Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Козловский, Квантовые уравнения движения многомодовой генерации лазера с учетом пространственной зависимости взаимодействия атомов с полем, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 1, 96–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6627>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 06:04:19

© 2011 г.

А. В. Козловский*

КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МНОГОМОДОВОЙ ГЕНЕРАЦИИ ЛАЗЕРА С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТОМОВ С ПОЛЕМ

Получены уравнения движения для операторов электромагнитного поля a_q^+, a_q для трехуровневого многомодового лазера с учетом пространственной зависимости взаимодействия атомов с полем стоячей волны в резонаторе. Проведены расчеты и анализ динамики средних значений чисел фотонов в модах поля и функции корреляции мод поля. Исследовано влияние межмодовых корреляций на динамику установления стационарной генерации лазера. Установлено, что учет пространственной зависимости взаимодействия атомов с полем и межмодовых корреляций при исследовании средних значений чисел фотонов приводит к выявлению новых свойств лазерной генерации таких, как насыщение интенсивности излучения лазера в одномодовом режиме и генерация коротких импульсов света боковых подпороговых мод с амплитудами, зависящими от начального состояния поля в резонаторе.

Ключевые слова: квантовые уравнения Гейзенберга–Ланжевена, динамика многомодового лазера, межмодовые корреляции.

1. ВВЕДЕНИЕ

В условиях, когда ширина линии усиления лазера (скорость затухания поляризации активной среды) имеет порядок или превышает величину межмодового интервала собственных частот резонатора, генерация лазера носит многомодовый (многочастотный) характер. В реальных условиях даже при небольшом превышении порога генерации, когда накачка относительно невелика, могут быть возбуждены несколько собственных мод резонатора лазера. С ростом накачки число мод, участвующих в генерации и имеющих интенсивности, сопоставимые по величине между собой, быстро растет и может достигать больших значений (вплоть до нескольких сотен). Сложная динамика многомодовой генерации различных лазеров широко исследуется в настоящее время как теоретически, так и экспериментально. Теоретический анализ многомодовой генерации сопряжен с большими трудностями, связанными

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: kozlovsk@sci.lebedev.ru

с необходимостью учета межмодовых взаимодействий, а также пространственной зависимости взаимодействия атомов активной среды с пространственно неоднородным электромагнитным (ЭМ) полем в резонаторе, проявляющейся, в частности, в эффекте пространственного прожигания дырки. Полуклассическая теория многомодовой (многочастотной) генерации лазера была развита в работах [1]–[10], где рассматривались уравнения Максвелла для классического ЭМ-поля, а активная среда описывалась квантово-механически с помощью матрицы (оператора) плотности ансамбля двухуровневых атомов. Полностью квантово-механическая теория многомодовой генерации была рассмотрена в работах [1], [11]–[16]. Приближение одинаковых мод использовалось в работах [12]–[16]. Отметим, что в работах [1]–[4] в рамках полуклассической теории явление пространственного прожигания дырки в инверсии населенностей активной среды рассматривалось в качестве основной причины и необходимого условия возникновения устойчивой многомодовой генерации лазера с однородно уширенной линией.

Приближение одинаковых мод, широко используемое в теории многомодовой генерации лазера [12]–[16], позволяет в ряде случаев качественно оценить динамику генерации, однако в общем случае и для определенного диапазона значений параметров лазера такой анализ требует проведения более точных расчетов, принимающих во внимание как различие между значениями констант связи, так и различие скоростей потерь ЭМ-поля лазера из-за пропускания зеркал резонатора для различных мод поля, участвующих в генерации.

Целью настоящей работы является исследование на микроскопическом уровне роли пространственной зависимости взаимодействия атомов с полем в динамике многомодовой генерации лазера и изучение квантовых межмодовых корреляций поля многомодового лазера.

Формальный вид уравнений движения для операторов Q мод ЭМ-поля и N_A атомов среды, взаимодействующих между собой в присутствии внешней накачки, приведен в работах [1], [7], однако точные квантово-механические расчеты динамики поля многомодовых лазеров с полным учетом межмодовых взаимодействий до настоящего времени проведены не были. Явный вид уравнений движения для матрицы операторов числа фотонов вида $a_{q'}^+ a_{q''}$, $1 \leq q', q'' \leq Q$, полностью описывающих генерацию в общем многомодовом случае, получен нами в настоящей работе. Найденные уравнения позволяют проводить анализ динамики трехуровневых и двухуровневых лазеров класса А, для которых выполняется соотношение $\gamma \ll \Gamma_\perp, \Gamma_1, \Gamma_2$, где γ – скорость потерь поля через зеркала, $\Gamma_\perp$ – скорость затухания поляризации активных атомов, Γ_1, Γ_2 – скорости затухания населенностей нижнего и верхнего лазерных электронных состояний атомов соответственно, в рамках полной квантово-механической микроскопической теории взаимодействия ЭМ-поля со средой. Полученные в настоящей работе уравнения движения могут быть положены в основу последовательных квантово-механических расчетов шумовых характеристик излучения многомодового лазера.

2. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ МНОГОМОДОВОГО ЛАЗЕРА

Будем предполагать, что каждый атом активной среды в зависимости от его пространственного расположения в резонаторе обладает своим значением константы связи с каждой из Q мод ЭМ-поля внутри резонатора. Кроме того, мы считаем,

что скорости потерь ЭМ-поля из-за пропускания через зеркала резонатора различны для каждой из мод: $\gamma_{q'} \neq \gamma_{q''}$, $q' \neq q''$, $1 \leq q', q'' \leq Q$. Тогда система уравнений движения Гейзенберга–Ланжевена для n -го трехуровневого атома, взаимодействующего с многомодовым ЭМ-полем в присутствии некогерентной накачки и процессов диссипации, имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}a_q = -\left(\frac{\gamma_q}{2} + i\omega_q\right)a_q + \sum_{n=1}^{N_A} \mu_{q,n}\sigma_n + f_q(t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a_{q'}^+ a_{q''}) = & -\left(\frac{\gamma_{q'} + \gamma_{q''}}{2} + i(\omega_{q''} - \omega_{q'})\right)a_{q'}^+ a_{q''} + \\ & + \sum_{n=1}^{N_A} B_{q',q'',n} + f_{q'}^+(t)a_{q''} + a_{q'}^+ f_{q''}(t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_{1,n} = -\Gamma_1\sigma_{1,n} + \sum_{q=1}^Q B_{q,q,n} + F_{1,n}(t), \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_{2,n} = -\Gamma_2\sigma_{2,n} + w_{02} - \sum_{q=1}^Q B_{q,q,n} + F_{2,n}(t), \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_n = -(\Gamma + i\omega_A)\sigma_n + \sum_{q=1}^Q \mu_{q,n}a_q(\sigma_{2,n} - \sigma_{1,n}) + F_{\sigma_n}(t), \quad (5)$$

если

$$\begin{aligned} B_{q',q'',n}(t) \equiv \mu_{q',n}a_{q'}^+\sigma_n + \mu_{q'',n}\sigma_n^+a_{q''}, \quad B_{q,q,n}(t) = B_{q',q'',n}(t), \quad q' = q'' = q, \\ \Delta_{q,A} \equiv \omega_q - \omega_A, \end{aligned} \quad (6)$$

где a_q^+ (a_q) – операторы рождения (уничтожения) фотонов q -й моды электромагнитного поля резонатора, $a_q^+ a_{q''}$ – перекрестные операторы различных мод поля ($q'' \neq q'$), $a_q^+ a_q$ – операторы числа фотонов в отдельной моде поля ($q = q'' = q'$); $\sigma_{1,n} = (|1\rangle\langle 1|)_n$ и $\sigma_{2,n} = (|2\rangle\langle 2|)_n$ – операторы населенностей нижнего $|1\rangle$ и верхнего $|2\rangle$ лазерных уровней атомов, $\sigma_n = (|2\rangle\langle 1|)_n$ – оператор атомной поляризации (наведенного дипольного момента) n -го активного атома среды, находящегося в точке z_n внутри резонатора; N_A – полное число активных атомов среды, w_{02} – скорость накачки верхнего лазерного состояния $|2\rangle$, возбуждаемого из нижнего электронного состояния трехуровневой системы $|0\rangle$, ω_A – частота атомного перехода. Содержащиеся в уравнениях коэффициенты диссипации γ_q , Γ_1 , Γ_2 , $\Gamma = \Gamma_{ph} + (\Gamma_1 + \Gamma_2)/2$ (Γ_{ph} – константы релаксации фазы дипольного момента атома в результате упругих столкновений) заключают в себе информацию о внешних резервуарах и выражаются через интегралы от корреляторов операторов, относящихся к резервуарам. Операторы $f(t)$, $F(t)$, содержащиеся в правых частях уравнений (1)–(5), представляют собой ланжевенновы источники квантового шума, обусловленного взаимодействием наблюдаемой системы с внешними резервуарами. Вследствие принятого предположения о марковости ланжевенновы источники обладают δ -коррелированными вторыми моментами, в общем случае зависящими от времени. Статистические свойства

случайных ланжевенновых операторов обеспечивают сохранение во времени коммутационных соотношений операторов Гейзенберга системы в условиях ее динамики с учетом процессов флуктуации и диссипации [1], [17].

В дальнейших расчетах мы будем предполагать, что скорости потерь поля и констант связи атомов с полем для всех мод поля различны для разных собственных мод резонатора лазера. Для скоростей потерь излучения через зеркала резонатора для различных мод нами используется следующая зависимость от частот поля:

$$\gamma_q \propto \omega_q^3, \quad q = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Кубическая зависимость потерь поля γ_q вследствие выхода ЭМ-поля через зеркало резонатора следует из квантово-механического соотношения $\gamma_q = 2\pi\rho(\omega_q)|g_q|^2$, где $\rho(\omega_q)$ – плотность состояний поля в пустом пространстве [18].

Параметр связи $\mu_{q,n} \equiv \mu_q(z_n)$, входящий в уравнения движения для n -го атома, взаимодействующего с q -й продольной модой поля резонатора Фабри–Перо, имеет вид

$$\mu_{q,n} = \sqrt{\frac{2}{V}} g_q \sin(k_q z_n), \quad k_q = \frac{\omega_q}{c}, \quad (8)$$

$$g_q = \sqrt{\frac{2\pi\omega_q}{\hbar}} d_{12}, \quad (9)$$

где V – объем резонатора, d_{12} – проекция вектора дипольного матричного элемента перехода между лазерными уровнями атома на направления вектора поляризации ЭМ-поля, ω_q – частота q -й моды резонатора. Таким образом, параметры связи атома с полем имеют зависимость от частоты моды вида $\sqrt{\omega_q}$. Влияние отличий указанных величин для разных мод поля на динамику лазера велико, и пренебрежение этими отличиями, составляющими в оптическом спектре доли процента, может привести к существенной погрешности при расчете интенсивностей генерируемых мод. Роль этих отличий возрастает в случае малых размеров резонатора, а также в случае большого числа мод, участвующих в генерации лазера.

Проведем замену быстроосциллирующих переменных (операторов) системы на медленные переменные с помощью преобразования следующего вида: $a_q = \tilde{a}_q e^{-i\omega_q t}$, $\sigma_n = \sum_{q'=1}^Q \tilde{\sigma}_{n,q'} e^{-i\omega_{q'} t}$, $F_{\sigma_n}(t) = \sum_{q'=1}^Q F_{\sigma_n,q'} e^{-i\omega_{q'} t}$, $F_q(t) = \tilde{f}_q(t) e^{-i\omega_q t}$. Знак $\sim$ над медленными операторами в дальнейшем будем в записи опускать.

