Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Бреев, И. В. Широков, А. А. Магазев, Поляризация вакуума скалярного поля на группах Ли и однородных пространствах, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 1, 78–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:02:24

© 2011 г. А. И. Бреев*, И. В. Широков[†], А. А. Магазев[‡]

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ НА ГРУППАХ ЛИ И ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Предлагается метод вычисления вакуумных средних тензора энергии-импульса скалярного поля на группах Ли и однородных пространствах. Для решения поставленной задачи используется метод обобщенного гармонического анализа, базирующийся на методе орбит коприсоединенного представления.

Ключевые слова: поляризация вакуума, тензор энергии-импульса, гармонический анализ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование квантовых эффектов во внешних гравитационных полях является актуальной задачей современной квантовой теории поля (КТП). Основным объектом исследований выступает тензор энергии-импульса (ТЭИ), входящий в правую часть уравнений Эйнштейна и описывающий взаимодействие материи и гравитации. В связи с этим важное значение приобретает задача вычисления вакуумных средних ТЭИ, которые позволяют учесть обратное влияние квантового поля на геометрию пространства-времени в рамках однопетлевого приближения к полностью квантованной теории (КТП в искривленном пространстве-времени). Отметим, что к настоящему времени теория поля в искривленном пространстве-времени разработана достаточно хорошо, и ей посвящена обширная литература (см. книги [1]–[3]).

Для получения конечных значений вакуумных средних ТЭИ необходимо проведение процедуры регуляризации. Существует несколько различных методов, эффективное применение которых зависит от конкретной задачи. В случае, когда пространство однородно и изотропно, эффективно применение метода размерной регуляризации [4]. Другой способ регуляризации – метод раздвижения аргументов операторов поля в билинейной форме ТЭИ, предложенный в работе [5]. Стоит

*Томский государственный университет, Томск, Россия.
E-mail: alphmu2856@rambler.ru

[†]Омский государственный технический университет, Омск, Россия.
E-mail: iv_shirokov@mail.ru

[‡]Иртышский филиал ФГОУ ВПО «Новосибирская государственная академия водного транспорта», Омск, Россия. E-mail: magazev@mail.ru

отметить, что, хотя вышеупомянутые методы регуляризации не требуют расчета вакуумных средних ТЭИ, расчет последних также имеет значение, так как в ряде случаев возможно избавиться от расходимости напрямую (например, при помощи метода n -волновой регуляризации [6]).

Настоящая работа посвящена вычислению вакуумных средних ТЭИ скалярного поля на псевдоримановых многообразиях вида $\mathbb{R}^1 \times G$ и $\mathbb{R}^1 \times P$, где G – локальная группа Ли с правоинвариантной метрикой, а P – правое однородное пространство с G -инвариантной метрикой и нулевым дефектом, причем случай однородного пространства сводится к расчетам на групповом многообразии $\mathbb{R}^1 \times G$, где G – группа преобразований однородного пространства.

Интерес к этой проблеме связан с тем, что практически все известные в настоящее время модели римановых многообразий общей теории относительности связаны с различными группами преобразований и нередко относятся к классу однородных римановых пространств. К примеру, имеется много работ, посвященных исследованию квантовых эффектов в пространстве де Ситтера (упомянем работы [7], [8]).

В настоящей работе для решения поставленной задачи применяется метод орбит. Метод орбит коприсоединенного представления (К-орбит) впервые был описан в работах [9], [10]. Основные результаты метода приведены в работах [11]–[13].

При помощи метода орбит проводится интегрирование уравнения Клейна–Гордона (так называемый метод некоммутативного интегрирования [14], [15]). В отличие от широко известного метода разделения переменных [16], данный метод учитывает некоммутативную алгебру операторов симметрии уравнения и позволяет проводить интегрирование в случае, когда провести разделение переменных не представляется возможным. Причем решение строится глобально, и не возникает проблемы сшивки решений в различных картах атласа исходного многообразия, так как исходное уравнение редуцируется к уравнению на лагранжевом подмногообразии к невырожденной К-орбите, обладающей более простой геометрией и топологией.

Полученное в настоящей работе выражение для вакуумных средних ТЭИ скалярного поля не зависит от локальных координат и выражается через операторы λ -представления алгебры Ли группы Ли и решения дифференциального уравнения на К-орбите.

Также в работе получено выражение для обобщенной дзета-функции оператора уравнения Клейна–Гордона через величины, определенные на невырожденной К-орбите группы Ли G , а не на исходном групповом многообразии. Это облегчает нахождение аналитического продолжения дзета-функции в конкретных задачах, так как выражение получается более простым и зависит от меньшего количества переменных.

В связи с этим для случая группового многообразия адаптирован прямой метод обобщенной дзета-функции, развитый в работе [17]. Предлагаемый нами метод перенормировки вакуумных средних ТЭИ основан на вычислении функциональных производных от однопетлевого эффективного действия по метрике и сводит задачу к поиску аналитического продолжения для обобщенной дзета-функции.

При помощи предлагаемой в настоящей работе техники вычисления вакуумных средних ТЭИ проведен расчет эффекта Казимира на групповом многообразии вида $\mathbb{R} \times E(2)$, где $E(2)$ – группа движений двумерной плоскости, оснащенная правоинвариантной метрикой наиболее общего вида. Заметим, что в этом случае использовать метод разделения переменных не представляется возможным.

2. G-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕТРИКИ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть G – связная односвязная унимодулярная вещественная группа Ли, L – алгебра Ли группы Ли G , L^* – пространство линейных функционалов на L , $\mathcal{X}(G)$ – линейное пространство гладких векторных полей на группе Ли G ; $\xi_X(x) = (L_x)_*X$, $\eta_X(x) = -(R_x)_*X$, $X \in L$, $x \in G$, – лево- и правоинвариантные векторные поля на группе Ли G (генераторы соответственно правых и левых сдвигов).

Пусть $\mathbf{G}$ – невырожденная квадратичная форма на алгебре Ли L , задающая метрику на группе Ли G в единице. При помощи правых сдвигов введем на группе Ли G правоинвариантную метрику $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ в произвольной точке $x \in G$:

$$\langle \sigma, \tau \rangle_x = \mathbf{G}((R_x^{-1})_*\sigma, (R_x^{-1})_*\tau), \quad \sigma, \tau \in T_x G. \quad (1)$$

Равенство (1), записанное в локальных координатах, дает выражение для метрического тензора $\gamma_{ij}(x)$ на группе Ли G , $i, j = 1, \dots, \dim L$:

$$\gamma_{ij}(x) = \gamma_{AB} \sigma_i^A(x) \sigma_j^B(x), \quad \gamma_{AB} \equiv \mathbf{G}(e_A, e_B),$$

где $\{e_A\}$ – некоторый фиксированный базис в алгебре L , $\sigma^B(x)$ – базисные правоинвариантные 1-формы: $\sigma^B(x) \equiv (R_x)^*e^B$, $\{e^B\}$ – базис в L^* : $\langle e_A, e^B \rangle = \delta_A^B$, $A, B = 1, \dots, \dim L$.

