Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Антонов, А. В. Малышев, Влияние сильно анизотропного турбулентного перемешивания на критическое поведение: ренормгрупповой анализ двух необычных систем, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 1, 50–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:35:41

© 2011 г.

Н. В. Антонов*, А. В. Малышев*

ВЛИЯНИЕ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ НА КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ: РЕНОРМГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДВУХ НЕОБЫЧНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрено влияние сильно анизотропного турбулентного перемешивания на критическое поведение двух систем: критической динамики модели φ^3 , описывающей универсальные свойства метастабильных состояний вблизи фазового перехода первого рода, и реакционно-диффузионной системы вблизи точки перехода второго рода между флуктуационным и абсорбционным состояниями (простой эпидемический процесс, или процесс Грибова). В обоих случаях продемонстрировано существование нового сильно неравновесного и анизотропного скейлингового режима (класса универсальности), для которого существенны как перемешивание, так и нелинейность по параметру порядка. Соответствующие критические размерности вычислены в однопетлевом приближении ренормализационной группы.

Ключевые слова: критическое поведение, турбулентное перемешивание, ренормализационная группа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные системы самой разной физической природы (магнетики, системы типа жидкость-пар, бинарные смеси) демонстрируют очень интересное поведение в окрестности критической точки (фазового перехода второго рода). Оказывается, что различные термодинамические величины (теплоемкость, спонтанная намагниченность, восприимчивость и т. д.) имеют степенные особенности. Количественные характеристики такого поведения (например, критические размерности) зависят только от глобальных свойств системы (таких как симметрия или размерность пространства), и поэтому могут быть описаны на основе небольшого числа базовых моделей. Это позволяет объединять системы, различающиеся множеством несущественных (с точки зрения критического поведения) деталей в единые классы, характеризующиеся одним и тем же набором критических показателей.

* Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: antonov@pobox.spbu.ru

Последовательное количественное описание критического поведения можно дать в рамках метода ренормализационной группы (РГ). В РГ-подходе возможные критические режимы связываются с инфракрасно-устойчивыми (ИК-устойчивыми) неподвижными точками некоторой ренормируемой теоретико-полевой модели. Цель теории – выделить основные классы универсальности, установить существование нужных неподвижных точек для соответствующих моделей, вычислить для них критические размерности и скейлинговые функции в рамках последовательной теории возмущений. Подробное изложение аппарата РГ и его применений в теории критического поведения содержится в монографии [1].

Наиболее типичные фазовые переходы принадлежат классу $O(n)$ -симметричной модели φ^4 n -компонентного скалярного параметра порядка. Универсальные характеристики такого критического поведения зависят только от n и размерности пространства d . Однако в последние годы все больший интерес привлекают фазовые переходы в системах, далеких от состояния термодинамического равновесия (см., например, обзорную статью [2] и цитированную в ней литературу). Их критическое поведение гораздо более многообразно и пока недостаточно хорошо изучено.

Известно, что сильное влияние на критическое поведение могут оказывать внешние возмущения, примеси, гравитация, движение самой среды и т.д. Это может приводить к существенному искажению “идеального” критического поведения, а в некоторых случаях – даже к появлению новых классов универсальности [3]–[9]. Такие в целом разные системы, как, например, магнетик со случайно распределенными примесями или бинарная смесь в турбулентной среде, объединяет общая особенность: существование неравновесных стационарных состояний с новым набором критических показателей. Кроме того, для таких систем при наличии выделенного направления критическое поведение оказывается сильно анизотропным: различным направлениям в пространстве соответствуют разные критические размерности.

Полномасштабная модель критической жидкости, подверженной сильно анизотропному турбулентному перемешиванию, должна описываться с помощью сохраняющегося (бинарная смесь, система жидкость–пар) или несохраняющегося (жидкие кристаллы) параметра порядка, взаимодействующего с полем скорости, которое в свою очередь подчиняется нелинейному динамическому уравнению (например, уравнению Навье–Стокса со случайной силой), и содержать анизотропию, вводимую путем задания начальных или граничных условий.

В настоящей работе мы применяем подход РГ к несколько упрощенным моделям, в которых введено взаимодействие с гауссовым полем скорости, имитирующим некоторые реальные свойства турбулентности. Этого оказывается достаточно, чтобы уловить основную особенность проблемы: существование нового, неравновесного и сильно анизотропного класса универсальности. Мы рассматриваем две динамические модели. Первая из них – модель, описывающая фазовый переход между так называемым абсорбционным (неактивным) и флуктуационным (активным) состояниями некоторой реакционно-диффузионной системы. Более конкретно, мы рассматриваем процесс типа Грибова, называемый так потому, что соответствующая полевая модель близка к хорошо известной реджеонной теории поля [2]. Вторая модель – это релаксационная динамика несохраняющегося скалярного параметра порядка для модели с кубическим взаимодействием типа φ^3 . Как обнаружено недавно, эта модель описывает некоторые универсальные свойства метастабильных состояний, возникающих при фазовых переходах первого рода [10].

План работы таков. В разделе 2 дано описание моделей в терминах теории поля с соответствующей диаграммной техникой. В разделе 3 проанализированы ультрафиолетовые (УФ) расходимости моделей; показано, что модели являются мультипликативно-ренормируемыми, и приведены ренормированные функционалы действия. Раздел 4 посвящен подсчету констант ренормировки Z для обеих моделей в однопетлевом приближении. В разделе 5 получены дифференциальные уравнения РГ и вычислены β -функции и аномальные размерности γ для всех полей и параметров (в том же приближении). Раздел 6 посвящен анализу неподвижных точек. В разделе 7 приведены результаты для наборов критических размерностей для всех режимов (всех неподвижных точек). Оказывается, что три из четырех неподвижных точек в обеих моделях отвечают уже известным типам критического поведения: свободной теории, пассивному скалярному полю и обычному фазовому переходу без перемешивания. Точки четвертого типа отвечают новым неравновесным классам универсальности, для которых одновременно существенны и нелинейности моделей, и турбулентное перемешивание. В однопетлевом приближении получается, что для заданных значений параметров ε (отклонение размерности от логарифмической) и ξ (показатель степени в корреляторе поля скорости), по которым идет разложение, ИК-устойчивой является лишь одна из точек, т. е. реализуется определенный критический режим. В этом отношении наши результаты близки к полученным ранее в работах [8], где рассматривалось влияние турбулентного перемешивания на критическое поведение равновесной системы типа φ^4 . В качестве частного следствия общих скейлинговых соотношений рассмотрено расплывание облака примесных частиц. Результаты работы кратко суммированы в разделе 8.

В полевой формулировке обе модели выглядят схоже, отличаясь только видом потенциала взаимодействия и добавочным слагаемым в квадратичной части, так что мы будем вести их анализ параллельно. Где это необходимо, результаты для модели с взаимодействием Грибова будут помечаться индексом 1, результатам для второй модели будет отвечать индекс 2.

2. ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

В настоящей работе мы рассматриваем две динамические модели. Обратимся теперь к их более детальному определению и переформулировке на языке теории поля. В непрерывном пределе процесс Грибова (он же направленный процесс протекания, или простой эпидемический процесс) описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида [2]

$$\partial_t \varphi(t, \mathbf{x}) = \lambda_0 (\partial^2 - \tau_0) \varphi(t, \mathbf{x}) - \frac{g_0 \lambda_0}{2} \varphi^2(t, \mathbf{x}) + \sqrt{\varphi(t, \mathbf{x})} \zeta(t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

где $\varphi(t, \mathbf{x})$ – концентрация распространяющегося агента, $\tau \propto (p - p_c)$ – отклонение вероятности процесса инфицирования (для определенности использована терминология процессов распространения эпидемий) от критического значения, g_0 – константа взаимодействия, а случайный шум $\zeta(t, \mathbf{x})$ с гауссовым распределением и заданным коррелятором

$$\langle \zeta(t, \mathbf{x}) \zeta(t', \mathbf{x}') \rangle = g_0 \lambda_0 \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2)$$

моделирует случайные флуктуации. Здесь и далее d – размерность пространства векторов $\mathbf{x}$, индекс 0 отмечает различные неренормированные параметры моделей.

В уравнении (1) множитель $\sqrt{\varphi}$ перед слагаемым, отвечающим шуму, обеспечивает полное исчезновение флуктуаций в неактивной (абсорбционной) фазе.

Обратимся ко второй модели. Релаксационную динамику несохраняющегося скалярного параметра порядка $\varphi(t, \mathbf{x})$ будем описывать с помощью стохастического дифференциального уравнения, подобного (1), но с так называемым аддитивным шумом (без дополнительного зависящего от поля φ множителя):

$$\partial_t \varphi(t, \mathbf{x}) = \lambda_0 (\partial^2 - \tau_0) \varphi(t, \mathbf{x}) - \frac{g_0 \lambda_0}{2} \varphi^2(t, \mathbf{x}) + \zeta(t, \mathbf{x}). \quad (3)$$

Под $\tau_0 \propto (T - T_0)$ теперь понимается отклонение температуры от ее критического значения (обозначения для двух моделей вводятся одинаково для удобства дальнейшего анализа), а коррелятор гауссова случайного шума $\zeta(t, \mathbf{x})$ выбирается в виде

$$\langle \zeta(t, \mathbf{x}) \zeta(t', \mathbf{x}') \rangle = 2\lambda_0 \delta(t - t') \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4)$$

Подобная модель может описывать некоторые универсальные аспекты фазового перехода первого рода в системе жидкость–пар [10], тогда как поведение системы вблизи критической точки определяется уравнением типа (3) с коррелятором (4) и нелинейностью φ^3 [1].

Различие в нормировке корреляторов шума в двух моделях объясняется соображениями удобства. Выбор коррелятора в форме (4) диктуется флуктуационно-диссипационной теоремой: одновременные корреляционные функции модели (3) описываются “статической” теорией φ^3 без дополнительных нормировочных множителей. Выбор коррелятора типа (2) обеспечивает равенство (с точностью до знака) констант связи при двух вершинах взаимодействия в теоретико-полевой формулировке модели (1) (см. выражение (10) ниже).

Взаимодействие с полем скорости вводится путем следующей замены:

$$\partial_t \rightarrow \nabla_t = \partial_t + v_i \partial_i, \quad (5)$$

где ∇_t – лагранжева производная. В реальной ситуации поле скорости описывается нелинейным динамическим уравнением, например стохастическим уравнением Навье–Стокса со случайной силой, а анизотропия возникает из начальных и граничных условий.

В настоящей работе турбулентный поток мы моделируем случайным полем скорости, имеющим гауссово распределение с исчезающе малым временем корреляции и степенным спектром, а анизотропия вводится следующим образом [11]. Пусть $\mathbf{n}$ – постоянный единичный вектор, задающий выделенное направление (направление потока). Тогда любой вектор может быть разложен на две компоненты – перпендикулярную и параллельную потоку, например $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{n} x_\parallel$ и $\mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{n} = 0$. Поле скорости при этом выбирается в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} v(t, \mathbf{x}_\perp), \quad (6)$$

где $v(t, \mathbf{x}_\perp)$ – скалярная функция, не зависящая от $x_\parallel$. Легко заметить, что тогда условие поперечности (следствие несжимаемости жидкости) выполняется автоматически:

$$\partial_i v_i = \partial_\parallel v(t, \mathbf{x}_\perp) = 0. \quad (7)$$

Примем, что $v(t, \mathbf{x}_\perp)$ имеет гауссово распределение с нулевым средним и парным коррелятором

$$\begin{aligned} \langle v(t, \mathbf{x}_\perp) v(t', \mathbf{x}'_\perp) \rangle &= \delta(t - t') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} D_v(k) = \\ &= \delta(t - t') \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)} \tilde{D}_v(k_\perp), \quad k_\perp = |\mathbf{k}_\perp|, \end{aligned} \quad (8)$$

со скалярными функциями

$$D_v(k) = 2\pi\delta(k_\parallel)\tilde{D}_v(k_\perp), \quad \tilde{D}_v(k_\perp) = D_0 k_\perp^{-d+1-\xi}. \quad (9)$$

Здесь $D_0 > 0$ – постоянная амплитуда, а ξ – произвольный показатель, который вместе с ε (отклонением размерности пространства от ее логарифмического значения) будет играть роль формального малого параметра РГ-разложения. ИК-регуляризация обеспечивается обрезанием нижней границы интегрирования по $k_\perp$ на значении $k_\perp = m$ (по размерности $\tau_0 \propto m^2$). Конкретная форма ИК-регуляризации не играет особой роли; обрезание малых импульсов наиболее удобно для практических вычислений.