В условиях, когда скорости затухания поляризации среды Γ много больше скоростей затухания атомных населенностей Γ_1 и Γ_2 , а также скорости затухания поля γ_q , в уравнениях движения для медленных операторов может быть проведено адиабатическое исключение поляризации атома. Приравнявая производную по времени нулю, находим

$$\sigma_{n,q}(t)|_{\text{ad}} \approx \frac{C_q}{\Gamma} \mu_{q,n} a_q d_n(t) + \frac{F_{\sigma_n,q}}{\Gamma}, \quad (10)$$

где

$$C_q \equiv \frac{1}{1 - (\Delta_q/\Gamma)i}, \quad \Delta_q \equiv \omega_q - \omega_A. \quad (11)$$

Тогда для операторов поля получаем следующую систему уравнений, содержащую в правой части оператор инверсии населенностей атома $d_n(t) \equiv \sigma_{2,n}(t) - \sigma_{1,n}(t)$:

$$\frac{d}{dt}a_q = -\frac{\gamma_q}{2}a_q + \sum_{n=1}^{N_A} \mu_{q,n} \sum_{q'=1}^Q \frac{C_{q'}}{\Gamma} \mu_{q',n} a_{q'} d_n(t) e^{i\Delta_{q,q'}t} + \Phi_q(t), \quad (12)$$

$$\Delta_{q,q'} \equiv \omega_q - \omega_{q'}.$$

Рассмотрим теперь уравнения для атомных переменных, которые с учетом формулы (10) могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\sigma_{1,n} = -\Gamma_1\sigma_{1,n} + \sum_{q=1}^Q B_{q,n} + F_{1,n}(t), \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt}d_n = -\Gamma_2 d_n + w_{02} + (\Gamma_1 - \Gamma_2)\sigma_{1,n} - 2 \sum_{q=1}^Q B_{q,n} + F_{d,n}(t), \quad (14)$$

где

$$B_{q,n}(t) \equiv \frac{\mu_{q,n}}{\Gamma} \sum_{q'=1}^Q \mu_{q',n} d_n(t) (C_{q'} a_q^+ a_{q'} e^{i\Delta_{q,q'}t} + C_{q'}^* a_q^+ a_{q'} e^{-i\Delta_{q,q'}t}). \quad (15)$$

Исключим из дальнейшего анализа оставшиеся атомные переменные с помощью метода адиабатического исключения, что возможно при $\Gamma_1, \Gamma_2 \gg \gamma_q$ (лазер класса А). Из уравнений (13) и (14) получаем

$$\sigma_{1,n}(t)|_{\text{ad}} \approx \frac{\sum_{q=1}^Q B_{q,n} + F_{1,n}}{\Gamma_1}, \quad (16)$$

$$d_n(t)|_{\text{ad}} \approx \frac{w_{02} + F_{d,n}(t)}{\Gamma_2(1 + (1/\bar{\Gamma}) \sum_{q=1}^Q S_{q,n})} \approx \frac{w_{02}}{\Gamma_2} \left(1 - \frac{1}{\bar{\Gamma}} \sum_{q=1}^Q S_{q,n}\right) + \Phi_{q,n}(t), \quad (17)$$

где $S_{n,q}(t) \equiv B_{q,n}(t)/d_n(t)$, $\bar{\Gamma} \equiv \Gamma_1\Gamma_2/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$.

Отметим, что последнее равенство в формуле (17) выполняется при условии $\sum_{q=1}^Q S_{q,n} \ll \bar{\Gamma}$, справедливым в случае достаточно небольших средних значений чисел фотонов, когда $\sum_{q=1}^Q \langle a_q^+ a_q \rangle \ll \bar{\Gamma}\Gamma/\mu_{q,n}^2$.

Подставив выражение (17) в формулу (12) для операторов уничтожения поля, найдем, что

$$\frac{d}{dt}a_q = -\frac{\gamma_q}{2}a_q + \frac{w_{02}}{\Gamma_2} \sum_{n=1}^{N_A} \mu_{q,n} \sum_{q'=1}^Q \frac{C_{q'}}{\Gamma} \mu_{q',n} \left(1 - \frac{1}{\bar{\Gamma}} \sum_{q_1=1}^Q S_{q,n}\right) a_{q'} e^{i\Delta_{q,q'}t} + \Phi_q(t). \quad (18)$$

Уравнение (18) и его эрмитово сопряженное для операторов рождения поля позволяют записать уравнения движения для матрицы билинейных полевых операторов в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}a_{q'}^+ a_{q''} = -\frac{\gamma_{q'} + \gamma_{q''}}{2} a_{q'}^+ a_{q''} + \frac{w_{02}}{\Gamma_2} \left\{ \sum_{n=1}^{N_A} \sum_{q_1=1}^Q [\mu_{q',n} \mu_{q,n} C_{q_1}^* e^{-i\Delta_{q',q_1}t} a_{q_1}^+ a_{q''} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_{q'',n} \mu_{q_1,n} C_{q_1} e^{i\Delta_{q'',q_1} t} a_{q'}^+ a_{q_1}] - \\
 & - \frac{1}{\Gamma} \sum_{n=1}^{N_A} \sum_{q_1=1}^Q \sum_{q_2=1}^Q \Pi_{q_1,q_2} [\mu_{q',n} \mu_{q_1,n} C_{q_1}^* S_{q_2,n}^* a_{q_1}^+ a_{q'} e^{-i\Delta_{q',q_1} t} + \\
 & + \mu_{q'',n} \mu_{q_1,n} C_{q_1} S_{q_2,n} a_{q'}^+ a_{q_1} e^{i\Delta_{q'',q_1} t}] \Big\} + \Phi_{q',q''}(t). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Выражения для операторов случайных источников $\Phi_{q',q''}(t)$, содержащихся в формуле (19), приведены в приложении.

