой степенные ряды по λ , ее решения (ω, c) также должны быть рядами по λ . Поэтому разложим явно коэффициенты системы (4.4) в виде

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= 1 + 2\lambda^4 + \dots, & \vartheta_1'' &= -32\pi^2\lambda^4 + \dots, \\ \vartheta_1^{(4)} &= 512\pi^4\lambda^4 + \dots, & \vartheta_2 &= 2\lambda + 2\lambda^9 + \dots, \\ \vartheta_2'' &= -8\pi^2\lambda - 72\pi^2\lambda^9 + \dots, & \vartheta_2^{(4)} &= 32\pi^4\lambda + 2592\pi^4\lambda^9 \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ищем решение системы (4.4) в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{1,0} + \omega_{1,1}\lambda + \omega_{1,2}\lambda^2 + \dots = \omega_{1,0} + o(\lambda), \\ c &= c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots = c_0 + o(\lambda). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Рис. 1. Распространение супероднопериодической волны для суперсимметричного уравнения КдФ с параметрами $\alpha_1 = 0.1$, $\tau = 2$, $\zeta = -0.03$: а – вид на волну в перспективе; б – вид на волну сверху, показан контурный график (светлые зоны соответствуют гребням, а темные – впадинам). Из рис. в–д видно, что волна периодична в направлениях пространственной (x) и временной (t) переменных, но не в направлении грассмановой переменной θ .

Подставляя разложения (4.14) и (4.15) в систему (4.4) (деля второе уравнение на λ) и полагая $\lambda \rightarrow 0$, немедленно получаем соотношения

$$c_0 = 0, \quad -8\pi^2(\beta_1\zeta + \theta\alpha_1)\omega_{1,0} + 2c_0 + 32\pi^4(\beta_1\zeta + \theta\alpha_1)\alpha_1^3 = 0,$$

которые имеют решения

$$c_0 = 0, \quad \omega_{1,0} = 4\pi^2\alpha_1^3. \quad (4.16)$$

Комбинируя (4.15) и (4.16), получаем

$$c \rightarrow 0, \quad 2\pi i\omega_1 \rightarrow 8i\pi^3\alpha_1^3 = -p_1^3$$

при $\lambda \rightarrow 0$ или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 = 2\pi i\xi_1 - \pi\tau = p_1x + 2\pi i\omega_1t + q_1\theta\zeta + r_1 &\rightarrow \\ \rightarrow p_1x - p_1^3t + q_1\theta\zeta + r_1 = \eta_1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

при $\lambda \rightarrow 0$.

Остается рассмотреть асимптотические свойства однопериодического волнового решения (4.11) в пределе $\lambda \rightarrow 0$. Для этого разложим тета-функцию Римана $\vartheta(\xi, \tau)$ и используем выражение (4.17). Тогда получим

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi_1, \tau) &= 1 + \lambda^2(e^{2\pi i\xi_1} + e^{-2\pi i\xi_1}) + \lambda^8(e^{4\pi i\xi_1} + e^{-4\pi i\xi_1}) + \dots = \\ &= 1 + e^{\hat{\xi}_1} + \lambda^4(e^{-\hat{\xi}_1} + e^{2\hat{\xi}_1}) + \lambda^{12}(e^{-2\hat{\xi}_1} + e^{3\hat{\xi}_1}) + \dots \rightarrow \\ &\rightarrow 1 + e^{\hat{\xi}_1} \rightarrow 1 + e^{\eta_1} \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow 0$. Это доказывает уравнение (4.13). Отсюда следует, что однопериодическое решение (4.11) просто переходит в односолитонное решение, когда амплитуда $\lambda \rightarrow 0$.

5. СУПЕРДВУХПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ И ИХ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

В этом разделе мы рассмотрим супердвухпериодические волновые решения суперсимметричного уравнения КдФ (1.1), являющиеся двумерным обобщением однопериодических волновых решений. Двухпериодические волны, которые мы будем рассматривать, имеют трехмерное поле скоростей и двумерный поверхностный рисунок.