Естественная область определения для показателя ξ – интервал $0 < \xi < 2$, для которого так называемая вихревая вязкость

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}_\perp) = \int \frac{d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^{d-1}} (1 - e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp}) \tilde{D}_v(k_\perp)$$

остаётся конечной при $m \rightarrow 0$. Этот интервал включает наиболее реалистичное значение $\xi = 4/3$, отвечающее предположениям теории Колмогорова–Обухова, тогда как $\xi \rightarrow 2$ соответствует бэтчелоровскому пределу гладкой скорости. Добавим, что предложенный в работе [11] ансамбль (8), (9) является анизотропным аналогом известной модели Обухова–Крейчнана (см., например, [12]). В последнее время подобные модели с “синтетическими” ансамблями поля скорости приобрели большую популярность, так как с ними связан значительный прогресс в понимании явления развитой турбулентности, в особенности аномального скейлинга (см. обзоры [12], [13] и цитированную в них литературу).

Для обеспечения мультипликативной ренормируемости моделей необходимо “расщепить” лапласиан в (1) на параллельную и перпендикулярную составляющие, $\partial^2 \rightarrow \partial_\perp^2 + f_0 \partial_\parallel^2$, путем введения нового параметра $f_0 > 0$ (в случае анизотропной среды эти два члена будут ренормироваться по-разному). Такое расщепление нарушает $SO(d)$ -симметрию наших уравнений; интерпретация этого факта может быть разной. Флуктуационные модели типа (1)–(4) являются феноменологическими и по построению должны включать все вклады, допустимые по размерности и симметрии, с независимыми коэффициентами. Поскольку исходная $SO(d)$ -симметрия уравнений все равно редуцируется к $SO(d-1)$ -симметрии в полных моделях с заменой (5), (6), естественно с самого начала рассматривать $SO(d-1)$ -симметричные аналоги наших уравнений, что и сводится к введению произвольного $f_0 \neq 1$. С другой стороны, можно было бы настаивать на изучении именно исходных моделей с $f_0 = 1$ и $SO(d)$ -ковариантным (нерасщепленным) лапласианом. Тогда введение на данном этапе параметра $f_0 \neq 1$ следует рассматривать лишь как технический трюк,

гарантирующий мультипликативную ренормируемость модели и позволяющий вывести уравнения РГ. При этом сами эти уравнения должны решаться с физическим начальным условием $f_0 = 1$. Как мы увидим, ИК-устойчивая неподвижная точка уравнений РГ единственна для любого конкретного выбора параметров ε и ξ , поэтому асимптотическое ИК-поведение для $f_0 = 1$ оказывается таким же, как и в общем случае с $f_0 \neq 1$.

Согласно общей теореме (см., например, [1]) наши стохастические задачи (1), (2) и (3), (4) после всех подстановок эквивалентны теоретико-полевым моделям с расширенным набором полей $\Phi = \{\varphi', \varphi, v\}$ и функционалами действия вида

$$S_1(\Phi) = \varphi'[-\partial_t - v\partial_{\parallel} + \lambda_0(\partial_{\perp}^2 + f_0\partial_{\parallel}^2) - \lambda_0\tau_0]\varphi + \frac{\lambda_0 g_0 f_0^{1/4}}{2}[(\varphi')^2\varphi - \varphi^2\varphi'] + S_0(v) \quad (10)$$

и

$$S_2(\Phi) = \lambda_0(\varphi')^2 + \varphi'[-\partial_t - v\partial_{\parallel} + \lambda_0(\partial_{\perp}^2 + f_0\partial_{\parallel}^2) - \lambda_0\tau_0]\varphi - \frac{\lambda_0 g_0 f_0^{1/4}}{2}\varphi'\varphi^2 + S_0(v) \quad (11)$$

соответственно, где мы выделили из зарядов g_0 множители $f_0^{1/4}$. В последних выражениях подразумеваются все необходимые интегрирования по $x = \{t, \mathbf{x}\}$ и суммирования по векторным индексам, например

$$\varphi'\partial_{\perp}^2\varphi = \int dt \int d\mathbf{x} \varphi'(x)\partial_{\perp}^2\varphi(x).$$

К действиям также добавлено дополнительное слагаемое $S_0(v)$, описывающее статистику поля скорости:

$$S_0(v) = -\frac{1}{2} \int dt \int d\mathbf{x}_{\perp} d\mathbf{x}'_{\perp} v(t, \mathbf{x}_{\perp}) \tilde{D}_v^{-1}(|\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}'_{\perp}|) v(t, \mathbf{x}'_{\perp}), \quad (12)$$

где $\tilde{D}_v^{-1}(r_{\perp}) \propto D_0^{-1}r_{\perp}^{2(1-d)-\xi}$.

Такая формулировка означает, что корреляционные функции исходных стохастических задач совпадают с функциями Грина теоретико-полевого модели с функционалами действия (10) и (11), которые в свою очередь представляются функциональными средними с весом $e^{S(\Phi)}$. Это позволяет нам применить к данным задачам теоретико-полевого метод РГ. Функции Грина с участием вспомогательного поля φ' отвечают функциям отклика в исходных стохастических задачах.

Модели (10) соответствует фейнмановская диаграммная техника с двумя типами затравочных пропагаторов (линий в диаграммах): пропагатор поля скорости $\langle vv \rangle_0$ был приведен ранее в (8), а функция отклика скалярного поля в частотно-импульсном представлении имеет вид

$$\langle \varphi' \varphi \rangle_0 = \langle \varphi \varphi' \rangle_0^* = \frac{1}{-i\omega + \lambda_0(k_{\perp}^2 + f_0 k_{\parallel}^2 + \tau_0)}. \quad (13)$$

В импульсно-временном представлении она записывается как

$$\langle \varphi'(t') \varphi(t) \rangle_0 = \theta(t - t') e^{-\lambda_0(k_{\perp}^2 + f_0 k_{\parallel}^2 + \tau_0)(t - t')},$$

где $\theta(\cdot)$ – функция Хевисайда (в данном выражении сразу видно, что функция отклика является запаздывающей).

Модель (10) также включает три типа вершин взаимодействия: $-\varphi'\varphi^2$, $(\varphi')^2\varphi$ и $-\varphi'(v\partial_{\parallel})\varphi$. Последняя в силу поперечности поля скорости равна $\varphi(v\partial_{\parallel})\varphi'$ (можно перенести производную на поле φ' путем интегрирования по частям).

Модели (11) отвечает диаграммная техника с тремя пропагаторами. Первые два совпадают с пропагаторами модели (10), кроме того, появляется дополнительный пропагатор

$$\langle\varphi\varphi\rangle_0 = \frac{2\lambda_0}{\omega^2 + \lambda_0^2(k_{\perp}^2 + f_0 k_{\parallel}^2 + \tau_0)^2}. \quad (14)$$

Вершин в данной модели только две: $-\varphi'\varphi^2$ и прежняя вершина $-\varphi'(v\partial_{\parallel})\varphi$.

3. КАНОНИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Как известно, анализ УФ-расходимостей связан с анализом канонических размерностей (см., например, монографию [1]). Обычно в динамических задачах каноническая размерность любой величины F полностью описывается двумя независимыми компонентами: частотной d_F^{ω} и импульсной d_F^k размерностями. Однако в нашем случае из-за анизотропии необходимо ввести три независимые размерности $d_F^{\perp}$, $d_F^{\parallel}$ и d_F^{ω} . Таким образом, для любой величины F можно написать

$$[F] \sim [T]^{-d_F^{\omega}} [L_{\perp}]^{-d_F^{\perp}} [L_{\parallel}]^{-d_F^{\parallel}},$$

где $L_{\perp}$ и $L_{\parallel}$ – независимые характерные масштабы в соответствующих подпространствах. Канонические размерности всех полей и констант, входящих в действие, можно найти, используя очевидные нормировочные соотношения $d_{k_{\perp}}^{\perp} = -d_{\mathbf{x}_{\perp}}^{\perp} = 1$, $d_{k_{\perp}}^{\parallel} = -d_{\mathbf{x}_{\perp}}^{\parallel} = 0$, $d_{k_{\perp}}^{\omega} = d_{k_{\parallel}}^{\omega} = 0$, $d_{\omega}^{\omega} = -d_t^{\omega} = 1$ и т. д., а также из условия безразмерности (для каждой из трех независимых размерностей в каноническом смысле) всех членов действия. Затем из этих трех независимых компонент можно составить суммарную размерность $d_F = d_F^k + 2d_F^{\omega} = d_F^{\perp} + d_F^{\parallel} + 2d_F^{\omega}$ (в свободной теории $\partial_t \propto \partial^2$), которая играет в ренормировке нашей модели ту же роль, что и обычная размерность d_F^k в статике. Полный набор независимых канонических размерностей нужен, в частности, для нахождения полностью безразмерных параметров, от которых будут зависеть константы ренормировки. Канонические размерности (в том числе и для ренормированных параметров) для моделей (10) и (11) приведены в табл. 1 и табл. 2 соответственно.

В таблицах новая константа связи w_0 введена соотношением $D_0 = w_0 \lambda_0 f_0$. Из табл. 1 видно, что модель (10) логарифмична (обе константы взаимодействия безразмерны) при $d = 4$, $\xi = 0$. Поэтому УФ-расходимости в корреляционных функциях проявляются как сингулярности при $\varepsilon \equiv 4 - d \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$, например как полюсы по этим параметрам и их линейным комбинациям. Анализ табл. 2 показывает, что вторая модель логарифмична при $d = 6$, $\xi = 0$. Соответствующий параметр отклонения от логарифмичности мы также будем обозначать через $\varepsilon = 6 - d$.

Суммарная каноническая размерность произвольной 1-неприводимой функции Грина дается соотношением

$$d_{\Gamma} = d + 2 - \sum_{\Phi} N_{\Phi} d_{\Phi}, \quad \sum_{\Phi} N_{\Phi} d_{\Phi} = N_{\varphi'} d_{\varphi'} + N_{\varphi} d_{\varphi} + N_v d_v. \quad (15)$$

ТАБЛИЦА 1. Канонические размерности полей и параметров модели (10).

F	φ, φ'	v	λ, λ_0	f, f_0	τ, τ_0	g_0	D_0	w_0
d_F^ω	0	1	1	0	0	0	1	0
$d_F^\perp$	$(d-1)/2$	0	-2	2	2	$(4-d)/2$	ξ	ξ
$d_F^\parallel$	1/2	-1	0	-2	0	0	-2	0
$d_F^k = d_F^\perp + d_F^\parallel$	$d/2$	-1	-2	0	2	$(4-d)/2$	$-2 + \xi$	ξ
$d_F = 2d_F^\omega + d_F^k$	$d/2$	1	0	0	2	$(4-d)/2$	ξ	ξ

ТАБЛИЦА 2. Канонические размерности полей и параметров модели (11).

F	φ	φ'	v	λ, λ_0	f, f_0	τ, τ_0	g_0	w_0
d_F^ω	0	0	1	1	0	0	0	0
$d_F^\perp$	$(d-3)/2$	$(d+1)/2$	0	-2	2	2	$(6-d)/2$	ξ
$d_F^\parallel$	1/2	1/2	-1	0	-2	0	0	0
$d_F^k = d_F^\perp + d_F^\parallel$	$d/2 - 1$	$d/2 + 1$	-1	-2	0	2	$(6-d)/2$	ξ
$d_F = 2d_F^\omega + d_F^k$	$d/2 - 1$	$d/2 + 1$	1	0	0	2	$(6-d)/2$	ξ

Здесь $N_\Phi = \{N_\varphi, N_{\varphi'}, N_v\}$ – числа соответствующих полей, входящих в функцию Γ . Суммарная размерность d_Γ в логарифмической теории (т. е. при $\varepsilon = \xi = 0$) является формальным индексом УФ-расходимости, $\delta_\Gamma = d_\Gamma|_{\varepsilon=\xi=0}$. Поверхностные расходимости, для устранения которых требуется введение контрчленов, могут возникать только в тех диаграммах, для которых индекс расходимости – неотрицательное целое число.

