Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Забродин, Скрытая квантовая R -матрица в классическом магнетике Гейзенберга с дискретным временем, *ТМФ*, 2000, том 125, номер 2, 179–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf663>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:21:01

© 2000 г.

А.В. Забродин*

СКРЫТАЯ КВАНТОВАЯ R -МАТРИЦА В КЛАССИЧЕСКОМ МАГНЕТИКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ¹⁾

С помощью свертки подкрученной квантовой тригонометрической R -матрицы 4×4 с некоторыми векторами в ее квантовом пространстве построены локальные M -операторы для интегрируемой версии классического магнетика Гейзенберга в дискретном времени. Компоненты этих векторов отождествлены с τ -функциями модели. Существенно используется билинейный формализм Хироты. Предлагаемая конструкция обобщает известное представление M -операторов в моделях с непрерывным временем через операторы Лакса и классическую r -матрицу.

Содержание

1. Введение	180
2. Билинейный формализм Хироты	184
2.1. Общий вид трехчленных билинейных уравнений	184
2.2. Основные билинейные уравнения для дискретной модели МГ	185
3. Линеаризация дискретной модели МГ	188
3.1. Скалярные линейные задачи	188
3.2. Векторная линейная задача	189
3.3. Условие нулевой кривизны для киральных L -операторов	189
3.4. Антикиральные L -операторы	190
4. Составные L - и M -операторы	192
4.1. Составной M -оператор	192
4.2. Составной L -оператор (первая версия)	193
4.3. Составной L -оператор (окончательная версия)	193
4.4. Пространственно-временная решетка	195

¹⁾ Статья написана по заказу Редколлегии.

*Объединенный институт химической физики РАН; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: zabrodin@heron.itep.ru

5. R -матричное представление L – M -пары	195
5.1. Квантовая R -матрица	196
5.2. R -матричное представление для L - и M -операторов	197
6. Предел непрерывного времени	199
6.1. Предельная форма M -оператора	199
6.2. Сравнение с r -матричной формулой	201
7. Заключение	202

1. ВВЕДЕНИЕ

Единый подход [1] к нелинейным солитонным уравнениям как к гамильтоновым системам, имеющим достаточное количество сохраняющихся величин в инволюции, основан на понятии классической r -матрицы. Ее роль заключается в унификации скобок Пуассона для матричных элементов оператора Лакса. Существует эквивалентная, хотя и менее популярная точка зрения на r -матрицу, которой мы и собираемся здесь следовать. Она связана с методом Захарова–Шабата [2], который заключается в представлении солитонных уравнений как условия нулевой кривизны для пары матричных функций (называемых L - и M -операторами), зависящих от спектрального параметра. Классическая r -матрица при этом выступает как некоторый механизм для получения M -операторов из L -операторов.

В работе [3] аналогичное построение для простейшего примера модели синус-Гордон (СГ) на решетке было проделано в полностью дискретном случае, т.е. для интегрируемых моделей на решетке в дискретном времени. Замечательным представляется тот факт, что в нем участвует *квантовая R -матрица* с квантовым параметром q , связанным с постоянной решетки дискретного времени. Формула для локальных M -операторов в случае дискретного времени имеет столь же простую структуру, как и в непрерывном случае (см. ниже (1.5)), с R -матрицей вместо r -матрицы. Этот результат получается прямым вычислением. В настоящей работе мы не пытаемся дать объяснение того, почему типичная квантовая R -матрица участвует в чисто классической задаче. Нами показано, что эта конструкция работает и для гораздо более общей модели — частично анизотропной модели магнетика Гейзенберга (МГ) на решетке в дискретном времени (эта модель содержит дискретные версии уравнений СГ, Кортевега–де Фриза (КдФ) и др. как специальные случаи). Хотя конечный результат и выглядит как прямое обобщение соответствующего утверждения для модели СГ на решетке, его вывод требует значительно более трудоемких вычислений и некоторых важных модификаций.

Напомним конструкцию M -операторов для непрерывных потоков с помощью r -матрицы. Пусть $\mathcal{L}_l(z)$ — классический L -оператор 2×2 на одномерной решетке с периодическим граничным условием $\mathcal{L}_{l+N}(z) = \mathcal{L}_l(z)$, z — спектральный параметр. Мы будем предполагать ультралокальность (т.е. скобки Пуассона между элементами $\mathcal{L}_l(z)$ на разных узлах равны нулю). Матрица монодромии $\mathcal{T}_l(z)$ представляет собой упорядоченное произведение L -операторов вдоль решетки начиная с узла l и кончая узлом $l + N - 1$:

$$\mathcal{T}_l(z) = \mathcal{L}_{l+N-1}(z) \dots \mathcal{L}_{l+1}(z) \mathcal{L}_l(z). \quad (1.1)$$

Гамильтонианы коммутирующих потоков получаются как коэффициенты разложения $\ln T(z)$ по z , где $T(z) = \text{tr } \mathcal{T}_l(z)$ не зависит от l в силу периодических граничных условий. Все эти потоки допускают представление нулевой кривизны. Производящая функция M -операторов дается формулой [4, 1]

$$M_l(z; w) = T^{-1}(w) \text{tr}_1 \left[r \left(\frac{z}{w} \right) (\mathcal{T}_l(w) \otimes I) \right], \quad (1.2)$$

где $r(z)$ – классическая r -матрица 4×4 , действующая в тензорном произведении двух двумерных пространств, tr_1 означает операцию взятия следа в первом пространстве, I – единичная матрица. Разлагая правую часть формулы (1.2) по w , получаем M -операторы, зависящие от спектрального параметра z . С точки зрения гамильтонова подхода условие нулевой кривизны следует из r -матричных скобок Пуассона для элементов L -оператора. Аналогичная r -матричная формула для M -операторов существует также и в неультралокальных моделях, хотя в этом случае r -матрица не является кососимметрической. Вообще говоря, $M_l(z; w)$ – нелокальная величина.

Способ построения локальных M -операторов из производящей функции хорошо известен [5, 1]. Предположим, что существует такое значение z_0 спектрального параметра, что $\det \mathcal{L}_l(z_0) = 0$ при любом l . Это означает, что $\mathcal{L}_l(z_0)$ является одномерным проектором:

$$\mathcal{L}_l(z_0) = \frac{|\alpha(l)\rangle \langle \beta(l)|}{P(l)}, \quad (1.3)$$

где

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \langle \beta| = (\beta_1, \beta_2) \quad (1.4)$$

– двухкомпонентные векторы, а $P(l)$ – скалярный нормировочный множитель. Компоненты векторов и множитель $P(l)$ зависят от динамических переменных. Нетрудно проверить, что $M_l(z; z_0)$ – локальная величина:

$$M_l(z) \equiv M_l(z; z_0) = \frac{\langle \beta(l) | r(z/z_0) | \alpha(l-1) \rangle}{\langle \beta(l) | \alpha(l-1) \rangle} \quad (1.5)$$