В случае $N = 2$, $s = 0$ тета-функция Римана (3.1) принимает вид

$$f(x, t, \theta) = \vartheta(\xi, \tau) = \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i \langle \xi, \mathbf{n} \rangle - \pi \langle \tau \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle}, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T \in \mathbb{Z}^2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \in \mathbb{C}^2$, $\xi_j = \alpha_j x + \omega_j t + \beta_j \theta \zeta + \delta_j$, $j = 1, 2$. Здесь τ — положительно-определенная вещественнозначная симметричная (2×2) -матрица

$$\tau = (\tau_{ij})_{2 \times 2}, \quad \tau_{12} = \tau_{21}, \quad \tau_{11} > 0, \quad \tau_{22} > 0, \quad \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 > 0.$$

Из формулы (3.11) находим условие, в силу которого тета-функция (5.1) удовлетворяет билинейному уравнению (2.6):

$$\begin{aligned} \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \left\{ -16\pi^2 \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{2} \right) \cdot (\beta\zeta + \theta\alpha) \right] \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{2} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} \right] + \right. \\ \left. + 256\pi^4 \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{2} \right) \cdot \boldsymbol{\alpha} \right]^3 \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{2} \right) \cdot (\beta\zeta + \theta\alpha) \right] - \right. \\ \left. - 48\pi^2 \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{2} \right) \cdot \boldsymbol{\alpha} \right]^2 \Phi_0 + c \right\} \times \\ \times e^{-2\pi(\tau(\mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}/2), \mathbf{n}-\boldsymbol{\mu}/2)} \Big|_{\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \mu_2)} = 0, \quad \mu_1, \mu_2 = 0, 1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Вводя обозначения

$$\lambda_{kl} = e^{-\pi\tau_{kl}/2}, \quad k, l = 1, 2, \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}),$$

$$\vartheta_j(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) = \vartheta\left(2\zeta, \frac{s_j}{2} \middle| 2\tau\right) = \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} e^{4\pi i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{n} - \mathbf{s}_j \rangle} \prod_{k, l=1}^2 \lambda_{kl}^{(2n_k - s_{j,k})(2n_l - s_{j,l})},$$

$$\mathbf{s}_j = (s_{j,1}, s_{j,2}), \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad \mathbf{s}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{s}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{s}_3 = (0, 1), \quad \mathbf{s}_4 = (1, 1)$$

и используя затем формулу (3.12), можно переписать условие (5.2) в виде линейной системы:

$$\begin{aligned} \theta[(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda}) + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)^4\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda})] + \zeta(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda}) + \\ + \zeta(\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)^3\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda}) + 3(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)^2\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda})\Phi_0 + \vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda})c = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $c = c(\theta, \zeta)$ и $\Phi_0 = \Phi_0(\theta, \zeta)$ – нечетные грассмановы переменные, которые можно разложить как

$$c = b_1\zeta + b_2\theta, \quad \Phi_0 = f_1\zeta + f_2\theta, \quad (5.4)$$

где $b_1, b_2, f_1, f_2 \in \Lambda_0$ – четные константы, подлежащие определению.

Подставив разложения (5.4) в систему (5.3) аналогично тому, как это делалось для системы (4.4), получаем две линейные системы:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda}) + 3(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)^2\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda})f_2 + \vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda})b_2 + \\ + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)^4\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4; \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda}) + 3(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)^2\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda})f_1 + \vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda})b_1 + \\ + (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla)(\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla)^3\vartheta_j(0, \boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Видно, что система (5.5) линейна по переменным $(\omega_1, \omega_2, f_2, b_2)$; в нее не входят грассмановы переменные, а детерминант ее коэффициентов ненулевой. Система (5.6) также линейна по переменным $(\beta_1, \beta_2, f_1, b_1)$. Из системы (5.5) можно получить ненулевое решение $(\omega_1, \omega_2, f_2, b_2)$. Система (5.6) допускает специальные решения $\beta_1\alpha_2 = \alpha_2\beta_1, f_1b_2 = f_2b_1$.