Существует единственная симметричная и согласованная с метрикой (1) связность Леви-Чивита ∇ на группе Ли G . Можно показать, что связность ∇ является правоинвариантной и однозначно определяется билинейным отображением $\Gamma: L \times L \rightarrow L$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\eta_X} \eta_Y &= (R_x)_* \Gamma(X, Y), \\ \Gamma(X, Y) &= \frac{1}{2}([X, Y] - \text{ad}_X^* Y - \text{ad}_Y^* X), \quad X, Y \in L. \end{aligned} \quad (2)$$

Тензор кривизны Римана, построенный по связности (2), в свою очередь однозначно определяется отображением $\mathbf{R}(X, Y): L \rightarrow L$:

$$\mathbf{R}(X, Y)Z = \Gamma(Y, \Gamma(X, Z)) - \Gamma(X, \Gamma(Y, Z)) + \Gamma([X, Y], Z), \quad X, Y, Z \in L,$$

и на произвольных векторных полях $\tau, v, \zeta \in \mathcal{X}(G)$ принимает значение

$$R(\tau, v)\zeta = (R_x)_* \mathbf{R}((R_x^{-1})_*\tau, (R_x^{-1})_*v)(R_x^{-1})_*\zeta.$$

Компоненты символов Кристоффеля $\Gamma_{AB}^C \equiv \mathbf{G}(e^C, \Gamma(e_A, e_B))$ выражаются через компоненты метрики γ_{AB} и структурные константы алгебры Ли L :

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2} \gamma^{CD} (C_{ADB} + C_{BDA} - C_{DAB}), \quad C_{ABC} \equiv \gamma_{AD} C_{BC}^D. \quad (3)$$

Приведем выражение для компонент тензора Риччи $R_{CB} \equiv R(\eta_C, \eta_B)$ в базисе правоинвариантных векторных полей:

$$R_{CB} = \Gamma_{BA}^E \Gamma_{DE}^A - C_{EA}^A \Gamma_{BD}^E.$$

Пусть группа G эффективно действует на однородном многообразии P при помощи правых сдвигов. Обозначим через H замкнутую стационарную подгруппу некоторой точки $y_0 \in P$, через $\mathfrak{h}$ – алгебру Ли группы H . В этом случае P диффеоморфно фактор-многообразию G/H правых смежных классов группы Ли G , и многообразие P естественно сопоставляется главное расслоение $G(P, H, \pi)$.

Над областями тривиализации $U \in P$ в расслоенном пространстве G введем координаты $x^A = (y^a, h^\alpha)$ прямого произведения $U \times H$ ($a = 1, \dots, \dim P, \alpha = \dim P + 1, \dots, \dim G$). При этом координаты произвольной точки $x \in G$ можно представить в виде $x = hs(y)$, где $s: P \rightarrow G$ – локальное гладкое сечение расслоения G . В свою очередь линейное пространство алгебры Ли L допускает разложение в прямую сумму подпространств $L = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ – дополнение к $\mathfrak{h}$.

Обозначим через $\mathcal{X}(P)$ линейное пространство гладких векторных полей на однородном пространстве P . Векторное поле $\tau \in \mathcal{X}(G)$ будем называть *проектируемым* на однородное пространство P , если при поточечной проекции $\pi_*: T_x G \rightarrow T_{\pi(x)} P$ векторное поле τ переходит в некоторое векторное поле $\pi_*(\tau) \in \mathcal{X}(P)$. Для того чтобы векторное поле τ на группе Ли G было проектируемым, необходимым и достаточным является выполнение условия $\pi_*([\eta_Y, \tau]) = 0, Y \in \mathfrak{h}$. Множество проектируемых векторных полей образует подалгебру $\mathcal{B}(G)$ в $\mathcal{X}(G)$, и имеет место изоморфизм $\mathcal{X}(P) = \mathcal{B}(G)/\ker\{\pi_*\}$.

Рассмотрим G -инвариантную метрику на однородном пространстве P , построенную по соответствующей правоинвариантной метрике (1) на группе Ли G . А именно, наложим на квадратичную форму $\mathbf{G}$ условие

$$\mathbf{G}([X, Y], Z) + \mathbf{G}(Y, [X, Z]) = 0, \quad X \in \mathfrak{h}, \quad Y, Z \in L,$$

определим на алгебре Ли L квадратичную форму $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \ker \mathbf{B} &= \mathfrak{h}, \\ \mathbf{B}(X, Y) &= \mathbf{G}(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{m}, \end{aligned}$$

и положим по определению

$$\langle \pi_*(\tau), \pi_*(v) \rangle_{\pi(x)} \equiv \mathbf{B}((R_x^{-1})_* \tau, (R_x^{-1})_* v), \quad v, \tau \in \mathcal{B}(G). \quad (4)$$

Условие (1) обеспечивает независимость определения метрики от выбора векторных полей $\tau, v \in \mathcal{B}(G)$ таких, что $\pi_*(\tau) = \pi_*(v)$. Соотношение (4) эквивалентно требованию $\text{Ad}(H)$ -инвариантности формы B и обеспечивает независимость метрики при действии группы H левыми сдвигами на пространстве расслоения G . Очевидно, что любой G -инвариантной метрике на P может быть сопоставлен класс правоинвариантных метрик на группе Ли G , и любая G -инвариантная метрика на P может быть построена данным образом.

Можно показать, что символы Кристоффеля связности Леви-Чивита, построенной по G -инвариантной метрике, имеют вид

$$\Gamma_{jk}^i(y) = \Gamma_{bc}^a \sigma_j^b(x) \sigma_k^c(x) \eta_a^i(x) - \sigma_j^b(x) \eta_{b,k}^i - C_{b\alpha}^a \sigma_j^b(x) \sigma_k^\alpha(x) \eta_a^i(x), \quad (5)$$

где величины Γ_{bc}^a не зависят от координат и определяются компонентами G^{ab} квадратичной формы $\mathbf{G}$ и структурными константами алгебры Ли L :

$$\Gamma_{bc}^a = -\frac{1}{2} C_{bc}^a - \frac{1}{2} G^{ad} [G_{ec} C_{bd}^e + G_{eb} C_{cd}^e]. \quad (6)$$

Тензор Римана связности Леви-Чивита на однородном пространстве также выражается через Γ_{bc}^a , базисные правоинвариантные 1-формы и векторные поля на группе Ли G :

$$\begin{aligned} R_{jkl}^i(y) &= R_{bcd}^a \sigma_i^b(x) \sigma_k^c(x) \sigma_l^d(x) \eta_a^i(x), \\ R_{bcd}^a &= \Gamma_{\bar{d}\bar{d}}^a \Gamma_{bc}^{\bar{d}} - \Gamma_{\bar{d}c}^a \Gamma_{bd}^{\bar{d}} + \Gamma_{cd}^{\bar{c}} \Gamma_{b\bar{c}}^a. \end{aligned} \quad (7)$$

3. К-ОРБИТЫ. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Группа Ли G действует на сопряженном пространстве L^* коприсоединенным представлением $\text{Ad}^*: G \times L^* \rightarrow L^*$, $(x, f) \rightarrow \text{Ad}_x^* f$ по правилу

$$\langle \text{Ad}_x^* f, X \rangle = \langle f, \text{Ad}_{x^{-1}} X \rangle, \quad f \in L^*, \quad X \in L, \quad x \in G,$$

где Ad_x – присоединенное действие группы Ли G на L . На дуальном пространстве L^* определена скобка Пуассона–Ли

$$\{\phi, \psi\}^{\text{Lie}}(f) \equiv \langle f, [\nabla\phi(f), \nabla\psi(f)] \rangle, \quad \phi, \psi \in C^\infty(L^*), \quad f \in L^*. \quad (8)$$

В силу вырожденности скобки (8) на L^* существуют функции Казимира $K_\mu(f)$, коммутирующие со всеми функциями из $C^\infty(L^*)$ и являющиеся инвариантами коприсоединенного представления: $K_\mu(\text{Ad}_x^* f) = K_\mu(f)$, $x \in G$. Число независимых функций Казимира $\text{ind } L$ называется *индексом* алгебры L : $\mu = 1, \dots, \text{ind } L$.

Коприсоединенное действие Ad^* расслаивает L^* на К-орбиты. Размерность отдельной К-орбиты равна $\dim L - \text{ind } L - 2k$, где $k = 0, \dots, (\dim L - \text{ind } L)/2$. Коалгебра L^* является объединением связных инвариантных алгебраических поверхностей $M_{(s)}$, где каждая связная поверхность $M_{(s)}$ является объединением К-орбит размерности $\dim G - \text{ind } L - 2s$.

Непостоянные на $M_{(s)}$ функции $K_\mu^{(s)}(f)$, коммутирующие с любой функцией на $M_{(s)}$, называются *функциями Казимира s -типа*. Через $r_{(s)}$ обозначим количество функционально независимых функций Казимира s -типа, причем $\dim M_{(s)} = r_{(s)}$. К-орбита называется *орбитой s -типа*, если $\mathcal{O}_\lambda \in M_{(s)}$, а число s – *степенью вырождения орбиты*. К-орбиты с нулевой степенью вырождения называются *невырожденными*, а остальные *сингулярными*. Через $F_\alpha^{(s)}(f)$, $\alpha = 1, \dots, \dim L - r_{(s)}$, обозначим независимый набор функций, определяющих поверхность $M_{(s)}$.