(отметим, что нормировочный множитель сокращается). Скалярное произведение берется только в первом пространстве, так что результат представляет собой матрицу 2×2 со спектральным параметром z . Эта матрица удовлетворяет условию нулевой кривизны

$$\partial_t \mathcal{L}_l(z) = M_{l+1}(z) \mathcal{L}_l(z) - \mathcal{L}_l(z) M_l(z). \quad (1.6)$$

Сформулируем основные результаты настоящей работы. Мы рассматриваем полностью дискретный частично анизотропный (XXZ) МГ и получаем представление его M - и L -операторов $\mathcal{M}_l(z)$, $\mathcal{L}_l(z)$ с помощью формул следующего вида, аналогичных (1.5):

$$\mathcal{M}_l(z) = \frac{\langle \beta(l) | R(z/z_0; q, \xi) | \check{\beta}(l-1) \rangle}{\langle \beta(l) | \alpha(l-1) \rangle}, \quad (1.7)$$

$$\mathcal{L}_l(z) = \frac{\langle \beta(l) | R(z/z_0; q, \xi') | \alpha(l) \rangle}{\langle \beta(l) | \alpha(l-1) \rangle}, \quad (1.8)$$

где $R(z; q, \xi)$, $R(z; q, \xi')$ – *квантовые* R -матрицы 4×4 (более точно определенные ниже). Их квантовый параметр q и параметры дринфельдовского твиста ξ, ξ' определяются пространственно-временной решеткой, векторы $|\alpha(l)\rangle$, $|\beta(l)\rangle$ – те же, что и в (1.5),

$$|\check{\beta}(l)\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 & (-\xi\xi')^{\frac{1}{2}} \\ (-\xi\xi')^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} |\beta(l)\rangle.$$

Здесь стоит отметить, что модели с непрерывным и дискретным временами имеют общий L -оператор, формула (1.8) дает его R -матричное представление.

Чтобы представить эти формулы более наглядно, удобно воспользоваться языком метода алгебраического анзаца Бете [6, 7]. Скалярное произведение берется в квантовом (вертикальном) пространстве, так что мы получаем матрицу 2×2 во вспомогательном (горизонтальном) пространстве:

$$\langle \beta | R(z) | \alpha \rangle = \begin{array}{c} \langle \beta | \\ \hline \hline \hline \hline | \alpha \rangle \end{array}.$$

M -оператор (1.7) генерирует сдвиг дискретного времени m . Из дискретной версии условия нулевой кривизны

$$\mathcal{M}_{l+1,m}(z)\mathcal{L}_{l,m}(z) = \mathcal{L}_{l,m+1}(z)\mathcal{M}_{l,m}(z) \quad (1.9)$$

следуют уравнения движения модели МГ в дискретном пространстве-времени.

Ключевой момент указанной конструкции заключается в замене исходных динамических переменных на пару векторов $|\alpha(l)\rangle$, $|\beta(l)\rangle$. В работах [5], посвященных точной решеточной регуляризации интегрируемых моделей, были указаны некоторые формулы, в которых компоненты этих векторов выражаются через канонические переменные модели. Они выглядели достаточно сложно и потому едва ли могли способствовать пониманию сути дела. В настоящей работе их смысл становится более ясным. Пользуясь уравнениями движения полностью дискретной модели (которые следуют из дискретного условия нулевой кривизны (1.9)), мы покажем, что подходящим образом нормированные компоненты этих векторов $|\alpha(l)\rangle$, $|\beta(l)\rangle$ являются τ -*функциями*.

Тау-функция является одним из самых фундаментальных объектов теории (см., например, [8, 9]). Стоит подчеркнуть, что присутствие квантовых R -матриц в классических дискретных задачах вряд ли можно было бы обнаружить, не привлекая представления нелинейных уравнений и элементов L – M -пары полностью в терминах τ -функций, поэтому мы должны будем совершить довольно длинный экскурс в билинейный формализм Хироты [10–12] (раздел 2). Нашим руководящим принципом будет интерпретация

дискретных временных потоков, данная Мивой [13], в которой дискретные интегрируемые уравнения рассматриваются как члены той же бесконечной иерархии, что и их непрерывные аналоги. Общий метод построения дискретных солитонных уравнений был развит в работе [14], где, в частности, была предложена дискретная изотропная (XX) модель МГ. Следуя этим идеям, мы работаем с дискретным МГ типа XXZ в билинейной форме. В разделе 3 для него получена матричная L – M -пара, которая выводится из основных линейных задач для скалярной волновой функции [12, 14, 15].

Как и в модели СГ, имеются две основные решеточные версии классического МГ: дискретная модель МГ на пространственно-временной решетке [14] и модель на пространственной решетке с непрерывным временем, введенная в работе [16] сразу для самого общего XYZ -случая. Интересно, что обе они были предложены почти одновременно еще в 1982 году, но идеи, лежащие в их основе, казались чуждыми друг другу и не пересекались до самого недавнего времени²⁾.

Способ изложения в настоящей работе отличается от предложенного в статье [3], где исходным объектом служил L -оператор Фаддеева–Волкова или Изергина–Корепина для модели СГ на решетке, который выражался в терминах решеточного поля, после чего с помощью специальной подстановки совершался переход к τ -функции. Здесь мы начинаем прямо с билинейных уравнений для τ -функции, а не с уравнений движения для спиновых переменных на решетке по двум причинам. Во-первых, уравнения движения, будучи записаны через спиновые переменные, выглядят крайне сложно и к тому же реально нам не нужны. Во-вторых, в дискретном случае вообще нет канонического способа введения спиновых переменных, в то время как билинейный формализм Хироты калибровочно-инвариантен и свободен от артефактов. Имея это в виду, следует подчеркнуть, что *модель Гейзенберга* для нас здесь – это не более чем удобное название для соответствующим образом редуцированной иерархии уравнений двумеризованной цепочки Тоды [22]. (На самом деле мы будем работать с несколько более общей моделью, чем МГ типа XXZ .) В этом смысле можно использовать и название *частично анизотропная модель кирального поля*. Очевидно, что в дискретном случае специфические черты каждой из этих моделей становятся несущественными [8], а важен тип редукции из двумеризованной иерархии Тоды, который для обеих моделей одинаков.

Будучи включенными в *иерархию*, билинейные уравнения с самого начала подразумевают наличие бесконечного количества дискретных переменных (коммутирующих потоков). Вообще говоря, любые два из них можно выбрать в качестве координат в дискретном пространстве-времени. Однако, для нашей цели нам потребуется некоторая выделенная пространственно-временная решетка, которая вводится в разделе 4. Координаты на ней будут обозначаться через l , m . Мы построим L – M -пару для трансляций $l \rightarrow l + 1$, $m \rightarrow m + 1$, а L - и M -операторы в разделе 5 будут представлены в виде (1.8), (1.7). В разделе 6 обсуждается предел непрерывного

²⁾ На квантовом уровне эти идеи были частично приведены в соответствие друг с другом в работах [17–20], где была построена *квантовая* модель СГ в дискретном пространстве-времени (т.е. проведено квантование дискретного уравнения СГ, предложенного Хиротой). Обобщение на случай полевых теорий аффинной модели Тоды на решетке было дано в работе [21].