Соображения размерности могут быть дополнены некоторыми наблюдениями, позволяющими сократить количество реально необходимых контрчленов. Например, можно заметить, что для модели с взаимодействием Грибова (10) все 1-неприводимые диаграммы отличны от нуля, только если они содержат оба поля φ и φ' , т. е. одновременно $N_\varphi \geq 1$ и $N_{\varphi'} \geq 1$. В противном случае диаграммы обязательно содержат замкнутый цикл запаздывающих пропагаторов $\langle \varphi \varphi' \rangle_0$ и, следовательно, исчезают, не требуя контрчленов. Подобное замечание можно сделать и для модели (11): здесь также все 1-неприводимые функции без поля φ' исчезают и не требуют контрчленов. В частности, для обеих моделей любые функции, содержащие только поле скорости, подпадают под эти правила, и поэтому поле остается гауссовым. Функцию $\langle \varphi \varphi' v v \rangle$ тоже можно не рассматривать, так как соответствующий контрчлен $\varphi \varphi' v^2$ запрещен галилеевой инвариантностью. Аналогичная ситуация имеет место и для функций $\langle \varphi' v \rangle$ и $\langle \varphi' v v \rangle$ в модели (11). Для первой функции контрчлен обязательно содержит пространственную производную, сворачивающуюся по индексу с полем скорости; это дает ноль в силу условия поперечности (7). Для второй из этих функций единственный контрчлен, не запрещенный галиле-

ею инвариантностью и поперечностью, имеет вид $\varphi'(\partial_i v_k)(\partial_k v_i)$. В общем случае он нетривиален, но для нашего поля скорости вида (6) он также обращается в ноль в силу (7): $(\partial_i n_k v)(\partial_k n_i v) = (n_i \partial_i v)(n_k \partial_k v) = 0$. Кроме того, контрчлены типа $\varphi \partial_t \varphi'$ и $\varphi(v \partial_{\parallel}) \varphi'$ могут появляться в ренормированном действии только в виде галилеево-инвариантной комбинации типа $\varphi \nabla_t \varphi'$.

Выясним, в каких 1-неприводимых функциях могут содержаться УФ-расходимости, начав с модели (10). Формула (15) примет вид $\delta_{\Gamma} = 6 - 2N_{\varphi} - 2N_{\varphi'} - N_v$. Выпишем все возможные функции (далее приведены сами функции, индексы расходимости и возможные типы контрчленов):

$$\begin{aligned} \langle \varphi' \varphi \rangle, & \quad \delta = 2, & \quad \varphi' \partial_t \varphi, \varphi' \partial^2 \varphi, \varphi' \varphi, \\ \langle \varphi' \varphi \varphi \rangle, & \quad \delta = 0, & \quad \varphi' \varphi^2, \\ \langle \varphi' \varphi' \varphi \rangle, & \quad \delta = 0, & \quad (\varphi')^2 \varphi, \\ \langle \varphi' \varphi v \rangle, & \quad \delta = 1, \end{aligned}$$

для функции $\langle \varphi' \varphi v \rangle$ контрчлен с необходимостью приводится к форме $\varphi'(v_i \partial_i) \varphi = \varphi'(v \partial_{\parallel}) \varphi$. Все такие члены представлены в действии (10), поэтому оказывается, что наша первая модель является мультипликативно-ренормируемой.

Обратимся ко второй модели. Формула (15) для модели (11) принимает вид $\delta_{\Gamma} = 8 - 2N_{\varphi} - 4N'_{\varphi} - N_v$. Как уже указывалось выше, некоторые допустимые по формальному индексу расходимости в действительности запрещены галилеевой инвариантностью. В итоге остаются следующие 1-неприводимые функции (вновь приведены сами функции, индексы расходимости и возможные типы контрчленов):

$$\begin{aligned} \langle \varphi' \varphi \rangle, & \quad \delta = 2, & \quad \varphi' \varphi, \varphi' \partial_{\perp}^2 \varphi, \varphi' \partial_{\parallel}^2 \varphi, \\ \langle \varphi' \varphi' \rangle, & \quad \delta = 0, & \quad (\varphi')^2, \\ \langle \varphi' \varphi \varphi \rangle, & \quad \delta = 0, & \quad \varphi' \varphi^2, \\ \langle \varphi' \varphi v \rangle, & \quad \delta = 1, & \quad \varphi'(v \partial_{\parallel}) \varphi, \\ \langle \varphi' \rangle, & \quad \delta = 4, & \quad \varphi'. \end{aligned}$$

В действии (11) представлены все такие члены, кроме последнего, поэтому для обеспечения мультипликативности ренормировки к нему следовало бы добавить линейное по полю φ' слагаемое, т.е. ввести его взаимодействие с некоторым внешним полем h (важно, что введение такого вклада не порождает новых расходимостей, т.е. не отражается на уже вычисленных при $h = 0$ контрчленах). Это приведет к некоторым неоднородным вкладам в уравнениях РГ, не влияющим на вид β -функций и, в конечном счете, на вид критических размерностей. Поэтому в дальнейшем мы будем просто игнорировать этот вклад, считая (с приведенной оговоркой) модель (11) мультипликативно-ренормируемой, как и модель (10).

В итоге ренормированные действия наших двух моделей можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_{1R}(\Phi) = & \varphi' [-Z_1 \partial_t - Z_6 v \partial_{\parallel} + \lambda(Z_2 \partial_{\perp}^2 + Z_3 f \partial_{\parallel}^2 - Z_4 \tau)] \varphi + \\ & + Z_5 \frac{\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2}}{2} [(\varphi')^2 \varphi - \varphi^2 \varphi'] + S_R(v), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} S_{2R}(\Phi) = & Z_7 \lambda (\varphi')^2 + \varphi' [-Z_1 \partial_t - Z_6 v \partial_{\parallel} + \lambda(Z_2 \partial_{\perp}^2 + Z_3 f \partial_{\parallel}^2 - Z_4 \tau)] \varphi - \\ & - Z_5 \frac{\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2}}{2} \varphi' \varphi^2 + S_R(v). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $S_R(v)$ – действие $S_0(v)$, выраженное в ренормированных переменных; эта часть действия не ренормируется, потому что, как отмечалось выше, в наших моделях нет контрчленов, построенных только из поля скорости. Величины λ , τ , f , w и g – ренормированные аналоги исходных неренормированных параметров (отмеченных индексом 0). Напомним, галилеева инвариантность требует, чтобы выражение $\partial_t + v\partial_{\parallel}$ входило в контрчлен как одно целое. Отсюда вытекает тождество $Z_1 = Z_6$, которое будет подтверждено прямым вычислением в однопетлевом приближении; пока же для общности мы будем различать эти константы.

Выражения (16) и (17) эквивалентны мультипликативной ренормировке полей $\varphi \rightarrow \varphi Z_\varphi$, $\varphi' \rightarrow \varphi' Z'_{\varphi}$, $v \rightarrow v Z_v$ и параметров

$$\lambda_0 = \lambda Z_\lambda, \quad \tau_0 = \tau Z_\tau, \quad f_0 = f Z_u, \quad g_0 = g \mu^{\varepsilon/2} Z_g, \quad w_0 = w \mu^\xi Z_w, \quad (18)$$

где μ – добавочный произвольный параметр ренормированной теории (это свободный параметр, размерность его совпадает с размерностью импульса; будем считать, что $d_\mu^\perp = 1$, $d_\mu^\parallel = 0$). Константы Z в модели (16) и в формулах (18) соотносятся следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{\varphi'} Z_\varphi, & Z_2 &= Z_{\varphi'} Z_\lambda Z_\varphi, & Z_3 &= Z_{\varphi'} Z_\lambda Z_f Z_\varphi, \\ Z_4 &= Z_{\varphi'} Z_\lambda Z_\tau Z_\varphi, & Z_5 &= Z_\lambda Z_g Z_f^{1/4} Z_{\varphi'} Z_\varphi^2, & Z_6 &= Z_{\varphi'} Z_v Z_\varphi, \\ 1 &= Z_v^2 Z_w^{-1} Z_f^{-1} Z_\lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Последнее равенство – следствие отсутствия ренормировки вклада $S_0(v) = S_R(v)$.

Для модели (17) соотношения (19) остаются верными, но к ним добавляется выражение для константы ренормировки Z_7 :

$$Z_7 = Z_\lambda (Z_{\varphi'})^2. \quad (20)$$

Кроме того, для первой модели в силу симметрии потенциала присутствует условие связи констант ренормировки полей φ' и φ :

$$Z_{\varphi'} = Z_\varphi. \quad (21)$$

Наконец, из галилеевой инвариантности вытекает равенство $Z_1 = Z_6$ (оно будет проверено прямым вычислением в первом порядке), из которого в свою очередь следует отсутствие ренормировки поля скорости: $Z_v = 1$.

Введение констант ренормировки устраняет все сингулярности по ε , ξ так, что корреляционные функции ренормированной модели имеют конечный предел при $\varepsilon, \xi = 0$. Для доопределения конечной части при вычислении констант ренормировки мы будем пользоваться схемой минимальных вычитаний (МВ), в которой они имеют вид $Z_i = 1 +$ только части, имеющие полюсы по ε, ξ . Коэффициенты при этих полюсах зависят только от безразмерных ренормированных констант взаимодействия g и w .

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНСТАНТ РЕНОРМИРОВКИ

Обратимся к вычислению констант ренормировки Z в однопетлевом приближении. Поясним используемые ниже диаграммные обозначения. Волнистой линией обозначен пропагатор $\langle vv \rangle_0$, прямой линией со штрихом – пропагатор $\langle \varphi' \varphi \rangle_0$ (причем штрих относится к полю φ'), а прямой линии без штрихов отвечает пропагатор $\langle \varphi \varphi \rangle_0$, присутствующий лишь во второй модели. Все диаграммные элементы

должны быть выражены через ренормированные переменные (16)–(20). Однако в однопетлевом приближении константы Z во всех затравочных слагаемых нужно брать в первом порядке по g^2 и w (реально разложение идет не по g , а по g^2), а в диаграммах их просто нужно заменить на единицы. Таким образом, переход к ренормированным переменным в диаграммах сводится к заменам $\lambda_0 \rightarrow \lambda$, $f_0 \rightarrow f$, $\tau_0 \rightarrow \tau$, $g_0 \rightarrow g\mu^{\varepsilon/2}$ и $w_0 \rightarrow w\mu^{\varepsilon}$.

Обратимся к модели (16). Приведем все 1-неприводимые функции, необходимые для расчета полного набора констант ренормировки, с однопетлевой точностью. Уравнение Дайсона для 1-неприводимой функции Грина $\langle \varphi' \varphi \rangle_{1-ir}$ в таком приближении примет вид

$$\langle \varphi' \varphi \rangle_{1-ir} = -(-i\omega Z_1 + \lambda p_{\perp}^2 Z_2 + \lambda f p_{\parallel}^2 Z_3 + \lambda \tau Z_4) +$$

$$(22)$$

Для 1-неприводимой корреляционной функции $\langle \varphi' \varphi' \varphi \rangle_{1-ir}$ имеем

$$\langle \varphi' \varphi' \varphi \rangle_{1-ir} = g\lambda f^{1/4} Z_5 + 2$$

$$(23)$$

Наконец, 1-неприводимая функция $\langle \varphi' v \varphi \rangle_{1-ir}$, нужная лишь для того чтобы выполнить обещанную выше проверку следствий из галилеевой инвариантности, такова:

$$\langle \varphi' v \varphi \rangle_{1-ir} = -ip_{\parallel} Z_6 +$$

$$(24)$$

Мы не будем подробно описывать процесс вычисления этих диаграмм, лишь прокомментируем основные моменты. Сразу можно заметить, что вторая и третья диаграммы в (23) и вторая диаграмма в (24) оказываются УФ-конечными, следовательно, они не вносят вклад в константы ренормировки Z . Действительно, благодаря свойству (7) поперечности поля скорости производная $\partial_{\parallel}$ в тройной вершине $-\varphi'(v\partial_{\parallel})\varphi$ может быть переброшена на внешнюю линию за счет интегрирования по частям. Таким образом, любая диаграмма, содержащая n внешних тройных вершин $-\varphi'(v\partial_{\parallel})\varphi$, будет содержать множитель $p_{\parallel}^n$ с внешним импульсом $p_{\parallel}$. Это понижает размерность интеграла, и он может стать УФ-конечным, что и происходит с указанными диаграммами (для них $n = 2$).

