Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Пелетминский, С. В. Пелетминский, Ю. В. Слюсаренко, К теории пространственно-периодического бозе-конденсата в модели слабонеидеального бозе-газа, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 1, 152–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:32:52

© 2000 г. А. С. Пелетминский*, С. В. Пелетминский†,
Ю. В. Слюсаренко†

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКОГО БОЗЕ-КОНДЕНСАТА В МОДЕЛИ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

Изучена возможность построения теории пространственно-периодического бозе-конденсата в модели слабонеидеального бозе-газа. На основе концепции квазисредних и связанного с ней метода выделенного бозе-конденсата получены уравнения для определения пространственно-периодического параметра порядка при нулевой температуре, когда можно пренебречь вкладом квазичастиц в термодинамику системы бозонов. Найдены однопериодические решения этих уравнений. Рассмотрены вопросы термодинамической устойчивости пространственно-периодического бозе-конденсата.

1. ВВЕДЕНИЕ

Бозе-эйнштейновская конденсация, предсказанная Эйнштейном еще в 1925 году, относится к числу наиболее интересных явлений в физике низких температур. Существует большое число работ, посвященных изучению различного рода эффектов и явлений, связанных с бозе-эйнштейновской конденсацией. В последнее время интерес к исследованиям в этой области значительно возрос в связи с экспериментальными исследованиями, которые доказали существование бозе-эйнштейновской конденсации в идеальном газе при температуре порядка $2 \cdot 10^{-8}$ К [1]. Достижение температурных условий для таких экспериментов стало возможным благодаря развитию С. Чу, К. Коэн-Тануджи, У. Д. Филипсом (удостоенных за эти исследования Нобелевской премии по физике за 1997 год) методов охлаждения и “пленения” атомов с помощью лазерного света [2–4]. В ходе экспериментальных исследований, связанных с лазерным охлаждением, наблюдалось возникновение одно-, двух- и трехмерных периодических структур, образованных охлажденными атомами [5–7]. Эти структуры были названы оптическими решетками по той причине, что их периоды порядка длины волны лазерного света.

Возникновение таких структур наталкивает на мысль о возможности существования пространственно-периодического бозе-конденсата. В этой связи представляется ин-

* Научно-технический центр электрофизической обработки НАН Украины, Харьков, Украина

† Национальный научный центр “Харьковский физико-технический институт”, Харьков, Украина. E-mail: spelet@kipt.kharkov.ua; slusarenko@kipt.kharkov.ua

интересным вернуться к вопросу о бозе-эйнштейновской конденсации в модели слабонеидеального бозе-газа. В рамках этой модели с использованием метода выделенного конденсата Боголюбовым была построена микроскопическая теория сверхтекучести [8].

В работе [9] было показано, как в микроскопическом подходе, основанном на квантовом распределении Гиббса, построить основные уравнения движения для квантового кристалла, феноменологическая теория которого была дана в работе [10].

В данной работе на основе модели слабонеидеального бозе-газа мы рассматриваем возможность построения теории однопериодических структур, которые могут служить прообразом квантового кристалла. Пространственно-периодические структуры при $T = 0$ мы связываем с существованием пространственно-периодического бозе-конденсата. Рассмотрены вопросы термодинамической устойчивости изучаемых структур.

В дальнейшем мы намерены исследовать вопросы, связанные с определением спектров возбуждений в системе с выделенным пространственно-периодическим бозе-конденсатом и микроскопическим построением уравнений “гидродинамики”. Предполагается также обобщение теории на случай двух- и трехпериодических состояний и выяснение влияния на эти состояния внешнего магнитного поля. Последний вопрос в случае пространственно-однородного бозе-конденсата рассматривался в работе [11].

Заметим также, что пространственно-периодические состояния в системах фермионов в ферми-жидкостном подходе Ландау изучались в работе [12].

2. МОДЕЛЬ С ВЫДЕЛЕННЫМ БОЗЕ-КОНДЕНСАТОМ НА ВЕКТОРАХ ОБРАТНОЙ РЕШЕТКИ

В этом разделе мы используем метод квазисредних и связанную с этим методом модель с выделенным конденсатом для обобщения теории Боголюбова слабонеидеального бозе-газа на тот случай, когда бозе-конденсат образуют частицы с бесконечным набором импульсов $\mathbf{p} + \mathbf{b}$. Причем векторы $\mathbf{b}$ образуют некоторую обратную решетку по отношению к прямой решетке с векторами $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$), $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{a}_i$, n_i – целые числа, $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = 2\pi \delta_j^i$, и вектор $\mathbf{p}$ лежит в первой зоне Бриллюэна.

Напомним основные положения метода квазисредних и модели с выделенным конденсатом. Как всегда, мы предполагаем, что квазисреднее оператора $\hat{c}(\mathbf{x})$ определяется формулой [13]

$$\{\hat{c}(\mathbf{x})\} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Sp}[\hat{w}_\nu \hat{c}(\mathbf{x})],$$

$$\hat{w}_\nu = \exp(\Omega - \beta(\hat{H} - \mathbf{v}\hat{\mathbf{P}} - \mu\hat{N} + \nu\hat{H}_1)),$$

где $\nu\hat{H}_1$ – возмущающий гамильтониан, а гамильтониан $\hat{H}$ инвариантен по отношению к трансляциям на произвольный вектор $\mathbf{u}$ и фазовым преобразованиям с произвольной фазой φ ($\hat{\mathbf{P}}$ – генератор трансляционных преобразований, $\hat{N}$ – генератор фазовых преобразований):

$$e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{u}} \hat{H} e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{u}} = \hat{H}, \quad e^{i\hat{N}\varphi} \hat{H} e^{-i\hat{N}\varphi} = \hat{H}.$$

При этом полезно иметь в виду формулы

$$e^{-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}}\hat{\psi}(\mathbf{x})e^{i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{y}} = \hat{\psi}(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \quad e^{i\hat{N}\varphi}\hat{\psi}(\mathbf{x})e^{-i\hat{N}\varphi} = e^{-i\varphi}\hat{\psi}(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Статистический оператор нормального состояния $\hat{w} = \exp(\Omega - \beta(\hat{H} - \mathbf{v}\hat{\mathbf{P}} - \mu\hat{N}))$ имеет те же свойства симметрии, что и гамильтониан $\hat{H}$. При фазовом переходе в сверхтекучее состояние, когда сверхтекучая компонента обладает скоростью $\mathbf{v}_s \equiv \mathbf{p}/m$, а нормальная компонента обладает скоростью $\mathbf{v}_n \equiv \mathbf{v}$, симметрия статистического оператора по отношению к трансляциям и фазовым преобразованиям в отдельности теряется и остается только симметрия по отношению к комбинированным $\hat{\mathbf{P}}$ - и $\hat{N}$ -преобразованиям:

$$U\hat{w}_\nu U^+ = \hat{w}_\nu, \quad U = \exp(-i\mathbf{y}(\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{p}\hat{N})).$$

Такой симметрии сверхтекучей фазы проще всего добиться, полагая

$$\hat{H}_1 = \int_V d^3x e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\hat{\psi}(\mathbf{x}) + \text{h.c.}$$

(V — объем системы). Хорошо известно, что такое нарушение симметрии соответствует образованию конденсата частиц с импульсом $\mathbf{p}$ и фазовому переходу в сверхтекучее состояние.

Вернемся теперь к вопросу о появлении конденсата частиц с импульсами $\mathbf{p} + \mathbf{b}$, где векторы $\mathbf{b}$ образуют обратную решетку. Мы будем предполагать, что в некоторой области термодинамических параметров нарушается симметрия состояния относительно пространственных трансляций и фазовых преобразований, но сохраняется симметрия по отношению к комбинированному преобразованию пространственных трансляций на вектор прямой решетки $\mathbf{a}_k$ и фазовому преобразованию с фазой $\mathbf{a}_k \mathbf{p}$:

$$U\hat{w}_\nu U^+ = \hat{w}_\nu, \quad U = \exp(-i\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{p}\hat{N})). \quad (2.2)$$

Такую симметрию состояния статистического равновесия можно получить, полагая

$$\hat{H}_1 = \sum_{\mathbf{b}} \int_V d^3x e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x} - i\mathbf{b}\mathbf{x}}\hat{\psi}(\mathbf{x}) + \text{h.c.} = \sqrt{V} \sum_{\mathbf{b}} \hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{b}} + \text{h.c.}$$

Действительно, используя формулы (2.1), (2.2), легко убедиться, что $U\hat{H}_1 U^+ = \hat{H}_1$ и, следовательно, $U\hat{w}_\nu U^+ = \hat{w}_\nu$.