времени. Показано, как из наших конструкций можно получить уравнение (1.5). Как мы уже отмечали, классическая r -матрица в нем оказывается не обязательно кососимметрической. Этот факт свидетельствует о неультралокальности модели в общем случае. В разделе 7 отмечены некоторые нерешенные проблемы, постановка которых мотивирована полученными результатами.

2. БИЛИНЕЙНЫЙ ФОРМАЛИЗМ ХИРОТЫ

В этом разделе изложены некоторые результаты работ [13, 14] в виде, удобном для наших целей. Формулы проиллюстрированы графическим изображением дискретных потоков, предложенным в обзоре [23].

2.1. Общий вид трехчленных билинейных уравнений. Основной объект билинейного формализма — τ -функция $\tau = \tau(a, b, c, \dots)$, которая зависит от дискретных переменных $a, b, c, \dots$ и удовлетворяет ряду билинейных разностных уравнений. Каждой дискретной переменной a соответствует “метка” — комплексное число $\lambda_a \in \mathbb{C}$ (переменная Мивы). Его следует представлять себе как непрерывный “номер”, присвоенный дискретному потоку. Для любых двух дискретных потоков a, b положим

$$\lambda_{ab} \equiv \lambda_a - \lambda_b, \quad \lambda_{ab} = -\lambda_{ba}.$$

Напомним, как составляются билинейные уравнения. С каждой тройкой $\{abc\}$ дискретных потоков ассоциировано трехчленное билинейное уравнение для τ [12, 13]:

$$\begin{aligned} \lambda_{bc}\tau(a+1, b, c)\tau(a, b+1, c+1) + \lambda_{ca}\tau(a, b+1, c)\tau(a+1, b, c+1) + \\ + \lambda_{ab}\tau(a, b, c+1)\tau(a+1, b+1, c) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Все остальные переменные, от которых может зависеть τ , входят в (2.1) как параметры. С каждой четверкой $\{abcd\}$ ассоциировано еще одно трехчленное уравнение

$$\begin{aligned} \lambda_{ad}\lambda_{bc}\tau(a+1, b, c, d+1)\tau(a, b+1, c+1, d) + \\ + \lambda_{bd}\lambda_{ca}\tau(a, b+1, c, d+1)\tau(a+1, b, c+1, d) + \\ + \lambda_{cd}\lambda_{ab}\tau(a, b, c+1, d+1)\tau(a+1, b+1, c, d) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Связи между (2.1) и (2.2) существуют в обоих направлениях. С одной стороны, уравнение (2.1) является частным случаем (2.2) при $\lambda_d \rightarrow \infty$ (в соответствии с результатами [13] этот предел означает, что зависимость τ от переменной d исчезает). С другой стороны, хотя уравнение (2.2) линейно независимо от (2.1), оно является *алгебраическим следствием* уравнений вида (2.1), написанных для каждой тройки $\{abc\}$, $\{abd\}$ и $\{acd\}$. В этом смысле все полученные ниже результаты следуют уже из уравнений (2.1).

2.2. Основные билинейные уравнения для дискретной модели МГ. Рассмотрим пять различных дискретных потоков и обозначим соответствующие переменные через p, p', n, u, v . Обозначим τ -функцию через $\tau(p, p', n, u, v) \equiv \tau_n^{p, p'}(u, v)$. Последняя форма записи, выделяющая u, v среди остальных переменных, напоминает о том, что они будут играть роль киральных пространственно-временных координат. Назовем их *киральными переменными*.

Билинейные уравнения для τ -функции модели МГ типа XXZ следуют из уравнения (2.1) после наложения условия редукции

$$\tau_n^{p+1, p'+1}(u, v) = \tau_{n+1}^{p, p'}(u, v), \quad (2.3)$$

уменьшающего число независимых переменных до четырех, в качестве которых мы выберем p, n, u, v .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Дискретное уравнение КдФ получается как специальный случай $\lambda_n = \infty$, так что зависимость от n пропадает. Дискретная модель СГ получается при наложении еще одного условия $\lambda_{p'} = \lambda_p$.

Рис. 1

На рис. 1 изображена рассматриваемая конфигурация дискретных потоков (граф потоков), где использовано графическое представление, предложенное в обзоре [23]. Штриховая линия проведена здесь для того, чтобы показать, что редукция (2.3) – это в точности редукция к одномерной цепочке Тоды в дискретном времени (подробнее см. [23]). В самом деле, векторное поле $\partial_{\bar{p}} \equiv -\partial_n + \partial_p$ задает поток $\bar{p}$, соответствующий штриховой линии, в его терминах редукция приобретает более знакомый тодовский вид $\tau^{p+1, \bar{p}+1} = \tau^{p, \bar{p}}$. При $\lambda_p \rightarrow \infty$, $\lambda_{p'} \rightarrow \lambda_n$ эта редукция записывается как дифференциальное условие. В этом случае мы приходим к изотропному (XXX) МГ в дискретном времени.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Графическое представление значительно облегчает понимание при работе с дискретными потоками, особенно в тех случаях, когда их много (точный смысл графических элементов см. в [23]). Здесь мы только отметим, что если иметь в виду решения конечнозонного типа (см., например, [2, 24]), то граф можно представлять себе находящимся на некоторой части римановой поверхности с локальной координатой λ^{-1} .

Переменные Мивы – это координаты выколотых точек на римановой поверхности. Отрезки – это разрезы, соединяющие выколотые точки и порождающие дискретные коммутирующие потоки на якобиане с помощью отображения Абеля³⁾.

Условие (2.3) позволяет при необходимости исключить переменную p' . Приведем список уравнений, которые получаются таким образом из уравнений (2.1), (2.2), перед каждым из них указана та тройка или четверка потоков, которой оно соответствует.

Простейшее уравнение включает только p, n :

$$\{pp'n\} : \quad \lambda_{p'n}\tau_{n+1}^{p-1}(u, v)\tau_{n-1}^{p+1}(u, v) - \lambda_{pn}\tau_n^{p+1}(u, v)\tau_n^{p-1}(u, v) = \lambda_{p'p}(\tau_n^p(u, v))^2. \quad (2.4)$$

В нем легко узнать одномерную цепочку Тоды в дискретном времени, представленную в билинейной форме [12]. В нашем контексте оно играет роль уравнения связи на динамические переменные, так как пространственно-временные координаты u, v входят в него как параметры.