Пусть далее $\mathcal{O}_\lambda$ – К-орбита группы Ли G s -типа, содержащая ковектор λ . Введем на $\mathcal{O}_\lambda$ замкнутую невырожденную 2-форму ω_λ , действующую на касательных к К-орбите векторах $a, b \in T_\lambda \mathcal{O}_\lambda$, следующим образом:

$$\omega_\lambda(a, b) = \langle \lambda, [\alpha, \beta] \rangle, \quad a = \text{ad}_\alpha^* \lambda, \quad b = \text{ad}_\beta^* \lambda, \quad \alpha, \beta \in L. \quad (9)$$

2-Форма (9) называется формой Кириллова и задает на К-орбите $\mathcal{O}_\lambda$ симплектическую структуру. Ограничение скобки Пуассона (8) на К-орбиту совпадает со скобкой Пуассона, порожденной симплектической формой ω_λ . Известно, что на симплектическом многообразии существуют канонические координаты Дарбу, в которых симплектическая форма имеет канонический вид. Обозначим через $(p, q) \in P \times Q$ канонические координаты Дарбу на К-орбите $\mathcal{O}_\lambda$, в которых форма Кириллова ω_λ принимает канонический вид: $\omega_\lambda = dp_a \wedge dq^a$, $a = 1, \dots, \dim \mathcal{O}_\lambda/2$. Заметим, что области P и Q изменения канонических координат (p, q) являются лагранжевыми подмногообразиями к К-орбите $\mathcal{O}_\lambda$.

Определим *каноническое* вложение $f: \mathcal{O}_\lambda \rightarrow L^*$, когда ковектору $f \in L^*$ ставятся в соответствие его канонические координаты на К-орбите $\mathcal{O}_\lambda$, содержащей ковектор f . Каноническое вложение однозначно определяется функциями $f_X = f_X(p, q, \lambda)$, $X \in L$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\{f_X, f_Y\}^{\text{Lie}} = f_{[X, Y]}, \quad f_X(0, 0, \lambda) = \lambda(X), \quad X, Y \in L. \quad (10)$$

Так как $f \in M_{(s)}$, то в случае сингулярных К-орбит каноническое вложение также должно удовлетворять условию $F_\alpha^{(s)}(f) = 0$, $\alpha = 1, \dots, \dim L - r_{(s)}$. Рассмотрим важный частный случай, когда каноническое вложение (10) линейно по переменным p :

$$f_X(q, p, \lambda) = \alpha_X^a(q)p_a + \chi_X(q, \lambda), \quad X \in L, \quad a = 1, \dots, \dim \mathcal{O}_\lambda/2. \quad (11)$$

Можно показать, что для существования линейного канонического вложения (11) орбиты $\mathcal{O}_\lambda$ необходимо и достаточно, чтобы функционал λ допускал *поляризацию* $\mathbf{n}$. Напомним, что поляризацией $\mathbf{n}$ функционала λ называется подалгебра размерности $\dim \mathbf{n} = \dim L - \dim \mathcal{O}_\lambda/2$, подчиненная функционалу λ : $\langle \lambda, [\mathbf{n}, \mathbf{n}] \rangle = 0$.

Операторы $l_X(q, \lambda) \equiv if_X(q, -i\partial_q, \lambda)$ реализуют неприводимое представление алгебры Ли L в пространстве гладких функций $L(Q, \mathbf{n}, \lambda)$ от $\dim Q = \dim \mathcal{O}_\lambda/2$ переменных. Будем называть данное представление λ -*представлением* алгебры Ли L s -типа.

Введем на многообразии Q меру $d\mu(q)$ и скалярное произведение

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_Q \overline{\psi_1(q)} \psi_2(q) d\mu(q). \quad (12)$$

Потребуем, чтобы операторы λ -представления были косозермитовы относительно (12). Для выполнения этого условия необходимо и достаточно ввести “квантовый сдвиг” $\lambda \rightarrow \lambda + i\beta$, где параметр β определяется выражением

$$\beta(X) = \frac{1}{2}[\text{tr}(\text{ad}_X) - \text{tr}(\text{ad}_X|_{\mathfrak{l}})], \quad (13)$$

где $\mathfrak{l}$ – вещественное подпространство, построенное по комплексной поляризации: $\mathfrak{l} = \mathbf{n} + \bar{\mathbf{n}}$. Формула (13) справедлива в случае, если $\mathfrak{l}$ – подалгебра.

Введем поднятие λ -представления алгебры Ли L до локального представления ее группы Ли G :

$$T^\lambda(x)\varphi(q) = \int D_{q\bar{q}'}^\lambda(x)\varphi(q') d\mu(q'), \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} T^\lambda e^{tX} \varphi(q) = l_X(q, \lambda)\varphi(q),$$

где $\varphi \in C^\infty(Q)$. Из условия $T^\lambda(x_1)T^\lambda(x_2) = T^\lambda(x_1x_2)$ следует соотношение для “матричных” элементов представления T^λ :

$$D_{q\bar{q}'}^\lambda(x_1x_2) = \int D_{q\bar{q}''}^\lambda(x_1)D_{q''\bar{q}'}^\lambda(x_2) d\mu(q''). \quad (15)$$

Если представление $T^\lambda(x)$ унитарно: $l_X^\dagger = -l_X$, то $D_{q\bar{q}'}^\lambda(x) = \overline{D_{q'\bar{q}}^\lambda(x^{-1})}$. Можно показать, что обобщенные функции $D_{q\bar{q}'}^\lambda(x)$ удовлетворяют переопределенной системе уравнений

$$[\eta_X(x) + l_X(q, \lambda)]D_{q\bar{q}'}^\lambda(x) = 0, \quad [\xi_X(x) - \overline{l_X^\dagger(q', \lambda)}]D_{q\bar{q}'}^\lambda(x) = 0. \quad (16)$$

Из требования однозначной определенности функций $D_{q\bar{q}'}^\lambda(x)$ на группе Ли G следует условие Кириллова целочисленности орбиты $\mathcal{O}_\lambda$ [11]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma \in H_2(\mathcal{O}_\lambda)} \omega_\lambda = n_\gamma \in \mathbb{Z},$$

где ω_λ – форма Кириллова на К-орбите.

Семейство обобщенных функций $D_{q\bar{q}'}^\lambda(x)$ полно и ортогонально, и для каждой функции $\phi(x)$ из плотного ядерного подпространства

$$L_{(s)} = \{\phi \in L_2(G, dx) \mid F_\alpha^{(s)}(\xi_X(x)\phi(x)) = 0, X \in L\}$$

определены прямое и обратное преобразования Фурье:

$$\psi(q, q', \lambda) = \int \phi(x) \overline{D_{q\bar{q}'}^\lambda(x^{-1})} d\mu(x), \quad (17)$$

$$\phi(x) = \int \psi(q, q', \lambda) D_{q\bar{q}'}^\lambda(x^{-1}) d\mu(q) d\mu(q') d\mu(\lambda), \quad (18)$$

где $d\mu(\lambda)$ – спектральная мера операторов Казимира $K_\mu(\eta)$. Для невырожденных орбит прямое и обратное преобразования (17), (18) определены на всем пространстве $L_2(G, dx)$.

Отметим, что если функции $\varphi(x)$ и $\psi(q, q', \lambda)$ преобразуются друг в друга согласно преобразованиям (17), (18), то выполняются соотношения дуальности:

$$\eta_X(x) \Leftrightarrow l_X(q', \lambda), \quad \xi_X(x) \Leftrightarrow \overline{l_X^\dagger(q, \lambda)},$$

т.е. образы дифференциальных операторов $\xi_X(x)$, $\eta_X(x)$ при преобразовании (17) являются дифференциальными операторами, действующими в пространстве Q .

