Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Ойконому, Поршни Калуцы–Клейна с некоммутативными дополнительными измерениями, *ТМФ*, 2011, том 166, номер 3, 388–409

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6618>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 11:57:24

© 2011 г.

В. К. Ойконому^{*†}

ПОРШНИ КАЛУЦЫ–КЛЕЙНА С НЕКОММУТАТИВНЫМИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ

Вычислены скалярная энергия Казимира и скалярная сила Казимира для конфигурации поршня Калуцы–Клейна вида $\mathbb{R}^3 \times N$, где пространство дополнительных измерений N содержит некоммутативную двумерную сферу S_{fz} . В качестве пространства дополнительных измерений рассмотрены $T^d \times S_{fz}$, где T^d – коммутативный d -мерный тор, и S_{fz} . Для каждого из случаев анализируются те результаты и регуляризация, которые получаются в поршневой конфигурации. Исследуется энергия Казимира для однопоршневой камеры с однопетлевыми поправками, возникающими из-за присутствия самодействующего скалярного поля в некоммутативной геометрии. Вычисления проводятся в рамках определенных приближений. Полученные результаты сравниваются с результатами аналогичных вычислений для пространства-времени Минковского M^D . В заключение обсуждается стабилизация пространства дополнительных измерений в рамках поршневых конфигураций.

Ключевые слова: энергия Казимира, сила Казимира, некоммутативная геометрия, поршни, дополнительные измерения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время поршни Казимира привлекли повышенное внимание целого ряда исследователей [1]–[9]. Это вызвано тем, что поршневая конфигурация имеет много интересных количественных свойств, которые в основном связаны с тем, что, хотя энергия Казимира скалярного поля между параллельными пластинами может быть сингулярной, сила Казимира в случае поршневой конфигурации оказывается регулярной. Таким образом, можно получить формулы для силы Казимира в замкнутом виде [10]–[16].

Поршень Казимира можно реализовать, взяв три параллельные пластины, средняя из которых подвижна. Пусть между пластинами существует скалярное поле. Граничные условия на пластинах могут быть условиями Дирихле или условиями

^{*}Department of Theoretical Physics, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki, Greece. E-mail: voiko@physics.auth.gr

[†]Technological Education Institute of Serres, Serres, Greece

Неймана. Было обнаружено, что в большинстве случаев подвижная пластина притягивается к ближайшему концу, например в случае прямоугольных полостей. Однако в случае замкнутого цилиндра с произвольным сечением с условиями Дирихле на поршне и условиями Неймана на стенках была получена отталкивающая сила [17]. Напротив, трехмерный поршень, все поверхности которого суть идеальные проводники, притягивается к ближайшей стенке [18].

Сила Казимира для параллельных пластин используется для наложения ограничений на размер дополнительных измерений [19] путем учета дополнительных компактных пространственных измерений. Тем самым вычисление действующей на поршень силы Казимира при наличии компактных дополнительных измерений представляет собой очень интересную задачу. Включение дополнительных измерений типа Калуцы–Клейна при рассмотрении поршней проведено в работах [1], [2], [9]. В работе [1] вычислена скалярная сила Казимира для трехмерного поршня с произвольными дополнительными измерениями Калуцы–Клейна. Получено, что и для граничных условий Неймана, и для граничных условий Дирихле поршень притягивается к ближайшему концу. Это утверждение справедливо для любого сечения поршня и при произвольной геометрии и топологии дополнительных компактных измерений. Это очень серьезное утверждение. В большинстве случаев скалярная энергия Казимира сингулярна, однако для поршневых конфигураций сила Казимира конечна и вычисляется в замкнутом виде с использованием техники дзета-функциональной регуляризации [20], [21].

Как было отмечено, очень серьезным является тот факт, что скалярная сила Казимира для поршня не зависит от топологии и геометрии компактных дополнительных измерений. Это имеет место для компактных римановых пространств с произвольной кривизной. В настоящей работе мы проверим это в случае, когда многообразие дополнительных измерений состоит из некоммутирующих дополнительных измерений. Использование некоммутирующих дополнительных измерений мотивировано исследованиями D0-бран в постоянных черн–саймонсовских фоновых полях Рамона–Рамона [22]–[24]. Такая система приводит к некоммутативной двумерной сфере. Этот вопрос мы обсудим ниже.

Помимо уже приведенных, одна из причин использования некоммутирующих дополнительных измерений заключается в том, что они позволяют решить проблему компактных дополнительных измерений в теории поля. В большинстве случаев необходимо объяснить, почему дополнительные измерения так малы по сравнению с тремя другими пространственными измерениями [24]. Кроме того, требует объяснения тот факт, что дополнительные компактные измерения не претерпели инфляцию, как три других измерения. Впервые это удалось сделать авторам работы [25]. Они получили отрицательную объемную энергию Казимира в изучавшейся ими пятимерной модели. Результатом явилось сжатие дополнительных измерений. Но, чтобы дополнительные измерения не коллапсировали на планковских масштабах, необходимо найти механизм стабилизации радиуса. Довольно естественно ожидать, что стабилизация радиуса вполне может случиться в нашей теории поля, если в этой теории существует естественный минимальный масштаб длины. Одним из возможных масштабов является планковский. Это не очень хорошая новость для экспериментов по дополнительным измерениям. Однако, если предположить, что масштаб дополнительных измерений имеет порядок 1 ТэВ , нужно найти другую характерную дли-

ну. Некоммутативные дополнительные измерения открывают такую возможность. С учетом некоммутативности естественным образом вводится минимальный объем, а именно объем ячейки Мойала, пропорциональный параметру некоммутативности (эти вопросы мы обсудим далее), имеющему размерность длины [24].

Таким образом, если рассмотреть обычные компактные дополнительные измерения и, кроме того, несколько дополнительных измерений некоммутативного компактного пространства (или только некоммутативное пространство), то получится стабилизация коммутативного дополнительного пространства. Это дает сильную мотивацию использования некоммутативных дополнительных измерений [24]. Стабилизация пространства дополнительных измерений для поршня представляет собой очень интересную задачу, и, хотя ее рассмотрение не является целью настоящей работы, мы обсудим некоторые ее аспекты в конце статьи. Главным образом, мы сосредоточимся на вопросе о том, действительно ли скалярная сила Казимира для поршня не зависит от топологии и геометрии компактных дополнительных измерений (разумеется, в рамках некоммутативных дополнительных измерений).

Отметим, что некоммутативность нарушает лоренцеву инвариантность. Однако наличие некоммутативности по компактным дополнительным пространственным измерениям до сих пор не вызывало серьезного конфликта с наблюдениями [24].

В настоящей работе мы исследуем массивное скалярное поле с Φ^4 -самодействием в поршневой конфигурации. Будем предполагать, что пространство-время имеет дополнительные компактные измерения с топологией $T^d \times S_{\text{fz}}$, где T^d – коммутативный d -мерный тор, а S_{fz} – некоммутативная (fuzzy) двумерная сфера. Полное пространство имеет топологию $\mathbb{R}^3 \times T^d \times S_{\text{fz}}$. Предположим, что поршень бесконечен в двух измерениях, а две пластины находятся на расстоянии L друг от друга. Поршень находится на расстоянии α от одной из пластин и на расстоянии $L - \alpha$ от другой (мы следуем работе [1]). Расстояние до пластины мы будем в общем случае обозначать через a и применять полученные формулы в частных случаях $a = \alpha$ и $a = L - \alpha$. Пусть на пластинах выполнены граничные условия Дирихле для скалярного поля. Наша цель – найти энергию Казимира и силу Казимира для самодействующего массивного скалярного поля в рамках поршневой конфигурации. Вычисления будем проводить на древесном и на однопетлевом уровнях. Однопетлевой вклад вычисляется аналитически в некотором приближении.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы приводим краткий обзор необходимых свойств некоммутативной двумерной сферы. Изложение достаточно подробно для того, чтобы быть самодостаточным (мы следуем работам [22]–[24], [26], [27]). В разделе 3 получены собственные значения скалярного поля с Φ^4 -самодействием для поршневой конфигурации. В разделах 4 и 5 вычисляются энергия Казимира для поршневой конфигурации, а также сила Казимира в случаях, когда в качестве пространства дополнительных измерений выбираются $T^d \times S_{\text{fz}}$ и S_{fz} . В разделе 6 к энергии Казимира добавляются однопетлевые поправки. Раздел 7 представляет собой заключение.