Следующая группа уравнений содержит только p, n и u :

$$\begin{aligned} \{pp'u\} : \quad & \lambda_{p'u}\tau_n^{p+1}(u, v)\tau_{n+1}^{p-1}(u+1, v) - \lambda_{pu}\tau_{n+1}^{p-1}(u, v)\tau_n^{p+1}(u+1, v) = \\ & = \lambda_{p'p}\tau_n^p(u+1, v)\tau_{n+1}^p(u, v), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \{pnu\} : \quad & \lambda_{un}\tau_n^{p+1}(u, v)\tau_{n+1}^p(u+1, v) + \lambda_{pu}\tau_{n+1}^p(u, v)\tau_n^{p+1}(u+1, v) = \\ & = \lambda_{pn}\tau_n^p(u+1, v)\tau_{n+1}^{p+1}(u, v), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \{p'nu\} : \quad & \lambda_{un}\tau_n^p(u, v)\tau_n^{p+1}(u+1, v) + \lambda_{p'u}\tau_n^{p+1}(u, v)\tau_n^p(u+1, v) = \\ & = \lambda_{p'n}\tau_{n+1}^p(u, v)\tau_{n-1}^{p+1}(u+1, v), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \{pp'nu\} : \quad & \lambda_{pn}\lambda_{p'u}\tau_n^{p+1}(u, v)\tau_n^{p-1}(u+1, v) - \lambda_{p'n}\lambda_{pu}\tau_{n+1}^{p-1}(u, v)\tau_{n-1}^{p+1}(u+1, v) = \\ & = \lambda_{p'p}\lambda_{un}\tau_n^p(u, v)\tau_n^p(u+1, v). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогичные уравнения можно записать для p, n, v – достаточно везде заменить u на v .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Взяв следующую комбинацию уравнений (2.5), (2.6):

$$\frac{\text{уравнение (2.5)}}{\lambda_{p'u}\tau_{n+1}^{p-1}(u+1, v)} - \frac{\text{уравнение (2.6)}}{\lambda_{un}\tau_{n+1}^p(u+1, v)},$$

и подставив (2.7) в левую часть появившегося в результате равенства, получим (2.8).

Уравнения, в которых участвуют обе переменные u, v , имеют вид

$$\begin{aligned} \{nuv\} : \quad & \lambda_{un}\tau_n^p(u, v+1)\tau_{n+1}^p(u+1, v) - \lambda_{vn}\tau_n^p(u+1, v)\tau_{n+1}^p(u, v+1) = \\ & = \lambda_{uv}\tau_n^p(u+1, v+1)\tau_{n+1}^p(u, v), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \{pp'uv\} : \quad & \lambda_{p'u}\lambda_{pv}\tau_{n+1}^{p+1}(u, v+1)\tau_{n+1}^{p-1}(u+1, v) - \lambda_{pu}\lambda_{p'v}\tau_{n+1}^{p-1}(u, v+1)\tau_n^{p+1}(u+1, v) = \\ & = \lambda_{p'p}\lambda_{uv}\tau_n^p(u+1, v+1)\tau_{n+1}^p(u, v), \end{aligned} \quad (2.10)$$

³⁾Общую теорию конечнозонных решений разностного уравнения Хироты можно найти в работе [25].

$$\begin{aligned} \{puv\}: \quad & \lambda_{pv}\tau_n^{p+1}(u, v+1)\tau_n^p(u+1, v) - \lambda_{pu}\tau_n^{p+1}(u+1, v)\tau_n^p(u, v+1) = \\ & = \lambda_{vv}\tau_n^p(u+1, v+1)\tau_n^{p+1}(u, v), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \{p'n uv\}: \quad & -\lambda_{p'u}\lambda_{vn}\tau_n^{p+1}(u, v+1)\tau_n^p(u+1, v) + \lambda_{p'v}\lambda_{un}\tau_n^{p+1}(u+1, v)\tau_n^p(u, v+1) = \\ & = \lambda_{p'n}\lambda_{uv}\tau_{n-1}^{p+1}(u+1, v+1)\tau_{n+1}^p(u, v), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \{p'uv\}: \quad & \lambda_{p'v}\tau_{n+1}^p(u, v+1)\tau_n^{p+1}(u+1, v) - \lambda_{p'u}\tau_{n+1}^p(u+1, v)\tau_n^{p+1}(u, v+1) = \\ & = \lambda_{uv}\tau_n^{p+1}(u+1, v+1)\tau_{n+1}^p(u, v), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \{pnuv\}: \quad & -\lambda_{pu}\lambda_{vn}\tau_{n+1}^p(u, v+1)\tau_n^{p+1}(u+1, v) + \lambda_{pv}\lambda_{un}\tau_{n+1}^p(u+1, v)\tau_n^{p+1}(u, v+1) = \\ & = \lambda_{pn}\lambda_{uv}\tau_n^p(u+1, v+1)\tau_{n+1}^{p+1}(u, v). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Этот список линейно независимых трехчленных билинейных уравнений еще далеко не полон. Полный список содержит также и много других уравнений, которые либо следуют из приведенных выше, либо могут быть получены из высших аналогов уравнений (2.1), (2.2) для большего числа переменных (они, однако, в свою очередь являются алгебраическими следствиями уравнений (2.1)), некоторые из них представлены ниже.

Некоторые полезные следствия основных уравнений. Заметим, что пары уравнений (2.11), (2.12) и (2.13), (2.14) представляют собой системы линейных уравнений на $\tau_n^{p+1}(u, v+1)\tau_n^p(u+1, v)$, $\tau_n^{p+1}(u+1, v)\tau_n^p(u, v+1)$ и $\tau_{n+1}^p(u, v+1)\tau_n^{p+1}(u+1, v)$, $\tau_{n+1}^p(u+1, v)\tau_n^{p+1}(u, v+1)$, соответственно. Решая эти системы, получим соотношения

$$\begin{aligned} & \lambda_{p'v}\lambda_{un}\tau_n^p(u+1, v+1)\tau_n^{p+1}(u, v) + \lambda_{pu}\lambda_{p'n}\tau_{n-1}^{p+1}(u+1, v+1)\tau_{n+1}^p(u, v) = \\ & = \Lambda\tau_n^{p+1}(u, v+1)\tau_n^p(u+1, v), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{p'u}\lambda_{vn}\tau_n^p(u+1, v+1)\tau_n^{p+1}(u, v) + \lambda_{pv}\lambda_{p'n}\tau_{n-1}^{p+1}(u+1, v+1)\tau_{n+1}^p(u, v) = \\ & = \Lambda\tau_n^p(u, v+1)\tau_n^{p+1}(u+1, v), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{pv}\lambda_{un}\tau_n^{p+1}(u+1, v+1)\tau_{n+1}^p(u, v) + \lambda_{p'u}\lambda_{pn}\tau_n^p(u+1, v+1)\tau_{n+1}^{p+1}(u, v) = \\ & = \Lambda\tau_{n+1}^p(u, v+1)\tau_n^{p+1}(u+1, v), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{pu}\lambda_{vn}\tau_n^{p+1}(u+1, v+1)\tau_{n+1}^p(u, v) + \lambda_{p'v}\lambda_{pn}\tau_n^p(u+1, v+1)\tau_{n+1}^{p+1}(u, v) = \\ & = \Lambda\tau_{n+1}^{p+1}(u, v+1)\tau_{n+1}^p(u+1, v), \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$\Lambda \equiv \lambda_{pn}\lambda_{p'n} - \lambda_{un}\lambda_{vn}. \quad (2.19)$$