Покажем, что такая симметрия состояния статистического равновесия соответствует образованию бозе-конденсата частиц с импульсами $\mathbf{p} + \mathbf{b}$. Действительно, согласно (2.1), (2.2)

$$\text{Sp}(\hat{w}_\nu \hat{\psi}(\mathbf{x})) = \text{Sp}(\hat{w}_\nu U \hat{\psi}(\mathbf{x}) U^+) = e^{-i\mathbf{p}\mathbf{a}} \text{Sp}(\hat{w}_\nu \hat{\psi}(\mathbf{x} + \mathbf{a})),$$

откуда

$$\text{Sp}(\hat{w}_\nu \hat{a}_{\mathbf{q}}) = e^{i\mathbf{a}(\mathbf{q} - \mathbf{p})} \text{Sp}(\hat{w}_\nu \hat{a}_{\mathbf{q}})$$

и, следовательно,

$$\{\hat{a}_{\mathbf{q}}\} = e^{i\mathbf{a}(\mathbf{q}-\mathbf{p})}\{\hat{a}_{\mathbf{p}}\},$$

поэтому

$$\{\hat{a}_{\mathbf{q}}\} = \sum_{\mathbf{b}} \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{p}+\mathbf{b}} \{\hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{b}}\}.$$

Таким образом,

$$\{\hat{\psi}(\mathbf{x})\} \equiv \psi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} u(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

где функция

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{b}} e^{i\mathbf{b}\mathbf{x}} \{\hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{b}}\}, \quad \{\hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{b}}\} \sim \sqrt{V},$$

является периодической функцией $\mathbf{x}$, т.е. $u(\mathbf{x} + \mathbf{a}_i) = u(\mathbf{x})$. Эти формулы и показывают, что в рассматриваемом состоянии образовался бозе-конденсат частиц с импульсами $\mathbf{p} + \mathbf{b}$.

В модели с выделенным конденсатом операторы $a_{\mathbf{p}+\mathbf{b}}$ рассматриваются как c -числа, вследствие чего полагают

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\mathbf{x}) &\equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \rightarrow \psi(\mathbf{x}) + \hat{\psi}'(\mathbf{x}), \\ \hat{\psi}'(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{p}+\mathbf{b}} a_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Любой оператор физической величины строится из операторов $\hat{\psi}(\mathbf{x})$, $\hat{A} = A(\hat{\psi}(\mathbf{x}))$. Поэтому при переходе к модели с выделенным конденсатом происходит замена

$$A(\hat{\psi}(\mathbf{x})) \rightarrow A(\psi(\mathbf{x}) + \hat{\psi}'(\mathbf{x})) \equiv \hat{A}(\psi(\mathbf{x})).$$

Введем статистический оператор

$$w(\psi) = \exp(\Omega(\psi) - \beta(\hat{H}(\psi) - \mathbf{v}\hat{\mathbf{P}}(\psi) - \mu\hat{N}(\psi))),$$

откуда, используя условие нормировки $\text{Sp } w(\psi) = 1$, найдем

$$\Omega(\psi) = -\ln \text{Sp} [\exp \beta(\hat{H}(\psi) - \mathbf{v}\hat{\mathbf{P}}(\psi) - \mu\hat{N}(\psi))]. \quad (2.4)$$

Тогда основное утверждение для модели с выделенным конденсатом состоит в следующем:

$$\{A(\hat{\psi})\} = \text{Sp} [w(\psi) \hat{A}(\psi)], \quad (2.5)$$

где функция $\psi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} u(\mathbf{x})$ ($u(\mathbf{x})$ – периодическая функция с периодами $\mathbf{a}_i$) находится из уравнений

$$\frac{\delta \Omega}{\delta \psi} = 0, \quad \frac{\delta \Omega}{\delta \psi^*} = 0 \quad (2.6)$$

и вариационные производные определяются на классе функций $\psi(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}u(\mathbf{x})$, где $u(\mathbf{x})$ – периодические функции с заданными периодами $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{p}$ – заданный вектор, принадлежащий первой зоне Бриллюэна обратной решетки.

Для разъяснения последних соотношений заметим, что

$$\begin{aligned} \text{Sp} \left[w(\psi) \frac{\delta \hat{N}(\psi)}{\delta \psi(\mathbf{x})} \right] &= \psi^*(\mathbf{x}), \quad \text{Sp} \left[w(\psi) \frac{\delta \hat{\mathbf{P}}(\psi)}{\delta \psi(\mathbf{x})} \right] = i \nabla \psi^*(\mathbf{x}), \\ \text{Sp} \left[w(\psi) \frac{\delta \hat{H}_0(\psi)}{\delta \psi(\mathbf{x})} \right] &= -\frac{1}{2m} \Delta \psi^*(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

($\hat{H}_0$ – оператор кинетической энергии), или согласно (2.4) и (2.7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \frac{\delta \Omega}{\delta \psi(\mathbf{x})} &= \text{Sp} \left[w(\psi) \frac{\delta \hat{V}(\psi)}{\delta \psi(\mathbf{x})} \right] - i \mathbf{v} \nabla \psi^*(\mathbf{x}) - \mu \psi^*(\mathbf{x}) - \frac{1}{2m} \Delta \psi^*(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{\beta} \frac{\delta \Omega}{\delta \psi^*(\mathbf{x})} &= \text{Sp} \left[w(\psi) \frac{\delta \hat{V}(\psi)}{\delta \psi^*(\mathbf{x})} \right] + i \mathbf{v} \nabla \psi(\mathbf{x}) - \mu \psi(\mathbf{x}) - \frac{1}{2m} \Delta \psi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

($\hat{V}$ – гамильтониан взаимодействия). С другой стороны,

$$\text{Sp} [w_\nu [\hat{H} - \mathbf{v} \hat{\mathbf{P}} - \mu \hat{N} + \nu \hat{H}_1, \hat{\psi}(\mathbf{x})]] \equiv 0,$$

откуда получаем, что

$$\{ [\hat{H} - \mathbf{v} \hat{\mathbf{P}} - \mu \hat{N}, \hat{\psi}(\mathbf{x})] \} = 0.$$

Вычисляя квазисреднее входящего сюда коммутатора с помощью формулы (2.5), связывающей в модели с выделенным конденсатом квазисредние со средними, мы и получим согласно (2.8) формулы (2.6).

Заметим, что трактовка величин $a_{\mathbf{p}+\mathbf{b}}/\sqrt{V}$, а тем самым и величин $\psi(\mathbf{x})$ как s -чисел тесно связана с принципом пространственного ослабления корреляций, которому удовлетворяют квазисредние. Действительно, замечая, что

$$\frac{1}{V} \int_V d^3 x \hat{\psi}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{p}+\mathbf{b})} = \frac{\hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{b}}}{\sqrt{V}},$$

имеем согласно принципу пространственного ослабления корреляций

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{\psi}^+(\mathbf{x}_1) \dots \hat{\psi}(\mathbf{x}_n) \frac{\hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{b}}}{\sqrt{V}} \right\} &= \left\{ \hat{\psi}^+(\mathbf{x}_1) \dots \hat{\psi}(\mathbf{x}_n) \frac{1}{V} \int_V d^3 x \hat{\psi}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}(\mathbf{p}+\mathbf{b})} \right\} \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{V \rightarrow \infty} \left\{ \hat{\psi}^+(\mathbf{x}_1) \dots \hat{\psi}(\mathbf{x}_n) \right\} \left\{ \frac{\hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{b}}}{\sqrt{V}} \right\}. \end{aligned}$$

Эта формула и поясняет связь принципа пространственного ослабления корреляций с проблемой трактовки операторов $\hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{b}}$ как s -чисел. Напомним, что в этом разделе фигурные скобки обозначают квазисредние.

Функцию $\psi(\mathbf{x})$ будем называть волновой функцией конденсатных частиц, а вектор $\mathbf{p}$ — вектором квазиимпульса конденсатных частиц.