2. НЕКОММУТАТИВНАЯ СФЕРА

Прежде всего, отметим, что в теории струн имеются применения некоммутативной сферы, которые в сильной степени мотивируют исследования в некоммутативной геометрии [23]. Действительно, некоммутативность в теории струн естествен-

ным путем появляется в рамках действия N D0-бран в присутствии постоянного черн–саймонсовского члена Рамона–Рамона. Основное состояние такой системы имеет геометрию некоммутативной сферы.

Вся информация о стандартной сфере S^2 содержится в бесконечномерной алгебре A_∞ . Она порождается элементами $X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^3$, где $[X_i, X_j] = 0$ и $\sum_{i=1}^3 X_i^2 = \rho^2$. Некоммутативная сфера связна с некоммутативной алгеброй A_N [22], [26]. Эта алгебра порождается элементами $X = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$, где $[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = i\lambda_N \epsilon_{ijk} \hat{X}_k$ и, как и ранее, $\sum_{i=1}^3 \hat{X}_i^2 = \rho^2$. Параметр λ_N характеризует некоммутативность. Записывая приведенные формулы в терминах $\hat{J}_i = \hat{X}_i/\lambda_N$, получаем

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{J}_k. \quad (1)$$

Групповой оператор Казимира C есть

$$C = \sum_{i=1}^3 \hat{J}_i^2 = \frac{\rho^2}{\lambda_N^2}. \quad (2)$$

В интересующем нас случае (т. е. для неприводимого $(N \times N)$ -представления алгебры $SU(2)$) оператор Казимира принимает вид

$$C = \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right).$$

Таким образом, λ и N связаны соотношением

$$\frac{\rho}{\lambda_N} = \sqrt{\frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right)}.$$

Как можно видеть, радиус некоммутативной двумерной сферы конечен и зависит от представления алгебры $SU(2)$ через параметр N . Он также зависит от параметра некоммутативности λ_N . Таким образом, радиус некоммутативной сферы фиксирован и квантован в терминах параметра некоммутативности.

Лапласиан на некоммутативной сфере задается как $\Delta = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$. Мы используем это в дальнейшем при получении собственных значений в полном пространстве.

3. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим скалярное поле Φ в пространстве с топологией $\mathbb{R}^3 \times T^d \times S_{\text{fz}}$, где, как было отмечено, S_{fz} – некоммутативная сфера. В данном разделе мы вычислим собственные значения на древесном уровне (т. е. спектр Калуцы–Клейна). Пусть на границах поршня для скалярного поля выполнены граничные условия Дирихле

$$\Phi(x^{D-1}, 0, y) = \Phi(x^{D-1}, \alpha, y) = \Phi(x^{D-1}, L, y) = 0.$$

Здесь D – полное число некомпактных измерений (в конце вычислений мы полагаем $D = 4$), x обозначает некомпактные измерения, а y – координаты d -мерного тора. Пусть тор имеет один и тот же радиус по всем измерениям. Некоммутативная сфера описывается некоммутативными координатами $X = (X_1, X_2, X_3)$ из N -мерного

неприводимого представления алгебры $SU(2)$. Радиус ρ фиксирован, как и ранее. Действие для скалярного поля имеет вид

$$S = \int d^D x \int d^d y \int_{\text{Tr}} \left[\frac{1}{2} \Phi(\square_x + \square_y + \Delta + m^2) \Phi + \frac{g}{4!} \Phi^4 \right].$$

Здесь $\Delta = \sum J_i^2$ — лапласиан с теми же J_i , что и в (1). Кроме того, интеграл по некоммутативной сфере определяется следующим образом:

$$\int_{\text{Tr}} F(X) = \frac{4\pi}{N+1} \text{Tr} F(X), \quad (3)$$

где X определено выше. Скалярное поле Φ можно разложить в ряд по гармоникам:

$$\Phi(x, y, X_i) = \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\vec{n}} \sum_{J,m} b_m^J(\vec{p}, \vec{n}) e^{i\vec{p}\vec{x}} e^{i2\pi\vec{n}\vec{y}/R} Y_m^J \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right),$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$ и Y_m^J — обычные сферические гармоники. Собственные частоты скалярного поля в полости в древесном приближении даются выражением

$$(w_{\vec{n}, \vec{p}}^{J,n})^2 = \vec{p}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\vec{n}}{R}\right)^2 + J(J+1) + m^2.$$

В случае, когда в качестве пространства дополнительных измерений взята некоммутативная сфера, собственные значения имеют вид

$$(w_{\vec{p}}^{J,n})^2 = \vec{p}^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + J(J+1) + m^2.$$

4. ПОРШЕНЬ КАЗИМИРА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ $T^d \times S_{\text{fz}}$

Вычислим энергию Казимира и силу Казимира для поршневой конфигурации в случаях, когда пространство дополнительных измерений является d -мерным коммутативным тором и некоммутативной сферой. Проведем вычисления для общих значений D и s . Это позволит получить общие результаты для всех пространственных измерений. В конце положим $D = 3$ и $s = -1/2$. Энергия Казимира имеет вид

$$E_c(s, a) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^{D-1}p \sum_{J=0}^N \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{D-1} p_k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k}{R}\right)^2 + J(J+1) + m^2 \right]^{-s}. \quad (4)$$

В результате интегрирования по непрерывным измерениям,

$$\int \frac{dk^{D-1}}{(k^2 + A)^s} = \pi^{(D-1)/2} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2)}{\Gamma(s)} \frac{1}{A^{s - (D-1)/2}},$$

из формулы (4) получаем

$$E_c(s, a) = \frac{\pi^{(D-1)/2}}{4\pi^2} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2)}{\Gamma(s)} \times \\ \times \sum_{J=0}^N \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k}{R} \right)^2 + J(J+1) + m^2 \right]^{(D-1)/2-s}. \quad (5)$$

Используя тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) - f(0) \right), \quad (6)$$

справедливое для четных функций от n , запишем соотношение (5) в виде

$$E_c(s, a) = \frac{\pi^{(D-1)/2}}{8\pi^2} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2)}{\Gamma(s)} \times \\ \times \left(\sum_{J=0}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k}{R} \right)^2 + J(J+1) + m^2 \right]^{(D-1)/2-s} - \right. \\ \left. - \sum_{J=0}^N \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k}{R} \right)^2 + J(J+1) + m^2 \right]^{(D-1)/2-s} \right). \quad (7)$$

Это соотношение можно выразить в терминах неоднородной дзета-функции Эпштейна [20], [21], [28]–[30]

$$Z_d^{v^2}(s; w_1, \dots, w_d) = \sum_{n_1, \dots, n_N=-\infty}^{\infty} [w_1 n_1^2 + \dots + w_d n_d^2 + v^2]^{-s} \quad (8)$$

следующим образом:

$$E_c(s, a) = \frac{\pi^{(D-1)/2}}{8\pi^2} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2)}{\Gamma(s)} \left[\sum_{J=0}^N Z_{d+1}^{w_1^2} \left(s - \frac{D-1}{2}; \frac{\pi^2}{a^2}, \frac{1}{R^2}, \dots, \frac{1}{R^2} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{J=0}^N Z_d^{w_1^2} \left(s - \frac{D-1}{2}; \frac{1}{R^2}, \dots, \frac{1}{R^2} \right) \right], \quad (9)$$