Эти уравнения несут даже больше информации, чем исходные уравнения (2.11)–(2.14), в том смысле, что позволяют “сливать” переменные, т.е. они остаются содержательными при $\lambda_u = \lambda_v$ (в (2.11)–(2.14) такая операция приводит к тождеству $0 = 0$). В этом случае $\tau(u+1, v+1)$ надо заменить на $\tau(u+2)$, что дает

$$\begin{aligned} & \lambda_{un}\lambda_{p'u}\tau_n^{p+1}(u-1, v)\tau_n^p(u+1, v) + \lambda_{pu}\lambda_{p'n}\tau_{n+1}^p(u-1, v)\tau_{n-1}^{p+1}(u+1, v) = \\ & = (\lambda_{p'n}\lambda_{pn} - \lambda_{un}^2)\tau_n^p(u, v)\tau_n^{p+1}(u, v), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{un}\lambda_{pu}\tau_{n+1}^p(u-1, v)\tau_n^{p+1}(u+1, v) + \lambda_{pn}\lambda_{p'u}\tau_{n+1}^{p+1}(u-1, v)\tau_n^p(u+1, v) = \\ & = (\lambda_{p'n}\lambda_{pn} - \lambda_{un}^2)\tau_{n+1}^p(u, v)\tau_n^{p+1}(u, v) \end{aligned} \quad (2.21)$$

и аналогичные уравнения, в которых сделана замена $u \rightarrow v$.

Наконец, выпишем еще два уравнения, которые получаются из (2.5)–(2.8), (2.15)–(2.18) и (2.20), (2.21) (вместе с их аналогами с заменой $u \rightarrow v$) процедурой, похожей на ту, которая объяснялась в замечании 4:

$$\begin{aligned} \lambda_{pn}\lambda_{p'n}\tau_{n-1}^p(u+1, v+1)\tau_{n+1}^p(u, v) - \lambda_{un}\lambda_{vn}\tau_n^p(u+1, v+1)\tau_n^p(u, v) = \\ = \Lambda\tau_n^p(u+1, v)\tau_n^p(u, v+1), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{p'u}\lambda_{p'v}\lambda_{pn}\tau_n^{p-1}(u+1, v+1)\tau_n^{p+1}(u, v) - \lambda_{pu}\lambda_{pv}\lambda_{p'n}\tau_{n-1}^{p+1}(u+1, v+1)\tau_{n+1}^{p-1}(u, v) = \\ = \lambda_{p'p}\Lambda\tau_n^p(u+1, v)\tau_n^p(u, v+1). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Отметим, что полный список линейно независимых билинейных уравнений для дискретной модели МГ (даже если ограничиться только трехчленными) несколько длиннее. Здесь были выписаны только уравнения, которые понадобятся ниже.

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ МГ

Билинейные уравнения предыдущего раздела могут быть представлены как условия совместности переопределенной системы линейных задач для “волновой функции” Ψ . Это и называется здесь линеаризацией. Для наших целей она представляет интерес как систематический метод нахождения L – M -пар.

3.1. Скалярные линейные задачи. Билинейные уравнения (2.4)–(2.14) следуют из системы *линейных* уравнений для “волновой функции” $\Psi = \Psi_n^{p,p'}(u, v)$. Прототипом уравнений для Ψ является [12, 14, 15] (см. также обзор [23]) уравнение

$$\Psi(a+1, b) = \Psi(a, b+1) - \lambda_{ab} \frac{\tau(a, b)\tau(a+1, b+1)}{\tau(a+1, b)\tau(a, b+1)} \Psi(a, b), \quad (3.1)$$

где под a, b надо понимать любую пару элементарных дискретных переменных.

Условие редукции (2.3) для функции Ψ имеет вид

$$\Psi_n^{p+1, p'+1}(u, v) = z^2 \Psi_n^{p, p'}(u, v), \quad (3.2)$$

где z – спектральный параметр. Исключив переменную p' с помощью этого условия, имеем

$$\{nu\} : \quad \Psi_n^p(u+1) = \Psi_{n+1}^p(u) - \lambda_{un} \frac{\tau_n^p(u)\tau_{n+1}^p(u+1)}{\tau_{n+1}^p(u)\tau_n^p(u+1)} \Psi_n^p(u), \quad (3.3)$$

$$\{pu\} : \quad \Psi_n^{p+1}(u) = \Psi_n^p(u+1) - \lambda_{pu} \frac{\tau_n^p(u)\tau_n^{p+1}(u+1)}{\tau_n^{p+1}(u)\tau_n^p(u+1)} \Psi_n^p(u), \quad (3.4)$$

$$\{p'u\} : \quad z^2 \Psi_{n+1}^p(u) = \Psi_n^{p+1}(u+1) - \lambda_{p'u} \frac{\tau_n^{p+1}(u)\tau_{n+1}^p(u+1)}{\tau_{n+1}^p(u)\tau_n^{p+1}(u+1)} \Psi_n^{p+1}(u) \quad (3.5)$$

и аналогичные уравнения для v вместо u . В (3.3)–(3.5) переменная v явно не указана, так как она одна и та же для всех функций. Эти уравнения будут для нас основным инструментом вывода матричных L – M -пар.

3.2. Векторная линейная задача. Скомбинируем линейные уравнения (3.3)–(3.5) таким образом, чтобы представить трансляцию вектора $\begin{pmatrix} \Psi_n^p(u) \\ \Psi_n^{p+1}(u) \end{pmatrix}$ вдоль u -направления в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \Psi_n^p(u+1) \\ \Psi_n^{p+1}(u+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{pu} \frac{\tau_n^p(u) \tau_n^{p+1}(u)}{\tau_{n+1}^{p+1}(u) \tau_n^p(u+1)} & 1 \\ z^2 \lambda_{pn} \frac{\tau_n^p(u) \tau_{n+1}^{p+1}(u)}{\tau_{n+1}^{p+1}(u) \tau_n^p(u)} & z^2 + \lambda_{p'u} \frac{\tau_n^{p+1}(u) \tau_{n+1}^p(u+1)}{\tau_{n+1}^p(u) \tau_n^{p+1}(u+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_n^p(u) \\ \Psi_n^{p+1}(u) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Изменим калибровку, перейдя к волновой функции