Поскольку число активных атомов в резонаторе лазера велико, заменим в формуле (19) суммирование по атомам на интегрирование по объему резонатора, заполненному атомами, т.е.

$$\sum_{n=1}^{N_A} \dots \rightarrow \frac{N_A}{(V/S)} \int_0^L dz \dots = \frac{N_A}{L} \int_0^L dz \dots, \quad (20)$$

где L – длина резонатора вдоль продольной оси z , S – площадь поперечного сечения резонатора.

Уравнения движения (19) для квантово-механических средних значений билинейных полевых операторов $n_{q',q''} \equiv \langle a_{q'}^+ a_{q''} \rangle$ при замене суммирования по всем атомам интегрированием по пространственным координатам после длинных вычислений приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} n_{q',q''} = & - \frac{\gamma_{q'} + \gamma_{q''}}{2} n_{q',q''} + \\
 & + A \left\{ \sum_{q=1}^Q [I_{q',q} \Pi_{q',q} C_q^* n_{q,q''} e^{-i\Delta_{q',q} t} + I_{q'',q} \Pi_{q'',q} C_q n_{q',q} e^{-i\Delta_{q'',q} t}] - \right. \\
 & - \frac{1}{\Gamma} \sum_{q=1}^Q \sum_{q_1=1}^Q \sum_{q_2=1}^Q \Pi_{q_1,q_2} [I_{q',q,q_1,q_2} \Pi_{q',q} C_{q_1}^* C_{q_2}^* n_{q,q''} n_{q_1,q_2} e^{-i(\Delta_{q_1,q_2} - \Delta_{q',q})t} + \\
 & + I_{q',q,q_1,q_2} \Pi_{q',q_1} C_{q_1}^* C_{q_2} n_{q,q''} n_{q_2,q_1} e^{i(\Delta_{q_1,q_2} + \Delta_{q',q})t} + \\
 & + I_{q'',q,q_1,q_2} \Pi_{q'',q_1} C_{q_1} C_{q_2} n_{q',q} n_{q_1,q_2} e^{i(\Delta_{q_1,q_2} + \Delta_{q'',q})t} + \\
 & \left. + I_{q'',q,q_1,q_2} \Pi_{q'',q_1} C_{q_1} C_{q_2}^* n_{q',q} n_{q_2,q_1} e^{-i(\Delta_{q_1,q_2} - \Delta_{q'',q})t}] \right\}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

где

$$\Pi_{\alpha,\beta} \equiv \frac{2g_\alpha g_\beta}{\Gamma}, \quad \alpha, \beta = q, q', q'', q_1, q_2, \quad (22)$$

$$A \equiv \frac{R}{2\Gamma_2}, \quad R \equiv w_{02} N_A, \quad (23)$$

$$I_{i,j} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L dz \sin(k_i z) \sin(k_j z), \quad k_i = \frac{\pi c}{L} i, \quad k_j = \frac{\pi c}{L} j, \quad (24)$$

$$I_{i,j,k,l} \equiv \frac{1}{L} \int_0^L dz \sin(k_i z) \sin(k_j z) \sin(k_k z) \sin(k_l z), \quad (25)$$

c – скорость света в среде, $\Delta\omega = \pi c/L$ – межмодовый интервал частот.

Найдя интегралы (24) и (25), необходимые для вычисления слагаемых, входящих в однократную и трехкратную суммы, содержащиеся в уравнениях (21), получаем явный вид уравнений движения. Эти уравнения описывают динамику изменения чисел фотонов многомодового лазера (диагональные элементы матрицы $n_{q,q}$), а также недиагональных членов билинейных по операторам полей, ответственных за когерентное взаимодействие поля с атомами и межмодовые корреляции. Полученная нами система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_{q',q''} = & -\frac{\gamma_{q'} + \gamma_{q''}}{2} n_{q',q''} + A[(\Pi_{q',q'} C_{q'}^* + \Pi_{q'',q''} C_{q''}^*) n_{q',q''}] - \\ & - B \left\{ \sum_{q=1}^Q \{ [\Pi_{q',q}^2 C_q^* (C_{q'}^* + C_q) + \Pi_{q,q''}^2 C_q (C_{q''} + C_q^*)] n_{q',q} n_{q,q''} + \right. \\ & + (C_q^* + C_q) [\Pi_{q',q}^2 C_{q'}^* + \Pi_{q'',q}^2 C_{q''}^*] n_{q',q''} n_{q,q} \} + \\ & + \sum_{q_1,q_2=1}^Q \Pi_{q_1,q_2} [(\Pi_{q'+q_1-q_2,q'} C_{q'+q_1-q_2}^* n_{q'+q_1-q_2,q''} + \\ & + \Pi_{q''+q_2-q_1,q''} C_{q''+q_2-q_1} n_{q',q''+q_2-q_1}) C_{q_2}^* n_{q_2,q_1} + \\ & + (\Pi_{q'+q_2-q_1,q'} C_{q'+q_2-q_1}^* n_{q'+q_2-q_1,q''} + \\ & \left. + \Pi_{q''+q_1-q_2,q''} C_{q''+q_1-q_2} n_{q',q''+q_1-q_2}) C_{q_2} n_{q_1,q_2}] \right\} + \Phi_{q',q''}(t), \quad (26) \end{aligned}$$

где $B \equiv R/(8\bar{\Gamma}\Gamma_2)$. При выводе формулы (26) в рамках приближения вращающейся волны мы пренебрегли быстроосциллирующими членами, обладающими временными зависимостями вида $e^{i(\omega_q - \omega_{q'})t}$, $q \neq q'$, $e^{2i\omega_q t}$ и т.д. Система уравнений (26) чрезвычайно сложна и решалась нами численно. В приближении балансных уравнений, т.е. в предположении, что $n_{q',q''} \equiv \langle a_{q'}^+ a_{q''} \rangle = 0$ для всех $q' \neq q''$, система (26) значительно упрощается, и оказывается возможным найти ее стационарное решение для диагональных членов $n_{q',q'} \equiv \langle a_{q'}^+ a_{q'} \rangle$ аналитически.