где $w_1^2 = J(J+1) + m^2$. Используем разложение дзета-функции Эпштейна

$$Z_d^{w^2}(s; a_1, \dots, a_d) = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{a_1 \dots a_d}} \frac{\Gamma(s - d/2)}{\Gamma(s)} w^{d-2s} + \\ + \frac{2\pi^s w^{d/2-s}}{\Gamma(s) \sqrt{a_1 \dots a_d}} \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d \frac{n_k^2}{a_k} \right]^{(s-d/2)/2} K_{d/2-s} \left(2\pi w \left[\sum_{k=1}^d \frac{n_k^2}{a_k} \right]^{1/2} \right), \quad (10)$$

где $K_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя. Тогда энергия Казимира (9) принимает вид

$$E_c(s, a) = \frac{\pi^{(D-1)/2}}{8\pi^2} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2)}{\Gamma(s)} \times \\ \times \sum_{J=0}^N \left\{ \frac{R^d a \pi^d \Gamma(s - (D-1)/2 - (d+1)/2)}{\Gamma(s - (D-1)/2)} (\sqrt{J(J+1) + m^2})^{d+1-2(s-(D-1)/2)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} R^d a (\sqrt{J(J+1)+m^2})^{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s-(D-1)/2)} \times \\
& \times \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{na}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2)/2} \times \\
& \times K_{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{J(J+1)+m^2} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{na}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - \\
& - \frac{R^d \pi^{d/2} \Gamma(s-(D-1)/2-d/2)}{\Gamma(s-(D-1)/2)} (\sqrt{J(J+1)+m^2})^{d-2(s-(D-1)/2)} - \\
& - \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} R^d (\sqrt{J(J+1)+m^2})^{d/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s-(D-1)/2)} \times \\
& \times \sum_{n_1, \dots, n_d=-\infty}^{\infty'} \left(\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 \right)^{(s-(D-1)/2-d/2)/2} \times \\
& \times K_{d/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{J(J+1)+m^2} \left(\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 \right)^{1/2} \right) \}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Очевидно, что данное выражение содержит сингулярность при $D = 3$ и $s = -1/2$. Аномалии содержатся в двух гамма-функциях, а именно $\Gamma(s-(D-1)/2-(d+1)/2)$ и $\Gamma(s-(D-1)/2-d/2)$. Первая сингулярна при любом четном значении d , а вторая – при любом нечетном значении d . Однако поршневая конфигурация предлагает хороший способ избавиться от этих сингулярностей. Прежде всего, для вычисления силы Казимира нам понадобится производная по a , с помощью которой мы избавимся от двух последних слагаемых в (11). Таким образом можно избежать одной сингулярности. Другой сингулярности можно избежать только для поршневых конфигураций в силу линейности по a . В результате взятия производной по a и суммирования вкладов от двух камер, при a и при $L-a$, сингулярность сокращается. Таким образом, полная сила Казимира для поршневой конфигурации оказывается регулярной. Это похоже на случай, рассмотренный в работе [31]. Причина этого сокращения, несомненно, коренится в поршневой конфигурации и в независимости параметра “неоднородности” для сумм (в нашем случае $J(J+1)+m^2$) от a . Как мы увидим в следующем разделе, если параметр “неоднородности” зависит от a , энергия Казимира и сила Казимира сингулярны даже для поршневых конфигураций.

Складывая вклады от двух камер, получаем, что сила Казимира

$$F_c = -\frac{\partial E_c(s, L-a)}{\partial a} - \frac{\partial E_c(s, a)}{\partial a}$$

равна

$$\begin{aligned}
F_c(s) &= -\frac{\pi^{(D-1)/2} \Gamma(s-(D-1)/2)}{8\pi^2} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s)} \times \\
& \times \sum_{J=0}^N \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} R^d a (\sqrt{J(J+1)+m^2})^{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s-(D-1)/2)} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{n, n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{na}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2)/2} \times \\
& \times K_{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{J(J+1) + m^2} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{na}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) + \\
& + \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} R^d (L-a) (\sqrt{J(J+1) + m^2})^{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s-(D-1)/2)} \times \\
& \times \sum_{n, n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{n(L-a)}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2)/2} \times \\
& \times K_{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{J(J+1) + m^2} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{n(L-a)}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

С самого начала мы считали, что параметр некоммутативности имеет порядок 1. Это и есть фундаментальный масштаб, который мы будем использовать для сравнения длин.

Теперь вычислим силу Казимира в специальных случаях. Самым интересным является предел $a \gg R$ и $L-a \gg R$, тогда $a \gg 1$ и $R \ll 1$. После взятия производной от приведенных выше выражений применим асимптотическую формулу для функций Бесселя. Используя равенство

$$\frac{K_\nu(xz)}{z^\nu} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \frac{e^{x(t+z^2/t)/2}}{t^{\nu+1}},$$

получаем, что производная от $K_\nu(xz)/z^\nu$, появляющаяся в выражении (12), равна

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K_\nu[x(az^2+b)^c]}{[(az^2+b)^c]^\nu} \right) = -xzca(az^2+b)^{c-1} \frac{K_{\nu+1}[x(az^2+b)^c]}{[(az^2+b)^c]^{\nu+1}}.$$

Отсюда получаем полную силу Казимира с учетом вклада от двух камер:

$$\begin{aligned}
F_c(s) = & - \frac{\pi^{(D-1)/2} \Gamma(s-(D-1)/2)}{8\pi^2 \Gamma(s)} \times \\
& \times \sum_{J=0}^N \left\{ \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} R^d}{\Gamma(s-(D-1)/2)} (\sqrt{J(J+1) + m^2})^{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \times \right. \\
& \times \sum_{n, n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{na}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2)/2} \times \\
& \times K_{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{J(J+1) + m^2} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{na}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - \\
& - \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} R^d (\sqrt{J(J+1) + m^2})^{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s-(D-1)/2)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{n, n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{n(L-a)}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2)/2} \times \\
& \times K_{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{J(J+1) + m^2} \right) \times \\
& \times \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{n(L-a)}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \Big\} - \\
& - \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} R^d a^2 ((d+1)/2 - (s-(D-1)/2))}{\Gamma(s-(D-1)/2)} \times \\
& \times \left(\sqrt{J(J+1) + m^2} \right)^{(d+1)/2+1-(s-(D-1)/2)} \times \\
& \times \sum_{n, n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left\{ \frac{n^2}{\pi^2} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{na}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2-3/2)/2} \times \right. \\
& \times K_{1+(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{J(J+1) + m^2} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{na}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) + \\
& + \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} R^d (L-a)^2 ((d+1)/2 - (s-(D-1)/2))}{\Gamma(s-(D-1)/2)} \times \\
& \times \left(\sqrt{J(J+1) + m^2} \right)^{1+(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \times \\
& \times \sum_{n, n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \frac{n^2}{\pi^2} \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{n(L-a)}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2-3/2)/2} \times \\
& \times K_{1+(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{J(J+1) + m^2} \times \right. \\
& \times \left. \left[\sum_{k=1}^d (n_k R)^2 + \left(\frac{n(L-a)}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \Big\}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Полученное соотношение не слишком симпатично. Однако в рамках приближения $a \gg R$, $L-a \gg R$ аргументы функций Бесселя велики, и потому можно использовать асимптотическое разложение

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{\nu-1}{8z} + \dots \right).$$

Очевидно, что основной вклад вносят члены с $n_i = 1$. Таким образом, окончательно получаем, что сила Казимира равна

$$\begin{aligned}
F_c(s) = & - \sum_{J=0}^N \frac{\pi^{s-2}}{4} R^d \frac{(\sqrt{J(J+1) + m^2})^{(d+1)/2-(s-(D-1)/2-1/2)}}{\Gamma(s)} \times \\
& \times \left\{ \frac{1}{2} \left(dR^2 + \frac{a^2}{\pi^2} \right)^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2-2)/2} e^{-2\pi(J(J+1)+m^2)\sqrt{dR^2+a^2/\pi^2}} - \right. \\
& - \left. \frac{1}{2} \left(dR^2 + \frac{(L-a)^2}{\pi^2} \right)^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2-2)/2} e^{-2\pi(J(J+1)+m^2)\sqrt{dR^2+(L-a)^2/\pi^2}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a^2 \left(\frac{d+1}{2} - \left(s - \frac{D-1}{2} \right) \right) \sqrt{J(J+1) + m^2} \times \\
& \times \frac{1}{2\pi^2} \left(dR^2 + \frac{a^2}{\pi^2} \right)^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2-2)/2} e^{-2\pi(J(J+1)+m^2)\sqrt{dR^2+a^2/\pi^2}} + \\
& + (L-a)^2 \left(\frac{d+1}{2} - \left(s - \frac{D-1}{2} \right) \right) \times \\
& \times \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{J(J+1) + m^2} \left(dR^2 + \frac{(L-a)^2}{\pi^2} \right)^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2-2)/2} \times \\
& \times e^{-2\pi(J(J+1)+m^2)\sqrt{dR^2+(L-a)^2/\pi^2}} \Bigg\}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Теперь обсудим поведение силы Казимира как функции от a . Во-первых, отметим, что параметр R^d в первой строчке формулы (14) в комбинации с экспонентами делает силу Казимира действительно малой по величине. Это составляет полную противоположность случаю, когда пространством дополнительных измерений является лишь некоммутативная сфера.