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(u) \\ \Phi_2(u) \end{pmatrix} = \mathcal{D}(u) \begin{pmatrix} \Psi_n^p(u) \\ \Psi_n^{p+1}(u) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$\mathcal{D}(u) = (\tau_{n+1}^p(u) \tau_n^{p+1}(u))^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \lambda_{pn}^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} \tau_n^p(u) & 0 \\ 0 & \lambda_{pn}^{-\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} \tau_n^{p+1}(u) \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица. Тогда линейная задача (3.6) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(u+1) \\ \Phi_2(u+1) \end{pmatrix} = L^{(u)}(z) \begin{pmatrix} \Phi_1(u) \\ \Phi_2(u) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Входящий в (3.8) L -оператор $L^{(u)}(z)$ можно компактно записать в терминах трех полей

$$\psi^0(u, v) = \frac{\tau_n^{p+1}(u, v)}{\tau_{n+1}^p(u, v)}, \quad \psi^-(u, v) = \frac{\tau_n^p(u, v)}{\tau_{n+1}^p(u, v)}, \quad \psi^+(u, v) = \frac{\tau_{n+1}^{p+1}(u, v)}{\tau_n^{p+1}(u, v)}. \quad (3.9)$$

Для краткости мы используем также обозначение $\phi(u, v) \equiv [\psi^0(u, v)]^{1/2}$. Для L -оператора получаем выражение

$$L^{(u)}(z) = \begin{pmatrix} \lambda_{pu} \frac{\phi(u+1, v)}{\phi(u, v)} & z \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \frac{\psi^-(u+1)}{\phi(u, v) \phi(u+1, v)} \\ z \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \phi(u, v) \phi(u+1, v) \psi^+(u) & \lambda_{p'u} \frac{\phi(u, v)}{\phi(u+1, v)} + z^2 \frac{\phi(u+1, v)}{\phi(u, v)} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Отметим, что

$$\det L^{(u)}(z) = \lambda_{pu} \lambda_{p'u} - \lambda_{un} z^2. \quad (3.11)$$

Будем называть $L^{(u)}(z)$ *киральным L -оператором*, так как согласно (3.8) он генерирует сдвиги киральной переменной в волновой функции. В п. 3.3 мы изучим дискретное условие нулевой кривизны с матрицами вида (3.10).

3.3. Условие нулевой кривизны для киральных L -операторов. Обозначим координаты вершин в элементарной ячейке киральной (u, v) -решетки⁴⁾, как показано на

⁴⁾ Вообще говоря, координатные оси не обязательно ортогональны. В частности, при $\lambda_u = \lambda_v$ двумерная решетка сводится к одномерной.

рис. 2. В этих обозначениях (заимствованных из работ [17–19]) L -оператор (3.10) имеет вид

$$L_{B \leftarrow A}^{(u)}(z) = \begin{pmatrix} \lambda_{pu} \frac{\phi(B)}{\phi(A)} & z \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \frac{\psi^-(B)}{\phi(A)\phi(B)} \\ z \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \phi(A)\phi(B)\psi^+(A) & \lambda_{p'u} \frac{\phi(A)}{\phi(B)} + z^2 \frac{\phi(B)}{\phi(A)} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Аналогично введем другой киральный L -оператор $L_{C \leftarrow A}^{(v)}(z)$, который дается также формулой (3.12), но с заменой $\phi(B) \rightarrow \phi(C)$, $\lambda_{pu} \rightarrow \lambda_{pv}$ и $\lambda_{p'u} \rightarrow \lambda_{p'v}$.

Рис. 2

Условие нулевой кривизны на решетке

$$L_{D \leftarrow B}^{(v)}(z) L_{B \leftarrow A}^{(u)}(z) = L_{D \leftarrow C}^{(u)}(z) L_{C \leftarrow A}^{(v)}(z) \quad (3.13)$$

эквивалентно следующей системе нелинейных уравнений движения для полей $\psi^0, \psi^\pm$:

$$\begin{aligned} & (\lambda_{p'u} \psi^0(C) - \lambda_{p'v} \psi^0(B)) (\psi^0(A) \psi^0(A) - \psi^0(B) \psi^0(C)) = \\ & = \lambda_{pn} \psi^0(B) \psi^0(C) \psi^0(D) [\psi^+(C) \psi^-(C) - \psi^+(B) \psi^-(B)], \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{pv} \psi^0(D) \psi^0(C) \psi^-(B) + \lambda_{p'u} \psi^0(A) \psi^0(C) \psi^-(D) = \\ & = \lambda_{pu} \psi^0(D) \psi^0(B) \psi^-(C) + \lambda_{p'v} \psi^0(A) \psi^0(B) \psi^-(D), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_{pv} \psi^0(D) \psi^0(C) \psi^+(C) + \lambda_{p'u} \psi^0(A) \psi^0(C) \psi^+(A) = \\ & = \lambda_{pu} \psi^0(D) \psi^0(B) \psi^+(B) + \lambda_{p'v} \psi^0(A) \psi^0(B) \psi^+(A). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отметим, что уравнения движения дискретного МГ типа XXX , приведенные в работе [14], получены для другого выбора динамических переменных. Было бы полезно установить прямое соответствие между ними.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Дискретное уравнение КдФ в форме Фаддеева–Волкова [17, 18] получается из (3.15) или (3.16) в пределе $\lambda_n \rightarrow \infty$, когда зависимость от n исчезает, так что $\psi^- = \psi^+ = 1$, и остается единственное поле ψ^0 . Киральный L -оператор Фаддеева–Волкова для дискретного уравнения КдФ можно получить из (3.12) в том же пределе при условии, что перенормированный спектральный параметр $\zeta = z \lambda_{pn}^{1/2}$ остается конечным.

3.4. Антикиральные L -операторы. Наряду с киральными введем L -операторы несколько другого типа, которые назовем *антикиральными*.

Положим $\lambda_u = \lambda_n$ в киральном L -операторе (3.12) и соответственно отождествим u с n . Получится оператор, генерирующий трансляцию

$$A = (u, v, n) \longrightarrow A^\dagger = (u, v, n+1)$$

на трехмерной решетке с координатами u, v, n :

$$\begin{aligned} L_{A^\dagger \leftarrow A}^{(n)}(z) &= \begin{pmatrix} \lambda_{pn} \frac{\phi(A^\dagger)}{\phi(A)} & z \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \frac{\psi^-(A^\dagger)}{\phi(A)\phi(A^\dagger)} \\ z \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \phi(A)\phi(A^\dagger)\psi^+(A) & \lambda_{p'n} \frac{\phi(A)}{\phi(A^\dagger)} + z^2 \frac{\phi(A^\dagger)}{\phi(A)} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\tau_{n+1}^p(A)\tau_{n+1}^{p+1}(A)}{\tau_n^{p+1}(A)\tau_{n+2}^p(A)} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \lambda_{pn} & z \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \frac{\tau_{n+1}^p(A)}{\tau_{n+1}^{p+1}(A)} \\ z \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \frac{\tau_{n+1}^{p+1}(A)}{\tau_{n+1}^p(A)} & z^2 + \lambda_{p'n} \frac{\tau_n^{p+1}(A)\tau_{n+2}^p(A)}{\tau_{n+1}^p(A)\tau_{n+1}^{p+1}(A)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Аналогичные обозначения ($B^\dagger = (u+1, v, n+1)$, $B^\downarrow = (u+1, v, n-1)$ и т.д.) будут систематически использоваться для вершин в верхнем и нижнем слоях трехмерной решетки.