Таким способом мы получаем точное супердвухпериодическое волновое решение уравнения (1.1)

$$\Phi = \Phi_0 + 2[\mathcal{D} \ln \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau)]_x, \quad (5.7)$$

где $\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau)$, $\xi_j = \alpha_j x + \omega_j t + \alpha_j \theta \zeta + \delta_j$, $j = 1, 2$, задаются уравнением (5.1), $\omega_1, \omega_2, \Phi_0, c$ определяются из формул (5.5) и (5.6), а остальные параметры $\alpha_1, \alpha_2, \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}, \delta_1, \delta_2$ являются свободными. Супердвухпериодическая волна (5.7) характеризуется простыми свойствами.

1. Она является прямым обобщением однопериодических волн, при этом рисунок ее поверхности двумерен, т.е. имеются две фазовые переменные ξ_1 и ξ_2 . Она имеет два независимых пространственных периода в двух независимых горизонтальных направлениях. Двухпериодическую волну можно рассматривать как волну, представляющую собой периодические волны на мелкой воде без предположения об одномерности.

2. Супердвухпериодическое волновое решение является истинно двумерным. Оно пространственно-периодично по двум направлениям ξ_1 и ξ_2 , но не периодично по направлениям x, t и θ . На рис. 2 показана супердвухпериодическая волна для одного набора параметров. Имеется интересная “зона влияния”, возникающая среди суперквазипериодических волн. Видно, что суперквазипериодические волны симметричны относительно этой зоны и исчезают вместе с ней. Более того, амплитуды суперквазипериодических волн возрастают по мере удаления волн от зоны.

Наконец, рассмотрим асимптотические свойства супердвухпериодического решения (5.7). Аналогично теореме 1 можно установить следующее соотношение между супердвухпериодическим решением (5.7) и супердвухсолитонным решением (2.4).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(\omega_1, \omega_2, \Phi_0, c)^T$ – решение системы (5.4)–(5.6). Для супердвухпериодического волнового решения (5.7) положим

$$\alpha_j = \frac{p_j}{2\pi i}, \quad \beta_j = \frac{q_j}{2\pi i}, \quad \delta_j = \frac{r_j + \pi \tau_{jj}}{2\pi i}, \quad \tau_{12} = -\frac{A_{12}}{2\pi}, \quad j = 1, 2, \quad (5.8)$$

с теми же $p_j, q_j, r_j, j = 1, 2$, что и в (2.4). Тогда при условии $p_1 q_2 = p_2 q_1$ имеем асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} \Phi_0 \rightarrow 0, \quad c \rightarrow 0, \quad \xi_j \rightarrow \frac{\eta_j + \pi \tau_{jj}}{2\pi i}, \quad j = 1, 2, \\ \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) \rightarrow 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

при $\lambda_{11}, \lambda_{22} \rightarrow 0$. Другими словами, супердвухпериодическое волновое решение (5.7) стремится к супердвухсолитонному решению в определенном пределе:

$$\Phi \rightarrow 2[\mathcal{D} \ln \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau)]_x$$

при $\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow 0$, где $\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau)$ дается уравнением (5.9) и немного отличается от (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим функцию Римана $\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau)$ в виде

$$\begin{aligned} \vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) = 1 + (e^{2\pi i \xi_1} + e^{-2\pi i \xi_1})e^{-\pi \tau_{11}} + (e^{2\pi i \xi_2} + e^{-2\pi i \xi_2})e^{-\pi \tau_{22}} + \\ + (e^{2\pi i(\xi_1 + \xi_2)} + e^{-2\pi i(\xi_1 + \xi_2)})e^{-\pi(\tau_{11} + 2\tau_{12} + \tau_{22})} + \dots \end{aligned}$$

Используя систему (5.5) и выполняя преобразование $\hat{\omega}_j = 2\pi i \omega_j$, $j = 1, 2$, получаем

$$\vartheta(\xi_1, \xi_2, \tau) = 1 + e^{\hat{\xi}_1} + e^{\hat{\xi}_2} + e^{\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 - 2\pi \tau_{12}} +$$