В связи со свойством симметрии (2.2) статистического оператора $\hat{w}_\nu$ сделаем следующее замечание. Если начальный статистический оператор $\hat{\rho}(0)$ обладает симметрией соответствующего унитарного преобразования U , т.е.

$$U\hat{\rho}(0)U^+ = \hat{\rho}(0), \quad U = \exp(-i\mathbf{a}_k(\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{p}\hat{N})),$$

то такому же свойству симметрии удовлетворяет и оператор

$$\hat{\rho}(t) = \exp(-i\hat{H}t)\hat{\rho}(0)\exp(i\hat{H}t),$$

т.е.

$$U\hat{\rho}(t)U^+ = \rho(t)$$

(с теми же значениями параметров $\mathbf{a}_k, \mathbf{p}$). В этом смысле можно сказать, что величины $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{p}$ являются интегралами движения. Поэтому вариационный принцип означает, что состояние статистического равновесия соответствует максимуму энтропии при фиксированных интегралах движения $\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{N}$ (им соответствуют множители Лагранжа $\beta, -\beta\mu$ и $-\beta\mathbf{v}$) и фиксированных параметрах $\mathbf{a}_k, \mathbf{p}$. Таким образом, состояние статистического равновесия определяется наряду с обычными термодинамическими параметрами $\beta, \mu, \mathbf{v}$ также и дополнительными термодинамическими параметрами $\mathbf{a}_k, \mathbf{p}$. Такое состояние соответствует квантовому кристаллу. Подчеркнем, что для обычного кристалла объем элементарной ячейки $v_0 \equiv (\mathbf{a}_1[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3])$ определяется плотностью n (или химическим потенциалом μ), а именно, число атомов в элементарной ячейке $v_0 n$ представляет собой характеристику вещества, т.е. не меняется с изменением термодинамического состояния кристалла. В случае же квантовых кристаллов периоды $\mathbf{a}_k$ представляют собой независимые параметры, так что величина $v_0 n$ меняется с изменением термодинамического состояния кристалла [9].

Так же как и в теории сверхтекучести, величину $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_n$ мы будем называть нормальной скоростью, а величину $\mathbf{p}/m \equiv \mathbf{v}_s$ — скоростью сверхтекучей компоненты (см. в этой связи формулы (4.11)).

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

В приближении слабонеидеального бозе-газа можно положить

$$\hat{V}(\psi) \approx \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \psi^*(\mathbf{x}_1)\psi^*(\mathbf{x}_2)\nu(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\psi(\mathbf{x}_2)\psi(\mathbf{x}_1)$$

и, следовательно,

$$\frac{\delta \hat{V}(\psi)}{\delta \psi^*(\mathbf{x})} \approx \int d^3x_1 \psi^*(\mathbf{x}_1)\psi(\mathbf{x}_1)\nu(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})\psi(\mathbf{x}).$$

Если мы будем рассматривать длиннопериодические структуры, период которых $\mathbf{a}_i$ много больше r_0 , $a_i \gg r_0$ (r_0 — радиус действия потенциала $\nu(\mathbf{x})$), то

$$\frac{\delta \widehat{V}(\psi)}{\delta \psi^*(\mathbf{x})} \approx \nu |\psi(\mathbf{x})|^2 \psi(\mathbf{x}),$$

где $\nu = \int d^3x \nu(\mathbf{x})$. Поэтому уравнение для определения волновой функции $\psi(\mathbf{x})$ конденсатных частиц согласно (2.6), (2.8) примет вид

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \Delta + i \mathbf{v} \nabla - \mu + \nu |\psi(\mathbf{x})|^2 \right\} \psi(\mathbf{x}) = 0,$$

или при использовании определения (2.3) функции $u(\mathbf{x})$

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \Delta + i \mathbf{v}^* \nabla - \tilde{\mu} + \nu |u|^2 \right\} u = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \tilde{\mu} = \mu + \mathbf{p} \mathbf{v} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (3.2)$$

Перейдем теперь к вещественным функциям $\eta > 0$, φ с помощью соотношения

$$u(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x}) e^{i\varphi(\mathbf{x})}. \quad (3.3)$$

Эти функции вследствие периодичности $u(\mathbf{x})$ удовлетворяют соотношениям

$$\eta(\mathbf{x} + \mathbf{a}_l) = \eta(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{a}_l) = \varphi(\mathbf{x}) + 2\pi n_l, \quad l = 1, 2, 3 \quad (3.4)$$

(n_l — фиксированные целые числа). Функции η и φ согласно (3.1) и (3.3) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m} \Delta \eta + \frac{\eta}{2m} (\nabla \varphi)^2 - \eta \mathbf{v}^* \nabla \varphi - \tilde{\mu} \eta + \nu \eta^3 &= 0, \\ -\frac{1}{m} \nabla \eta \nabla \varphi - \frac{\eta}{2m} \Delta \varphi + \mathbf{v}^* \nabla \eta &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\operatorname{div} [\eta^2 (\nabla \varphi - m \mathbf{v}^*)] = 0$$

или в виде

$$\operatorname{div} [\zeta \nabla \chi(\mathbf{x})] = \left(m \mathbf{v}^* - \sum_{l=1}^3 n_l \mathbf{a}^l \right) \nabla \zeta, \quad (3.6)$$

где

$$\zeta(\mathbf{x}) = \eta^2(\mathbf{x}) > 0$$

и периодическая функция $\chi(\mathbf{x})$

$$\chi(\mathbf{x} + \mathbf{a}_l) = \chi(\mathbf{x})$$

связана с функцией $\varphi(\mathbf{x})$ соотношением

$$\varphi(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^3 \mathbf{a}^l \mathbf{x} n_l. \quad (3.7)$$

Далее мы ограничимся случаем однопериодических решений, когда $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = \infty$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i}X$ (неоднородности связаны с направлением x). В этом случае согласно (3.6) функция $\chi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} \zeta \frac{d\chi}{dx} = \left(mv^* - 2\pi n \frac{1}{X} \right) \frac{d\zeta}{dx}, \quad v^* = \mathbf{i}v^*,$$

так как $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^3 = 0$, $\mathbf{a}^1 = \mathbf{i}2\pi/X$. Отсюда следует, что

$$\frac{d\chi}{dx} = mv^* - \frac{2\pi n}{X} + \frac{C}{\zeta}$$

и, следовательно,

$$\chi(x) = mv^* x - \frac{2\pi n}{X} x + C \int_a^x \frac{dx}{\zeta} \quad (3.8)$$

(a – произвольная постоянная). Требование периодичности функции $\chi(x)$ при условии, что функция $\zeta(x)$ периодична, приводит к соотношению

$$C = \frac{2\pi n - mv^* X}{\int_0^X \frac{dx}{\zeta}}. \quad (3.9)$$

Эта формула вместе с формулами (3.7), (3.8) для однопериодических решений

$$\varphi(x) = \chi(x) + \frac{2\pi n}{X} x$$

и решает задачу о нахождении $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = mv^* x + C \int_a^x \frac{dx}{\zeta}. \quad (3.10)$$

Подставляя $d\varphi/dx = mv^* + C/\zeta$ в (3.5) с использованием (3.2), получим уравнение для определения $\eta(x)$:

$$-\frac{1}{2m} \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{C^2}{2m} \frac{1}{\eta^3} - \eta \mu^* + \nu \eta^3 = 0, \quad (3.11)$$

где

$$\mu^* = \mu + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_\perp^2}{2}.$$

Из уравнения (3.11) следует, что

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} \nu \eta^4 - \mu^* \eta^2 - \frac{1}{2m} \frac{C^2}{\eta^2} + \mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ – постоянная интегрирования. Переходя в этом уравнении к переменной $\zeta = \eta^2$, получим

$$\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = f(\zeta), \quad (3.12)$$

где

$$f(\zeta) = 4m\nu \left(\zeta^3 - 2\frac{\mu^*}{\nu}\zeta^2 + 2\frac{\mathcal{E}}{\nu}\zeta - \frac{C^2}{m\nu} \right).$$

Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ – корни кубического уравнения $f(\zeta) = 0$. Тогда

$$f(\zeta) = 4m\nu(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3), \quad (3.13)$$

причем

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = \frac{2\mu^*}{\nu}, \quad \zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \zeta_2\zeta_3 = \frac{2\mathcal{E}}{\nu}, \quad \zeta_1\zeta_2\zeta_3 = \frac{C^2}{m\nu}. \quad (3.14)$$

Рис. 1.