Кратко опишем процедуру построения гармонического анализа на однородном пространстве P , следуя работам [18], [19]. Суть метода состоит в том, чтобы свести гармонический анализ на однородном пространстве P к гармоническому анализу на группе Ли G , изложенному выше, при наложении дополнительных условий.

Любую функцию $\widehat{\varphi} \in C^\infty(P)$ на однородном пространстве P можно отождествить с функцией $\varphi \in C^\infty(G)$, постоянной на правых классах смежности Hx . Имеет место изоморфизм $C^\infty(P) \sim \mathcal{F}$, где функциональное подпространство $\mathcal{F}$ функций, постоянных на слое расслоения $G(P, H, \pi)$, ввиду связности группы Ли H определяется следующим образом:

$$\mathcal{F} \equiv \{\varphi \in C^\infty(G) \mid \eta_X \varphi(x) = 0, X \in \mathfrak{h}, x \in G\}.$$

Определим функциональное подпространство $L_{(s)}(P)$ пространства $L_2(P, d\mu(y))$ как проекцию пространств $L_{(s)}$:

$$L_{(s)}(P) = L_{(s)} \cap \mathcal{F} = \{\varphi \in L_2(P, d\mu(y)) \mid F^{(s)}(\widetilde{X})\varphi = 0\},$$

где $\tilde{X}$ – генераторы группы преобразований Ли G , действующей на P . В работе [18] показано, что пространства $L_{(s)}(P)$ при $s < s_P$ пустые и

$$F^{(s_P)}(\tilde{X}) \equiv 0, \quad \tilde{K}_\mu^{(s_P)}(i\tilde{X}) \equiv 0, \quad \mu = 1, \dots, r_{s_P}, \quad (19)$$

где s_P – число такое, что $M_{(s_P)} \cap \mathfrak{h}^\perp \neq \emptyset$, но $M_{(s_P-1)} \cap \mathfrak{h}^\perp = \emptyset$. Данное число называется *степенью вырождения* однородного пространства P ; $\tilde{K}_\mu^{(s_P)}(f)$ – функции Казимира s_P -типа такие, что $\tilde{K}_\mu^{(s_P)}|_{\mathfrak{h}^\perp} = 0$. Из формул (19) следует, что пространство $L_{(s_P)}(P)$ совпадает с пространством $L_2(P, d\mu(y))$, и, следовательно, гармонический анализ на однородном пространстве сводится к гармоническому анализу в пространстве $L_{(s_P)}$ функций на группе Ли G , подчиненных условию $\varphi \in \mathcal{F}$.

Будем говорить, что λ -представление алгебры L *соответствует однородному пространству* P , если

$$\tilde{K}_\mu^{(s_P)}(\lambda(j)) = 0, \quad \mu = 1, \dots, r_{s_P}. \quad (20)$$

Поднимем λ -представление алгебры L s_P -типа до соответствующего представления группы Ли G в пространстве функций $\mathcal{F}$. Можно показать, что в этом случае набор функций $D_{q'q}^\lambda(x)$ является полным и ортогональным и образует базис функционального пространства $L_{(s_P)}$. Спроектируем функциональное пространство $L_{(s_P)}$ на пространство функций $L_2(P, d\mu(y))$. Для согласования с тождествами (19) необходимо наложить условия (20), т.е. λ -представление должно соответствовать однородному пространству. В этом случае точно определены прямое и обратное преобразования Фурье (17), (18), но на функции $\psi(q, q', \lambda)$ (в силу того, что $\phi \in \mathcal{F}$) необходимо наложить требование

$$l_\alpha(q', \lambda)\psi(q, q', \lambda) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, \dim H. \quad (21)$$

Целое неотрицательное число

$$d_P = \frac{1}{2} \sup \text{rank} \langle \lambda, [L, L] \rangle - \sup \text{rank} \langle \lambda, [L, \mathfrak{h}] \rangle, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^\perp,$$

называется *дефектом однородного пространства* P . Пространствами нулевого дефекта являются симметрические пространства, евклидовы пространства. Для пространств нулевого дефекта алгебра инвариантных операторов на однородном пространстве коммутативна, и система (21) полностью разрешима. В противном случае алгебра инвариантных операторов нетривиальна, и построение гармонического анализа требует введения специальных конструкций (см. работу [18]).

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Рассмотрим $(n+1)$ -мерное групповое многообразие $M^{n+1} = \mathbb{R}^1 \times G^n$, где элемент группы $g \in M$ будем обозначать как (x, t) , $x \in G$, $t \in \mathbb{R}$. Метрический тензор на M выберем в виде $\Theta_{A'B'} = (1 \oplus -\gamma_{AB})$, где γ_{AB} – тетрадные компоненты правоинвариантной метрики на группе Ли G , индексы вида $A', B', \dots = 0, 1, \dots, n$ обозначают тетрадные компоненты на M , а индексы $A, B, \dots = 1, \dots, n$ – тетрадные компоненты на группе Ли G , причем $\xi_0 = -\eta_0 = \partial_t$.

Рассмотрим комплексное скалярное поле $\varphi(x, t) \in C^\infty(M)$ массы m с лагранжианом

$$\mathcal{L}^0 = \Theta^{A'B'} \eta_{A'} \overline{\varphi(x, t)} \eta_{B'} \varphi(x, t) - [m^2 + \zeta R] |\varphi(x, t)|^2, \quad (22)$$

где $\zeta = (n-1)/(4n)$ – конформная связь с кривизной, R – скалярная кривизна многообразия M . В качестве уравнения Эйлера–Лагранжа для действия с лагранжианом (22) имеем уравнение Клейна–Гордона

$$(\partial_t^2 - \Delta_G + \zeta R + m^2) \varphi(x, t) = 0, \quad (23)$$

где $\Delta_G = \gamma^{AB} \eta_A \eta_B$ – оператор Лапласа на группе Ли G .

Построим базис решений $\varphi_\sigma(x, t)$ уравнения (23), нумеруемый коллективным индексом σ и удовлетворяющий условию нормировки

$$-i \int \varphi_\sigma(x, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \varphi_{\sigma'}(x, t) d\mu(x) = \delta(\sigma, \sigma'). \quad (24)$$

Пусть $\varphi(x, t) = f(t)F(x)$. Тогда

$$f_\Lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t}, \quad \omega^2 = \Lambda^2 + \zeta R + m^2, \quad (25)$$

где Λ – параметр разделения переменных. Для функции $F(x)$ имеем уравнение Клейна–Фока на группе Ли G :

$$-\Delta_G F_\Lambda(x) = \Lambda^2 F_\Lambda(x). \quad (26)$$

При помощи преобразования (17) редуцируем уравнение (26) к уравнению на невырожденной К-орбите. При этом оператор Лапласа Δ_G перейдет в дифференциальный оператор $H(l(q', \lambda)) = \gamma^{AB} l_A(q', \lambda) l_B(q', \lambda)$, действующий на лагранжевом подмногообразии Q к К-орбите $\mathcal{O}_\lambda$ от $\dim Q = \dim \mathcal{O}_\lambda/2$ переменных q .

Из формулы (17) следует, что переменные q будут входить в уравнение на К-орбите как параметры, поэтому набор

$$F_\sigma(x) = \int \psi_\Lambda(q', \lambda) D_{q\bar{q}'}^\lambda(x^{-1}) d\mu(q), \quad \sigma = (q, \lambda, \Lambda), \quad (27)$$

образует базис решений уравнения (26), причем неизвестные функции $\psi_\Lambda(q', \lambda)$ находятся из уравнения на К-орбите

$$-H(l(q', \lambda)) \psi_\Lambda(q', \lambda) = \Lambda^2 \psi_\Lambda(q', \lambda) \quad (28)$$

и как собственные функции оператора $H(l(q', \lambda))$ удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_Q \psi_\Lambda^\dagger(q, \lambda) \psi_{\Lambda'}(q, \lambda) d\mu(q) = \delta(\Lambda, \Lambda'). \quad (29)$$

Данное соотношение является условием нормировки функции $\psi_\Lambda(q', \lambda)$ и определением меры по собственным значениям Λ .