3. ДИНАМИКА ЧИСЕЛ ФОТОНОВ ПРИ МНОГОМОДОВОЙ ГЕНЕРАЦИИ

Численное решение системы уравнений (26) при числе мод $Q = 7$ проводилось нами для различных значений соотношения между $\Delta\omega$ – межмодовым интервалом частот собственных мод резонатора и Γ – скоростью затухания поляризации среды (ширины линии усиления): $\alpha \equiv \Delta\omega/\Gamma$. В качестве начальных условий (при $t = 0$) были приняты значения чисел фотонов, соответствующие тепловому исходному состоянию поля в резонаторе: $n_{q,q}(t = 0) \sim 10^{-5}$ фотонов для всех мод. Для недиагональных средних значений нами использовались различные значения

$$n_{q',q''}(t = 0) = c_1 + ic_2, \quad n_{q'',q'}(t = 0) = n_{q',q''}^*(t = 0) \quad (27)$$

для всех $q' \neq q''$, $1 \leq q' \leq Q$, $q' + 1 \leq q'' \leq Q$, где c_1 и c_2 – действительные числа, удовлетворяющие операторному неравенству Коши:

$$|n_{q',q''}|^2 = c_1^2 + c_2^2 \leq n_{q',q'} n_{q'',q''}. \quad (28)$$

Предполагалось также, что центральная мода поля для $q_0 = (Q + 1)/2$ находится в резонансе с атомным переходом активной среды с частотой $\omega_A = 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

Расчеты показали, что порог генерации для центральной моды $\xi_0 = R/R_{\text{th}} = 1$ имеет место при $R_{\text{th}} = \Gamma_2 \gamma_{q=0} / \Pi_{q=0, q=0}$, что полностью соответствует теории одномодового лазера без учета пространственной зависимости взаимодействия атомов с полем.

Нами был проведен также расчет динамики развития генерации многомодового лазера для семи мод поля (зависимость чисел фотонов от времени) при малом превышении порога $\xi_0 = 1.125$ (12% превышения порога генерации центральной моды) в случае $\alpha = 0.2 \ll 1$. Оказалось, что кроме центральной моды, испытывающей наибольшее усиление, возбуждается и ближайшая к центральной моде “красная” боковая мода, интенсивность которой в $\sim 10^3$ раз ниже интенсивности центральной моды. При этом в течение интервала времени $\sim 1 \text{ мс}$ числа фотонов в боковых модах $n_{\pm 1}$ оказываются очень близкими по величине между собой, после чего “синяя” мода резко затухает. Причиной того, что первой подключается к стационарной генерации “красная” мода, является то, что скорость потерь поля через зеркала для “синей” моды больше, чем соответствующая величина для “красной” моды (см. формулу (7)). Зависимость от времени корреляционных функций и $n_{-1, +1} \equiv \text{Re}\langle a_{-1}^+ a_{+1} \rangle$ для тех же значений параметров лазера $n_{-1, 0} \equiv \text{Re}\langle a_{-1}^+ a_0 \rangle$ обладает резким максимумом на начальном этапе развития генерации и в дальнейшем быстро затухает до нуля. Корреляции между боковыми модами, характеризующиеся величиной $\text{Re}\langle a_{-1}^+ a_{+1} \rangle$, в данном случае значительно меньше по величине, чем их корреляции с центральной модой, но затухают до нуля значительно медленнее.

Расчет динамики средних чисел фотонов при незначительно большем превышении порога $\xi_0 = 1.15$ (15% превышения порога генерации центральной моды) показывает, что малое увеличение накачки (на 3%) значительно меняет картину установления стационарных средних значений чисел фотонов. В генерации уже участвуют обе моды $M = \pm 1$ с почти одинаковыми интенсивностями, каждая из которых примерно на порядок возрастает по величине по сравнению со случаем, рассмотренным выше.

Кроме резкого изменения чисел фотонов в модах ± 1 при столь незначительном увеличении скорости накачки, еще более заметно меняется динамика межмодовых корреляций. Корреляция $\text{Re}\langle a_{-1}^+ a_0 \rangle$ испытывает резкий всплеск на начальном этапе развития генерации, тогда как $\text{Re}\langle a_{-1}^+ a_{+1} \rangle$ достигает большой величины $\text{Re}\langle a_{-1}^+ a_{+1} \rangle \gg \text{Re}\langle a_{-1}^+ a_0 \rangle$, и быстро затухает до нуля за время $\sim 10^{-4} \text{ с}$, что указывает на появление в этом случае значительной корреляции между боковыми модами. Расчеты, проведенные для тех же значений параметров, показали, что при значительном превышении порога ($\xi_0 \approx 4$) все семь мод, принимаемых во внимание в расчете, участвуют в генерации в стационарных условиях, причем числа фотонов для всех мод оказываются близкими по величине. Следует принять во внимание, что при больших превышениях порога, когда выполняется условие генерации для $Q > 7$ мод, расчет с фиксированным числом мод $Q = 7$ становится некорректным. Вследствие этого расчет динамики лазера с помощью системы уравнений (26) для Q мод может считаться достаточно точным только в том случае, когда в стационарных условиях либо в $(Q - 1)$ -й моде число фотонов отлично от нуля, а в Q -й моде равно нулю, либо если число фотонов в Q -й моде много меньше числа фотонов в остальных $Q - 1$ модах (т.е. вблизи порога $\xi \approx \xi_Q$ для Q -й моды).