Чтобы не ошибиться с допустимыми значениями a , отметим, что выражение (14) получено в пределе $a \gg 1$, $L - a \gg 1$. Поэтому слишком малые значения a исключаются. Таким образом, мы будем рассматривать значения a , для которых сила Казимира имеет разный знак, т. е. $a < L/2$ и $a > L/2$. Очевидно, что при $a \gg 1$, $L - a \gg 1$ и при $a < L/2$ в соотношении (14) наибольший вклад вносят два последних слагаемых. При $D = 3$, $s = -1/2$ и при $a < L/2$ сила Казимира отрицательна, поскольку доминирует первое из двух последних слагаемых. При $a > L/2$ доминирующим является второе из последних двух слагаемых. При этом сила Казимира положительна. Таким образом, в данном случае сила Казимира является отталкивающей. Поэтому, как и в случае, который мы обсуждали во введении, поршень притягивается к ближайшему концу.

Прежде чем завершить этот раздел, обсудим еще один вопрос. Заметим, что два последних слагаемых в соотношении (14) умножены на $\sqrt{J(J+1) + m^2}$. Когда некоммутативная сфера исключается из вычислений, можно сказать, что именно из-за этого члена в пределе малых масс два последних члена перестают доминировать, поэтому сила Казимира меняет знак. Однако в нашем случае этого не происходит, поскольку $J(J+1)$ может принимать конечные значения порядка 1. Таким образом, даже в пределе малых масс знак силы Казимира ведет себя так, как мы описывали выше.

5. ПОРШЕНЬ КАЗИМИРА С НЕКОММУТАТИВНОЙ СФЕРОЙ В КАЧЕСТВЕ ПРОСТРАНСТВА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Теперь в качестве пространства дополнительных измерений возьмем некоммутативную сферу. Снова рассмотрим случай общих s и D . Чтобы получить интересующий нас случай и исследовать сингулярности, в конце положим $D = 3$ и $s = -1/2$,

как и ранее. Энергия Казимира в этом случае равна

$$E_c(s, a) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^{D-1}p \sum_{J=0}^N \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{D-1} p_k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + J(J+1) + m^2 \right]^{-s}.$$

Проинтегрируем по непрерывным модам и применим равенство (6), что дает

$$\begin{aligned} E_c(s, a) &= \frac{\pi^{(D-1)/2} \Gamma(s - (D-1)/2)}{8\pi^2 \Gamma(s)} \times \\ &\times \left(\sum_{J=0}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + J(J+1) + m^2 \right]^{(D-1)/2-s} - \right. \\ &\left. - \sum_{J=0}^N (J(J+1) + m^2)^{(D-1)/2-s} \right). \end{aligned}$$

Как и ранее, используем (8), получим

$$\begin{aligned} E_c(s, a) &= \frac{\pi^{(D-1)/2} \Gamma(s - (D-1)/2)}{8\pi^2 \Gamma(s)} \times \\ &\times \left(\sum_{J=0}^N Z_1^{w_1^2} \left(s - \frac{D-1}{2}; \frac{\pi^2}{a^2} \right) - \sum_{J=0}^N (J(J+1) + m^2)^{(D-1)/2-s} \right). \quad (15) \end{aligned}$$

Заметим, что, как и выше, $w_1^2 = J(J+1) + m^2$. С учетом выражения (10) соотношение (15) принимает вид

$$\begin{aligned} E_c(s, a) &= \frac{\pi^{(D-1)/2} \Gamma(s - (D-1)/2)}{8\pi^2 \Gamma(s)} \times \\ &\times \sum_{J=0}^N \left\{ \frac{a\pi^{-1/2} \Gamma(s - (D-1)/2 - 1/2)}{\Gamma(s - (D-1)/2)} (\sqrt{J(J+1) + m^2})^{1-2(s-(D-1)/2)} + \right. \\ &+ \frac{2\pi^{s-D/2-1} a (\sqrt{J(J+1) + m^2})^{1/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s - (D-1)/2)} \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty'} \left(\frac{na}{\pi} \right)^{s-(D-1)/2-1/2} K_{1/2-(s-(D-1)/2)} (2na\sqrt{J(J+1) + m^2}) - \\ &\left. - (J(J+1) + m^2)^{(D-1)/2-s} \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

Очевидно, что из-за гамма-функции $\Gamma(s - (D-1)/2 - 1/2)$ при $D = 3$ и $s = -1/2$ в первом слагаемом данного выражения появляется сингулярность. Однако при вычислении силы Казимира, как и в предыдущем разделе, учет линейности этого члена по a и добавление вклада от камеры по другую сторону от поршня приводят к сокращению сингулярного члена. Следуя процедуре, описанной в предыдущем разделе, получаем выражение для силы Казимира (в пределе $L - a \gg 1$, $a \gg 1$):

$$F_c(s) = - \sum_{J=0}^N \frac{\pi^{s-2}}{4} \frac{(\sqrt{J(J+1) + m^2})^{1/2-(s-(D-1)/2-1/2)}}{\Gamma(s)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\pi} \right)^{s-(D-1)/2-1/2-2} e^{-2\pi(J(J+1)+m^2)(a/\pi)} - \right. \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{L-a}{\pi} \right)^{s-(D-1)/2-1/2-2} e^{-2\pi(J(J+1)+m^2)(L-a)/\pi} - \\
& - a^2 \left(\frac{1}{2} - \left(s - \frac{D-1}{2} \right) \right) \sqrt{J(J+1)+m^2} \times \\
& \times \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{a}{\pi} \right)^{s-(D-1)/2-1/2-2} e^{-2\pi(J(J+1)+m^2)(a/\pi)} + \\
& + (L-a)^2 \left(\frac{1}{2} - \left(s - \frac{D-1}{2} \right) \right) \times \\
& \times \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{J(J+1)+m^2} \left(\frac{L-a}{\pi} \right)^{s-(D-1)/2-1/2-2} e^{-2\pi(J(J+1)+m^2)(L-a)/\pi} \left. \right\}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Можно привести те же аргументы, ограничивающие допустимые значения a , что и в предыдущем разделе. Тогда при $D = 3$, $s = -1/2$ и $a < L/2$, $L - a \gg 1$, $a \gg 1$ в соотношении (17) доминируют два последних слагаемых, что делает силу Казимира отрицательной. При $a > L/2$ сила положительна, и поршень отталкивается. Поэтому поршень притягивается к ближайшему концу. Таким образом, знак силы Казимира ведет себя так же, как и в случае, когда в качестве пространства дополнительных измерений выступают коммутативный тор и некоммутативная сфера. Заметим, что отличие от случая тора заключается в том, что сила Казимира не так мала, как для $T^d \times S_{\text{fz}}$, поскольку множитель R^d в этом случае не появляется. Но, как и в предыдущем разделе, сила экспоненциально подавлена.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ КАЗИМИРА С УЧЕТОМ ОДНОПЕТЛЕВЫХ ПОПРАВК К СОБСТВЕННОЙ ЭНЕРГИИ