Нами далее будет показано, что для устойчивости периодического бозе-конденсата относительно нормального состояния необходимо выполнение условий

$$\nu > 0, \quad \mu^* > 0. \quad (3.15)$$

Из (3.4) следует, что

$$f(0) < 0.$$

Для существования положительных периодических решений $\zeta(x)$ уравнения (3.12) необходимо, чтобы все три корня ζ_i были вещественными и положительными. Из того что $f(\pm\infty) = \pm\infty$ (см. (3.15)), следует, что кривая $y = f(\zeta)$ имеет вид, изображенный на

Рис. 2.

рис. 1, причем положительные корни ζ_i всегда можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3. \quad (3.16)$$

Заметим также, что согласно (3.14)–(3.16) имеет место неравенство $\mathcal{E} > 0$. Периодическое решение $\zeta(x)$ уравнения (3.12) заключено, очевидно, между ζ_1 и ζ_2 , т.е.

$$\zeta_1 < \zeta(x) < \zeta_2.$$

Неявное решение уравнения (3.12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} 0 < x < x_1 : \quad x &= \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}}, & x_1 &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}}, \\ x_1 < x < x_2 : \quad x &= x_1 + \int_{\zeta}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}}, & x_2 &= 2x_1. \end{aligned}$$

Один период функции $\zeta(x)$ изображен на рис. 2 (постоянная интегрирования выбрана так, чтобы минимуму функции $\zeta(x)$, равному ζ_1 , соответствовала точка $x = 0$). Период X этой функции есть

$$X = x_2 = 2 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}}.$$

Легко видеть, что в области $0 < x < x_1$ функция $\zeta(x)$ определяется неявным выражением

$$x = \frac{1}{\sqrt{4m\nu}} \int_{\zeta_1}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \zeta_3)}}.$$

Производя в этой формуле замену переменной $\zeta - \zeta_1 = (\zeta_2 - \zeta_1) \sin^2 \varphi$, получим

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\nu(\zeta_3 - \zeta_1)}} K(k, \theta),$$

где $K(k, \theta)$ – эллиптический интеграл первого рода

$$K(k, \theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

и

$$\theta = \arcsin \sqrt{\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}}, \quad k^2 = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_1}, \quad 0 < k^2 < 1.$$

Период X выражается в терминах полного эллиптического интеграла первого рода,

$$X = \frac{2K(k)}{\sqrt{m\nu(\zeta_3 - \zeta_1)}}, \quad K(k) \equiv K\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \quad (3.17)$$

В явном виде функцию $\zeta(x)$ можно записать с помощью эллиптических функций Якоби $\operatorname{sn}(u, k)$, $\operatorname{cn}(u, k)$ [14]:

$$\sqrt{\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}} = \operatorname{sn}(u, k), \quad u = \frac{2K(k)}{X}x,$$

или

$$\zeta(x) = \zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1) \operatorname{sn}^2(u, k) = \zeta_2 \operatorname{sn}^2(u, k) + \zeta_1 \operatorname{cn}^2(u, k). \quad (3.18)$$

Заметим, что функция $\zeta(x)$ имеет период X , т.к. $\operatorname{sn}(u + 2K(k), k) = -\operatorname{sn}(u, k)$.

Перейдем теперь к определению фазы $\varphi(x)$. Согласно соотношениям (3.10), (3.9) имеем

$$\varphi(x) = mv^*x + (2\pi n - mv^*X)Z(x), \quad (3.19)$$

где

$$Z(x) = \frac{\int_0^x \zeta^{-1} dx}{\int_0^X \zeta^{-1} dx}.$$

Исходя из последней формулы для $Z(x)$ нетрудно показать, что

$$Z(x) = l + Z_0(x - lX), \quad lX < x < (l+1)X. \quad (3.20)$$

Здесь

$$Z_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}Y(x), & 0 < x < \frac{X}{2}, \\ 1 - \frac{1}{2}Y(x), & \frac{X}{2} < x < X, \end{cases}$$

где

$$Y(x) = \left(\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{f}} \right)^{-1} \int_{\zeta_1}^{\zeta(x)} \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{f}} = \frac{G(\theta, \zeta_2/\zeta_1 - 1, k)}{G(\pi/2, \zeta_2/\zeta_1 - 1, k)},$$

$$\theta = \arcsin \sqrt{\frac{\zeta(x) - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}}, \quad h = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - 1, \quad k^2 = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_1}$$

и $G(\theta, h, k)$ – эллиптический интеграл третьего рода,

$$G(\theta, h, k) = \int_0^\theta \frac{dx}{(1 + h \sin^2 x) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}.$$

Формулы (3.18)–(3.20) вместе с формулой (3.3) и определяют структуру функции $u(x)$.

4. ТЕРМОДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКОГО БОЗЕ-КОНДЕНСАТА

Плотность термодинамического потенциала Гиббса ω в модели с выделенным конденсатом согласно (2.4) определяется формулой

$$\omega = \frac{\Omega}{V\beta} = -\frac{1}{V\beta} \ln \text{Sp} \left[\exp \left(-\beta (\hat{H}(\psi) - \mathbf{v}\hat{\mathbf{P}}(\psi) - \mu\hat{N}(\psi)) \right) \right]$$

или в приближении слабонеидеального бозе-газа –

$$\omega = \frac{1}{V} (H(\psi) - \mathbf{v}\mathbf{P}(\psi) - \mu N(\psi)).$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении (низкие температуры, пренебрежение влиянием газа квазичастиц и нулевыми колебаниями) условному минимуму термодинамического потенциала соответствует условный минимум энергии системы. Замечая, что

$$\begin{aligned} H(\psi) &= \frac{1}{2m} \int d^3x \nabla \psi^* \nabla \psi + \nu \int d^3x |\psi|^4, \quad \mathbf{P}(\psi) = -\frac{i}{2} \int d^3x (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \psi), \\ N(\psi) &= \int d^3x |\psi|^2, \end{aligned}$$

получим

$$\omega = \frac{1}{V} \int d^3x \left\{ \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi + \frac{i}{2} \mathbf{v} (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \psi) - \mu |\psi|^2 + \frac{1}{2} \nu |\psi|^4 \right\}, \quad (4.1)$$

где мы учли медленность изменения волновой функции $\psi(\mathbf{x})$ на расстояниях порядка r_0 . Переходя в формуле (4.1) к переменным $\eta(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x})$ (см. формулы (2.3), (3.3)), находим

$$\omega = \frac{1}{V} \int d^3x \left\{ \frac{1}{2m} (\nabla \eta \nabla \eta + \eta^2 (\nabla \varphi)^2) - \eta^2 \mathbf{v}^* \nabla \varphi - \tilde{\mu} \eta^2 + \frac{1}{2} \nu \eta^4 \right\},$$

где

$$\tilde{\mu} = \mu + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}^{*2}}{2}, \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{P}}{m}.$$

Рассмотрим теперь однопериодический случай, когда величины $\eta(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x})$ зависят от одной координаты x . Исключая $\nabla\varphi$ с помощью (3.10), получим

$$\omega = \frac{1}{X} \int_0^X dx \left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2m} \frac{C^2}{\eta^2} + \frac{1}{2} \nu \eta^4 - \mu^* \eta^2 \right\}. \quad (4.2)$$

Интегрируя по частям и замечая, что $\eta(x+X) = \eta(x)$, найдем

$$\omega = \frac{1}{X} \int_0^X dx \left\{ -\frac{\eta}{2m} \frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{1}{2m} \frac{C^2}{\eta^2} + \frac{1}{2} \nu \eta^4 - \mu^* \eta^2 \right\}, \quad \mu^* = \mu + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_\perp^{*2}}{2}.$$

Исключив из этого выражения член $d^2\eta/dx^2$ с помощью формулы (3.11), получим

$$\omega = -\frac{\nu}{2X} \int_0^X dx \eta^4 = -\frac{\nu}{2X} \int_0^X dx \zeta^2. \quad (4.3)$$

Так как потенциал нормального состояния равен нулю (см. формулу (4.1), в которой положено $\psi = 0$), то условие термодинамической устойчивости рассматриваемого пространственно-периодического бозе-конденсата имеет вид

$$\omega < 0.$$

Поэтому из (4.3) следует $\nu > 0$, а из (4.2) $-\mu^* > 0$.