Более того, так как пропагатор (13) запаздывающий, а коррелятор (8) содержит δ -функцию по времени, вторые диаграммы в (23) и (24) содержат замкнутые циклы функций Хевисайда по времени, а значит, тождественно обращаются в ноль. Такой аргумент, однако, неприменим ко второй диаграмме в (22), требующей более тщательного рассмотрения. Аналитическое выражение для этой диаграммы имеет

вид

$$I_1 = -\lambda f w \mu^\varepsilon \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^d} \frac{\delta(k_\parallel) p_\parallel (p_\parallel - k_\parallel)}{-i\eta + \lambda[(p_\perp - k_\perp)^2 + f(p_\parallel - k_\parallel)^2 + \tau]} \cdot \frac{1}{k_\perp^{d-1+\varepsilon}}.$$

Заметим что вклад этой диаграммы в Z_1 , Z_2 и Z_4 равен нулю. От внешней частоты она явно не зависит (внешнюю частоту можно “пропустить” по пропагатору скорости, а там нет зависимости от частоты), а независимость от τ и $p_\perp^2$ станет очевидной после интегрирования по внутренней частоте η . Покажем это, воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\eta}{-i\eta + A} = \frac{1}{2},$$

которое фактически является доопределением $\theta(0) = 1/2$; его можно оправдать симметричностью коррелятора $\langle vv \rangle_0$. После применения этого равенства приходим к выражению

$$I_1 = -\frac{\lambda f w \mu^\varepsilon p_\parallel^2}{2(2\pi)^{d-1}} \int_{k_\perp \geq m} \frac{d\mathbf{k}_\perp}{k_\perp^{d-1+\varepsilon}},$$

которое легко интегрируется в сферических координатах:

$$I_1 = -\frac{p_\parallel^2}{2\xi} \frac{f\lambda w}{(2\pi)^{d-1}} S_{d-1} \left(\frac{\mu}{m}\right)^\xi \simeq -p_\parallel^2 \frac{\lambda f w}{\xi},$$

где $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – площадь единичной сферы в d -мерном пространстве. В формуле для I_1 мы перешли к более удобной константе связи: $w \rightarrow w S_{d-1}/2(2\pi)^{d-1} \rightarrow w/4\pi^2$. При этом в соответствии с правилами схемы МВ мы заменили d его логарифмическим значением $d = 4$, отбросив тем самым множитель порядка $1 + O(\varepsilon)$, который не содержит полюс по ε и в нашем приближении не отражается на виде констант ренормировки. Теперь нетрудно найти, что вклад этой диаграммы в Z_3 равен $-w/\xi$.

Рассмотрим теперь первую диаграмму в (22). Аналитическое выражение для нее имеет вид

$$I_2 = -(\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2})^2 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{-i(\omega + \eta) + \lambda[(p_\perp/2 + k_\perp)^2 + f(p_\parallel/2 + k_\parallel)^2 + \tau]} \times \\ \times \frac{1}{i\eta + \lambda[(p_\perp/2 - k_\perp)^2 + f(p_\parallel/2 - k_\parallel)^2 + \tau]}.$$

Выполнив интегрирование по внутренней частоте η путем взятия вычетов и сделав стандартную для этих моделей замену $q_\perp = k_\perp$, $q_\parallel = f^{1/2} k_\parallel$, после интегрирования по q получаем ($d = 4 - \varepsilon$)

$$I_2 = -(\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2})^2 \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{2\lambda f^{1/2}} \left(-\frac{i\omega}{2\lambda} + \tau + \frac{p_\perp^2}{4} + \frac{f p_\parallel^2}{4} \right)^{1-\varepsilon/2} \pi^{d/2} \Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \\ = -\frac{u\lambda}{2} \left(-\frac{i\omega}{2\lambda} + \tau + \frac{p_\perp^2}{4} + \frac{f p_\parallel^2}{4} \right)^{1-\varepsilon/2} (2\mu)^\varepsilon \pi^{\varepsilon/2} \Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где также введен более удобный заряд $u = g^2 S_d/2(2\pi)^d \rightarrow g^2/16\pi^2$ (как и в случае w , значение d заменено его логарифмическим значением в согласии со схемой МВ).

Отсюда находим вклады этой диаграммы в Z_1 , Z_2 , Z_3 и Z_4 , равные $u/4\varepsilon$, $u/8\varepsilon$, $u/8\varepsilon$ и $u/2\varepsilon$ соответственно.

Рассмотрим единственную оставшуюся диаграмму в (23). Ее индекс расходимости равен нулю, поэтому можно сделать все внешние импульсы и частоты равными нулю, получив аналитическое выражение

$$I_3 = -(\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2})^3 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{[-i\eta + \lambda(k_\perp^2 + f k_\parallel^2 + \tau)]^2} \frac{1}{i\eta + \lambda(k_\perp^2 + f k_\parallel^2 + \tau)}.$$

После интегрирования по η оно принимает вид

$$I_3 = -\frac{\lambda g^3 f^{1/4} \mu^{3\varepsilon/2}}{4(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{q}}{q^2 + \tau}.$$

Наконец, выполнив интегрирование по q , приходим к соотношению

$$I_3 \simeq -\frac{\lambda u f^{1/4}}{2\varepsilon},$$

таким образом, вклад этой диаграммы в Z_5 составляет u/ε с учетом коэффициента 2 в (23).

Обратимся к диаграмме в (24). Так как нас интересует только ее зависимость от продольных импульсов, все прочие внешние параметры можно положить равными нулю. У этой диаграммы три внешних “хвоста”, т. е. число независимых внешних импульсов в общем случае равно двум. Однако, чтобы найти константу ренормировки, достаточно рассматривать только один импульс, текущий между “хвостами” φ и φ' . Действительно, пусть импульс $p_\parallel$ течет от φ' к φ , а импульс $q_\parallel$ — от φ' к v . Тогда выражение для расходящейся части диаграммы будет иметь вид $\alpha p_\parallel + \beta q_\parallel$, где α и β — искомые величины. Однако контрчлен при β в выражении $\alpha \varphi'(v \partial_\parallel) \varphi + \beta \varphi'(\partial_\parallel v) \varphi$ оказывается тождественно равным нулю, поскольку $\partial_\parallel v = 0$ согласно (7). Выпишем аналитическое выражение для этой диаграммы:

$$I_4 = (\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2})^2 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{-ik_\parallel}{[-i\eta + \lambda(k_\perp^2 + f k_\parallel^2)]^2} \frac{1}{i\eta + \lambda(k_\perp^2 + f k_\parallel^2)}.$$

После интегрирования по η и $\mathbf{k}_\perp$ и упоминавшейся выше замены приходим к выражению

$$I_4 = -\frac{i}{(2\pi)^d} \frac{f^{-1/2} g^2 \mu^\varepsilon}{4} \int dq_\parallel q_\parallel \left(\left(q_\parallel - \frac{f^{1/2} p_\parallel}{2} \right)^2 + \frac{f p_\parallel}{2} \right)^{(d-5)/2} \pi^{(d-1)/2} \Gamma\left(\frac{5-d}{2}\right).$$

Вычитая и добавляя к $q_\parallel$ в подынтегральном выражении $f^{1/2} p_\parallel/2$, разбиваем интеграл на два. Первый равен нулю по соображениям четности, а второй легко вычислить:

$$I_4 = \frac{-ip_\parallel}{(2\pi)^d} \frac{g^2 \mu^\varepsilon}{8} \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d-4}{2}\right) = \frac{-ip_\parallel}{8} u \pi^{\varepsilon/2} (2\mu)^\varepsilon \Gamma\left(\frac{d-4}{2}\right),$$

где мы также перешли к введенной ранее константе связи $u = (g/4\pi)^2$. Отсюда получаем $Z_6 = 1 + u/4\varepsilon$.

Приведем однопетлевые результаты для всех Z :

$$\begin{aligned} Z_1 &= 1 + \frac{u}{4\varepsilon}, & Z_2 &= 1 + \frac{u}{8\varepsilon}, & Z_3 &= 1 + \frac{u}{8\varepsilon} - \frac{w}{\xi}, \\ Z_4 &= 1 + \frac{u}{2\varepsilon}, & Z_5 &= 1 + \frac{u}{\varepsilon}, & Z_6 &= 1 + \frac{u}{4\varepsilon}. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, для первой модели в однопетлевом приближении мы прямым расчетом подтвердили точное равенство $Z_1 = Z_6$, другими словами, $Z_v = 1$ (см. формулы (19)).

Обратимся теперь к модели (17) и приведем все необходимые для расчета ее констант ренормировки 1-неприводимые функции в однопетлевом приближении. Уравнение Дайсона для $\langle \varphi' \varphi \rangle_{1-ir}$ здесь имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \varphi' \varphi \rangle_{1-ir} = & -(-i\omega Z_1 + \lambda p_{\perp}^2 Z_2 + \lambda f p_{\parallel}^2 Z_3 + \lambda \tau Z_4) + \\ & + \text{diagram 1} + \text{diagram 2}. \end{aligned} \quad (26)$$

(Diagram 1: A circle with two external lines, one solid and one dashed, both with a cross at the vertex.)
 (Diagram 2: A wavy line with two external lines, one solid and one dashed, both with a cross at the vertex.)

Для 1-неприводимой корреляционной функции $\langle \varphi' \varphi \varphi \rangle_{1-ir}$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \varphi' \varphi \varphi \rangle_{1-ir} = & -g\lambda f^{1/4} Z_5 + \\ & + \text{diagram 1} + 2 \text{diagram 2} + \text{diagram 3}. \end{aligned} \quad (27)$$

(Diagram 1: A triangle with three external lines, one solid and two dashed, all with a cross at the vertex.
 (Diagram 2: A triangle with three external lines, one solid and two dashed, all with a cross at the vertex.
 (Diagram 3: A triangle with three external lines, one solid and two dashed, all with a cross at the vertex.

Функция, необходимая для проверки следствий галилеевой инвариантности, такова:

$$\begin{aligned} \langle \varphi' v \varphi \rangle_{1-ir} = & -ip_{\parallel} Z_6 + \\ & + \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4}. \end{aligned} \quad (28)$$

(Diagram 1: A triangle with three external lines, one solid and two dashed, all with a cross at the vertex.
 (Diagram 2: A triangle with three external lines, one solid and two dashed, all with a cross at the vertex.
 (Diagram 3: A triangle with three external lines, one solid and two dashed, all with a cross at the vertex.
 (Diagram 4: A triangle with three external lines, one solid and two dashed, all with a cross at the vertex.

Наконец, для 1-неприводимой функции Грина $\langle \varphi \varphi \rangle_{1-ir}$ имеем

$$\langle \varphi' \varphi' \rangle_{1-ir} = 2\lambda Z_7 + \frac{1}{2} \text{diagram 1} + \text{diagram 2}. \quad (29)$$

(Diagram 1: A circle with two external lines, both solid, both with a cross at the vertex.
 (Diagram 2: A wavy line with two external lines, both solid, both with a cross at the vertex.)