Рис. 3

Определим антикиральный L -оператор

$$\bar{L}_{C^\downarrow \leftarrow A}^{(\bar{v})}(z) = -\lambda_{pn}\lambda_{p'n} [L_{C^\leftarrow C^\downarrow}^{(n)}(z)]^{-1} L_{C^\leftarrow A}^{(v)}(z), \quad (3.18)$$

генерирующий сдвиг *антикиральной* переменной $\bar{v}$, соответствующей потоку, который задается векторным полем $\partial_{\bar{v}} \equiv -\partial_n + \partial_v$ в пространстве переменных. На рис. 3 изображена антикиральная переменная $\bar{v}$ на графе потоков из п. 2.2. Вычислив правую часть (3.18), получим

$$\bar{L}_{C^\downarrow \leftarrow A}^{(\bar{v})}(z) = \begin{pmatrix} \lambda_{vn} z^2 \frac{\phi(A)}{\phi(C^\downarrow)} - \lambda_{p'n}\lambda_{pv} \frac{\phi(C^\downarrow)}{\phi(A)} & -z \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \frac{\psi^-(A)}{\phi(A)\phi(C^\downarrow)} \\ -z \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \phi(A)\phi(C^\downarrow)\psi^+(C^\downarrow) & -\lambda_{pn}\lambda_{p'v} \frac{\phi(A)}{\phi(C^\downarrow)} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

(здесь использованы аналоги уравнений (2.6), (2.7) с заменой $u \rightarrow v$).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Хотя антикиральные потоки нам не понадобятся, мы сочли целесообразным включить их в рассмотрение, чтобы мотивировать выбор L -оператора в следующем разделе. Подчеркнем, что антикиральные потоки равноправны с киральными.

На симметрию между ними указывает граф потоков, а также явный вид L -операторов. Заметим также, что в случае дискретных моделей КдФ или СГ разница между киральными и антикиральными потоками исчезает.

4. СОСТАВНЫЕ L - И M -ОПЕРАТОРЫ

Киральные и антикиральные L -операторы из предыдущего раздела служат элементарными блоками для построения более сложных операторов, которые строятся как упорядоченные произведения киральных и антикиральных. Однако не все они имеют R -матричное представление нужного вида. Следовательно, нашей задачей будет отбор таких пар потоков l, m , для которых соответствующие L - и M -операторы удовлетворяют этому требованию. Решетку с координатами l, m назовем *пространственно-временной решеткой*. Она вложена в трехмерную решетку с координатами u, v, n .

Опыт, приобретенный при работе с дискретной моделью СГ, подсказывает попробовать в качестве первых кандидатов составные L - и M -операторы, которые осуществляют трансляции вдоль диагоналей киральной решетки в пространстве-времени. Оказывается, что в дискретной модели МГ этот рецепт буквально применим только к M -оператору, поэтому вопреки традиции мы начинаем именно с M -оператора. Определение L -оператора потребует существенных модификаций, связанных с тем фактом, что в общем случае пространственно-временная решетка вкладывается в трехмерную иначе, чем киральная.

4.1. Составной M -оператор. Рассмотрим составной оператор, транслирующий волновую функцию вдоль диагонали $C \rightarrow B$:

$$\widehat{M}_{B \leftarrow C}(z) \equiv z^{-1}(\lambda_{vn}z^2 - \lambda_{pv}\lambda_{p'v})L_{B \leftarrow A}^{(u)}(z)[L_{C \leftarrow A}^{(v)}(z)]^{-1}. \quad (4.1)$$

Из (3.12) находим

$$\widehat{M}_{B \leftarrow C}(z) = \begin{pmatrix} z\lambda_{un}\frac{\phi(C)}{\phi(B)} - z^{-1}\lambda_{pu}\lambda_{p'v}\frac{\phi(B)}{\phi(C)} & \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}}\frac{\psi^-(D)}{\phi(D)^2}\varphi_{\mathcal{M}}(C, B) \\ \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}}\psi^+(A)\phi(A)^2\varphi_{\mathcal{M}}(C, B) & z\lambda_{vn}\frac{\phi(B)}{\phi(C)} - z^{-1}\lambda_{p'u}\lambda_{pv}\frac{\phi(C)}{\phi(B)} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где

$$\varphi_{\mathcal{M}}(C, B) = \lambda_{p'u}\frac{\phi(C)}{\phi(B)} - \lambda_{p'v}\frac{\phi(B)}{\phi(C)}.$$

Диагональные элементы были преобразованы к указанной форме с помощью уравнений (2.6) и (2.7). Недиагональные элементы получены с помощью уравнений (3.15), (3.16).

Выразим матричные элементы через τ -функцию. Для любых двух вершин X, Y на решетке введем обозначение

$$W(X, Y) \equiv [\tau_n^{p+1}(X)\tau_{n+1}^p(X)\tau_n^{p+1}(Y)\tau_{n+1}^p(Y)]^{\frac{1}{2}}.$$

Используя (2.11), (2.13), находим

$$\widehat{\mathcal{M}}_{B \leftarrow C}(z) = \frac{1}{W(C, B)} \begin{pmatrix} z\lambda_{un}\tau_n^{p+1}(C)\tau_{n+1}^p(B) - & -\lambda_{uv}\lambda_{pn}^{\frac{1}{2}}\tau_{n+1}^p(A)\tau_n^p(D) \\ -z^{-1}\lambda_{pu}\lambda_{p'v}\tau_n^{p+1}(B)\tau_{n+1}^p(C) & \\ -\lambda_{uv}\lambda_{pn}^{\frac{1}{2}}\tau_{n+1}^{p+1}(A)\tau_n^{p+1}(D) & z\lambda_{vn}\tau_n^{p+1}(B)\tau_{n+1}^p(C) - \\ & -z^{-1}\lambda_{p'u}\lambda_{pv}\tau_n^{p+1}(C)\tau_{n+1}^p(B) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Далее с помощью уравнений (2.17), (2.18) можно выразить элементы входящей в (4.3) матрицы через значения τ -функций только в вершинах A и D , а зависимость от полей в вершинах C, B останется только в скалярном множителе $W^{-1}(C, B)$. В самом деле, правые части уравнений (2.17), (2.18) содержат как раз те члены, которые находятся на диагонали матрицы (4.3). Заменяя их на левые части тех же уравнений, видим, что матрица будет зависеть только от A и D (этот факт будет использован в разделе 5).