Во введении мы обсуждали мотивировку использования некоммутативных дополнительных измерений. Потребность в них связана со стабилизацией с их помощью коммутативных дополнительных измерений. Вычисление, которое естественным образом при этом возникает, – это вычисление энергии Казимира. Также очень интересно найти полную энергию Казимира на однопетлевом уровне, т. е. при добавлении к собственной энергии скалярного поля однопетлевых поправок, появляющихся вследствие наличия некоммутативных дополнительных измерений. Эти результаты были получены в работе [22] для пространства $M^D \times T^d \times S_{\text{fz}}$, краткое вычисление представлено в приложении к настоящей статье. Здесь M^D представляет собой D -мерное пространство-время Минковского. В таких теориях часто производится учет высших петлевых поправок, возникающих из-за самодействия скалярного поля в пространстве-времени с некоммутативными дополнительными измерениями [22]–[24], [27], однако в интересующем нас случае при четных D возникает проблема. Энергия Казимира вычисляется в приближении $1/R^2 \gg m^2$, $1/R^2 \gg N(N+1)$. В рамках этого приближения однопетлевая поправка к энергии Казимира содержит сингулярности при четных D (подробное доказательство приведено в приложении).

И при нечетных d энергия Казимира также содержит сингулярности. Действительно, энергия Казимира имеет вид

$$E_c(s) = \frac{\pi^{(D-1)/2}}{4\pi^2} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2)}{\Gamma(s)} \times \\ \times \left\{ \frac{R^d \pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2 - d/2)}{\Gamma(s - (D-1)/2)} w^{d-2(s-(D-1)/2)} + \right. \\ \left. + \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} w^{d-2(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s - (D-1)/2)} \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k R}{2\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-d/2)/2} \times \right. \\ \left. \times K_{d/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi w \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k R}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - (AR^{2-D})^{(D-1)/2-s} \right\},$$

где

$$A = \frac{g}{24} \pi^{D/2} (3N^2 + 6N + 1) Z_d(2-D) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2-D}.$$

Из приведенных выражений ясно видно, где возникают проблемы (заметим, что в конце вычислений полагаем $s = -1/2$). Таким образом, феноменологически наиболее интересный случай $D = 4$ исключен. Это побудило нас вычислить энергию Казимира для двух параллельных пластин, находящихся на расстоянии a друг от друга, с возможным обобщением вычисления на случай поршневой конфигурации, чтобы выяснить, применима ли при этом обычная регуляризация для силы в рамках конфигурации казимировского поршня (с учетом того, что число измерений уменьшается от бесконечности до трех). Вычислим однопетлевые поправки в случаях, когда пространство дополнительных измерений есть S_{fz} или $S_{fz} \times T^d$. Если рассматривается пространство $S_{fz} \times T^d$, то наиболее простым и самым интересным с вычислительной точки зрения является случай $R = a/\pi$. Все вычисления проводятся в рамках приближения $1/R^2 \gg m^2$, $1/R^2 \gg N(N+1)$.

6.1. Однопетлевые поправки к энергии Казимира поршневой камеры для пространства S_{fz} . Сначала рассмотрим простейший случай, когда пространство дополнительных измерений представляет собой некоммутативную сферу.

С учетом однопетлевых поправок к собственной энергии за счет самодействия в некоммутативной геометрии энергия Казимира для поршневой камеры имеет вид

$$E_c(s, a) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^{D-1} p \sum_{J=0}^N \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{D-1} p_k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + J(J+1) + m^2 + \Sigma \right]^{-s};$$

здесь Σ – однопетлевая поправка, равная

$$\Sigma = \Gamma_{\text{planar}}^{(2)} + \Gamma_{\text{nonplanar}}^{(2)}, \quad (18)$$

где

$$\Gamma_{\text{planar}}^{(2)} = \frac{g}{12\pi} I^P, \quad \Gamma_{\text{nonplanar}}^{(2)} = \frac{g}{24\pi} I^{\text{NP}}, \quad (19)$$

I^P и I^{NP} – планарный и непланарный вклады, причем (в соответствии с работами [22] и [24]) планарный вклад равен

$$I^P = \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{J=0}^N \frac{2J+1}{\vec{p}^2 + (n\pi/a)^2 + J(J+1) + m^2}, \quad (20)$$

а непланарный вклад равен

$$I^{NP} = \int \frac{d^D \vec{p}}{(2\pi)^D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{J=0}^N (-1)^{J+j+N} \times \\ \times \frac{(2J+1)(N+1)}{\vec{p}^2 + (n\pi/a)^2 + J(J+1) + m^2} \begin{Bmatrix} N/2 & N/2 & j \\ N/2 & N/2 & J \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Индекс j следует свернуть с символом в фигурных скобках, который соответствует вигнеровскому символу для алгебры $SU(2)$ [22]. Теперь вычислим I^P и I^{NP} в явном виде. Нам потребуются следующие свойства вигнеровского символа:

$$\sum_N (2N+1) \begin{Bmatrix} A & B & N \\ C & D & P \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A & B & N \\ C & D & Q \end{Bmatrix} = \frac{1}{2P+1} \delta_{PQ}, \\ \sum_N (-1)^{N+P+Q} (2N+1) \begin{Bmatrix} A & B & N \\ C & D & P \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A & B & N \\ D & C & Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A & C & Q \\ B & C & P \end{Bmatrix}.$$

Интересный с вычислительной точки зрения случай возникает в приближении

$$\frac{\pi^2}{a^2} \gg N(N+1), \quad \frac{\pi^2}{a^2} \gg m^2, \quad (22)$$

которое применимо, если расстояние между пластинами очень мало. Заметим, что в рамках этого приближения мы не можем взять предел $N \rightarrow \infty$, который соответствует непрерывной двумерной коммутативной сфере [22]. В приближении (22) планарный вклад принимает вид

$$I^P = \pi^{D/2} a^{2-D} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{J=0}^N \frac{2J+1}{(n^2 \pi^2)^{1-D/2}}.$$

Напомним, что в конце мы полагаем $D = 3$. Интегрирование по импульсам отличается от вычисления энергии Казимира. Это связано с тем, что петлевые поправки включают интегрирование по всему пространству-времени, а не только по пространству (во всех случаях интегрирования предполагаются евклидовыми). Тогда планарный и непланарный вклады (см. соотношения (20) и (21)) интегрируются по D непрерывным измерениям, составленным из $D - 1$ пространственных и одного временного измерения. Используя дзета-функцию Римана, для планарного и непланарного вкладов получаем

$$I^P = \pi^{D/2} a^{2-D} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (N^2 + 2N) \zeta(2-D), \\ I^{NP} = \pi^{3D/2-2} a^{2-D} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (N+1)^2 \zeta(2-D).$$

Таким образом, соотношение (18) принимает вид

$$\Sigma = \frac{g}{24} \pi^{3D/2-2} a^{2-D} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (3N^2 + 6N + 1) \zeta(2 - D) \quad (23)$$

или, в более компактной форме, $\Sigma = \sigma_1 a^{2-D}$, где

$$\sigma_1 = \frac{g}{24} \pi^{3D/2-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (3N^2 + 6N + 1) \zeta(2 - D).$$

В рамках приближения (22) энергия Казимира записывается как

$$E_c(s, a) = \frac{\pi^{(D-1)/2}}{8\pi^2} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2)}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \sigma_1 a^{2-D} \right]^{(D-1)/2-s}.$$

Как и ранее, используя соотношения (10) и (6), получаем

$$\begin{aligned} E_c(s, a) = & \frac{\pi^{(D-1)/2}}{8\pi^2} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2)}{\Gamma(s)} \times \\ & \times \left\{ \frac{a\pi^{-1/2}\Gamma(s - (D-1)/2 - 1/2)}{\Gamma(s - (D-1)/2)} (\sqrt{\sigma_1 a^{2-D}})^{1-2(s-(D-1)/2)} + \right. \\ & + \frac{2\pi^{s-D/2-1}a(\sqrt{\sigma_1 a^{2-D}})^{1/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s - (D-1)/2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty'} \left(\frac{na}{\pi} \right)^{s-(D-1)/2-1/2} \times \\ & \left. \times K_{1/2-(s-(D-1)/2)}(2na\sqrt{\sigma_1 a^{2-D}}) - (\sigma_1 a^{2-D})^{(D-1)/2-s} \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Видно, что при $D = 3$ и $s = -1/2$ последнее выражение расходится. К сожалению, вычисление силы Казимира и учет вкладов от двух камер не приводят к регулярно выражению вследствие того, что линейность по a в первом члене в (24) утеряна.