Здесь благодаря специфическим особенностям нашей системы некоторые диаграммы также исчезают или оказываются УФ-конечными и, следовательно, не дают вклада в ренормировочные константы. Например, за счет наличия двух внешних тройных вершин $-\varphi'(v\partial_{\parallel})\varphi$ последние диаграммы в (27)–(29) УФ-конечны.

Сделаем некоторые замечания по поводу вычисления оставшихся диаграмм. Рассмотрим ренормировку 1-неприводимой функции $\langle \varphi' \varphi \rangle_{1-ir}$. Вторые диаграммы

в (22) и (26) совпадают, так что мы просто используем уже полученный ранее результат. Новые заряды введем следующим образом:

$$u = g^2 \frac{S_d}{2(2\pi)^d} \rightarrow \frac{g^2}{128\pi^3}, \quad w \rightarrow w \frac{S_{d-1}}{2(2\pi)^{d-1}} \rightarrow \frac{w}{24\pi^3},$$

поскольку теперь d нужно заменить логарифмическим значением $d = 6$. Аналитическое выражение для первой диаграммы следующее:

$$I_5 = (-\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2})^2 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{1}{-i(\omega + \eta) + \lambda[(p_\perp/2 + k_\perp)^2 + f(p_\parallel/2 + k_\parallel)^2 + \tau]} \times \\ \times \frac{2\lambda}{\eta^2 + \lambda^2[(p_\perp/2 - k_\perp)^2 + f(p_\parallel/2 - k_\parallel)^2 + \tau]}.$$

После интегрирования по внутренней частоте η и перехода к переменной q получаем

$$I_5 = \frac{\lambda g^2 \mu^\varepsilon}{2(2\pi)^d} \int d\mathbf{q}_\perp dq_\parallel \frac{1}{(p_\perp/2 - q_\perp)^2 + (f^{1/2} p_\parallel/2 - q_\parallel)^2 + \tau} \times \\ \times \frac{1}{\omega/2i\lambda + [q_\perp^2 + q_\parallel^2 + \tau + (p_\perp^2 + f p_\parallel^2)/4]}.$$

Вводя обозначения $\tilde{p}_\perp = p_\perp$, $\tilde{p}_\parallel = f^{1/2} p_\parallel$ и применяя формулу Фейнмана

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dt \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{[tA + (1-t)B]^{\alpha+\beta}},$$

получаем

$$I_5 = \frac{\lambda g^2 \mu^\varepsilon}{2(2\pi)^d} \int d\mathbf{q} \int_0^1 \frac{dt}{[k^2 - t(\tilde{p}q) + \tau + \tilde{p}^2/4 + (\omega/2i\lambda)(1-t)]^2}.$$

Интеграл с квадратичной формой по импульсу в знаменателе вычисляется стандартным образом, а после выделения вклада, содержащего только полюс, легко выполняется и оставшееся интегрирование по t . Окончательно получаем

$$I_5 \simeq -\frac{\lambda g^2}{(2\pi)^6} \frac{\pi^3}{\varepsilon} \left(\tau + \frac{\omega}{4i\lambda} + \frac{p_\perp^2 + f p_\parallel^2}{6} \right) \simeq -\frac{\lambda u}{\varepsilon} \left(2\tau - \frac{i\omega}{2\lambda} + \frac{p_\perp^2 + f p_\parallel^2}{3} \right).$$

Теперь нетрудно найти вклады этой диаграммы в Z_1 , Z_2 , Z_3 и Z_4 : они равны $-u/2\varepsilon$, $-u/3\varepsilon$, $-u/3\varepsilon$ и $-2u/\varepsilon$ соответственно.

Первая и вторая диаграммы в (27) вычисляются практически одинаково, так что остановимся только на первой из них. Индекс расходимости для этих диаграмм равен нулю, поэтому мы можем положить равными нулю внешние частоту и импульс (τ оставляем для ИК-регуляризации). Тогда получаем следующее аналитическое выражение для первой диаграммы:

$$I_6 = (-\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2})^3 \int \frac{d\mathbf{k}_\perp dk_\parallel d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{2\lambda}{\eta^2 + \lambda^2[(p_\perp/2 - k_\perp)^2 + f k_\parallel^2 + \tau]} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{-i\eta + \lambda(k_{\perp}^2 + f k_{\parallel}^2 + \tau)} \frac{1}{i\eta + \lambda(k_{\perp}^2 + f k_{\parallel}^2 + \tau)} = \\ & = -\frac{2\lambda^4 g^3 f^{1/4} \mu^{3\varepsilon/2}}{(2\pi)^{d+1}} \int \frac{d\mathbf{q} d\eta}{[\eta^2 + \lambda^2(q^2 + \tau)]^2}. \end{aligned}$$

Проинтегрировав по η , получаем выражение, которое нетрудно проинтегрировать и по импульсу:

$$I_6 = -\frac{g^3 f^{1/4} \lambda \mu^{3\varepsilon/2} \pi}{(2\pi)^{d+1}} \int \frac{d\mathbf{q}}{(q^2 + \tau)^3} = -\frac{g^3 f^{1/4} \lambda \mu^{3\varepsilon/2} \pi}{2(2\pi)^{d+1}} \tau^{-\varepsilon/2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \pi^{d/2} \simeq -\frac{g f^{1/4} \lambda u}{\varepsilon}.$$

Таким образом, вклад диаграммы в Z_5 равен $-u/\varepsilon$.

Рассмотрим теперь диаграммы (28), чтобы проверить выполнение условия галилеевой инвариантности и для второй модели. Вычисление первой и третьей диаграмм не содержит никаких трудностей, поэтому обратимся сразу ко второй диаграмме. Как и в первом случае, достаточно пропустить внешний импульс $p_{\parallel}$ от “хвоста” φ' к “хвосту” φ . Тогда аналитическое выражение для диаграммы принимает вид

$$\begin{aligned} I_7 &= (-\lambda g f^{1/4} \mu^{\varepsilon/2})^2 \int \frac{d\mathbf{k}_{\perp} dk_{\parallel} d\eta}{(2\pi)^{d+1}} \frac{-2i\lambda k_{\parallel}}{\eta^2 + \lambda^2(k_{\perp}^2 + f k_{\parallel}^2 + \tau)} \times \\ & \times \frac{1}{-i\eta + \lambda(k_{\perp}^2 + f k_{\parallel}^2 + \tau)} \frac{1}{i\eta + \lambda[k_{\perp}^2 + f(k_{\parallel} - p_{\parallel})^2 + \tau]}. \end{aligned}$$

Взяв интеграл по η с помощью вычетов и сложив возникающие от двух полюсов вклады, после некоторых преобразований получаем

$$I_7 = -\frac{ig^2\mu^{\varepsilon}}{4(2\pi)^d f^{1/2}} \int d\mathbf{q} q_{\parallel} \frac{2(q^2 + \tau) + \tilde{p}_{\parallel}(\tilde{p}_{\parallel}/2 - q_{\parallel})}{(q^2 + \tau)^2 [q^2 - q_{\parallel}\tilde{p}_{\parallel} + \tilde{p}_{\parallel}^2/2 + \tau]^2}$$

(все обозначения уже пояснялись выше). Нас интересует линейный по $\tilde{p}_{\parallel}$ член. При $\tilde{p}_{\parallel} = 0$ подынтегральное выражение конечно, поэтому разложим его в ряд по этому импульсу. В итоге остается вычислить следующий интеграл:

$$I_7 = -\frac{ig^2\mu^{\varepsilon}\tilde{p}_{\parallel}}{4(2\pi)^d f^{1/2}} \int d\mathbf{q} \frac{3q_{\parallel}^2}{(q^2 + \tau)^4}.$$

Заметим, что в этом интеграле единственный источник анизотропии – множитель $q_{\parallel}^2$, поэтому можно заменить его на q^2/d , сведя подынтегральное выражение к изотропному. Вычисляя полученный интеграл, находим, что

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{q} \frac{q^2}{(q^2 + \tau)^4} &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(q^2 + \tau)^3} - \tau \int \frac{d\mathbf{q}}{(q^2 + \tau)^4} = \\ &= \pi^{d/2} \tau^{d/2-3} \left[\frac{\Gamma(3-d/2)}{2} - \frac{\Gamma(4-d/2)}{6} \right]. \end{aligned}$$

Второе слагаемое конечно, так что его можно отбросить. Окончательно получаем

$$I_7 = -\frac{3ip_{\parallel}g^2\mu^{\varepsilon}}{4d(2\pi)^d} \int d\mathbf{q} \frac{q^2}{(q^2 + \tau)^4} = -\frac{3ip_{\parallel}g^2\mu^{\varepsilon}}{8d(2\pi)^d} \tau^{-\varepsilon/2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \pi^{d/2} \simeq \frac{-ip_{\parallel}u}{4\varepsilon}.$$

Вычисление единственной оставшейся диаграммы в (29) не содержит никаких принципиально новых моментов.

Итак, выпишем окончательные формулы для констант ренормировки Z для второй модели:

$$\begin{aligned} Z_1 = Z_6 = Z_7 = 1 - \frac{u}{2\varepsilon}, \quad Z_2 = 1 - \frac{u}{3\varepsilon}, \\ Z_3 = 1 - \frac{u}{3\varepsilon} - \frac{w}{\xi}, \quad Z_4 = Z_5 = 1 - \frac{2u}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (30)$$

Видно, что вытекающее из галилеевой инвариантности равенство $Z_1 = Z_6$ для второй модели также выполняется.

5. УРАВНЕНИЕ РГ

Уравнение РГ записывается для ренормированной корреляционной функции $G_R = \langle \Phi \dots \Phi \rangle_R$, которая отличается от первоначальной (неренормированной) функции $G = \langle \Phi \dots \Phi \rangle$ только нормировкой и выбором параметров и, следовательно, с равным правом может быть использована для анализа критического поведения. Соотношение $\mathcal{S}_{(1,2)R}(\Phi, e, \mu) = \mathcal{S}_{(1,2)}(\Phi, e_0)$ между функционалами действия (10), (11) и (16), (17) приводит к соотношению между корреляционными функциями:

$$G(e_0, \dots) = Z_{\varphi}^{N_{\varphi}} Z_{\varphi'}^{N_{\varphi'}} G_R(e, \mu, \dots), \quad (31)$$

где, как обычно, N_{φ} и $N_{\varphi'}$ – числа входящих в G полей (напомним, что в силу галилеевой инвариантности поле скорости не ренормируется: $Z_v = 1$); здесь $e_0 = \{\lambda_0, \tau_0, f_0, w_0, u_0\}$ – набор первоначальных параметров и $e = \{\lambda, \tau, f, w, u\}$ – их ренормированные аналоги; многоточием обозначены остальные переменные (время, координата, импульс и т. д.).