Рис. 2. Распространение супердвухпериодической волны для суперсимметричного уравнения КдФ с параметрами $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = -0.1$, $\tau_{11} = 2$, $\tau_{12} = 0.2$, $\tau_{22} = 2$, $\zeta_1 = 0.1$, $\zeta_2 = 0.1$: а – вид на волну в перспективе; б – вид на волну сверху, показан контурный график (светлые зоны соответствуют гребням, а темные – впадинам). Из рис. в–д видно, что волна не является периодической по направлениям x , t и θ .

$$\begin{aligned}
& + \lambda_{11}^4 e^{-\hat{\xi}_1} + \lambda_{22}^4 e^{-\hat{\xi}_2} + \lambda_{11}^4 \lambda_{22}^4 e^{-\hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_2 - 2\pi\tau_{12}} + \dots \rightarrow \\
& \rightarrow 1 + e^{\hat{\xi}_1} + e^{\hat{\xi}_2} + e^{\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 + A_{12}}
\end{aligned}$$

при $\lambda_{11}, \lambda_{22} \rightarrow 0$, где $\hat{\xi}_j = k_j x + \hat{\omega}_j t + \theta \zeta_j + r_j$, $j = 1, 2$.

Чтобы доказать соотношение (4.7), остается проверить, что

$$c \rightarrow 0, \quad \hat{\omega}_j \rightarrow -k_j^3, \quad \hat{\xi}_j \rightarrow \eta_j, \quad j = 1, 2, \quad (5.10)$$

при $\lambda_{11}, \lambda_{22} \rightarrow 0$.

Как и в случае $N = 1$, пусть решение системы (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega_{1,0} + \omega_{1,1}\lambda_{11} + \omega_{1,2}\lambda_{22} + \dots = \omega_{1,0} + o(\lambda_{11}, \lambda_{22}), \\
\omega_2 &= \omega_{2,0} + \omega_{2,1}\lambda_{11} + \omega_{2,2}\lambda_{22} + \dots = \omega_{2,0} + o(\lambda_{11}, \lambda_{22}), \\
\Phi_0 &= \Phi_{0,0} + \Phi_{0,1}\lambda_{11} + \Phi_{0,2}\lambda_{22} + \dots = \Phi_{0,0} + o(\lambda_{11}, \lambda_{22}), \\
c &= c_0 + c_1\lambda_{11} + c_2\lambda_{22} + \dots = c_0 + o(\lambda_{11}, \lambda_{22}).
\end{aligned} \quad (5.11)$$

Разлагая функции a_{ij} , b_j , $j = 1, 2, 3, 4$, как в формулах (5.4), и используя наше предположение, сформулированное в (5.11), делим второе и третье уравнения соответственно на λ_{11} и λ_{22} , а четвертое на $\lambda_{11}\lambda_{22}$. Полагая $\lambda_{11}, \lambda_{22} \rightarrow 0$ и используя выражения (5.8), получаем

$$b_0 = 0, \quad \Phi_{0,0} = 0, \quad \omega_{1,0} = 4\pi^2\alpha_1^3, \quad \omega_{2,0} = 4\pi^2\alpha_2^3. \quad (5.12)$$

Комбинируя формулы (5.11) и (5.12), получаем

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= o(\lambda_{11}, \lambda_{22}) \rightarrow 0, & c &= o(\lambda_{11}, \lambda_{22}) \rightarrow 0, \\
\omega_1 &= 4\pi^2\alpha_1^3 + o(\lambda_{11}, \lambda_{22}) \rightarrow 4\pi^2\alpha_1^3, & \omega_2 &= 4\pi^2\alpha_2^3 + o(\lambda_{11}, \lambda_{22}) \rightarrow 4\pi^2\alpha_2^3
\end{aligned}$$

при $\lambda_{11}, \lambda_{22} \rightarrow 0$, откуда следует (5.9). Следовательно, двухпериодическое волновое решение (5.7) стремится к двухсолитонному решению при $\lambda_{11}, \lambda_{22} \rightarrow 0$.