Таким образом, базис решений уравнения (23), нумеруемый индексом σ , имеет вид

$$\Psi_\sigma(x, t) = f_\Lambda(t) F_\sigma(x), \quad (30)$$

где $f_\Lambda(t)$ определяется выражением (25), а $F_\sigma(x)$ выражается через решения $\psi_\Lambda(\bar{q}, \lambda)$ уравнения (28) по формуле (27). При выполнении условия

$$\frac{\dim L + \operatorname{ind} L}{2} = 1$$

уравнение (28) сводится к обыкновенному алгебраическому уравнению. В этом случае будем говорить, что исходное уравнение (26) на группе Ли G интегрируемо.

Изложенный выше метод интегрирования применим также и в случае однородного пространства $P^{p+1} = \mathbb{R}^1 \times P^p$ с нулевым дефектом и G -инвариантной метрикой. Метрический тензор должен быть выбран в виде $\Theta_{\tilde{A}\tilde{B}} = (-1 \otimes -\gamma_{\tilde{A}\tilde{B}})$, $\tilde{A}, \tilde{B} = 0, \dots, p$.

Путем аналогичных вычислений легко показать, что набор, образующий базис решений уравнения Клейна–Гордона на P^{p+1} , имеет вид

$$\varphi_\sigma(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t} \int \psi(q', \lambda) D_{qq'}^\lambda(x^{-1}) d\mu(q'), \quad \sigma = (q, \lambda),$$

где $\omega^2 = \Lambda^2 + m^2 + \tilde{\zeta}\hat{R}$, $\tilde{\zeta} = (p-1)/(4p)$, а функция $\psi(q', \lambda)$ определяется из системы уравнений (21).

5. ВАКУУМНЫЕ СРЕДНИЕ ТЭИ НА ГРУППАХ ЛИ И ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим метрический ТЭИ, построенный путем варьирования действия поля по метрике [1]:

$$\delta S = \int \sqrt{|G|} T^{ij} \delta \Theta_{ij}(g) d\mu(g), \quad S = \int \mathcal{L}^0(g) d\mu(g), \quad (31)$$

где T_{ij} – компоненты ТЭИ в локальных координатах на M , $i, j = 0, 1, \dots, n$. Приведем явное выражение для ТЭИ в инвариантном относительно выбора локальных координат виде:

$$\begin{aligned} T(\eta_X, \eta_Y) \{\bar{\varphi}, \varphi\} = & (1 - 2\zeta) \eta_X \bar{\varphi} \eta_Y \varphi + \left(2\zeta - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{|\Theta|}} \Theta(\eta_X, \eta_Y) \mathcal{L}^0 - \\ & - \zeta [(\nabla_{\eta_X} \nabla_{\eta_Y} \bar{\varphi}) \varphi + \bar{\varphi} (\nabla_{\eta_X} \nabla_{\eta_Y} \varphi)] - \zeta R(\eta_X, \eta_Y) |\varphi|^2, \end{aligned} \quad (32)$$

где $X, Y \in \mathbb{R} \otimes L$. Легко перейти к локальным координатам:

$$T_{ij}(x, t) = T_{A'B'} \sigma_i^{A'}(x, t) \sigma_j^{B'}(x, t), \quad T_{A'B'} \equiv T(\eta_{e_{A'}}, \eta_{e_{B'}}).$$

Проведем процедуру квантования скалярного поля с лагранжианом (22). Разложим поле $\phi(x, t)$ по базису решений уравнения (23):

$$\hat{\phi}(x, t) = \int d\mu(\sigma) [\varphi(x, t) \hat{a}_\sigma + \overline{\varphi(x, t)} \hat{a}_\sigma^\dagger],$$

где $\hat{a}_\sigma^\dagger, \hat{a}_\sigma$ – операторы рождения и уничтожения соответственно, и наложим коммутационные соотношения

$$[\hat{\varphi}(x, t), \hat{\eta}_0 \varphi(x, t')] = i\delta(x, x').$$

Вакуумные средние ТЭИ определяются выражением

$$\langle \widehat{T}(\eta_X, \eta_Y) \rangle = \int T(\eta_X, \eta_Y) \{ \varphi_\sigma, \overline{\varphi}_\sigma \} d\mu(\sigma), \quad X, Y \in \mathbb{R}^1 \otimes L. \quad (33)$$

Подставив в него формулу (30) и воспользовавшись свойствами обобщенных функций $D_{q\bar{q}'}^\lambda(x)$, получим

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}(\eta_X, \eta_Y) \rangle = & -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\omega} \overline{\psi_\Lambda(q, \lambda)} \left(\frac{1}{2} \{l_X, l_Y\}_+ + \zeta \mathbf{R}(X, Y) \right) \psi_\Lambda(q, \lambda) \times \\ & \times d\mu(q) d\mu(\lambda) d\mu(\Lambda), \end{aligned} \quad (34)$$

где набор функций $\psi_\Lambda(q, \lambda)$ определяется из уравнения (28) и нормирован согласно (29), причем в выражении (34) необходимо учесть, что $l_{e_0} = l_0 = -i\omega$. В тетрадных компонентах $T_{A'B'}$ выражение (34) может быть записано в виде

$$\langle \widehat{T}_{00} \rangle = \frac{1}{2} \int \omega |\psi_\Lambda(q, \lambda)|^2 d\mu(q) d\mu(\lambda) d\mu(\Lambda), \quad (35)$$

$$\langle \widehat{T}_{0A} \rangle = \frac{i}{2} \int \overline{\psi_\Lambda(q, \lambda)} l_A(q, \lambda) \psi_\Lambda(q, \lambda) d\mu(q) d\mu(\lambda) d\mu(\Lambda), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}_{AB} \rangle = & -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\omega} \overline{\psi_\Lambda(q, \lambda)} \left(\frac{1}{2} \{l_A(q, \lambda), l_B(q, \lambda)\}_+ + \zeta R_{AB} \right) \times \\ & \times \psi_\Lambda(q, \lambda) d\mu(q) d\mu(\lambda) d\mu(\Lambda). \end{aligned} \quad (37)$$

Достаточно рассчитать для выбранной группы Ли G λ -представление ее алгебры Ли L , чтобы проинтегрировать уравнение (28) и сразу получить явные выражения для вакуумных средних ТЭИ.

Рассмотрим частный случай, когда нет необходимости решать уравнение (28), а именно когда на группе Ли M существует биинвариантная метрика

$$\langle \text{Ad}_g X \text{Ad}_g Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathbb{R}^1 \otimes L. \quad (38)$$

Действительно, из соотношения

$$\xi_X(g) = -\text{Ad}_X^{A'}(g) \eta_{A'}(g)$$

и определения (38) следует $H(\xi) = H(\eta)$ и, следовательно, $H(l(q')) = \Lambda^2 = \text{const.}$ Вакуумные средние ТЭИ примут вид

$$\begin{aligned} \langle T(\eta_X, \eta_Y) \rangle = & -\frac{1}{2} \int \frac{1}{2\omega} \left(\int \{l_X(q, \lambda), l_Y(q, \lambda)\}_+ \delta(q, \bar{q}) d\mu(q) + \right. \\ & \left. + \zeta \mathbf{R}(X, Y) \right) \chi_\lambda(0) d\mu(\lambda), \end{aligned} \quad (39)$$

где $\chi_\lambda(0) = \int D_{q\bar{q}}^\lambda(0) d\mu(q)$ – обобщенный характер представления (14) группы Ли G . В тетрадных компонентах выражение (39) примет вид

$$\langle \widehat{T}_{00} \rangle = \frac{1}{2} \int \omega \chi_\lambda(0) d\mu(\lambda), \quad \langle \widehat{T}_{0A} \rangle = 0,$$

$$\langle \widehat{T}_{AB} \rangle = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{2\omega} \left(\int \{l_A(q, \lambda), l_B(q, \lambda)\}_+ \delta(q, \bar{q}) d\mu(q) + \zeta R_{AB} \right) \chi_\lambda(0) d\mu(\lambda).$$

Заметим, что бинвариантная метрика (38) существует тогда и только тогда, когда группа Ли G унимодулярна: $\det(\text{Ad}_g) = 1$, $g \in G$, причем достаточным условием существования метрики (38) является компактность группы Ли G ; при этом характер представления $\chi(0, \lambda)$ имеет конечное значение.