6.2. Однопетлевая энергия Казимира поршневой камеры с пространством дополнительных измерений $T^d \times S_{fz}$. Теперь вычислим энергию Казимира с однопетлевой поправкой за счет собственной энергии для поршневой камеры размера a в случае, когда пространство дополнительных измерений есть $T^d \times S_{fz}$. Наиболее простой и интересный результат возникает при

$$R = \frac{a}{\pi}. \quad (25)$$

Мы вычислим планарный и непланарный графы в рамках данного допущения. Планарный вклад равен

$$\begin{aligned} I^P = & \int \frac{d^{D-1}p}{(2\pi)^{D-1}} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_d=-\infty}^{\infty} \sum_{J=0}^N \frac{2J+1}{\sum_{k=1}^{D-1} p_k^2 + (n\pi/a)^2 + (2\pi\vec{n}/R)^2 + J(J+1) + m^2}. \end{aligned}$$

Действуя так же, как и в предыдущем пункте, в приближении (22) мы получаем

$$I^P = \pi^{3D/2-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (N^2 + 2N) \left(\zeta(2-D) + \frac{1}{2} Z_{1+d} \left(1 - \frac{D}{2}\right) \right) a^{2-D}.$$

Аналогично, непланарный вклад равен

$$I^{NP} = \pi^{3D/2-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (N+1)^2 \left(\zeta(2-D) + \frac{1}{2} Z_{1+d} \left(1 - \frac{D}{2}\right) \right) a^{2-D}.$$

Тогда однопетлевая поправка к собственной энергии имеет вид $\Sigma = \sigma_2 a^{2-D}$, где

$$\sigma_2 = \frac{g}{24} \pi^{3D/2-2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (3N^2 + 6N + 1)^2 \left(\zeta(2-D) + \frac{1}{2} Z_{1+d} \left(1 - \frac{D}{2}\right) \right).$$

В этом случае энергия Казимира с однопетлевой поправкой за счет собственной энергии записывается как

$$E_c(s, a) = \frac{1}{4\pi^2} \int d^{D-1} p \sum_{J=0}^N \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{D-1} p_k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k \pi}{a} \right)^2 + \Sigma \right]^{-s}.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} E_c(s, a) = & \frac{\pi^{(D-1)/2} \Gamma(s - (D-1)/2)}{8\pi^2 \Gamma(s)} \times \\ & \times \left\{ \frac{a^{d+1} \pi^d \Gamma(s - (D-1)/2 - (d+1)/2)}{\pi^{d+1} \Gamma(s - (D-1)/2)} (\sqrt{\sigma_2 a^{2-D}})^{d+1-2(s-(D-1)/2)} + \right. \\ & + \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} a^{d+1} (\sqrt{\sigma_2 a^{2-D}})^{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)}}{\pi^{d+1} \Gamma(s - (D-1)/2)} \times \\ & \times \sum_{n, n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^{d+1} \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2)/2} \times \\ & \times K_{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{\sigma_2 a^{2-D}} \left[\sum_{k=1}^{d+1} \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - \\ & - \frac{a^d \pi^{d/2} \Gamma(s - (D-1)/2 - d/2)}{\Gamma(s - (D-1)/2)} (\sqrt{\sigma_2 a^{2-D}})^{d-2(s-(D-1)/2)} - \\ & - \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} a^d (\sqrt{\sigma_2 a^{2-D}})^{d/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s - (D-1)/2)} \times \\ & \times \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-d/2)/2} \times \\ & \times K_{d/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{\sigma_2 a^{2-D}} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \Big\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что при $D = 3$ и $s = -1/2$ это соотношение содержит сингулярности. Они входят в гамма-функции $\Gamma(s - (D-1)/2 - (d+1)/2)$ и $\Gamma(s - (D-1)/2 - d/2)$ при

четных и нечетных d соответственно. К сожалению, энергия Казимира расходится при всех значениях D . Сила Казимира также расходится при всех значениях d . Мы ожидали, что поршневая конфигурация приведет к регуляризации силы Казимира, которая плохо определена, если пластины отсутствуют. Однако даже в случае поршневой конфигурации этого не происходит, поскольку, в отличие от предыдущих разделов, сингулярности в энергии Казимира нелинейны по a (см., например, соотношения (24) и (16)), и сингулярности не сокращаются.

Таким образом, даже для поршневой конфигурации мы не смогли предложить последовательного способа учета однопетлевых поправок к скалярной массе в рамках приближений (25) и (22). Возможно, проблема коренится в выбранных приближениях или в размерности пространства-времени, как в случае пространства Минковского (см. приложение).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано поведение силы Казимира для поршня при учете некоммутативных дополнительных измерений. Мы уделили особое внимание случаям, когда пространствами дополнительных измерений являются $T^d \times S_{fz}$ и S_{fz} , где T^d – коммутативный d -тор, а S_{fz} – некоммутативная двумерная сфера.

В случае пространства $T^d \times S_{fz}$, если размер обеих поршневых камер много больше радиуса компактного тора, сила Казимира ведет себя следующим образом: при $a > L/2$ сила является отталкивающей, а при $a < L/2$ сила является притягивающей, причем поршень притягивается к ближайшему концу (L – расстояние между пластинами, a – расстояние от поршня до одной из пластин). Если пространством дополнительных измерений является некоммутативная сфера, получаются аналогичные результаты. Кроме того, мы пришли к выводу, что предел малой массы не влияет на полученные результаты из-за эффектов некоммутативности. Тем самым при $a \gg 1$ и $L - a \gg 1$ такое поведение имеет место независимо от размерности тора в пространстве дополнительных измерений. При этом в случае пространства $T^d \times S_{fz}$ сила оказывается существенно подавленной вследствие наличия множителя R^d , на который умножается все выражение, а в случае пространства S_{fz} этого не происходит.

Проведено исследование однопетлевых поправок к собственной энергии, возникающих из-за самодействия скалярного поля в некоммутативном пространстве. С математической точки зрения наиболее интересен случай $R = a/\pi$. Представлены вычисления для однопоршневой камеры. Мы ожидали, что получится регулярное выражение для силы Казимира. Без деления пластинами энергия Казимира сингулярна при $D = 4$ и в общем случае при четных D . Можно было надеяться, что введение пластин могло бы решить проблему, однако этого не происходит, наоборот, результат оказался полностью сингулярным. При этом результат не меняется даже при добавлении в поршневую конфигурацию еще одной камеры. Мы доказали, что это происходит, когда “масса” скалярного поля зависит от a . Мы проверили также случай граничных условий Неймана, но результаты получились такими же.

Теперь обсудим проблему стабилизации. Если некоммутативное пространство имеет внутренний масштаб длины, ячейку Мойала, то можно ожидать, что коммутативные дополнительные измерения будут стабилизироваться (конечно, если появляются только некоммутативные измерения, то они стабилизированы по опреде-

лению). Поэтому нужно проверить это для поршневой конфигурации, вычислив силу $F_R = -\partial E_c/\partial R$ вдоль R . Более точно, чтобы проверить, имеет ли место стабилизация, минимизируем полную энергию Казимира по R (радиусу компактного измерения). Полная энергия Казимира состоит из вклада древесного уровня и однопетлевых поправок. Таким образом, если энергия Казимира имеет абсолютный минимум, то внутреннее пространство стабилизировано и существует радиус, на котором компактное коммутативное пространство стабилизируется. Минимизация требует, чтобы выражение $\partial E_c/\partial R$ равнялось нулю при некотором критическом значении радиуса, для которого $\partial^2 E_c/\partial R^2 > 0$. Эти вычисления также должны проводиться в терминах силы Казимира, когда изменение знака силы Казимира от отрицательного (притягивающая сила) к положительному (отталкивающая сила) будет означать стабилизацию компактного пространства.