Найдем явное выражение для термодинамического потенциала ω . Переходя в формуле (4.3) от интегрирования по x к интегрированию по ζ и используя (3.12), получим

$$\omega = -\frac{\nu}{X} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \frac{dx}{d\zeta} \zeta^2 = -\frac{\nu}{X} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \frac{\zeta^2}{\sqrt{f(\zeta)}}.$$

Легко видеть, что

$$\omega = -\frac{\nu}{X} \frac{1}{\sqrt{m\nu\chi_3}} Q, \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{(\zeta_1 + \chi_2 \sin^2 \theta)^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}},$$

где $\chi_3 = \zeta_3 - \zeta_1$, $\chi_2 = \zeta_2 - \zeta_1$. Выражение для Q можно переписать в виде

$$Q = \zeta_3^2 K(k) - 2\zeta_3(\zeta_3 - \zeta_1)E(k) + (\zeta_3 - \zeta_1)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}},$$

где

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}$$

есть полный эллиптический интеграл второго рода. Замечая, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = (1 - k^2)E(k) + k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos^2 \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta},$$

и используя формулу [15]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos^2 \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{3} \left(\frac{k^2 + 1}{k^2} E(k) - \frac{1 - k^2}{k^2} K(k) \right),$$

получим

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) = \frac{\nu}{6} & \left\{ \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_3 + \zeta_2 \zeta_3 - 2\zeta_3(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + \right. \\ & \left. + 2(\zeta_3 - \zeta_1)(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \frac{E(k)}{K(k)} \right\}, \\ k^2 = & \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Найдем теперь плотность конденсатных частиц, которая согласно (2.3) определяется формулой

$$\frac{1}{X} \int_0^X dx |\psi(x)|^2 = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{b}} |a_{\mathbf{p}+\mathbf{b}}|^2 \equiv n_0$$

или с использованием формулы (3.12) –

$$n_0 = \frac{1}{X} \int_0^X dx \zeta(x) = \frac{2}{X} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} d\zeta \frac{\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}}.$$

Входящий в эту формулу интеграл сводится к полным эллиптическим интегралам первого и второго родов. В результате несложных вычислений получим

$$n_0 = \zeta_3 - (\zeta_3 - \zeta_1) \frac{E(k)}{K(k)}. \quad (4.5)$$

Таким образом, плотность конденсатных частиц n_0 , так же как и термодинамический потенциал ω , выражается через переменные $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$.

В соответствии с (3.14) вместо термодинамических переменных μ^*, v^*, X можно использовать переменные $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, функциями которых и являются выписанные выражения для ω и n_0 . Обратим внимание на то, что величина C , кроме термодинамической переменной v^* , содержит еще неизвестную величину $\langle 1/\zeta \rangle$, являющуюся функцией $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Определим эту величину. Согласно (3.12) имеем

$$\left\langle \frac{1}{\zeta} \right\rangle \equiv \frac{1}{X} \int_0^X \frac{dx}{\zeta} = \frac{2}{X} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{f(\zeta)}},$$

где

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{X} \int_0^X \dots dx.$$

Легко преобразовать это выражение к виду

$$\left\langle \frac{1}{\zeta} \right\rangle = \frac{1}{K(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\zeta_1 + \chi_2 \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad \chi_2 = \zeta_2 - \zeta_1,$$

и тем самым выразить величину $\langle 1/\zeta \rangle$ через полный эллиптический интеграл $G(h, k)$ третьего рода:

$$\left\langle \frac{1}{\zeta} \right\rangle = \frac{1}{\zeta_1 K(k)} G(h, k), \quad h = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} - 1, \quad (4.6)$$

где

$$G(h, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + h \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}.$$

Выпишем теперь явные формулы, связывающие между собой переменные $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ и исходные термодинамические переменные X, v^*, μ^* . Согласно (3.14), (3.9) и (3.17) имеем

$$\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 = \frac{(2\pi n - mv^* X)^2}{\langle 1/\zeta \rangle^2} \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{4K^2(k)}$$

или, используя (4.6),

$$\frac{2}{\zeta_1 \sqrt{\zeta_3 - \zeta_1}} \sqrt{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3} G\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - 1, k\right) = |2\pi n - mv^* X|. \quad (4.7)$$

Эта формула вместе с формулами (см. (3.17), (3.14))

$$\frac{K(k)}{\sqrt{\zeta_3 - \zeta_1}} = \frac{1}{2} \sqrt{m\nu} X, \quad \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = \frac{2\mu^*}{\nu} \quad (4.8)$$

и определяет связь переменных X, v^*, μ^* и переменных $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$.

Получим теперь термодинамическое тождество для потенциала ω (второй закон термодинамики для обратимых процессов), рассматривая X, v^*, μ^* как независимые термодинамические переменные.

Чтобы не варьировать предел интегрирования X в выражении (4.2) для потенциала ω , введем вместо функции $\eta(x; X, \mu^*, v^*)$ функцию $\underline{\eta}(y; X, \mu^*, v^*) = \eta(yX; X, \mu^*, v^*)$, где $y = x/X$. Тогда потенциал ω согласно (4.2) можно представить в виде

$$\omega = \int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \underline{\eta}}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{X^2} - \frac{1}{2m} \frac{C^2}{\underline{\eta}^2} - \underline{\eta}^2 \mu^* + \frac{1}{2} \nu \underline{\eta}^4 \right\} + \frac{1}{m} C^2 \left\langle \frac{1}{\eta^2} \right\rangle,$$

где

$$C^2 \left\langle \frac{1}{\eta^2} \right\rangle^2 = \left(\frac{2\pi n}{X} - mv^* \right)^2. \quad (4.9)$$

Интегральный член зависит от X, v^*, μ^* как непосредственно, так и через функцию $\underline{\eta}$. Однако последнюю зависимость учитывать не надо, так как варьирование по $\underline{\eta}$ приводит к выражению

$$\frac{\delta \omega}{\delta \underline{\eta}(y)} = -\frac{1}{mX^2} \frac{\partial^2 \underline{\eta}}{\partial y^2} + \frac{1}{m} \frac{C^2}{\underline{\eta}^3} - 2\underline{\eta} \mu^* + 2\nu \underline{\eta}^3,$$

которое обращается в нуль в силу уравнения (3.11). Поэтому

$$\begin{aligned} \delta\omega = & -\frac{2}{X}\delta X \frac{1}{X} \int_0^X dx \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 - \delta\mu^* \langle \eta^2 \rangle - \\ & - \frac{1}{2m} \left\langle \frac{1}{\eta^2} \right\rangle \delta C^2 + \frac{1}{m} \left\langle \frac{1}{\eta^2} \right\rangle \delta C^2 + \frac{1}{m} C^2 \delta \left\langle \frac{1}{\eta^2} \right\rangle, \end{aligned}$$

или

$$\delta\omega = -\frac{2}{X} \left\langle \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \delta X - \langle \eta^2 \rangle \delta\mu^* + \frac{1}{2m} \frac{1}{\langle 1/\eta^2 \rangle} \delta \left(C^2 \left\langle \frac{1}{\eta^2} \right\rangle^2 \right).$$

Используя (4.9), находим окончательно

$$\delta\omega = -\frac{1}{X} \left(\left\langle \frac{1}{m} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 \right\rangle + \frac{2\pi n C}{mX} \right) \delta X - C \delta v^* - \langle \eta^2 \rangle \delta\mu^*,$$

или

$$\frac{\partial\omega}{\partial X} = -\frac{1}{X} \left\langle \frac{1}{m} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\pi n C}{mX} \right\rangle, \quad \frac{\partial\omega}{\partial v^*} = -C, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\mu^*} = -n_0. \quad (4.10)$$

Если рассматривать ω как функцию μ , $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$, X , то согласно (4.1) будем иметь

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial\mu} \right)_{\mathbf{v}, \mathbf{p}, X} = -n_0, \quad \left(\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{v}} \right)_{\mu, \mathbf{p}, X} = -\boldsymbol{\pi} \equiv -\langle \boldsymbol{\pi} \rangle. \quad (4.11)$$

С другой стороны, так как

$$\mu^* = \mu + \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_\perp^{*2}}{2}, \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (4.12)$$