Рассмотрим задачу вычисления вакуумных средних ТЭИ на однородном пространстве P^{p+1} . Пусть T_{ij} – локальные координаты ТЭИ скалярного поля на P^{p+1} , $i, j = 0, \dots, p$. Введем “квазитетрадные” компоненты ТЭИ

$$T_{\tilde{A}\tilde{B}}(g) \equiv T_{ij}(g) \eta_{\tilde{A}}^i(y, h) \eta_{\tilde{B}}^j(y, h). \quad (40)$$

В силу соотношений $\eta_{\tilde{A}}^i \sigma_j^{\tilde{A}} = \delta_j^i$, $\eta_{\tilde{A}}^i \sigma_i^{\tilde{B}} = \delta_{\tilde{A}}^{\tilde{B}}$ всегда можно перейти от величин (40) к локальным координатам и обратно. В случае, если $\dim H = 0$, т.е. P – группа Ли, величины (40) являются константами и тетрадными компонентами тензорного поля T .

Воспользовавшись свойствами обобщенных функций $D_{q\bar{q}'}^\lambda(x)$, для “квазитетрадных” компонент вакуумных средних ТЭИ получим

$$\begin{aligned} \langle \widehat{T}_{00} \rangle &= -\frac{1}{2} \int \omega |\psi(q, \lambda)|^2 d\mu(q) d\mu(\lambda), \\ \langle \widehat{T}_{0a} \rangle &= \frac{i}{2} \int \overline{\psi(q, \lambda)} (l_a(q, \lambda) \psi(q, \lambda)) d\mu(q) d\mu(\lambda), \\ \langle \widehat{T}_{ab} \rangle &= \int \frac{1}{2\omega} \overline{\psi(q, \lambda)} (\{l_a, l_b\}_+ - \tilde{\zeta} R_{ab}) \psi(q, \lambda) d\mu(q) d\mu(\lambda), \end{aligned}$$

где $l_a = l_a(q, \lambda)$ – операторы λ -представления s_P -типа, соответствующие однородному пространству (см. формулу (20)), $\psi(q, \lambda)$ – решение системы уравнений (21).

6. ПЕРЕНОРМИРОВКА ТЭИ НА ГРУППАХ ЛИ ПРИ ПОМОЩИ ОБОБЩЕННОЙ ζ -ФУНКЦИИ

Вакуумные средние ТЭИ скалярного поля $\varphi(x, t)$ могут быть получены вариацией по метрике однопетлевого эффективного действия W :

$$\langle T_{ij} \rangle = -\frac{2}{\sqrt{|\Theta(g)|}} \frac{\delta W}{\delta \Theta_{ij}}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (41)$$

Эффективное действие W связано с оператором действия квантового поля при помощи вариационного принципа Швингера $W = \langle \delta \widehat{S} \rangle$ и содержит в себе все расходимости теории. Для скалярного поля с лагранжианом (22) эффективное действие W на M^n имеет вид

$$W = i \ln \int D[\varphi] e^{iS} = \frac{i}{2} \ln \det \left(\frac{i\widehat{F}}{2\pi\mu^2} \right), \quad \widehat{F} \equiv \partial_t^2 - \Delta_G + \zeta R + m^2, \quad (42)$$

где μ – нормировочная константа, не зависящая от метрики и имеющая размерность массы.

Рассмотрим обобщенную ζ -функцию оператора $\hat{F}$

$$\zeta(s) = \int \lambda_{\sigma}^{-s} d\mu(\sigma),$$

где λ_{σ} – собственные значения оператора $\hat{F}$. В случае дискретности спектра оператора $\hat{F}$ обобщенная ζ -функция сводится к обычной ζ -функции Римана. Обобщенная ζ -функция $\zeta(s)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость, регулярное в точке $s = 0$, и может быть определена как интеграл по M от *локальной* ζ -функции:

$$\zeta(g, s) = \int \lambda_{\sigma}^{-s} \overline{\varphi_{\sigma}(x, t)} \varphi_{\sigma}(x, t) d\mu(\sigma), \quad \zeta(s) = \int \zeta(g, s) d\mu(g), \quad (43)$$

где $\varphi_{\sigma}(x, t)$ – полный и ортогональный набор собственных функций оператора $\hat{F}$. Уравнение $\hat{F}\varphi_{\sigma}(x, t) = \lambda_{\sigma}\varphi_{\sigma}(x, t)$ сводится к уравнению (28), где $\varphi_{\sigma}(x, t)$ определяется соотношением (26) с условием нормировки (24) и собственным значением $\lambda_{\sigma} = \Lambda^2 - \omega^2 + m^2 + \zeta R$.

Регуляризованное эффективное действие W выражается через обобщенную ζ -функцию

$$W(s) = -\frac{i}{2}(\zeta'(s) + \zeta(s) \ln(-2\pi i \mu^2)), \quad W_{\text{ren}} = W(s)|_{s=0}, \quad (44)$$

и уже не содержит расходимостей. Перенормированный ТЭИ выражается через W_{ren} согласно формуле (41).

Основную трудность представляет собой вычисление функциональных производных эффективного действия W_{ren} по метрике, так как для этого необходимо, вообще говоря, знать W_{ren} для всех геометрий $\Theta_{ij}(x)$. Воспользуемся методом, предложенным в работе [17], когда сначала вычисляются функциональные производные по $\Theta_{ij}(x)$ от эффективного действия, а уже потом берется аналитическое продолжение при $s = 0$:

$$\langle \hat{T}_{ij} \rangle_{\text{ren}} = -\frac{1}{\sqrt{|\Theta(x)|}} \frac{\delta W(s)}{\delta \Theta_{ij}} \Big|_{s=0}. \quad (45)$$

Подставив сюда выражение (44), получим

$$\langle T_{ij} \rangle_{\text{ren}} = -\frac{i}{2} \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} Z_{ij}(g, s) + Z_{ij}(g, 0) \ln(-2\pi i \mu^2) \right), \quad (46)$$

где функция $Z_{ij}(g, s)$ представляет собой аналитическое продолжение по переменной s вариации ζ -функции $\zeta(s)$ по метрике:

$$Z_{ij}(g, s) = -\frac{2}{\sqrt{|\Theta|}} \frac{\delta \zeta(s)}{\delta \Theta^{ij}},$$

и в работе [17] носит название *ζ -функции тензора энергии-импульса*, определенного формулой (41). Из соотношения (46) следует, что вычисление перенормированного значения ТЭИ сводится к поиску аналитического продолжения по $s = 0$ производных от функции $Z_{ij}(g, s)$.

Так как

$$S[\overline{\varphi_\sigma}, \varphi_\sigma] = -\frac{1}{2} \int \overline{\varphi_\sigma} \widehat{F} \varphi_\sigma d\mu(\sigma) = -\frac{1}{2} \int \lambda_\sigma |\varphi(x, t)|^2 d\mu(x) dt$$

и собственные функции $\varphi_\sigma(x, t)$ удовлетворяют условию ортогональности, то оказывается возможным вычислить вариацию собственного значения λ_σ :

$$\frac{\delta \lambda_\sigma}{\delta \Theta^{ij}} = -2 \frac{\delta S[\overline{\varphi_\sigma}, \varphi_\sigma]}{\delta \Theta^{ij}} = -\frac{1}{2} \sqrt{|\Theta|} \Theta_{ij} \lambda_\sigma |\varphi_\sigma|^2 - 2 \frac{\delta S[\overline{\varphi_\sigma}, \varphi_\sigma]}{\delta \Theta^{ij}}.$$

Данное равенство позволяет выразить $Z_{ij}(g, s)$ через локальную ζ -функцию (43) и функциональную производную действия S по метрике:

$$Z_{ij}(g, s) = 2s\zeta_{ij}(g, s+1) - s\zeta(g, s)\Theta_{ij}, \quad \zeta_{ij}(g, s) \equiv \int \lambda_\sigma^{-s} T_{ij}\{\overline{\varphi_\sigma}, \varphi_\sigma\} d\mu(\sigma). \quad (47)$$