В нашем случае основной интерес направлен на выяснение вопроса о том, стабилизируется ли коммутативный тор T^d полного дополнительного пространства $S_{fz} \times T^d$ в одной петле. К сожалению, полная энергия Казимира (древесный вклад плюс однопетлевые поправки) содержит сингулярности. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Заметим, что мы будем использовать условие $R = a/\pi$, при котором мы вычисляли однопетлевые поправки. В рамках этого допущения полный вклад в энергию Казимира для камеры размера a равен $E_{\text{tree}} + E_{1\text{-loop}}$, где древесный вклад есть

$$\begin{aligned}
 E_{\text{tree}}(a) = & \frac{\pi^{(D-1)/2}}{8\pi^2} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2)}{\Gamma(s)} \times \\
 & \times \sum_{J=0}^N \left\{ \frac{a^{d+1} \pi^d \Gamma(s - (D-1)/2 - (d+1)/2)}{\Gamma(s - (D-1)/2)} \times \right. \\
 & \times (\sqrt{J(J+1) + m^2})^{d+1-2(s-(D-1)/2)} + \\
 & + \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} a^{d+1} (\sqrt{J(J+1) + m^2})^{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s - (D-1)/2)} \times \\
 & \times \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{na}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2)/2} \times \\
 & \times K_{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{J(J+1) + m^2} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{na}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - \\
 & - \frac{a^d \pi^{d/2} \Gamma(s - (D-1)/2 - d/2)}{\Gamma(s - (D-1)/2)} (\sqrt{J(J+1) + m^2})^{d-2(s-(D-1)/2)} - \\
 & - \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} a^d (\sqrt{J(J+1) + m^2})^{d/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s - (D-1)/2)} \times \\
 & \times \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-d/2)/2} \times \\
 & \times K_{d/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{J(J+1) + m^2} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \Big\},
 \end{aligned}$$

а однопетлевые поправки даются выражением

$$\begin{aligned}
 E_{1\text{-loop}}(a) = & \frac{\pi^{(D-1)/2} \Gamma(s - (D-1)/2)}{8\pi^2 \Gamma(s)} \times \\
 & \times \left\{ \frac{a^{d+1} \pi^d \Gamma(s - (D-1)/2 - (d+1)/2)}{\pi^{d+1} \Gamma(s - (D-1)/2)} (\sqrt{\sigma_2 a^{2-D}})^{d+1-2(s-(D-1)/2)} + \right. \\
 & + \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} a^{d+1} (\sqrt{\sigma_2 a^{2-D}})^{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)}}{\pi^{d+1} \Gamma(s - (D-1)/2)} \times \\
 & \times \sum_{n, n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^{d+1} \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-(d+1)/2)/2} \times \\
 & \times K_{(d+1)/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{\sigma_2 a^{2-D}} \left[\sum_{k=1}^{d+1} \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - \\
 & - \frac{a^d \pi^{d/2} \Gamma(s - (D-1)/2 - d/2)}{\Gamma(s - (D-1)/2)} (\sqrt{\sigma_2 a^{2-D}})^{d-2(s-(D-1)/2)} - \\
 & - \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} a^d (\sqrt{\sigma_2 a^{2-D}})^{d/2-(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s - (D-1)/2)} \times \\
 & \times \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-d/2)/2} \times \\
 & \times K_{d/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi \sqrt{\sigma_2 a^{2-D}} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k a}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \Big\}.
 \end{aligned}$$

Как видно, полный вклад в энергию Казимира (сумма $E_{\text{tree}} + E_{1\text{-loop}}$) для камеры размера a содержит сингулярности. Особенно при $D = 3$ и $s = -1/2$ две гамма-функции, а именно $\Gamma(s - (D-1)/2 - (d+1)/2)$ и $\Gamma(s - (D-1)/2 - d/2)$, делают полное выражение сингулярным при всех значениях d . Этот результат не изменяется даже при других значениях D . Его нельзя считать достоверным для получения надежных выводов о стабилизации. Более того, ситуация не меняется даже при учете вклада от камеры размера $L - a$. Поэтому, как легко видеть, взяв производную полной энергии Казимира по a , мы приходим к сингулярному выражению. Можно было бы ожидать, что исследование силы даст какое-либо указание на то, возникает ли стабилизация, но оказалось, что производные также содержат сингулярности, поэтому даже исследование силы не дает надежных результатов.

Сказанное выше верно и в случае, когда пространством дополнительных измерений является только коммутативный тор (без некоммутативной сферы). Очевидно, что в обоих случаях хорошие свойства, реализуемые в поршневой конфигурации, не имеют места при взятии производной по радиусу компактного пространства (который равен a в нашем приближении). В случае коммутативного тора также остаются сингулярности, и невозможно получить надежные результаты. Поэтому для решения этой задачи нужно найти другой метод регуляризации. Мы надеемся обсудить это в ближайшем будущем.

Итак, сингулярности полной энергии Казимира сохраняются даже после взятия производной по радиусу a , а также после учета вклада другой камеры. Это связано с тем, что полное выражение нелинейно по a , в отличие, например, от выражения (11). Однако даже если бы производная полной энергии Казимира не содержала сингулярностей, нелегко придать смысл минимизации сингулярного выражения.

Прежде чем закрыть вопрос о стабилизации, следует отметить, что, когда мы не используем поршневую конфигурацию, стабилизация возникает в одной петле, если пространство дополнительных измерений есть $S_{\text{fz}} \times T^d$ (см., например, [22]). Однако проблема состоит в том, что полученные результаты содержат сингулярности, когда размерность нашего мира D является четной. Поэтому при $D = 4$ нельзя получить никаких надежных результатов. Подробности можно найти в приложении.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим энергию Казимира считая, что пространством дополнительных измерений является $T^d \times S_{\text{fz}}$, для четырехмерного пространства-времени (вычисление однопетлевых поправок можно найти в работе [22]). Будем использовать приближение

$$\frac{\pi^2}{R^2} \gg N(N+1), \quad \frac{\pi^2}{R^2} \gg m^2. \quad (26)$$

Энергия Казимира с однопетлевыми поправками равна

$$E_c(s) = \int d^{D-1}p \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \sum_{J=0}^N \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k}{R} \right)^2 + \vec{p}^2 + J(J+1) + m^2 + \Sigma \right]^{-s}.$$

Здесь в конце вычислений полагаем $D = 4$ и $s = -1/2$, в отличие от случая поршня, где $D = 3$. Однопетлевая поправка Σ к собственной энергии, как и ранее, равна

$$\Sigma = \frac{g}{12\pi} I^{\text{P}} + \frac{g}{24\pi} I^{\text{NP}},$$

где

$$I^{\text{P}} = \pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \sum_{J=0}^N \frac{2J+1}{\sum_{k=1}^d (n_k/R)^2 + J(J+1) + m^2}.$$

Заметим, что приближение (26) справедливо, если, в отличие от случая поршня, при суммировании не учитываются нулевые моды коммутативных дополнительных измерений. После вычислений получаем

$$I^{\text{P}} = \pi^{D/2} \left(\frac{R}{2\pi} \right)^{2-D} (N^2 + 2N) Z_d(2-D) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right),$$

$$I^{\text{NP}} = \pi^{D/2} \left(\frac{R}{2\pi} \right)^{2-D} (N+1)^2 Z_d(2-D) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right).$$

Окончательно имеем $\Sigma = AR^{2-D}$, где

$$A = \frac{g}{24} \pi^{D/2} (3N^2 + 6N + 1) Z_d(2-D) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{2-D} \quad (27)$$