Применим оператор $\tilde{\mathcal{D}}_{\mu} \equiv \mu \partial_{\mu}$ при фиксированных переменных из набора e_0 . Это дает основное дифференциальное уравнение РГ для функции $G_R(e, \mu, \dots)$:

$$(\mathcal{D}_{RG} + N_{\varphi} \gamma_{\varphi} + N_{\varphi'} \gamma_{\varphi'}) G_R(e, \mu, \dots) = 0, \quad (32)$$

где $\mathcal{D}_{RG}$ – оператор $\tilde{\mathcal{D}}_{\mu}$, выраженный в ренормированных переменных,

$$\mathcal{D}_{RG} \equiv \mathcal{D}_{\mu} + \beta_u \partial_u + \beta_w \partial_w - \gamma_f \mathcal{D}_f - \gamma_{\lambda} \mathcal{D}_{\lambda} - \gamma_{\tau} \mathcal{D}_{\tau}. \quad (33)$$

Здесь и далее $\mathcal{D}_x \equiv x \partial_x$ для любой переменной x и $\gamma_F \equiv \mathcal{D}_{\mu} \ln Z_F$ – аномальная размерность для любой величины F . В свою очередь β -функции для двух безразмерных констант u и w имеют вид

$$\beta_u \equiv \tilde{\mathcal{D}}_{\mu} u = u(-\varepsilon - \gamma_u), \quad \beta_w \equiv \tilde{\mathcal{D}}_{\mu} w = w(-\xi - \gamma_w), \quad (34)$$

где вторые равенства следуют из определений и соотношений (18). Равенства (19) приводят к следующим соотношениям между аномальными размерностями для модели (16):

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_{\varphi'} + \gamma_{\varphi}, \quad \gamma_2 = \gamma_{\lambda} + \gamma_1, \quad \gamma_3 = \gamma_f + \gamma_2, \\ \gamma_4 = \gamma_{\tau} + \gamma_2, \quad \gamma_5 = \gamma_{\lambda} + \gamma_g + \frac{\gamma_f}{4} + \gamma_{\varphi'} + 2\gamma_{\varphi}, \quad \gamma_6 = \gamma_{\varphi'} + \gamma_{\varphi}. \end{aligned} \quad (35)$$

В силу (21) имеем $\gamma_{\varphi'} = \gamma_{\varphi}$. Кроме того, так как $u \propto g^2$, справедливо равенство $Z_u = Z_g^2$, а значит, $\gamma_u = 2\gamma_g$. В модели (17) появляется дополнительная аномальная размерность

$$\gamma_{\tau} = \gamma_{\lambda} + 2\gamma_{\varphi'}. \quad (36)$$

Теперь разрешим равенство (36) и соотношения (35) относительно РГ-функций, входящих в уравнение РГ. Для модели (16) с взаимодействием Грибова получаем

$$\begin{aligned} \gamma_{\varphi'} = \gamma_{\varphi} = \frac{\gamma_1}{2}, \quad \gamma_{\lambda} = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \gamma_f = \gamma_3 - \gamma_2, \\ \gamma_{\tau} = \gamma_4 - \gamma_2, \quad \gamma_g = \gamma_5 - \frac{3}{4}\gamma_2 - \frac{\gamma_3}{4} - \frac{\gamma_1}{2}, \quad \gamma_w = \gamma_1 - \gamma_3. \end{aligned} \quad (37)$$

Выпишем сразу явные однопетлевые выражения для указанных величин, используя соотношения (25) и приближенное равенство

$$\gamma_F = (\beta_u \partial_u + \beta_w \partial_w) \ln Z_F \simeq -(\varepsilon \mathcal{D}_u + \xi \mathcal{D}_w) \ln Z_F,$$

верное в первом порядке по ε и ξ (при выводе этого выражения мы учли, что величины Z зависят только от констант связи u и w). Имеем

$$\begin{aligned} \gamma_1 = -\frac{u}{4} + O(u^2), \quad \gamma_2 = -\frac{u}{8} + O(u^2), \quad \gamma_3 = -\frac{u}{8} + w + O(u^2), \\ \gamma_4 = -\frac{u}{2} + O(u^2), \quad \gamma_5 = -u + O(u^2), \end{aligned} \quad (38)$$

где символ $O(u^2)$ обозначает все старшие вклады типа u^2 , w^2 , uw и т. д. Из формул (37) тогда находим

$$\begin{aligned} \gamma_{\varphi'} = \gamma_{\varphi} = -\frac{u}{8} + O(u^2), \quad \gamma_{\lambda} = \frac{u}{8} + O(u^2), \quad \gamma_f = w + O(u^2), \\ \gamma_{\tau} = -\frac{3u}{8} + O(u^2), \quad \gamma_g = -\frac{3u}{4} - \frac{w}{4} + O(u^2), \quad \gamma_w = -\frac{u}{8} - w + O(u^2). \end{aligned} \quad (39)$$

Аналогичные выражения можно записать для модели (17):

$$\begin{aligned} \gamma_{\varphi'} = \frac{1}{2}(\gamma_{\tau} + \gamma_1 - \gamma_2), \quad \gamma_{\varphi} = \frac{1}{2}(-\gamma_{\tau} + \gamma_1 + \gamma_2), \\ \gamma_{\lambda} = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \gamma_f = \gamma_3 - \gamma_2, \quad \gamma_{\tau} = \gamma_4 - \gamma_2, \\ \gamma_g = \frac{1}{2}\left(\gamma_{\tau} - \gamma_1 - \frac{5}{2}\gamma_2 - \frac{\gamma_3}{2} + 2\gamma_5\right), \quad \gamma_w = \gamma_1 - \gamma_3. \end{aligned} \quad (40)$$

В однопетлевом приближении, используя (30), получаем

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_{\tau} = \frac{u}{2} + O(u^2), \quad \gamma_2 = \frac{u}{3} + O(u^2), \\ \gamma_3 = \frac{u}{3} + w + O(u^2), \quad \gamma_4 = \gamma_5 = 2u + O(u^2). \end{aligned} \quad (41)$$

С учетом равенств (40) находим

$$\begin{aligned} \gamma_{\varphi'} = \frac{u}{3} + O(u^2), \quad \gamma_{\varphi} = \frac{u}{6} + O(u^2), \quad \gamma_{\lambda} = -\frac{u}{6} + O(u^2), \\ \gamma_f = w + O(u^2), \quad \gamma_{\tau} = \frac{5}{3}u + O(u^2), \quad \gamma_g = \frac{3}{2}u - \frac{w}{4} + O(u^2), \\ \gamma_w = \frac{u}{6} - w + O(u^2). \end{aligned} \quad (42)$$

6. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Как известно, возможные скейлинговые режимы (типы асимптотического поведения корреляционных функций в ИК-области) ренормируемой модели связаны с ИК-устойчивыми неподвижными точками уравнений РГ.

В общем случае неподвижные точки определяются условием обращения в ноль всех β -функций. В наших моделях координаты u_* , w_* неподвижных точек находятся из уравнений

$$\beta_u(u_*, w_*) = 0, \quad \beta_w(u_*, w_*) = 0, \quad (43)$$

где β -функции определены в (34). Тип неподвижной точки определяется матрицей Ω с элементами $\Omega_{ij} = \partial\beta_i/\partial g_j$, где $\{\beta_1, \beta_2\} = \{\beta_u, \beta_w\}$ – полный набор β -функций и $\{g_1, g_2\} = \{u, w\}$ – полный набор констант связи. Для ИК-устойчивой неподвижной точки матрица Ω положительно определена, т. е. вещественные части всех ее собственных чисел больше нуля.

Рассмотрим сначала модель (16). Из определения (34) и явных выражений (39) для аномальных размерностей мы получаем следующие явные выражения (в главном порядке) для β -функций:

$$\beta_u = u \left(-\varepsilon + \frac{3u}{2} + \frac{w}{2} \right), \quad \beta_w = w \left(-\xi + \frac{u}{8} + w \right). \quad (44)$$

Из равенств (43) и (44) мы можем найти четыре различные неподвижные точки.

1. Гауссова (свободная) неподвижная точка $u_* = w_* = 0$; матрица Ω в этом случае имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}. \quad (45)$$

2. Точка $u_* = 0$, $w_* = \xi$; матрица Ω в этом случае имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\varepsilon + \frac{\xi}{2} & 0 \\ \frac{\xi}{8} & \xi \end{pmatrix}. \quad (46)$$

3. Точка $u_* = 2\varepsilon/3$, $w_* = 0$; матрица Ω в этом случае имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon}{3} \\ 0 & -\xi + \frac{\varepsilon}{12} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

4. Точка $u_* = \frac{8}{23}(2\varepsilon - \xi)$, $w_* = \frac{2}{23}(12\xi - \varepsilon)$; матрица Ω в этом случае имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{12}{23}(2\varepsilon - \xi) & \frac{4}{23}(-\xi + 2\varepsilon) \\ \frac{1}{23}(3\xi - 4\varepsilon) & \frac{2}{23}(12\xi - \varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Для трех первых точек собственные числа матриц Ω совпадают, очевидно, с ее диагональными элементами, а для последнего случая они равны

$$\lambda_{\pm} = \frac{11}{23}\varepsilon + \frac{6}{23}\xi \pm \frac{\sqrt{167\varepsilon^2 - 443\varepsilon\xi + 312\xi^2}}{23}.$$

Выражение под корнем положительно для любых ε, ξ , поэтому собственные числа вещественны.

Обратимся к модели (17). Для β -функций имеем

$$\beta_u = u \left(-\varepsilon - 3u + \frac{w}{2} \right), \quad \beta_w = w \left(-\xi - \frac{u}{6} + w \right). \quad (49)$$

Из соотношений (43) и (49) вновь можно найти четыре неподвижные точки.

1. Гауссова (свободная) неподвижная точка $u_* = w_* = 0$; матрица Ω в этом случае имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}. \quad (50)$$

2. Точка $u_* = 0, w_* = \xi$; матрица Ω в этом случае имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} -\varepsilon + \frac{\xi}{2} & 0 \\ -\frac{\xi}{6} & \xi \end{pmatrix}. \quad (51)$$

3. Точка $u_* = -\varepsilon/3, w_* = 0$; матрица Ω в этом случае имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\frac{\varepsilon}{6} \\ 0 & -\xi + \frac{\varepsilon}{18} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

4. Точка $u_* = \frac{6}{35}(-2\varepsilon + \xi), w_* = \frac{2}{35}(18\xi - \varepsilon)$; матрица Ω в этом случае имеет вид

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{18}{35}(2\varepsilon - \xi) & \frac{3}{35}(\xi - 2\varepsilon) \\ \frac{1}{105}(\varepsilon - 18\xi) & \frac{2}{35}(18\xi - \varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Для трех первых точек собственные числа матриц Ω вновь совпадают с ее диагональными элементами, а для последнего случая они имеют вид

$$\lambda_{\pm} = \frac{17}{35}\varepsilon + \frac{9}{35}\xi \pm \frac{\sqrt{359\varepsilon^2 - 989\varepsilon\xi + 711\xi^2}}{35} \quad (54)$$

и также являются вещественными при любых значениях ε, ξ .

Здесь необходимо сделать следующее важное замечание. В модели (17) для третьей и четвертой неподвижных точек, в которых величина u_* отлична от нуля, она отрицательна. Тем самым в силу соотношения $u \propto g^2$ такая точка не реализуется в модели с вещественной константой связи g . Однако даже простая статическая модель с взаимодействием $g\varphi^3$ в таком случае является, по-видимому, неустойчивой, так как ее потенциал взаимодействия не ограничен снизу (функциональный интеграл “расходится”). Напротив, такая модель с чисто мнимой константой связи оказывается состоятельной и имеет физические приложения: она описывает критическое поведение вблизи так называемого края Янга–Ли (см., например, работу [14]) и, что важно для нас в данном случае, описывает универсальные свойства метастабильных состояний, возникающих при фазовых переходах первого рода [10]. Более

Области ИК-устойчивости неподвижных точек для моделей (16) и (17). В первом случае $\varepsilon = 4 - d$ и $R = 1/12$, во втором $\varepsilon = 6 - d$ и $R = 1/18$.

того, в псевдоевклидовом случае эта модель отвечает удовлетворительной модели квантовой теории поля (спектр энергии положителен и ограничен снизу) [15]. Перейти к такой модели можно с помощью подстановки $g \rightarrow ig$. При этом во всех константах Z и функциях γ и β произойдет замена $u \rightarrow -u$, а величина u_* станет положительной. Поскольку такая замена никак не отразится на областях устойчивости и критических размерностях, мы не будем выполнять ее в явном виде, а просто в дальнейшем будем считать константу взаимодействия g чисто мнимой.

Первые неподвижные точки обеих моделей относятся к гауссову режиму (свободная теория поля), когда ни одно из взаимодействий не влияет на критическое поведение в главном приближении ИК-асимптотики (конечно, взаимодействия в моделях присутствуют, но они определяют лишь поправки к главным членам). Вторые точки отвечают критическому режиму, в котором нелинейности исходных моделей (взаимодействие Грибова и взаимодействие $\varphi'\varphi^2$ второй модели) оказываются несущественными с точки зрения критического поведения, это случай пассивного скалярного поля без самодействия, претерпевающего лишь турбулентный перенос. Для третьих точек в том же смысле оказывается несущественным турбулентное перемешивание, т.е. критическое поведение для них такое же, как в исходных моделях без поля скорости. Четвертые, наиболее интересные, неподвижные точки в обеих моделях соответствуют новому скейлинговому ИК-режиму, в котором существенны обе нелинейности. Соответствующие критические размерности зависят от обоих параметров ε , ξ уже в главном порядке и вычисляются как двойные ряды по этим параметрам.