Так как мы рассматриваем ситуацию, когда применение метода обобщенной ζ -функции позволяет регуляризовать эффективное действие W_{ren} , то величины $\zeta(g, 0)$ и $\zeta'(g, 0)$ должны быть конечными и, следовательно,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\zeta'(g, s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s\zeta(g, s) = 0. \quad (48)$$

Учитывая соотношения (48), подставим выражение (47) в формулу (46) и после ряда вычислений получим выражение для перенормированного ТЭИ на M :

$$\begin{aligned} \langle T_{A'B'} \rangle_{\text{ren}} &= -i\zeta_{A'B'}(1) + i\frac{1}{2}\Theta_{A'B'}\zeta(g, 0) - \\ &\quad - is[\zeta'_{A'B'}(s+1) + \zeta_{A'B'}(s+1)\ln(-2\pi i\mu^2)]|_{s=0}, \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_{A'B'}(s) &= \int \lambda_\sigma^{-s} T_{A'B'}\{\overline{\varphi_\sigma}, \varphi_\sigma\} d\mu(\sigma) = \\ &= \overline{\zeta_{A'B'}(s)} + \frac{1}{2}\Theta_{A'B'}\zeta(g, s-1) - \zeta R_{A'B'}\zeta(g, s), \end{aligned} \quad (50)$$

$$\overline{\zeta_{A'B'}(s)} = \int \lambda_\sigma^{-s} \eta_{\{A'\overline{\varphi_\sigma}\eta_{B'}\}} \varphi_\sigma d\mu(\sigma), \quad \zeta(g, s) = \int \lambda_\sigma^{-s} |\varphi_\sigma(x, t)|^2 d\mu(\sigma).$$

Собственные функции оператора $\widehat{F}$ будем искать в виде набора (30). Тогда

$$\overline{\zeta_{A'B'}(s)} = -\frac{1}{2} \int \lambda_{\Lambda\Lambda}^{-s} \overline{\psi_\Lambda(q, \lambda)} \{l_{A'}, l_{B'}\}_+ \psi(q, \lambda) d\mu(q) d\mu(\lambda) d\mu(\Lambda), \quad (51)$$

$$\zeta(g, s) = \int \lambda_{\Lambda\Lambda}^{-s} |\psi(q, \lambda)|^2 d\mu(q) d\mu(\lambda) d\mu(\Lambda). \quad (52)$$

Из формулы (49) следует, что предел выражения $s\zeta_{A'B'}(s+1)$ при $s \rightarrow 0$ должен быть конечным:

$$\alpha_{A'B'} = \lim_{s \rightarrow 0} s\zeta_{A'B'}(s+1).$$

Следовательно,

$$\zeta_{A'B'}(s+1) \sim \frac{\alpha_{A'B'}}{s}, \quad s\zeta'_{A'B'}(s+1) \sim -\frac{\alpha_{A'B'}}{s}.$$

Рассмотрим асимптотическое разложение для недиагональных элементов ядра теплопроводности $H(t, g, g')$:

$$H(t, g, g') - i \sim \frac{e^{-i\beta(g, g')/(2t)}}{(4\pi t)^2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(g, g') t^k, \quad t \rightarrow 0, \quad (53)$$

где $\beta(g, g')$ – половина квадрата длины геодезической между точками g и g' , $a_k(g, g')$ – коэффициенты ядра теплопроводности, выражающиеся через кривизну и метрику многообразия M . В нашем случае скалярная кривизна R не зависит от локальных координат, и при совпадающих аргументах $g = g'$ в размерности $n = 3$ мы будем иметь

$$a_1 = \left(\frac{1}{6} - \zeta\right)R, \quad a_2 = \frac{1}{180}(R^{ABCD}R_{ABCD} - R^{AB}R_{AB}) + \frac{1}{2}a_1^2.$$

Связь между ядром теплопроводности и локальной ζ -функцией выражается равенством

$$\zeta(s, g, g') = \frac{i}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt (it)^{s-1} H(t, g, g'), \quad \zeta(s, g) = \lim_{g' \rightarrow g} \zeta(s, g, g'). \quad (54)$$

На основе соотношений (53) и (54) при $m = 0$ в работе [17] исследовалась структура полюсов функции $\zeta_{ij}(s + 1, g)$ и было получено явное выражение для величины α_{ij} через коэффициенты $a_k(g)$ ядра теплопроводности (53). Для нашего случая группового многообразия M будем иметь

$$\alpha_{A'B'} = \frac{1}{(4\pi)^2} \Theta_{A'B'} a_2. \quad (55)$$

Отсюда следует, что при $a_2 = 0$ для функции $\zeta_{A'B'}(s + 1)$ выполняются соотношения, аналогичные (48), для локальной ζ -функции:

$$s\zeta_{A'B'}(s + 1) = 0, \quad s\zeta'_{A'B'}(s + 1) = 0, \quad s \rightarrow 0. \quad (56)$$

Выражение для перенормированного ТЭИ принимает более простой вид:

$$\langle \hat{T}_{A'B'} \rangle_{\text{ren}} = -i \left(\overline{\zeta_{A'B'}(s + 1)} - \zeta R_{A'B'} \zeta(g, s + 1) \right) \Big|_{s=0}, \quad (57)$$

и не зависит от параметра μ . Сравним выражение (55) с известной формулой для следа расходящейся части вакуумного среднего ТЭИ: $\langle T_i^i \rangle_{\text{div}} = -a_2/(16\pi^2)$. Тогда

$$\alpha_{A'B'} = -\Theta_{A'B'} \langle T_i^i \rangle_{\text{div}}.$$

Для безмассового конформно-инвариантного поля в четырехмерном пространстве-времени ($\zeta = 1/6$) след ТЭИ равен нулю, и, следовательно, след вакуумного среднего $\langle T_i^i \rangle$ также равен нулю. Так как $\langle T_i^i \rangle_{\text{ren}} = \langle T_i^i \rangle - \langle T_i^i \rangle_{\text{div}}$, то след перенормированного ТЭИ в общем случае отличен от нуля (имеет место так называемая конформная аномалия).

Таким образом, при $m = 0$ и $\zeta = 1/6$ выполнение соотношений (56) эквивалентно отсутствию конформной аномалии для ТЭИ скалярного поля.

7. ЭФФЕКТ КАЗИМИРА НА ГРУППЕ ЛИ $\mathbb{R}^1 \times E(2)$

Рассмотрим групповое многообразие $M = \mathbb{R} \times E(2)$, где $G = E(2)$ – группа движений двумерной плоскости. Групповое многообразие группы G обладает топологией цилиндра $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Трехмерная алгебра Ли $\mathfrak{e}(2)$ группы Ли $E(2)$ определяется коммутационными соотношениями

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = -e_2, \quad \epsilon > 0.$$

Единственная функция Казимира $K(f) = f_1^2 + f_2^2$ алгебры $\mathfrak{e}(2)$ определяет невырожденные К-орбиты $\mathcal{O}_\lambda = \{f \in \mathbb{R}^3 | K(f) = \lambda\}$, каждая из которых проходит через параметризованный ковектор $\lambda = (j, 0, 0)$, $j > 0$. Операторы λ -представления имеют вид

$$l_1 = ij \cos q, \quad l_2 = -ij \sin q, \quad l_3 = \partial_q.$$

Из условия вещественности функций перехода к каноническим координатам Дарбу на К-орбите следует, что $Q = [0, 2\pi)$. Операторы l_A косозермитовы относительно меры dq . Спектральная мера оператора Казимира есть $d\mu(\lambda) = jdj/(2\pi)^2$. Так как группа Ли $E(2)$ содержит компактную подгруппу $SO(2)$ с алгеброй $\{e_3\}$, то К-орбиты $\mathcal{O}_\lambda(j)$ квантуются, и параметр j принимает целочисленные значения.