Рис. 1. Зависимости чисел фотонов в $Q = 7$ модах поля $n_{\mp M} \equiv \langle a_q^+ a_q \rangle$, $M = 0$ ($q = 4$), ± 1 ($q = 3, 5$), ± 2 ($q = 2, 6$), ± 3 ($q = 1, 7$) от времени для следующих значений параметров лазера: $\alpha \equiv \Delta\omega/\Gamma = 2$, $\Delta\omega = 2 \cdot 10^{11} \text{с}^{-1}$, $\Gamma_1 = 10^9 \text{с}^{-1}$, $\Gamma_2 = 10^6 \text{с}^{-1}$, $\gamma_{q=1} = 10^7 \text{с}^{-1}$, $\Pi_{q=1,q=1} = 1 \text{с}^{-1}$, $\xi = 100$, и начальных условий $n_{q,q}(t=0) = 10^{-5}$, $n_{q',q''}(t=0) = 3 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6}i$, $n_{q'',q'}(t=0) = n_{q',q''}^*(t=0)$.

Случай, когда ширина линии усиления лазера много больше, чем межмодовый интервал частот резонатора ($\alpha \ll 1$), наиболее благоприятен для создания многомодовой генерации.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\alpha > 1$ и реализация многомодовой генерации затруднена. В таких условиях возбуждение боковых мод ± 2 требует очень высокой скорости накачки активной среды. На рис. 1 показано, что стационарная генерация в этих модах со средними стационарными значениями чисел фотонов $n_{\pm 2} \approx n_0$ возможна при $\xi_0 = 100$.

Как видно из рис. 1, при таком уровне накачки число фотонов в центральной моде заметно меньше их числа в ближайших к ней боковых модах. Установление стационарного числа фотонов в модах ± 2 происходит с задержкой по сравнению с установлением стационарного состояния для мод ± 1 на время $\Delta t \approx 30 \text{ мкс}$. Видно, что среднее число фотонов в центральной моде значительно уменьшается при установлении стационарного состояния мод ± 1 и возникновении максимума числа фотонов в подпороговых модах в момент времени $t \approx 400 \text{ нс}$. Числа фотонов в подпороговых модах ± 3 , прежде чем устремиться к нулю, резко возрастают при $t_1 \approx 350 \text{ нс}$ и $t_2 \approx 25 \text{ мс}$, образуя два импульса с длительностями $\Delta t_1 \approx 300 \text{ нс}$ и $\Delta t_2 \approx 20 \text{ мкс}$. Корреляции между модами ± 2 , ± 3 также возрастают в момент пиковых величин чисел фотонов в этих модах. Появление импульса света в момент времени t_1 сопровождается резким возрастанием корреляции $n_{+1,-1}$ в этот момент времени (см. рис. 2); в момент времени t_2 , когда возникает второй импульс света на частотах мод ± 3 , имеет место резкий рост корреляций $n_{+2,-2}$ (см. рис. 3). Межмодовые корреляции в момент установления первого импульса возрастают также между модами 3–3 ($n_{+3,-3}$ на рис. 4) и модами 0–2 ($n_{0,+2}$ на рис. 3). Расчеты указывают, что величина максимумов чисел фотонов в этих импульсах боковых мод находится в прямой зависимости от начальных условий для недиагональных членов $\langle n_{q',q''}(t=0) \rangle$, $q' \neq q''$, и даже небольшое увеличение модуля их значений приво-

Рис. 2. Зависимости действительных частей функций межмодовых корреляций чисел фотонов для $Q = 7$, $\text{Re}(n_{M=0, M=\pm 1}) \equiv \text{Re}\langle a_{q'}^+ a_{q''} \rangle_{q'=(Q+1)/2, q''=(Q+1)/2 \mp 1}$ (штриховая линия) и $\text{Re}(n_{M=-1, M=+1}) \equiv \text{Re}\langle a_{q'}^+ a_{q''} \rangle_{q'=(Q+1)/2-1, q''=(Q+1)/2+1}$ (непрерывная линия) от времени. Параметры лазера те же, что на рис. 1.

дит к большому росту амплитуд импульсов света, генерируемых в боковых модах резонатора.

Проведенные нами расчеты динамики многомодового лазера в балансном приближении при $\langle n_{q', q''}(t) \rangle = 0$, $q' \neq q''$, показали, что учет этих недиагональных членов в системе уравнений (26) приводит к тем же значениям стационарных средних значений чисел фотонов в модах. В то же время при учете недиагональных членов и межмодовых корреляций наблюдаются сложная динамика чисел фотонов в процессе установления стационарной генерации и появление пиков интенсивности в подпороговых модах, обсуждавшихся выше. В приближении балансных уравнений числа фотонов в подпороговых модах монотонно убывают со временем к нулю.

Расчеты, проведенные нами, показали, что если в стационарных условиях в генерации участвуют Q мод, то с ростом накачки вплоть до ее пороговой величины, при которой в стационарных условиях возникает генерация мод с большей отстройкой частоты от частоты атомного перехода, т.е. мод $Q + 1$ и $Q + 2$, симметрично отстоящих от центральной моды, числа фотонов во всех Q модах принимают очень близкие между собой значения, и различие может составлять величину $\sim 1\%$. Таким образом, приближение одинаковых мод выполняется с высокой точностью для достаточно большого диапазона изменения параметра превышения порога накачкой ξ . При небольшом превышении порога генерации моды $Q + 1$ и $Q + 2$, включающиеся в генерацию, содержат значительно меньшие числа фотонов, чем остальные моды, но при дальнейшем увеличении накачки числа фотонов во всех модах выравниваются. Отмеченная закономерность позволяет сделать вывод о том, что приближение одинаковых мод, часто используемое в расчетах, оказывается правомерным для широкого диапазона значений параметра накачки ξ , но вносит значительную погрешность в области значений ξ вблизи последовательности порогов возбуждения боковых мод.