Области ИК-устойчивости для этих неподвижных точек в плоскости (ξ, ε) (т.е. области значений ε и ξ , при которых собственные числа матрицы Ω для данной неподвижной точки положительны) для моделей (16) и (17) представлены на рисунке.

В главных приближениях (44) и (49) все границы областей устойчивости – просто прямые линии (границы этих областей, как уже было упомянуто, находятся из условия смены знака собственных чисел матрицы Ω). Таким образом, в обеих

моделях при любых ε и ξ мы попадаем в устойчивую область какой-то конкретной неподвижной точки; нет никаких “щелей” и перекрытий между различными областями (когда одновременно возникают несколько возможных скейлинговых режимов, выбор точки определяется начальными данными для уравнения РГ). В этом смысле критическое поведение универсально. Можно показать, что такая ситуация сохраняется и при учете старших порядков в β -функциях, хотя сами границы могут при этом искривляться. Это является следствием того факта, что у нас частные случаи $w = 0$ или $u = 0$ сами соответствуют замкнутым относительно ренормировки моделям, β -функции которых известны и имеют только одну гауссову и одну нетривиальную неподвижные точки.

Полученные результаты аналогичны выводам работ [8], где рассматривается тот же тип турбулентного перемешивания для критической динамики модели φ^4 (известной как модель A): характер неподвижных точек и области их устойчивости для всех трех случаев схожи. В частности, в однопетлевом приближении картина областей устойчивости для модели A такая же, как на рисунке с $R = 0$ и $\varepsilon = 4 - d$. Видно, что при изменении исходной (без турбулентного перемешивания) модели смещается только граница, разделяющая области 3 и 4 ($\xi = \varepsilon/12$, $\xi = \varepsilon/18$ в настоящей работе и $\xi = 0$ в работах [8]). Это явление нетрудно объяснить. Во всех этих моделях β -функции имеют вид $\beta_u = u(-\varepsilon + au + bw)$ и $\beta_w = w(-\xi + cu + dw)$ с некоторыми параметрами a, b, c, d . Можно убедиться, что граница между областями 2 и 4 определяется значениями параметров b, d , которые находятся из диаграмм, не включающих нелинейности по скалярным полям. Напротив, граница между областями 4 и 3 определяется параметрами a, c , которые находятся по диаграммам без участия поля скорости. Поэтому граница областей 2 и 4 определяется ансамблем поля скорости (и одинакова для всех трех упомянутых выше моделей), а граница областей 3 и 4 определяется исходной моделью без турбулентного переноса и для всех этих случаев различна. Скорее всего, в данном случае это свойства однопетлевого приближения.

7. КРИТИЧЕСКИЙ СКЕЙЛИНГ И КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ

Напомним определение обобщенной однородности. Пусть F – некоторая функция от n независимых аргументов $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющая следующему размерному соотношению:

$$F(\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n) = \lambda^{\alpha_F} F(x_1, \dots, x_n) \quad (55)$$

с определенным набором постоянных коэффициентов (скейлинговых размерностей) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_F\}$ и произвольным положительным параметром $\lambda > 0$. Дифференцируя соотношение (55) по λ и затем полагая $\lambda = 1$, получаем дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{D}_i F(x_1, \dots, x_n) = \alpha_F F(x_1, \dots, x_n), \quad \mathcal{D}_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (56)$$

общее решение которого выглядит следующим образом:

$$F(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_F/\alpha_1} \tilde{F}\left(\frac{x_2}{x_1^{\alpha_2/\alpha_1}}, \dots, \frac{x_n}{x_1^{\alpha_n/\alpha_1}}\right), \quad (57)$$

где $\tilde{F}$ – произвольная функция от $(n-1)$ аргумента. Очевидно, размерности определены с точностью до общего множителя (это можно увидеть, заменив λ на λ^a в (55) или умножив уравнение (56) на a); эта произвольность может быть устранена, например, если положить $\alpha_1 = 1$. Если $\alpha_i = 0$ для какого-нибудь x_i , то эта переменная не преобразуется в (55), и соответствующая производная в (56) отсутствует.

Хорошо известно, что главный член, определяющий асимптотическое поведение (ренормированной) корреляционной функции на больших расстояниях, удовлетворяет уравнению РГ (32), в котором ренормированные константы связи заменены на их значения в неподвижных точках. В нашем случае это приводит к уравнению

$$(D_\mu - \gamma_f^* D_f - \gamma_\lambda^* D_\lambda - \gamma_\tau^* D_\tau + \gamma_\Phi^* N_\Phi) G_{N_\Phi} = 0, \quad (58)$$

где $\gamma_f^* = \gamma_f(g, w)|_{g=g_*, w=w_*}$ и аналогично для остальных γ , функция G_{N_Φ} – это ренормированная корреляционная функция с $N_\Phi = \{N_{\varphi'}, N_\varphi, N_v\}$ полями (подразумевается суммирование по повторяющимся индексам).

Каноническая масштабная инвариантность функции G_{N_Φ} по отношению к трем независимым размерностям может быть выражена с помощью трех дифференциальных уравнений в форме (56). Действительно, из безразмерности действия вытекает его инвариантность относительно преобразования типа $\varphi(x) \rightarrow \lambda^{d_\varphi} \varphi(\lambda x)$, а из этого вытекает свойство (55) для корреляционных функций и, следовательно, система дифференциальных уравнений.

Канонические размерности полей в наших двух моделях согласно таблицам 1 и 2 отличаются, поэтому выпишем указанные дифференциальные уравнения, не подставляя пока конкретные выражения:

$$\begin{aligned} (D_\omega + D_\lambda - d_\Phi^\omega N_\Phi) G_{N_\Phi} &= 0, \\ (D_\perp + D_\mu - 2D_\lambda + 2D_f + 2D_\tau - d_\Phi^\perp N_\Phi) G_{N_\Phi} &= 0, \\ (D_\parallel - 2D_f - d_\Phi^\parallel N_\Phi) G_{N_\Phi} &= 0, \end{aligned} \quad (59)$$

где $D_\parallel = k_\parallel \partial / \partial k_\parallel$, $D_\perp = k_\perp \partial / \partial k_\perp$. Ясно, что уравнение (58) соответствует скейлинговому поведению типа (55) функции G_{N_Φ} при растягиваемых параметрах μ , λ , f и τ и при фиксированных импульсно-частотных переменных. Нас интересует критическое скейлинговое поведение, а именно поведение типа (55), в котором все ИК-существенные параметры (т.е. параметры, характеризующие близость к ИК-асимптотике: импульс/координата, время/частота, параметр τ) меняются, в то время как ИК-несущественные параметры (т.е. параметры, остающиеся конечными в критической точке: λ , μ и f) фиксированы, см., например, [1]. Комбинируем уравнения (58), (59) так, что производные по ИК-несущественным параметрам исключатся; это приведет нас к желаемому уравнению, которое описывает критическое скейлинговое поведение:

$$(D_\perp + \Delta_\parallel D_\parallel + \Delta_\omega D_\omega + \Delta_\tau D_\tau - N_\Phi \Delta_\Phi) G_{N_\Phi} = 0; \quad (60)$$

здесь $\Delta_\perp = 1$ – условие нормировки, а критическая размерность любого ИК-существенного параметра F дается общим выражением

$$\Delta_F = d_F^\perp + \Delta_\parallel d_F^\parallel + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^* \quad (61)$$

с каноническими размерностями из таблиц 1 и 2, причем верны соотношения

$$\Delta_\omega = 2 - \gamma_\lambda^*, \quad \Delta_\parallel = \frac{2 + \gamma_f^*}{2}. \quad (62)$$

Выпишем теперь окончательные однопетлевые результаты для критических размерностей. Для модели с взаимодействием Грибова (16) общие формулы (61) и (62) принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta_\omega &= 2 - \frac{u^*}{8}, & \Delta_\parallel &= 1 + \frac{w^*}{2}, \\ \Delta_{\varphi'} = \Delta_\varphi &= \frac{d}{2} - \frac{u^*}{8} + \frac{w^*}{4}, & \Delta_\tau &= 2 - \frac{3u^*}{8}. \end{aligned} \quad (63)$$

Подставляя явные выражения для координат неподвижных точек, с учетом равенства $d = 4 - \varepsilon$ получаем для первой, второй, третьей, четвертой неподвижных точек соответственно

$$\begin{aligned} \Delta_\omega &= 2, & \Delta_\parallel &= 1, & \Delta_{\varphi'} = \Delta_\varphi &= \frac{d}{2} = 2 - \frac{\varepsilon}{2}, & \Delta_\tau &= 2; \\ \Delta_\omega &= 2, & \Delta_\parallel &= 1 + \frac{\xi}{2}, & \Delta_{\varphi'} = \Delta_\varphi &= \frac{d}{2} + \frac{\xi}{4} = 2 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\xi}{4}, & \Delta_\tau &= 2; \\ \Delta_\omega &= 2 - \frac{\varepsilon}{12}, & \Delta_\parallel &= 1, & \Delta_{\varphi'} = \Delta_\varphi &= \frac{d}{2} - \frac{\varepsilon}{12} = 2 - \frac{7\varepsilon}{12}, & \Delta_\tau &= 2 - \frac{\varepsilon}{4}; \\ \Delta_\omega &= 2 - \frac{1}{23}(2\varepsilon - \xi), & \Delta_\parallel &= 1 + \frac{1}{23}(12\xi - \varepsilon), \\ \Delta_{\varphi'} = \Delta_\varphi &= \frac{d}{2} + \frac{1}{46}(14\xi - 5\varepsilon) = 2 + \frac{1}{23}(7\xi - 14\varepsilon), & \Delta_\tau &= 2 + \frac{3}{23}(\xi - 2\varepsilon). \end{aligned} \quad (64)$$

Для модели (17) общие формулы (61) и (62) имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_\omega &= 2 + \frac{u^*}{6}, & \Delta_\parallel &= 1 + \frac{w^*}{2}, & \Delta_\tau &= 2 + \frac{5u^*}{3}, \\ \Delta_{\varphi'} &= \frac{d}{2} + 1 + \frac{u^*}{3} + \frac{w^*}{4}, & \Delta_\varphi &= \frac{d}{2} - 1 + \frac{u^*}{6} + \frac{w^*}{4}. \end{aligned} \quad (65)$$

Подставляя явные выражения для координат неподвижных точек этой модели, получаем (теперь $d = 6 - \varepsilon$) для первой, второй, третьей, четвертой неподвижных точек соответственно

$$\begin{aligned} \Delta_\omega &= 2, & \Delta_\parallel &= 1, & \Delta_\tau &= 2, & \Delta_{\varphi'} &= \frac{d}{2} + 1 = 4 - \frac{\varepsilon}{2}, \\ & & & & \Delta_\varphi &= \frac{d}{2} - 1 = 2 - \frac{\varepsilon}{2}; \\ \Delta_\omega &= 2, & \Delta_\parallel &= 1 + \frac{\xi}{2}, & \Delta_\tau &= 2, \\ \Delta_{\varphi'} &= \frac{d}{2} + 1 + \frac{\xi}{4} = 4 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\xi}{4}, & \Delta_\varphi &= \frac{d}{2} - 1 + \frac{\xi}{4} = 2 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\xi}{4}; \\ \Delta_\omega &= 2 - \frac{\varepsilon}{18}, & \Delta_\parallel &= 1, & \Delta_\tau &= 2 - \frac{5\varepsilon}{9}, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\varphi'} &= \frac{d}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{9} = 4 - \frac{11\varepsilon}{18}, & \Delta_{\varphi} &= \frac{d}{2} - 1 - \frac{\varepsilon}{18} = 2 - \frac{5\varepsilon}{9}; \\
\Delta_{\omega} &= 2 + \frac{1}{35}(\xi - 2\varepsilon), & \Delta_{\parallel} &= 1 + \frac{1}{35}(18\xi - \varepsilon), & \Delta_{\tau} &= 2 + \frac{2}{7}(\xi - 2\varepsilon), \\
\Delta_{\varphi'} &= \frac{d}{2} + 1 + \frac{1}{70}(22\xi - 9\varepsilon) = 4 + \frac{11}{35}(\xi - 2\varepsilon), \\
\Delta_{\varphi} &= \frac{d}{2} - 1 + \frac{1}{14}(4\xi - \varepsilon) = 2 + \frac{2}{7}(\xi - 2\varepsilon).
\end{aligned}$$

Для обеих моделей ответы для первых и вторых неподвижных точек точные. Прочие размерности имеют поправки – старшие степени по ε для третьих неподвижных точек и старшие степени по ε и ξ для четвертых. Расчет этих поправок требует выхода за рамки однопетлевого приближения. Остается заметить, что в первом порядке критические размерности (64) и (66) на общих границах, разделяющих области устойчивости неподвижных точек, совпадают, т. е. оказываются непрерывными на этих прямых.