При помощи группы автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{e}(2)$ правоинвариантную метрику γ^{ab} на $E(2)$ можно привести к диагональному виду $\gamma^{ab} = \text{diag}(A, B, C)$. Тогда ненулевые компоненты тензора Риччи на M суть

$$R_{11} = -R_{22} = \frac{A^2 - B^2}{2A^2B}C, \quad R_{33} = \frac{(A - B)^2}{2AB}.$$

При преобразовании (27) оператор Лапласа на $E(2)$ перейдет в оператор

$$H(l(q, \lambda)) = \gamma^{AB} l_A(q, \lambda) l_B(q, \lambda) = C \frac{d^2}{dq^2} + (B - A)j^2 \cos^2 q - Bj^2$$

на К-орбите, зависящий от переменной q и параметра j . Решение уравнения Клейна–Фока (28) будем искать в виде периодических функций Матье:

$$\psi_n(q) = ce_n\left(\frac{A - B}{4C}j^2, q\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (58)$$

Тогда для спектра получаем условие

$$\Lambda_n^2 = Ca_n\left(\frac{A - B}{4C}j^2\right) + \frac{A + B}{2}j^2,$$

где a_n – собственные функции уравнения Матье. Для собственных значений оператора $\hat{F} = \square + m^2 + \zeta R$ имеем

$$\lambda_\sigma = \Lambda_n^2 - j_0^2 + m^2 + \zeta R, \quad \sigma = (n, j, j_0).$$

Меры по $d\mu(j_0)$ и $d\mu(\Lambda)$ выберем в виде

$$\int f(j_0, n) d\mu(j_0) d\mu(\Lambda) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} f(j_0, n) dj_0.$$

По формуле (34) могут быть рассчитаны перенормированные вакуумные средние ТЭИ. Они имеют довольно громоздкий вид и в настоящей работе не приводятся. Найдем перенормированное значение плотности энергии $\langle \hat{T}_{00} \rangle_{\text{ren}}$.

Рассмотрим локальную ζ -функцию оператора $\hat{F}$

$$\zeta(s) = \frac{\sqrt{ABC}}{(2\pi)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} j \, dj \int_0^{\infty} dj_0 \lambda_{\sigma}^{-s}.$$

Воспользуемся интегральным преобразованием

$$\lambda^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-zt} \, dt, \quad \text{Re } s > 0, \quad \text{Re } z > 0,$$

и представим $\zeta(s)$ в виде

$$\zeta(s) = -i \frac{\sqrt{\pi ABC}}{2(2\pi)^3 \Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \, t^{s-3/2} e^{-t(m^2 + \zeta R)} \sum_{n=0}^{\infty} I_n(t),$$

где

$$I_n(t) = \int_0^{\infty} j \, dj \exp \left(-t \left[C a_n \left(\frac{A-B}{4C} j^2 \right) + \frac{A+B}{2} j^2 \right] \right). \quad (59)$$

Интеграл (59) в общем случае $A \neq B$ не выражается через элементарные функции, но возможно получить его асимптотическое поведение:

$$I_1(t) \sim \frac{2e^{-Ct}}{(3A+B)t}, \quad I_n(t) \sim \frac{e^{-Ctn^2}}{(A+B)t}, \quad t \rightarrow \infty, \quad n \neq 1. \quad (60)$$

Тогда для $\zeta(s)$ получаем

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & -i \frac{\sqrt{\pi ABC}}{2(2\pi)^3 (A+B)} \frac{\Gamma(s-3/2)}{\Gamma(s)} \left[C^{-(s-3/2)} E_1^{(m^2 + \zeta R)/C} \left(s - \frac{3}{2}, 1 \right) + \right. \\ & \left. + (m^2 + \zeta R)^{-(s-3/2)} - \frac{A-B}{3A+B} (C + m^2 + \zeta R)^{-(s-3/2)} \right], \end{aligned}$$

где $E_1^{c^2}(s, 1) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + c^2)^{-s}$ – ζ -функция Эпштейна–Гурвица. Согласно выражению (49) получим

$$\langle \hat{T}_{00} \rangle_{\text{ren}} = \frac{i}{2} \zeta(s)|_{s=0}.$$

Используя формулу Абеля–Плана для аналитического продолжения ζ -функции Эпштейна–Гурвица, имеем:

$$E_1^{c^2} \left(-\frac{3}{2}, 1 \right) = \frac{1}{2} c^3 + 2i \int_c^{\infty} \frac{(c^2 - t^2)^{3/2}}{e^{2\pi t} - 1} \, dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{00} \rangle_{\text{ren}} = & \frac{\sqrt{ABC}}{32\pi^2 (A+B)} \left[2 \int_{\sqrt{(m^2 + \zeta R)/c}}^{\infty} \frac{[Ct^2 - m^2 - \zeta R]^{3/2}}{e^{2\pi t} - 1} \, dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (m^2 + \zeta R)^{3/2} - \frac{A-B}{3A+B} (C + m^2 + \zeta R)^{3/2} \right]. \quad (61) \end{aligned}$$

Выражение (61) для плотности энергии является ненулевым, и, следовательно, имеет место эффект поляризации вакуума скалярного поля на M . При $A = B$ точное значение $I_n(t)$ совпадает с формулой (60), и в случае безмассового поля $m = 0$ для вакуумных средних ТЭИ скалярного поля получаем ($A = B = 1$)

$$\langle \hat{T}_{A'B'} \rangle_{\text{ren}} = \frac{C^{3/2}}{1440\pi^2} \text{diag} \left(-1, 1, 1, -\frac{3}{C} \right). \quad (62)$$

Случай $A = B$ соответствует плоской метрике, и выражение (62) описывает хорошо известный эффект Казимира на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см. книгу [1]).

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” Министерства образования и науки РФ (гранты № 2.1.1/3436, 2.1.1/12999), Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” Министерства образования и науки РФ (гранты № 02.740.11.0238, П691, П789).

Список литературы

- [1] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях*, Атомиздат, М., 1980.
- [2] Н. Биррелл, П. Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*, Мир, М., 1984.
- [3] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, London Math. Soc. Stud. Texts, **17**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [4] A. DeBenedictis, K. S. Viswanathan, *Stress-Energy Tensors for Higher Dimensional Gravity*, arXiv: hep-th/9911060.
- [5] S. M. Christensen, *Phys. Rev. D*, **14**:10 (1976), 2490–2501.
- [6] Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский, *ЖЭТФ*, **61**:6 (1971), 2161–2175.
- [7] C. Molina-Paris, “Energy-Momentum Tensor and Particle Creation in the de Sitter Universe”, *The Eighth Marcel Grossmann Meeting*, Part A, B (Jerusalem, 1997), eds. T. Piran, R. Ruffini, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999, 827–829, arXiv: gr-qc/9710088.
- [8] R. Camporesi, A. Higuchi, *Phys. Rev. D*, **45**:10 (1992), 3591–3603.
- [9] А. А. Кириллов, *УМН*, **17**:4(106) (1962), 57–110.
- [10] А. А. Кириллов, *Функц. анализ и его прил.*, **2**:2 (1968), 40–55.
- [11] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1978.
- [12] B. Kostant, “Quantization and Unitary Representations. I. Prequantization”, *Lectures in Modern Analysis and Applications*, v. III, Lecture Notes in Math., **170**, ed. C. T. Taam, Springer, Berlin, 1970, 87–208.
- [13] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques. Maîtrises de mathématique*, Dunod, Paris, 1970.
- [14] А. В. Шаповалов, И. В. Широков, *ТМФ*, **104**:2 (1995), 195–213.
- [15] А. В. Шаповалов, И. В. Широков, *ТМФ*, **106**:1 (1996), 3–15.
- [16] У. Миллер, *Симметрия и разделение переменных*, Мир, М., 1981.
- [17] V. Moretti, *Phys. Rev. D*, **56**:12 (1997), 7797–7819, arXiv: hep-th/9705060.
- [18] И. В. Широков, *К-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений*, Препринт, ОмГУ, Омск, 1998.
- [19] И. В. Широков, *ТМФ*, **123**:3 (2000), 407–423.

Поступила в редакцию 19.06.2010,
после доработки 10.11.2010