6. УСЛОВИЯ ДЛЯ СУПЕР- N -ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ

В данном разделе мы рассмотрим условие для супер- N -периодических волновых решений уравнения (1.1). Тета-функция берется в виде ($s = 0$)

$$\vartheta(\xi, \tau) = \vartheta(\xi_1, \dots, \xi_N, \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^N} e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{n} - \pi(\tau \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}}, \quad (6.1)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)^T \in \mathbb{Z}^N$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T \in \mathbb{C}^N$, $\xi_j = \alpha_j x + \omega_j t + \theta \zeta_j + \delta_j$, $j = 1, \dots, N$, а τ – симметричная положительно-определенная $(N \times N)$ -матрица.

Чтобы тета-функция (6.1) удовлетворяла билинейному уравнению (2.6), видим из (3.11), что должно выполняться условие

$$\sum_{n_1, \dots, n_N = -\infty}^{\infty} G \left\{ 4\pi i \sum_{j=1}^N \left(n_j - \frac{\mu_j}{2} \right) \alpha_j, 4\pi i \sum_{j=1}^N \left(n_j - \frac{\mu_j}{2} \right) \omega_j, \right.$$

$$4\pi i \sum_{j=1}^N \left(n_j - \frac{\mu_j}{2} \right) (\zeta_j + \theta \alpha_j) \Big\} \times \\ \times \exp \left[-2\pi \sum_{j,k=1}^N (n_j - \mu_j) \tau_{jk} (n_k - \mu_k) \right] = 0, \quad \mu_j = 0, 1, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.2)$$

Рассмотрим теперь число уравнений и некоторых неизвестных параметров. В случае суперсимметричных уравнений, очевидно, число связей типа (6.2) равно 2^{N+1} , т.е. удвоенному числу связей, необходимых в случае обыкновенных уравнений [10]–[12]. С другой стороны, имеются параметры $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, c_i , f_i , α_i , ω_i , полное число которых есть $N(N+1)/2 + 4N + 2$. Среди них $2N$ параметров τ_{ii} , α_i выбираются как заданные параметры, связанные с амплитудами и волновыми числами (или частотами) N -периодических волн, а $N(N+1)/2$ параметров τ_{ij} неявно появляются при записи в виде ряда. Поэтому число явных неизвестных параметров есть только $3N + 2$. При $N > 2$ число уравнений больше, чем число неизвестных параметров.

В настоящей работе мы рассмотрели однопериодическое волновое решение уравнения, относящееся к случаям $N = 1$ и $N = 2$. Остаются определенные сложности в вычислениях в случае $N > 2$. Отметим, что инвариантная интегрируемая структура суперсимметричной иерархии КдФ рассматривалась с использованием вертексных операторов [40], [41]. Возможность вертекс-операторного подхода к суперквазипериодическим решениям суперсимметричных уравнений будет также принята во внимание в наших будущих исследованиях.

Благодарности. Авторы выражают особую благодарность рецензенту за ценные замечания, благодаря которым был подготовлен переработанный вариант статьи. Работа поддержана грантом City University of Hong Kong (Project № 7002440).

Список литературы

- [1] R. Hirota, J. Satsuma, *Progr. Theoret. Phys.*, **57**:3 (1977), 797–807.
- [2] R. Hirota, *The Direct Methods in Soliton Theory*, Cambridge Tracts Math., **155**, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] X. B. Hu, P. A. Clarkson, *J. Phys. A*, **28**:17 (1995), 5009–5016.
- [4] X.-B. Hu, C.-X. Li, J. J. C. Nimmo, G.-F. Yu, *J. Phys. A*, **38**:1 (2005), 195–204.
- [5] R. Hirota, Y. Ohta, *J. Phys. Soc. Japan*, **60**:3 (1991), 798–809.
- [6] D.-j. Zhang, *J. Phys. Soc. Japan*, **71**:11 (2002), 2649–2656.
- [7] K. Sawada, T. Kotera, *Progr. Theoret. Phys.*, **51**:5 (1974), 1355–1367.
- [8] A. A. Nakamura, *J. Phys. Soc. Japan*, **47**:5 (1979), 1701–1705.
- [9] A. Nakamura, *J. Phys. Soc. Japan*, **48**:4 (1980), 1365–1370.
- [10] H. H. Dai, E. G. Fan, X. G. Geng, *Periodic wave solutions of nonlinear equations by Hirota's bilinear method*, arXiv: nlin/0602015.
- [11] Y. C. Hon, E. G. Fan, Z. Qin, *Modern Phys. Lett. B*, **22**:8 (2008), 547–553.
- [12] E. G. Fan, Y. C. Hon, *Phys. Rev. E*, **78**:3 (2008), 036607, 13 pp.
- [13] С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 54–66.
- [14] Б. А. Дубровин, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 41–51.
- [15] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:1 (1975), 69–70.