В качестве иллюстрации общих скейлинговых соотношений с размерностями (64) и (66) рассмотрим закон распыливания облака частиц, распространяющегося в критической среде “агента”. Для простоты положим $\tau = 0$, т. е. будем рассматривать непосредственно критическую точку.

В изотропном случае среднеквадратичный радиус облака выражается через функцию отклика следующим образом:

$$R^2(t) = \int d^d \mathbf{x} x^2 \langle \varphi'(0, \mathbf{0}) \varphi(t, \mathbf{x}) \rangle.$$

В нашем случае будем рассматривать аналоги этой величины для отдельных компонент:

$$R_i^2(t) = \int d^{d-1} \mathbf{x}_{\perp} \int dx_{\parallel} x_i^2 \langle \varphi'(0, 0, \mathbf{0}) \varphi(t, x_{\parallel}, \mathbf{x}_{\perp}) \rangle, \quad (67)$$

где явно разделена зависимость от параллельных и перпендикулярных компонент вектора $\mathbf{x}$. Подставим в последнее равенство вытекающее из формул предыдущих разделов асимптотическое скейлинговое представление для функции отклика при $\tau = 0$:

$$\langle \varphi'(0, 0, \mathbf{0}) \varphi(t, x_{\parallel} t^{-1/\Delta_{\omega}}, \mathbf{x}_{\perp}) \rangle = x_{\perp}^{-\Delta_{\varphi} - \Delta_{\varphi'}} F(x_{\perp} t^{-1/\Delta_{\omega}}, x_{\parallel}^{-\Delta_{\parallel}/\Delta_{\omega}}),$$

где $x_{\perp} = |\mathbf{x}_{\perp}|$ и F – некоторая функция от полностью безразмерных (в смысле критического скейлинга) аргументов. Перейдем к новым переменным $y_{\perp} = x_{\perp} t^{-1/\Delta_{\omega}}$ и $y_{\parallel} = x_{\parallel} t^{-\Delta_{\parallel}/\Delta_{\omega}}$, так что вся зависимость от времени t выделится из интегралов (67) в виде степенных множителей. При этом для перпендикулярной и параллельной компонент получаем $R_{\perp}^2(t) \propto t^{\alpha_{\perp}}$ и $R_{\parallel}^2(t) \propto t^{\alpha_{\parallel}}$ с показателями степени

$$\alpha_{\perp} = \frac{d + 1 + \Delta_{\parallel} - \Delta_{\varphi} - \Delta_{\varphi'}}{\Delta_{\omega}}, \quad \alpha_{\parallel} = \frac{d - 1 + 3\Delta_{\parallel} - \Delta_{\varphi} - \Delta_{\varphi'}}{\Delta_{\omega}}. \quad (68)$$

Для изотропных режимов 1 и 3 (для обеих моделей) эти показатели совпадают, $\alpha_{\parallel} = \alpha_{\perp}$, причем для гауссовой точки мы получаем обычный закон диффузионного

расплывания $R(t) \propto t^{1/2}$. Для режимов 2 и 4 распывание облака оказывается анизотропным. В частности, для режима 2 (чисто турбулентный перенос пассивного скаляра) для обеих моделей получаем $\alpha_{\perp} = 1$ и $\alpha_{\parallel} = 1 + \xi/2$, т. е. в перпендикулярном “потoku” направлении происходит простая диффузия, $R_{\perp}^2(t) \propto t$, а в направлении “потoka” распывание ускоряется, $R_{\parallel}^2(t) \propto t^{1+\xi/2}$. Последнее соотношение для значения $\xi = 4/3$, отвечающего теории Колмогорова–Обухова, дает $R_{\parallel}^2(t) \propto t^{5/3}$, что можно представить также в виде $dR_{\parallel}^2/dt \propto R_{\parallel}^{4/5}$. Полученный “закон 4/5” отличается от известного “закона 4/3 Ричардсона” для изотропной турбулентности. Для режима 4 оба показателя (68) нетривиальны, не равны друг другу и зависят от обоих параметров ренормгруппового разложения по ε и ξ .

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели критическое поведение двух динамических моделей: процесса Грибова и модели, описывающей фазовый переход первого рода в системе жидкость–пар. Поле скорости моделировалось гауссовой статистикой с исчезающим разновременным коррелятором и сильно анизотропной корреляционной функцией с асимптотическим поведением на бесконечности $\delta(t - t')/k_{\perp}^{d-1+\xi}$ (см. выражения (8), (9)).

Модели, изначально описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями (1) и (3) с корреляторами шума (2) и (4), могут быть переформулированы в терминах мультипликативно-ренормируемых теорий поля, что позволяет применять метод РГ для изучения их критического поведения. Обе модели обнаруживают четыре разных ИК-асимптотических режима, определяемых четырьмя различными неподвижными точками уравнения РГ; их области устойчивости в координатах (ε, ξ) найдены в главном порядке и отражены на рисунке. Эти режимы относятся к свободной неподвижной точке (режим 1), пассивному (нет обратного влияния на поле скорости) скалярному полю, при этом пренебрежимым становится член самодействия полей φ и φ' (режим 2), равновесной критической динамике, в которой взаимодействие с полем скорости становится несущественным (режим 3), и наиболее нетривиальному сильно анизотропному режиму 4, в котором одинаково существенны оба взаимодействия.

Эти результаты получены, однако, в рамках однопетлевого приближения РГ, т. е. в главном порядке разложения по константам связи (для аномальных размерностей и β -функций) или параметрам отклонения от логарифмичности ε и ξ (для критических размерностей, неподвижных точек и областей их устойчивости). Возможность их экстраполяции на реальные конечные значения ε и ξ и достоверность полученных на их основе численных оценок для размерностей может вызывать сомнения, особенно для случая $\varepsilon = 6 - d$.

Серьезный анализ этих вопросов требует вычислений вкладов высших порядков РГ-разложений и применения к ним каких-либо процедур суммирования, как это было сделано, например, в работах [16] для статических моделей с кубичным взаимодействием типа φ^3 . Подобный анализ выходит далеко за рамки данной работы, и мы надеемся выполнить его в дальнейшем.

Тем не менее можно уже сейчас привести некоторые аргументы в пользу сохранения описанной в разделе 6 картины неподвижных точек при реальных значениях

параметров. А именно, при $u = 0$ или $w = 0$ наши модели сводятся к известным и относительно хорошо изученным моделям – анизотропной версии модели Обухова–Крейчнана [11] либо моделям критического поведения без учета движения среды. Поэтому положение неподвижных точек второго и третьего типов полностью определяется β -функциями этих моделей. При этом положение точек второго типа точно определяется в однопетлевом приближении (см., например, работу [13]). В свою очередь, положение точек третьего типа определяется β -функциями моделей из работ [2] и [16], которые известны в двух- и трехпетлевом приближении соответственно. Выполненный в указанных работах анализ подсказывает, что найденные в рамках ε -разложений точки “выживают” и при реальных ε . Тогда можно предположить, что и наиболее интересные для нас новые точки четвертого типа, лежащие в плоскости (u, w) констант связи в квадранте, ограниченном точками 1–3, также сохраняют свое положение и характер устойчивости при реальных значениях ε и ξ .

Таким образом, мы можем заключить, что, используя наши упрощенные модели с гауссовым распределением скорости, уже в главном однопетлевом приближении можно получить информацию о наиболее важных характеристиках фазовых переходов в турбулентной среде: неустойчивость равновесного критического режима, появление новых неравновесных классов универсальности с новыми наборами критических показателей, достаточно сильно отличающихся от классических, и существование (для сильно анизотропного поля скорости) двух независимых масштабов длины.

Благодарности. Авторы благодарят за полезные обсуждения Л. Ц. Аджемяна, М. Гнатича и М. Ю. Налимова. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-02-00125_а) и Российской Национальной Программы (грант 2.1.1/1575). А. В. Малышев благодарит за поддержку фонд “Династия”.

Список литературы

- [1] А. Н. Васильев, *Квантово-полевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*, Изд-во ПИЯФ, СПб., 1998.
- [2] Н.-К. Janssen, U. C. Täuber, *Ann. Phys.*, **315**:1 (2004), 147–192, arXiv:cond-mat/0409670.
- [3] Д. Ю. Иванов, *Критическое поведение неидеализированных систем*, Физматлит, М., 2003.
- [4] A. Onuki, K. Kawasaki, *Progr. Theor. Phys.*, **63**:1 (1980), 122–139; T. Imaeda, A. Onuki, K. Kawasaki, *Progr. Theor. Phys.*, **71**:1 (1984), 16–26.
- [5] D. Beysens, M. Gbadamassi, L. Boyer, *Phys. Rev. Lett.*, **43**:17 (1979), 1253–1256; D. Beysens, M. Gbadamassi, *J. Phys. Lett.*, **40**:21 (1979), 565–567.
- [6] R. Ruiz, D. R. Nelson, *Phys. Rev. A*, **23**:6 (1981), 3224–3246; **24**:5 (1981), 2727–2734; J. A. Aronowitz, D. R. Nelson, *Phys. Rev. A*, **29**:4 (1984), 2012–2016.
- [7] N. V. Antonov, M. Hnatich, J. Honkonen, *J. Phys. A*, **39**:25 (2006), 7867–7887, arXiv:cond-mat/0604434.
- [8] N. V. Antonov, A. A. Ignatieva, *J. Phys. A*, **39**:44 (2006), 13593–13620, arXiv:cond-mat/0607019; N. V. Antonov, A. A. Ignatieva, A. V. Malyshev, *Phys. Part. Nucl.*, **41**:7 (2010), 998–1000, arXiv:1003.2855.
- [9] N. V. Antonov, V. I. Iglovikov, A. S. Kapustin, *J. Phys. A*, **42**:13 (2009), 135001, 19 pp., arXiv:0808.0076; N. V. Antonov, A. S. Kapustin, *J. Phys. A*, **43**:40 (2010), 405001, 22 pp., arXiv:1006.3133.
- [10] F. Zhong, Q. Chen, *Phys. Rev. Lett.*, **95**:17 (2005), 175701, 4 pp.

- [11] M. Avellaneda, A. J. Majda, *Comm. Math. Phys.*, **131**:2 (1990), 381–429; **146**:1 (1992), 139–204.
- [12] G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola, *Rev. Modern Phys.*, **73**:4 (2001), 913–975, arXiv: cond-mat/0105199.
- [13] N. V. Antonov, *J. Phys. A*, **39**:25 (2006), 7825–7865.
- [14] M. E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.*, **40**:25 (1978), 1610–1613.
- [15] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, *Phys. Rev. Lett.*, **93**:25 (2004), 251601, 4 pp., arXiv: hep-th/0402011.
- [16] O. F. de Alcantara Bonfim, J. E. Kirkham, A. J. McKane, *J. Phys. A*, **13**:7 (1980), L247–L251; **14**:9 (1981), 2391–2413.

Поступила в редакцию 16.06.2010,
после доработки 15.10.2010