(подробности см. в работе [22]). После интегрирования по $D - 1$ непрерывным измерениям (т. е. по трем измерениям) получаем энергию Казимира

$$E_c(s) = \frac{1}{4\pi^2} \pi^{(D-1)/2} \frac{\Gamma(s - (D-1)/2)}{\Gamma(s)} \times \\ \times \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{2\pi n_k}{R} \right)^2 + AR^{2-D} \right]^{(D-1)/2-s}.$$

Включая нулевую моду в суммирование и используя однородную дзета-функцию Эпштейна, приводим это выражение к виду

$$E_c(s) = \frac{\pi^{(D-1)/2} \Gamma(s - (D-1)/2)}{4\pi^2 \Gamma(s)} \times \\ \times \left\{ \frac{R^d \pi^{d/2} \Gamma(s - (D-1)/2 - d/2)}{(2\pi)^d \Gamma(s - (D-1)/2)} w^{d-2(s-(D-1)/2)} + \right. \\ \left. + \frac{2\pi^{s-(D-1)/2} w^{d-2(s-(D-1)/2)}}{\Gamma(s - (D-1)/2)} \sum_{n_1, \dots, n_d = -\infty}^{\infty'} \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k R}{2\pi} \right)^2 \right]^{(s-(D-1)/2-d/2)/2} \times \right. \\ \left. \times K_{d/2-(s-(D-1)/2)} \left(2\pi w \left[\sum_{k=1}^d \left(\frac{n_k R}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \right) - (AR^{2-D})^{(D-1)/2-s} \right\}, \quad (28)$$

где $w^2 = AR^{2-D}$. Из соотношений (27) и (28) видно, что сингулярности не возникают только при нечетном D и четном d . К сожалению, это не соответствует нашему миру, поскольку в нашем мире $D = 4$. Именно поэтому, как было отмечено в предыдущих разделах, мы провели вычисления для поршневой конфигурации. В поршневой конфигурации сингулярности не появляются (по крайней мере в выражении для силы), и число непрерывных измерений уменьшается на единицу. Поэтому можно было ожидать, что плохо определенное вычисление, которые мы провели, выполнимо. К сожалению, как следует из нашего рассмотрения, это не так.

Список литературы

- [1] K. Kirsten, S. A. Fulling, *Phys. Rev. D*, **79**:6 (2009), 065019, 10 pp., arXiv:0901.1902.
- [2] E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. A. Saharian, *Phys. Rev. D*, **79**:6 (2009), 065023, 13 pp., arXiv:0902.0717.
- [3] S. A. Fulling, K. Kirsten, *Rhys. Rev. Lett. B*, **671**:1 (2009), 179–180, arXiv:0811.0779.
- [4] A. Edery, *Phys. Rev. D*, **75**:10 (2007), 105012, 9 pp., arXiv:hep-th/0610173; *J. Phys. A*, **39**:3 (2006), 685–712, arXiv:math-ph/0510056; A. Edery, V. Marachevsky, *Phys. Rev. D*, **78**:2 (2008), 025021, 10 pp., arXiv:0805.4038; A. Edery, I. MacDonald, *JHEP*, **09** (2007), 005, 27 pp., arXiv:0708.0392.
- [5] R. M. Cavalcanti, *Phys. Rev. D*, **69**:6 (2004), 065015, 5 pp., arXiv:quant-ph/0310184.
- [6] V. K. Oikonomou, *Modern Phys. Lett. A*, **24**:30 (2009), 2405–2423, arXiv:0903.4159.
- [7] L. P. Teo, *Phys. Lett. B*, **672**:2 (2009), 190–195, arXiv:0812.4641; *Nucl. Phys. B*, **819**:3 (2009), 431–452, arXiv:0901.2195.
- [8] S. C. Lim, L. P. Teo, *Ann. Phys.*, **324**:8 (2009), 1676–1690, arXiv:0807.3613.
- [9] H. Cheng, *Rhys. Rev. Lett. B*, **668**:1 (2008), 72–77, arXiv:0801.2810.
- [10] H. B. G. Casimir, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, **51** (1948), 793–795.

- [11] S. A. Fulling, J. H. Wilson, *Repulsive Casimir pistons*, arXiv: quant-ph/0608122.
- [12] W.-H. Huang, *JHEP*, **11** (2000), 041, 13 pp., arXiv: hep-th/0011037; **07** (2002), 064, 13 pp., arXiv: hep-th/0203051.
- [13] R. J. Szabo, *Phys. Rep.*, **378**:4 (2003), 207–299, arXiv: hep-th/0109162.
- [14] A. A. Bytsenko, E. Elizalde, S. Zerbini, *Phys. Rev. D*, **64**:10 (2001), 105024, 7 pp., arXiv: hep-th/0103128; E. Elizalde, *Comm. Math. Phys.*, **198**:1 (1998), 83–95, arXiv: hep-th/9707257; *J. Phys. A*, **34**:14 (2001), 3025–3035, arXiv: hep-th/0012154.
- [15] J. Gomis, T. Mehen, M. B. Wise, *JHEP*, **08** (2000), 029, 15 pp., arXiv: hep-th/0006160.
- [16] M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko, *Phys. Rep.*, **353**:1–3 (2001), 1–205, arXiv: quant-ph/0106045.
- [17] X.-H. Zhai, X.-Z. Li, *Phys. Rev. D*, **76**:4 (2007), 047704, 4 pp., arXiv: hep-th/0612155.
- [18] V. N. Marachevsky, *Phys. Rev. D*, **75**:8 (2007), 085019, 6 pp., arXiv: hep-th/0703158.
- [19] L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D*, **77**:10 (2008), 107301, 4 pp., arXiv: 0802.1531.
- [20] E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, Lecture Notes in Phys. New Ser. m: Monogr., **35**, Springer, Berlin, 1995; E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko, S. Zerbini, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, World Sci., Singapore, 1994.
- [21] K. Kirsten, *Spectral Functions in Mathematics and Physics*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- [22] W.-H. Huang, *Phys. Lett. B*, **537**:3–4 (2002), 311–320, arXiv: hep-th/0203176.
- [23] R. C. Myers, *JHEP*, **12** (1999), 022, 41 pp., arXiv: hep-th/9910053.
- [24] S. Nam, *JHEP*, **10** (2000), 044, 10 pp., arXiv: hep-th/0008083.
- [25] T. Appelquist, A. Chodos, *Phys. Rev. Lett.*, **50**:3 (1983), 141–145.
- [26] H. Grosse, C. Klimčík, P. Prešnajder, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **35**:2 (1996), 231–244.
- [27] E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, S. Ogushi, *Phys. Rev. D*, **67**:6 (2003), 063515, 15 pp., arXiv: hep-th/0209242; E. Elizalde, J. E. Lidsey, S. Nojiri, S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B*, **574**:1–2 (2003), 1–7, arXiv: hep-th/0307177.
- [28] K. Kirsten, *J. Math. Phys.*, **35**:1 (1994), 459–470.
- [29] E. Elizalde, A. Romeo, *Phys. Rev. D*, **40**:2 (1989), 436–443; *J. Math. Phys.*, **30**:5 (1989), 1133–1139; M. Bordag, E. Elizalde, K. Kirsten, S. Leseduarte, *Phys. Rev. D*, **56**:8 (1997), 4896–4904, arXiv: hep-th/9608071; M. Bordag, E. Elizalde, K. Kirsten, *J. Math. Phys.*, **37**:2 (1996), 895–916, arXiv: hep-th/9503023; E. Elizalde, M. Bordag, K. Kirsten, *J. Phys. A*, **31**:7 (1998), 1743–1759, arXiv: hep-th/9707083.
- [30] K. Kirsten, *J. Math. Phys.*, **32**:11 (1991), 3008–3014.
- [31] X.-H. Zhai, Y.-Y. Zhang, X.-Z. Li, *Modern Phys. Lett. A*, **24**:5 (2009), 393–400, arXiv: 0808.0062.

Поступила в редакцию 6.03.2010,
после доработки 28.06.2010