то

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial\mu} \right)_{\mathbf{v}, \mathbf{p}, X} = \frac{\partial\omega}{\partial\mu^*}, \quad \left(\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{v}} \right)_{\mu, \mathbf{p}, X} = \frac{\partial\omega}{\partial\mu^*} m\mathbf{v} - \frac{\partial\omega}{\partial\mu^*} \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} \frac{m}{2} \left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{p}}{m} \right)_\perp^2 + \frac{\partial\omega}{\partial v_\parallel},$$

где $v_\parallel = \mathbf{v}\mathbf{i}$. Первое из этих соотношений в силу (4.12) и первого из соотношений (4.11) тождественно выполняется. Последнее из этих соотношений в силу второго из соотношений (4.11) приводится к виду

$$\pi_\parallel = n_0 m v_\parallel + C, \quad \boldsymbol{\pi}_\perp = n_0 \mathbf{p}_\perp. \quad (4.13)$$

Формулы (4.13) также можно легко получить из определения плотности импульса

$$\boldsymbol{\pi}(x) = -\frac{i}{2} (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \psi) = u^*(x) u(x) (\mathbf{p} + \nabla \varphi).$$

Действительно, замечая, что $\nabla \varphi = \mathbf{i}(mv^* + C/\zeta)$, найдем

$$\boldsymbol{\pi}(x) = \mathbf{p}\zeta(x) + \mathbf{i}(mv^*\zeta(x) + C) = (\mathbf{p} + \mathbf{i}mv^*)\zeta(x) + \mathbf{i}C.$$

Усреднение этого соотношения по x и приводит к (4.13).

5. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ

В этом разделе мы обсудим некоторые вопросы, связанные с термодинамической устойчивостью полученных решений. Предварительно, однако, исследуем некоторые частные решения, которые позволят нам установить область возможных значений периода X при фиксированных значениях μ^* и v^* . Так как $\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3$, то согласно рис. 1 верхняя и нижняя грани величины X определяются условиями $\zeta_2 = \zeta_3$ и $\zeta_2 = \zeta_1$.

1. Пусть $\zeta_3 \rightarrow \zeta_2$. Тогда $k \rightarrow 1$ и

$$X \xrightarrow{k \rightarrow 1} \frac{4 \ln 2 - \ln(1 - k^2)}{\sqrt{m\nu(\zeta_2 - \zeta_1)}} = x_0 (4 \ln 2 - \ln(1 - k^2)), \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{m\nu(\zeta_2 - \zeta_1)}}. \quad (5.1)$$

Учитывая, что $\operatorname{sn}(u, k) \xrightarrow{k \rightarrow 1} \operatorname{th} u$, найдем

$$\zeta(x) \xrightarrow{k \rightarrow 1} \zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1) \operatorname{th}^2 \frac{x}{x_0}. \quad (5.2)$$

На рис. 3 изображен график этой функции при $k^2 = 1$. График соответствующей периодической функции при $1 - k^2 \ll 1$ изображен на рис. 4.

Рис. 3.

Найдем параметры ζ_1, ζ_2 как функции первоначальных термодинамических переменных μ^*, v^* . Замечая, что

$$G\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - 1, k\right) K^{-1}(k) \Big|_{k \rightarrow 1} \rightarrow \frac{\zeta_1}{\zeta_2},$$

получим согласно (4.7), (4.8)

$$\zeta_1 = \frac{mv^{*2}}{\nu}.$$

Рис. 4.

Из второй формулы (4.8) следует поэтому, что

$$\zeta_2 = \frac{\mu^*}{\nu} - \frac{mv^{*2}}{2\nu}.$$

Так как $0 < \zeta_1 < \zeta_2$, то $\mu^* > \frac{3}{2}mv^{*2}$. Это неравенство представляет собой условие существования рассматриваемого решения. Число конденсатных частиц определяется формулой (см. (4.5))

$$n_0 = \frac{1}{\nu} \left(\mu^* - \frac{mv^{*2}}{2} \right).$$

Кроме того, находим, что фаза $\varphi(x)$ (см. (3.19), (3.20)) при $0 < x < X/2$ имеет вид

$$\varphi(x) = \text{const} + mv^*x, \quad 0 < x < \frac{X}{2} \rightarrow \infty.$$

Если дополнительно считать, что $v^* = 0$, то $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \mu^*/\nu$, и мы приходим к решению Боголюбова. Термодинамический потенциал, соответствующий этому случаю, имеет вид

$$\omega = -\frac{\nu}{2}\zeta_2^2 = -\frac{\nu}{2} \left(\frac{\mu^*}{\nu} - \frac{mv^{*2}}{2\nu} \right)^2.$$

2. Пусть теперь $\zeta_2 \rightarrow \zeta_1$. Тогда $k \rightarrow 0$ и

$$X \xrightarrow{k \rightarrow 0} X_0 = \frac{\pi}{\sqrt{m\nu(\zeta_3 - \zeta_1)}}. \quad (5.3)$$

В этом случае согласно (3.18) имеем

$$\zeta(x) \rightarrow \zeta_1 = \text{const}.$$

Замечая, что $G(0, k)|_{k \rightarrow 0} = \pi/2$, получим согласно (4.7), (4.8), что

$$\zeta_3 = \frac{q^2}{m\nu}, \quad q = \frac{2\pi n}{X_0} - mv^*. \quad (5.4)$$

Поэтому второе из уравнений (4.8) дает

$$\zeta_1 = \frac{\mu^*}{\nu} - \frac{q^2}{2m\nu}. \quad (5.5)$$

Мы приходим к решению только в том случае, если $\zeta_3 > \zeta_1 > 0$ или $\mu^* > q^2/2m > \mu^*/3$. Термодинамический потенциал в этом случае имеет вид

$$\omega = -\frac{\nu}{2}\zeta_1^2.$$

Фаза решения в случае $\zeta_2 = \zeta_1$ (см. (3.19)) есть

$$\varphi(x) = \frac{2\pi n}{X}x.$$

Из формул (5.3)–(5.5) следует, что

$$X_0 = \frac{3\pi n m v^* - \pi \sqrt{m\mu^*(6n^2 - 1) + \frac{3}{2}m^2 v^{*2}}}{\frac{3}{2}m^2 v^{*2} - m\mu^*}.$$

В частности, при $v^* = 0$, $n \neq 0$ получаем

$$X_0 = \pi \sqrt{\frac{6n^2 - 1}{m\mu^*}},$$

а при $n = 0$

$$X_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{3}{2}m^2 v^{*2} - m\mu^*}}.$$

Последнее выражение имеет смысл при $\frac{3}{2}m v^{*2} > \mu^*$. Таким образом, область возможных значений периода X определяется величиной X_0 , $X_0 < X < \infty$.

3. Пусть $\zeta_1 \rightarrow 0$. Тогда $k \rightarrow \zeta_2/\zeta_3$. Этот случай интересен по той причине, что согласно (4.13) x -компонента плотности импульса при $v_{\parallel} = 0$ обращается в нуль, когда $\zeta_1 = 0$ (или $C = 0$, см. (3.14)). Функция $\zeta(x)$ при $\zeta_1 = 0$ определяется формулой

$$\zeta(x) = \zeta_2 \sin^2 \frac{x}{X} 2K(k). \quad (5.6)$$

С помощью формул (3.19), (3.20) находим фазу:

$$\varphi(x) = mv^*x + (2\pi n - mv^*X)Z_0(x), \quad (5.7)$$

где

$$Z_0(x) = l + \frac{1}{2}, \quad lX < x < (l+1)X.$$

Термодинамический потенциал ω и период X определяются формулами

$$\omega = -\frac{\nu}{6}\zeta_3 \left\{ \zeta_2 + 2\zeta_3 - 2(\zeta_2 + \zeta_3) \frac{E(k)}{K(k)} \right\}, \quad X = \frac{2K(k)}{\sqrt{m\nu\zeta_3}}. \quad (5.8)$$

Найдем эти величины как функции первоначальных термодинамических параметров μ^* , v^* , X . Согласно формулам (3.14) имеем

$$\zeta_2 + \zeta_3 = \frac{2\mu^*}{\nu}, \quad \zeta_2\zeta_3 = \frac{2\mathcal{E}}{\nu},$$