- [16] P. D. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.*, **28**:1 (1975), 141–188.
- [17] H. P. McKean, P. van Moerbeke, *Invent. Math.*, **30**:3 (1975), 217–274.
- [18] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'skii, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer Ser. Nonlinear Dyn., Springer, Berlin, 1994.
- [19] F. Gesztesy, H. Holden, *Soliton Equations and Their Algebro-Geometric Solutions*, v. I: $(1 + 1)$ -Dimensional Continuous Models, Cambridge Stud. Adv. Math., **79**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [20] F. Gesztesy, H. Holden, *Phil. Trans. R Soc. A*, **366**:1867 (2008), 1025–1054.
- [21] Z. J. Qiao, *Comm. Math. Phys.*, **239**:1–2 (2003), 309–341.
- [22] L. Zampogni, *Adv. Nonlinear Stud.*, **7**:3 (2007), 345–380.
- [23] R. G. Zhou, *J. Math. Phys.*, **38**:5 (1997), 2535–2546.
- [24] C. Cao, Y. Wu, X. Geng, *J. Math. Phys.*, **40**:8 (1999), 3948–3970.
- [25] X. G. Geng, Y. T. Wu, C. W. Cao, *J. Phys. A*, **32**:20 (1999), 3733–3742.
- [26] X. G. Geng, C. W. Cao, *Nonlinearity*, **14**:6 (2001), 1433–1452.
- [27] X. G. Geng, H. H. Dai, J. Y. Zhu, *Stud. Appl. Math.*, **118**:3 (2007), 281–312.
- [28] Y. C. Hon, E. G. Fan, *J. Math. Phys.*, **46**:3 (2005), 032701, 21 pp.
- [29] Yu. I. Manin, A. O. Radul, *Comm. Math. Phys.*, **98**:1 (1985), 65–77.
- [30] P. Mathieu, *J. Math. Phys.*, **29**:11 (1988), 2499–2506.
- [31] W. Oevel, Z. Popowicz, *Comm. Math. Phys.*, **139**:3 (1991), 441–460.
- [32] P. Mathieu, *Phys. Lett. A*, **128**:3–4 (1988), 169–171.
- [33] Q. P. Liu, *Lett. Math. Phys.*, **35**:2 (1995), 115–122, arXiv: hep-th/9409008.
- [34] Q. P. Liu, Y. F. Xie, *Phys. Lett. A*, **325**:2 (2004), 139–143, arXiv: nlin/0212002.
- [35] Q. P. Liu, M. Mañas, *Phys. Lett. B*, **436**:3–4 (1998), 306–310, arXiv: solv-int/9806005.
- [36] A. S. Carstea, *Nonlinearity*, **13**:5 (2000), 1645–1656.
- [37] В. С. Владимиров, И. В. Волович, *ТМФ*, **59**:1 (1984), 3–27.
- [38] В. С. Владимиров, И. В. Волович, *ТМФ*, **60**:2 (1984), 169–198.
- [39] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta*, II: *Jacobian Theta Functions and Differential Equations*, Progress Math., **43**, Birkhäuser, Boston, MA, 1984.
- [40] P. P. Kulish, A. M. Zeitlin, *Phys. Lett. B*, **581**:1–2 (2004), 125–132, arXiv: hep-th/0312159.
- [41] P. P. Kulish, A. M. Zeitlin, *Phys. Lett. B*, **597**:2 (2004), 229–236, arXiv: hep-th/0407154.

Поступила в редакцию 3.05.2010,
после доработки 19.07.2010