Рис. 3. Зависимости действительных частей функций межмодовых корреляций чисел фотонов $\text{Re}(n_{M=0,M=-2})$ и $\text{Re}(n_{M=2,M=-2})$ от времени. Параметры лазера те же, что на рис. 1.

Рис. 4. Зависимость $\text{Re}(n_{M=+3,M=-3})$ от времени. Параметры лазера те же, что на рис. 1.

Уравнения движения для диагональных членов $n_{q,q} \equiv \langle a_q^+ a_q \rangle$, входящих в систему уравнений (26), в предположении равенства нулю недиагональных членов $n_{q',q''} \equiv \langle a_{q'}^+ a_{q''} \rangle$, $q' \neq q''$, представляют собой часто используемые балансные уравнения для многомодового лазера. В этих условиях система (26) приводится к виду

$$\frac{d}{dt} n_q = -\gamma_q n_q + AL_q \Pi_q n_q - 3BL_q^2 \Pi_q^2 n_q^2 - BL_q \Pi_q n_q \sum_{q' \neq q} L_{q'} \Pi_{q'} n_{q'}, \quad (29)$$

где $n_x \equiv n_{x,x}$, $\Pi_x \equiv \Pi_{x,x}$, $x = q, q'$,

$$L_x \equiv \frac{1}{1 + [(\omega_x - \omega_A)/\Gamma]^2}. \quad (30)$$

Для случая одной моды из выражения (29) находим следующую формулу для стационарного значения среднего числа фотонов:

$$\bar{n} = \frac{\bar{\Gamma}}{\Pi} \frac{2}{3\xi} (\xi - 1), \quad \xi = \frac{\Pi R}{\gamma \Gamma_2}. \quad (31)$$

Стандартные расчеты величины $\bar{n}$, выполненные для рассматриваемой нами трехуровневой схемы одномодового лазера без учета пространственной зависимости взаимодействия активных атомов с полем, приводят к выражению [1], [14], [17]

$$\bar{n} = \frac{\bar{\Gamma}}{\Pi} (\xi - 1). \quad (32)$$

Сравнивая формулы (31) и (32), нетрудно убедиться: наши расчеты показывают, что учет пространственной неоднородности поля в резонаторе (прожигание дырки) приводит к появлению эффекта насыщения числа фотонов в резонаторе, так как из формулы (31) очевидно следует, что

$$\bar{n} \rightarrow \frac{2\bar{\Gamma}}{3\Pi} \quad (33)$$

при $\xi \rightarrow \infty$, тогда как согласно выражению (32) среднее число фотонов линейно растет с увеличением накачки.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе получены квантово-механические стохастические уравнения движения (26) для чисел фотонов в модах многомодового лазера, которые позволяют исследовать динамику генерации многомодового лазера с учетом на микроскопическом уровне пространственной зависимости взаимодействия атомов активной среды с ЭМ-полем в резонаторе. Полученные уравнения могут быть использованы для расчетов квантовых флуктуаций чисел фотонов излучения многомодовых лазеров. Проведены расчеты и анализ динамики средних значений чисел фотонов в модах поля $\langle a_q^+ a_q \rangle$ и функции корреляции $\langle a_{q'}^+ a_{q''} \rangle$, $q' \neq q''$, мод поля. Исследовано влияние межмодовых корреляций на динамику установления стационарной генерации лазера.

Показано, что билинейные по операторам поля члены $\langle a_{q'}^+ a_{q''}(t) \rangle$, $q' \neq q''$, имеют важное значение при изучении динамики установления многомодовой генерации лазера, но не влияют на средние стационарные значения чисел фотонов в отдельных модах. Таким образом, приближение балансных уравнений в рассмотренных нами условиях многомодовой генерации оказывается точным при расчете стационарных средних чисел фотонов.

Мы показали также, что учет пространственной зависимости взаимодействия атомов с полем и эффект прожигания пространственной дырки в инверсии населенностей приводит к появлению эффекта насыщения числа фотонов при одномодовой генерации, тогда как стандартная теория трехуровневого одномодового лазера без учета пространственной неоднородности предсказывает линейный рост числа фотонов при увеличении накачки.

Отмечается, что динамика чисел фотонов в подпороговых модах качественно зависит от начальных условий для недиагональных членов средних значений билинейных операторов поля в резонаторе $\langle n_{q',q''}(t=0) \rangle$, $q' \neq q''$. Многомодовый лазер в переходном режиме до установления его стационарного состояния в отношении его подпороговых мод действует как мощный усилитель слабого поля, присутствующего в резонаторе в этих модах в момент времени $t = 0$. При этом с ростом величин $\langle n_{q',q''}(t=0) \rangle$ усиление резко нелинейно возрастает, и оказывается возможной генерация коротких импульсов интенсивного поля на частотах подпороговых мод при максимально возможных значениях $\langle n_{q',q''}(t=0) \rangle$, допускаемых неравенством Коши (28). Как показали расчеты, вблизи максимальных возможных значений начальных условий

$$|\langle n_{q',q''}(t=0) \rangle|^2 \approx \langle n_{q',q'}(t=0) \rangle \langle n_{q'',q''}(t=0) \rangle, \quad (34)$$

когда усиление боковых подпороговых мод становится максимально высоким, решение системы (26) становится неустойчивым. Отметим, что значения начальных условий для межмодовых корреляций $\langle n_{q',q''}(t=0) \rangle$ определяются квантовыми состояниями поля в резонаторе в начальный момент времени, и, следовательно, динамика чисел фотонов в подпороговых модах непосредственно зависит от квантово-механических свойств света при $t = 0$. Максимально возможное усиление присутствует при выполнении условий (34), т.е. если исходное поле находится в когерентном состоянии.