откуда следует, что

$$\zeta_2 = \frac{\mu^*}{\nu} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}}{U_0}} \right), \quad \zeta_3 = \frac{\mu^*}{\nu} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\mathcal{E}}{U_0}} \right),$$

где $U_0 = \mu^{*2}/2\nu$. Из этих формул находим

$$k^2 = \frac{\zeta_2}{\zeta_3} = \frac{1 - \sqrt{1 - \mathcal{E}/U_0}}{1 + \sqrt{1 - \mathcal{E}/U_0}}$$

и, следовательно,

$$\zeta_2 = \frac{\mu^*}{\nu} \frac{2k^2}{1+k^2}, \quad \zeta_3 = \frac{\mu^*}{\nu} \frac{2}{1+k^2}.$$

Поэтому формулы (5.8) дают

$$\omega(\mu^*, k) = \frac{2}{3} \frac{\mu^{*2}}{\nu} \frac{1}{1+k^2} \left(2 \frac{E(k)}{K(k)} - \frac{2+k^2}{1+k^2} \right), \quad X = \frac{2}{\sqrt{2m\mu^*}} \sqrt{1+k^2} K(k). \quad (5.9)$$

Число конденсатных частиц определяется выражением

$$n_0 = \frac{\mu^*}{\nu} \frac{2}{1+k^2} \left(1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right). \quad (5.10)$$

Величина v^* , входящая в фазу $\varphi(x)$, должна быть связана с бесконечно малой величиной ζ_1 . Для нахождения этой связи обратимся к формуле (4.7) и найдем асимптотику функции $G(\zeta_2/\zeta_1 - 1, k)$ при $\zeta_1 \rightarrow 0$. Интегрирование по частям приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\zeta_1 + \chi_2 \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\zeta_1 + \chi_2 \sin^2 \theta} + \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{k^2 \sin \theta \cos \theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\zeta_1 + \chi_2 \sin^2 \theta}, \end{aligned}$$

где $\chi_2 = \zeta_2 - \zeta_1$. Используя эту формулу, находим

$$\zeta_1^{-1} G\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - 1; k\right) \xrightarrow{\zeta_1 \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\zeta_1}} + \frac{K(k) - E(k)}{\zeta_2},$$

отсюда следует, что

$$\frac{2\sqrt{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}}{\zeta_1 \sqrt{\zeta_3 - \zeta_1}} G\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - 1; k\right) \xrightarrow{\zeta_1 \rightarrow 0} \pi + 2 \frac{K(k) - E(k)}{\sqrt{\zeta_2}} \sqrt{\zeta_1}.$$

Поэтому соотношение (4.7) принимает вид

$$2 \frac{K(k) - E(k)}{\sqrt{\zeta_2}} \sqrt{\zeta_1} = 2\pi \left(n - \frac{1}{2}\right) - mv^* X > 0$$

(случай $2\pi(n - 1/2) - mv^* X < 0$ не реализуется). Таким образом, $mv^* X \rightarrow 2\pi(n - 1/2)$ при $\zeta_1 \rightarrow 0$ и, следовательно (см. (5.7)),

$$\varphi(x) = mv^* x + \pi Z_0(x) = 2\pi \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{x}{X} + \pi \left(l + \frac{1}{2}\right), \quad lX < x < (l+1)X.$$

При этом мы учли, что согласно (5.7) $Z_0(x) \xrightarrow{\zeta_1 \rightarrow 0} l + 1/2$.

Найдем теперь функцию $u(x) \equiv e^{i\varphi(x)} \sqrt{\zeta(x)}$. Согласно (5.6) имеем

$$u(x) = \sqrt{\zeta_2} \left| \operatorname{sn} \left(\frac{x}{X} K(k) \right) \right| e^{i\varphi(x)} = i \sqrt{\zeta_2} \operatorname{sn} \left(\frac{x}{X} 2K(k) \right) \exp \left(-i\pi \frac{x}{X} \right) \exp \left(2\pi n i \frac{x}{X} \right),$$

где

$$\operatorname{sn} \left(\frac{x}{X} 2K(k) \right) \exp \left(-i\pi \frac{x}{X} \right)$$

— периодическая функция x с периодом X , так как $\operatorname{sn}(u + 2K(k)) = -\operatorname{sn} u$. Период X дается формулой

$$X = \frac{2}{\sqrt{2m\mu^*}} \sqrt{1 + k^2} K(k).$$

Раскладывая функцию

$$\operatorname{sn} \left(\frac{x}{X} 2K(k) \right) \exp \left(-i\pi \frac{x}{X} \right)$$

в ряд Фурье:

$$\exp \left(-i\pi \frac{x}{X} \right) \operatorname{sn} \left(\frac{2x}{X} K(k) \right) = \sum_m b_m \exp \left(2\pi i m \frac{x}{X} \right),$$

где (см. приложение)

$$2\pi b_m = \int_{-\pi}^{\pi} dt e^{-i(m+\frac{1}{2})t} \operatorname{sn} \left(\frac{t}{\pi} K(k) \right) = -\frac{i\pi^2}{kK} \left(\operatorname{sh} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \frac{K'}{K} \right) \right)^{-1}, \quad (5.11)$$

$$K' = K|_{k^2 \rightarrow 1-k^2},$$

получим

$$u(x) = \sqrt{\zeta_2} \exp\left(2\pi i n \frac{x}{X}\right) \sum_m b_m \exp\left(2\pi i m \frac{x}{X}\right).$$

Отсюда и из (2.3) следует, что заселенность конденсатными частицами состояний с импульсом $\mathbf{p} + i2\pi(m+n)/X$ определяется формулой

$$\left|a_{\mathbf{p}+i\frac{2\pi m}{X}}\right|^2 = V \frac{2\mu^*}{\nu} k^2 |b_m|^2. \quad (5.12)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение функции $u(x)$ при $k \rightarrow 0$. Замечая, что $\sin u \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \sin u$, находим

$$u(x) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \sqrt{\frac{\mu^*}{2\nu}} k \left\{ \exp\left(2\pi i n \frac{x}{X_0}\right) - \exp\left(2\pi i (n-1) \frac{x}{X_0}\right) \right\}, \quad X_0 = \frac{\pi}{\sqrt{2m\mu^*}}.$$

Таким образом, вблизи нормального состояния бозе-конденсат состоит из частиц с импульсами $\mathbf{p} + 2\pi n \frac{1}{X_0} \mathbf{i}$ и $\mathbf{p} + 2\pi(n-1) \frac{1}{X_0} \mathbf{i}$.

Исследуем устойчивость бозе-конденсата. Как мы уже отмечали, имеет место неравенство

$$\omega(\zeta) < 0$$

при $\nu > 0$. Так как нормальному состоянию соответствует потенциал $\omega = 0$ (в нормальном состоянии параметр порядка ψ обращается в нуль), то пространственно-периодический бозе-конденсат термодинамически устойчив по отношению к нормальному состоянию.

Рассмотрим производную $(\partial\omega/\partial X)_{\mu^*, \nu^*}$. Согласно (4.10) имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial X} = -\frac{1}{mX} \left(A + n \operatorname{sgn} \left(n - \frac{mv^*X}{2\pi} \right) B \right), \quad (5.13)$$

где

$$A = \left\langle \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right\rangle > 0, \quad B = \frac{2\pi|C|}{X} > 0.$$

С помощью формул (3.11), (4.3) легко увидеть, что

$$\frac{1}{2m} \left\langle \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right\rangle = 2\omega + \mu^* \langle \zeta \rangle - \frac{C^2}{2m} \left\langle \frac{1}{\zeta} \right\rangle,$$

или согласно (4.4), (4.5), (3.14)

$$A = \frac{m\nu}{3} \left\{ 2(\zeta_1\zeta_2 + \zeta_1\zeta_3 + \zeta_2\zeta_3) - \zeta_3(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) + \right. \\ \left. + (\zeta_3 - \zeta_1)(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \frac{E(k)}{K(k)} - 3\zeta_1\zeta_2\zeta_3 \left\langle \frac{1}{\zeta} \right\rangle \right\} \geq 0.$$