В случае, когда $\alpha = \Delta\omega/\Gamma \gg 1$, для возбуждения боковых мод и достижения стационарного режима многомодовой генерации необходимо чрезвычайно большое превышение порога одномодовой генерации ($\xi \sim 10^2$ при $\alpha \sim 10$). В этих условиях реализуется режим, при котором стационарные средние значения числа фотонов в боковых модах превышают число фотонов в центральной моде и $n_{\mp M} > n_{\mp M-1}$.

Отмечаемые явления динамики многомодовой генерации лазера, по нашему мнению, присущи не только лазерам класса А, но также и лазерам с другими соотношениями между константами диссипации, по крайней мере в условиях, когда возможно пренебрежение явлением релаксационных осцилляций при $\xi > \gamma_q/\Gamma_2$ для всех q . Заключение, сделанные в настоящей работе относительно стационарных средних чисел фотонов в модах поля, остаются справедливыми для всех классов лазеров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Операторы случайных источников Ланжевена, входящие в уравнения движения (1)–(5), в проводимых нами расчетах предполагаются дельта-коррелированными и обладающими нулевыми средними в рамках марковского приближения [17]. Кроме того, предполагается, что операторы Ланжевена для атомных переменных, входящие в уравнения (3)–(5), не коррелируют между собой для различных атомов, и, аналогично, случайные операторы для различных мод поля также не коррелируют между собой. В результате громоздких расчетов, сходных с выполненными в работах [14]–[16], для операторов случайных источников, входящих в уравнения (28), получены следующие выражения:

$$\begin{aligned}\Phi_{q',q''}(t) &= \Phi_{q'}^+(t)a_{q'',c}(t) + a_{q',c}^+(t)\Phi_{q''}(t), \\ a_{q'',c}(t) &\equiv a_{q''}(t - \varepsilon), \quad a_{q',c}^+(t) \equiv a_{q',c}^+(t - \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,\end{aligned}\tag{П.1}$$

$$\Phi_x(t) = F_x(t) + \sum_{n=1}^{N_A} \mu_{x,n} \sum_{q=1}^Q C_q \mu_{q,n} a_{q,c}(t) e^{i\Delta_{x,q}t} \Phi_{d_n}(t), \quad x = q', q'',\tag{П.2}$$

$$F_x(t) = f_x(t) + \sum_{n=1}^{N_A} \mu_{x,n} \sum_{q=1}^Q C_q e^{i\Delta_{x,q}t} F_{\sigma_n,q}(t),\tag{П.3}$$

$$\Phi_{d_n}(t) = F_{d_n}(t) - 2F_{B_n}(t),\tag{П.4}$$

$$\begin{aligned}F_{B_n}(t) &= \sum_{q_1=1}^Q \mu_{q_1,n} \sum_{q_2=1}^Q \mu_{q_2,n} [C_{q_2} a_{q_1,c}^+(t) e^{i\Delta_{q_2,q_1}t} F_{\sigma_n,q_2}(t) + \\ &+ C_{q_2}^* a_{q_2,c}(t) e^{-i\Delta_{q_2,q_1}t} F_{\sigma_n,q_2}^+(t)].\end{aligned}\tag{П.5}$$

Коэффициенты диффузии $\langle 2D_{q',q'',q''',q''''} \rangle$ стохастических уравнений (26) вида $\langle \Phi_{q',q''}^+(t) \Phi_{q''',q''''}(t') \rangle = \langle 2D_{q',q'',q''',q''''} \rangle \delta(t - t')$, необходимые для вычисления флуктуаций чисел фотонов в модах лазера, могут быть найдены в рамках стандартного подхода [14]–[17].

Список литературы

- [1] Г. Хакен, *Лазерная светодинамика*, Мир, М., 1988.
- [2] В. Лэмб, *Квантовая оптика и квантовая радиофизика*, ред. К. де Витт, А. Бланден, К. Коэн-Таннуджи, Мир, М., 1966.
- [3] C. L. Tang, H. Statz, G. A. de Mars, *J. Appl. Phys.*, **34**:8 (1963), 2289–2295.
- [4] H. Statz, C. L. Tang, J. M. Lavine, *J. Appl. Phys.*, **35**:9 (1964), 2581–2585.
- [5] W. E. Lamb, Jr., *Phys. Rev. A*, **134**:6A (1964), A1429–A1450.
- [6] W. Brunner, R. Fisher, H. Paul, *Appl. Phys. B*, **33**:3 (1984), 187–193.
- [7] W. Brunner, R. Fisher, H. Paul, *J. Opt. Soc. Amer. B*, **2**:1 (1985), 202–210.
- [8] L. A. Westling, M. G. Raymer, *J. Opt. Soc. Amer. B*, **3**:6 (1986), 911–917.
- [9] H. Fu, H. Haken, *Phys. Rev. A*, **43**:5 (1991), 2446–2454.
- [10] S. E. Hodges, M. Munroe, J. Cooper, M. G. Raymer, *J. Opt. Soc. Amer. B*, **14**:1 (1997), 191–199.

- [11] H. Haken, H. Sauermann, *Z. Phys.*, **173**:3 (1963), 261–275.
- [12] D. E. MacCumber, *Phys. Rev.*, **141**:1 (1966), 306–322.
- [13] В. С. Летохов, *ЖЭТФ*, **53** (1967), 1442–1447.
- [14] А. В. Козловский, *ЖЭТФ*, **104**:3 (1993), 2995–3019.
- [15] A. V. Kozlovskii, *Laser Phys.*, **10**:4 (2000), 907–915.
- [16] А. В. Козловский, *УФН*, **177**:12 (2007), 1345–1360.
- [17] М. Лэкс, *Флуктуации и когерентные явления*, Мир, М., 1974.
- [18] М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Физматлит, М., 2003.

Поступила в редакцию 9.09.2010,
после доработки 18.10.2010