Величину B можно представить в виде

$$B = 2\pi \left| 2\pi \frac{n}{X} - mv^* \right| \left\langle \frac{1}{\zeta} \right\rangle^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что

$$A|_{\zeta_1=\zeta_2} = 0, \quad A|_{\zeta_2=\zeta_3} = 0.$$

Пусть теперь $n = 0$. Тогда $\partial\omega/\partial X \leq 0$. Следовательно, ω является убывающей функцией X с точкой “уплощения” $X = X_0$ (этой точке “уплощения”, в которой $\partial\omega/\partial X = 0$, соответствует случай $\zeta_1 = \zeta_2$). Это означает, что при $n = 0$ абсолютно устойчивым является состояние, для которого $X = \infty$, т.е. пространственно-однородное состояние. Это состояние соответствует решению Боголюбова. Однако отмеченное обстоятельство не означает, что пространственно-периодические решения не реализуются даже в случае $n = 0$. Действительно, рассмотренные пространственно-периодические решения соответствуют статистическому оператору $\hat{\rho}$, инвариантному относительно унитарного преобразования $U = \exp iX(\hat{P}_x - p_x \hat{N})$,

$$U\rho U^+ = \rho,$$

и, следовательно, в силу закона сохранения величин $\hat{P}_x$ и $\hat{N}$ период X является константой движения и не может измениться, если не нарушен закон сохранения $\hat{P}_x$ ($\hat{N}$ всегда сохраняется). Однако если закон сохранения $\hat{P}_x$ слабо нарушен, то изученные пространственно-периодические состояния станут квазистационарными и параметр X будет медленно (в силу малости нарушения закона сохранения $\hat{P}_x$) стремиться к бесконечности, вследствие чего рассматриваемое пространственно-периодическое решение при $t \rightarrow \infty$ перейдет в пространственно-однородное решение Боголюбова.

Это напоминает ситуацию для нормального состояния, когда в гиббсовскую экспоненту вводят слагаемое $-\mathbf{v}\hat{\mathbf{P}}$. До тех пор пока не нарушен закон сохранения импульса, величина $\mathbf{v}$ является константой движения и состояние будет устойчивым. Однако при слабом нарушении закона сохранения импульса состояние становится квазистационарным и параметр $\mathbf{v}$ стремится к нулю.

Более сложная ситуация может возникнуть для фаз с $n \neq 0$. Легко видеть, что в этом случае

$$\frac{\partial\omega}{\partial X} = -\frac{1}{mX}(A + |n|B) < 0,$$

если

$$\begin{aligned} n < 0 \quad \text{или} \quad n > \frac{mv^*X}{2\pi} \quad \text{при} \quad v^* > 0, \\ n > 0 \quad \text{или} \quad n < \frac{mv^*X}{2\pi} \quad \text{при} \quad v^* < 0, \end{aligned}$$

и термодинамически более выгодным состоянием является состояние с бесконечным периодом (пространственно-однородное состояние Боголюбова; этот случай выполняется при достаточно малых v^* , если $n > 0$).

Если же (случай больших $|v^*|$)

$$\begin{aligned} 0 < n < \frac{mv^*X}{2\pi} & \quad \text{при} \quad v^* > 0, \\ \frac{mv^*X}{2\pi} < n < 0 & \quad \text{при} \quad v^* < 0, \end{aligned}$$

то

$$\frac{\partial \omega}{\partial X} = -\frac{1}{mX}(A - |n|B).$$

В этом случае отрицательность производной $\partial \omega / \partial X$ становится неочевидной. Поэтому возникает возможность существования абсолютно устойчивых (по отношению к малым нарушениям закона сохранения импульса) пространственно-периодических решений с определенным значением периода X , который становится не независимым термодинамическим параметром (как в квантовых кристаллах), а вполне определенной функцией μ^*, v^* ($X = X(\mu^*, v^*)$). Эта функция находится из уравнения $A = |n|B$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Прежде чем переходить к вычислению интеграла (5.11), заметим, что функция $\operatorname{sn} u$ обладает двумя периодами

$$\operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u + 4K), \quad \operatorname{sn} u = \operatorname{sn}(u + 2iK'), \quad (\text{П.1})$$

где

$$K' \equiv K'(k) = K(k)|_{k^2 \rightarrow 1-k^2}.$$

Кроме того, функция $\operatorname{sn} u$ является аналитической в комплексной плоскости u , за исключением простых полюсов в точках

$$\begin{aligned} u_{nm} &= iK' + 4Kn + 2iK'm, \\ u'_{nm} &= 2K + iK' + 4Kn + 2iK'm, \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

в которых она имеет вычеты $1/K$ и $-1/K$,

$$u \sim \frac{1}{K} \frac{1}{u - u_{nm}}, \quad u \sim -\frac{1}{K} \frac{1}{u - u'_{nm}}. \quad (\text{П.3})$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_C dz \exp \left\{ -i\pi z - i\frac{z}{2} \right\} \operatorname{sn} \frac{K}{\pi} z,$$

взятый по контуру C . Обход контура C совершается против часовой стрелки с последовательным соединением точек $-\pi$, π , $\pi + i\tau$, $-\pi + i\tau$. Так как $\operatorname{sn} u = -\operatorname{sn}(u + 2K)$, то функция $\exp(-iz/2) \operatorname{sn}((K/\pi)z)$ по переменной z имеет период 2π . Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} dz \exp \left(-inz - i\frac{z}{2} \right) \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} z \right) - \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} dz \exp(-inz) \exp \left(-i\frac{z}{2} \right) \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} (z + i\pi\tau) \right) \exp \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \tau \right). \end{aligned}$$

Если выбрать $\tau = 2K'/K$, то в силу (П.1)

$$\operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} (z + i\pi\tau) \right) = \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} z \right).$$

В результате имеем

$$I = \left(1 - \exp 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{K}{K'} \right) \int_{-\pi}^{\pi} dx \exp \left(-ixn - i\frac{x}{2} \right) \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} x \right).$$

Согласно (П.2) внутри контура C содержится только один полюс в точке $z = i\pi(K'/K)$. Поэтому, вычисляя интеграл I с помощью теории вычетов и учитывая (П.3), получим

$$I = \frac{2\pi^2 i}{kK} \exp \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{K'}{K} \right).$$

Таким образом, мы приходим окончательно к формуле

$$2\pi b_n \equiv \int_{-\pi}^{\pi} dx \exp \left(-ixn - i\frac{x}{2} \right) \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} x \right) = -\frac{\pi^2 i}{kK} \left(\operatorname{sh} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \frac{K'}{K} \right) \right)^{-1}.$$

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (грант № 24/378), а также фонда BMBF (Германия) в рамках сотрудничества с университетом г. Росток.

Список литературы

- [1] *M. H. Anderson et al.* Science. 1995. V. 269. P. 198.
- [2] *С. Чу.* УФН. 1999. Т. 169. С. 274.
- [3] *К. Н. Коэн-Тануджи.* УФН. 1999. Т. 169. С. 292.
- [4] *У. Д. Филлипс.* УФН. 1999. Т. 169. С. 305.
- [5] *Y. Castin, J. Dalibard.* Europhys. Lett. 1991. V. 14. P. 761.
- [6] *P. Vertek, B. Lounis, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, J.-Y. Courtois, G. Grynberg.* Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 3861.
- [7] *P. S. Jessen, C. Gerz, P. D. Lett, W. D. Phillips, S. L. Rolston, R. J. C. Spreeuw, C. I. Westbrook.* Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 49.
- [8] *Н. Н. Боголюбов.* Изв. АН СССР. Сер. физ. 1947. Т. 11. С. 77.
- [9] *Н. М. Лавриненко, С. В. Пелетминский.* ТМФ. 1986. Т. 66. № 2. С. 314.
- [10] *А. Ф. Андреев, И. М. Лифшиц.* ЖЭТФ. 1969. Т. 56. № 6. С. 2057.
- [11] *А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, Ю. В. Слюсаренко.* ЖЭТФ. 1998. Т. 113. С. 918.
- [12] *A. S. Peletminsky, S. V. Peletminsky, Yu. V. Slyusarenko.* Low Temp. Phys. 1999. V. 25. № 5. P. 303.
- [13] *Н. Н. Боголюбов.* Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт 1451. Дубна: ОИЯИ, 1963; Избранные труды. Т. 3. Киев: Наукова думка, 1971.
- [14] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон.* Курс современного анализа. Т. II. М.: Физматгиз, 1963.
- [15] *Г. М. Фихтенгольц.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 24.III.2000 г.