4.2. Составной L -оператор (первая версия). Начнем с составного L -оператора, выбор которого основан на опыте работы с дискретной моделью СГ [3]:

$$\mathcal{L}_{D \leftarrow A}^{(uv)}(z) = z^{-1} L_{D \leftarrow B}^{(v)}(z) L_{B \leftarrow A}^{(u)}(z). \quad (4.4)$$

Множественно применяя билинейные уравнения из раздела 2, можно получить выражения его элементов через τ -функцию:

$$\mathcal{L}_{D \leftarrow A}^{(uv)}(z) = \frac{1}{\lambda_{uv} W(A, D)} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11}^{(uv)} & \mathcal{L}_{12}^{(uv)} \\ \mathcal{L}_{21}^{(uv)} & \mathcal{L}_{22}^{(uv)} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где

$$\mathcal{L}_{11}^{(uv)} = \lambda_{pv}\zeta_u(z)\tau_{n+1}^p(B)\tau_n^{p+1}(C) - \lambda_{pu}\zeta_v(z)\tau_{n+1}^p(C)\tau_n^{p+1}(B), \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}_{12}^{(uv)} = \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}}z(\zeta_u(z)\tau_{n+1}^p(B)\tau_n^p(C) - \zeta_v(z)\tau_{n+1}^p(C)\tau_n^p(B)), \quad (4.7)$$

$$\mathcal{L}_{21}^{(uv)} = \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}}z(\zeta_u(z)\tau_{n+1}^{p+1}(B)\tau_n^{p+1}(C) - \zeta_v(z)\tau_{n+1}^{p+1}(C)\tau_n^{p+1}(B)), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{22}^{(uv)} = & \frac{\zeta_u(z)\zeta_v(z)}{\lambda_{un}\lambda_{vn}}(\lambda_{p'v}\tau_n^{p+1}(B)\tau_{n+1}^p(C) - \lambda_{p'u}\tau_n^{p+1}(C)\tau_{n+1}^p(B)) + \\ & + \frac{\lambda_{pn}}{\lambda_{un}\lambda_{vn}}(\lambda_{p'v}\lambda_{un}\zeta_u(z)\tau_{n+1}^{p+1}(B)\tau_n^p(C) - \lambda_{p'u}\lambda_{vn}\zeta_v(z)\tau_{n+1}^{p+1}(C)\tau_n^p(B)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\zeta_u(z) = \lambda_{un}z^2 - \lambda_{pu}\lambda_{p'u}, \quad \zeta_v(z) = \lambda_{vn}z^2 - \lambda_{pv}\lambda_{p'v}. \quad (4.10)$$

Как будет показано ниже, искомого R -матричного представления для этого оператора не существует, поскольку матричные элементы имеют “неправильную” зависимость от z . Нужно найти L -оператор с такой же зависимостью от z , как в (4.3).

4.3. Составной L -оператор (окончательная версия). Приведенный выше L -оператор можно “улучшить” введением дополнительной трансляции по n . Правильный выбор заключается в том, чтобы рассмотреть трансляцию

$$A = (u, v, n) \longrightarrow D^\downarrow = (u + 1, v + 1, n - 1)$$

Рис. 4

на трехмерной решетке с координатами u, v, n . Ее элементарная ячейка показана на рис. 4. Один из возможных способов выразить этот L -оператор через введенные выше таков:

$$\hat{\mathcal{L}}_{D^{\downarrow} \leftarrow A}(z) = -\lambda_{pn} \lambda_{p'n} [L_{D^{\downarrow} \leftarrow D^{\downarrow}}^{(n)}(z)]^{-1} \mathcal{L}_{D^{\downarrow} \leftarrow A}^{(uv)}(z), \quad (4.11)$$

где $L_{D^{\downarrow} \leftarrow D^{\downarrow}}^{(n)}(z)$ и $\mathcal{L}_{D^{\downarrow} \leftarrow A}^{(uv)}(z)$ определяются соотношениями (3.17) и (4.5), соответственно, а матричные элементы $\hat{\mathcal{L}}_{D^{\downarrow} \leftarrow A}(z)$ – это некоторые лорановские полиномы от z . Из (4.11), (3.12) и (4.6)–(4.10) видно, что диагональные элементы имеют не более чем третью степень, правый верхний и левый нижний элементы – не более чем четвертую и вторую, соответственно.

Оказывается, однако, что структура этого L -оператора в действительности гораздо проще, чем можно было бы ожидать согласно (4.11). В частности, используя приведенные выше билинейные уравнения, можно показать, что члены старших степеней по z сокращаются и остаются только z и z^{-1} в диагональных элементах, а недиагональные не зависят от z .

Это сокращение становится вполне естественным, если воспользоваться эквивалентным представлением L -оператора (4.11), которое использует антикиральные потоки, введенные в п. 3.4:

$$\hat{\mathcal{L}}_{D^{\downarrow} \leftarrow A}(z) = L_{D^{\downarrow} \leftarrow C^{\downarrow}}^{(u)}(z) \bar{L}_{C^{\downarrow} \leftarrow A}^{(\bar{v})}(z).$$

Это означает, что поток, генерируемый L -оператором (4.11), есть “суперпозиция” кирального и антикирального потоков.

Воспользовавшись для нахождения L -оператора любой из двух данных выше формул, получим

$$\hat{\mathcal{L}}_{D^{\downarrow} \leftarrow A}(z) = \begin{pmatrix} z \lambda_{un} \lambda_{vn} \frac{\phi(A)}{\phi(D^{\downarrow})} + z^{-1} \lambda_{pu} \lambda_{pv} \lambda_{p'n} \frac{\phi(D^{\downarrow})}{\phi(A)} & \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \frac{\psi^-(B)}{\phi(B)^2} \varphi_{\mathcal{L}}(A, D^{\downarrow}) \\ \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \psi^+(C^{\downarrow}) \phi(C^{\downarrow})^2 \varphi_{\mathcal{L}}(A, D^{\downarrow}) & z \lambda_{pn} \lambda_{p'n} \frac{\phi(D^{\downarrow})}{\phi(A)} + z^{-1} \lambda_{pn} \lambda_{p'u} \lambda_{p'v} \frac{\phi(A)}{\phi(D^{\downarrow})} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

где

$$\varphi_{\mathcal{L}}(A, D^\perp) = \lambda_{p'u} \lambda_{vn} \frac{\phi(A)}{\phi(D^\perp)} + \lambda_{pv} \lambda_{p'n} \frac{\phi(D^\perp)}{\phi(A)}.$$

Выражение через τ -функцию имеет вид

$$\hat{\mathcal{L}}_{D^\perp \leftarrow A}(z) = \frac{1}{W(A, D^\perp)} \begin{pmatrix} z \lambda_{un} \lambda_{vn} \tau_n^p(D) \tau_n^{p+1}(A) + & \Lambda \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \tau_n^p(B) \tau_n^p(C) \\ + z^{-1} \lambda_{pu} \lambda_{pv} \lambda_{p'n} \tau_{n-1}^{p+1}(D) \tau_{n+1}^p(A) & \\ \Lambda \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \tau_n^{p+1}(B) \tau_n^{p+1}(C) & z \lambda_{pn} \lambda_{p'n} \tau_{n-1}^{p+1}(D) \tau_{n+1}^p(A) + \\ & + z^{-1} \lambda_{pn} \lambda_{p'u} \lambda_{p'v} \tau_n^p(D) \tau_n^{p+1}(A) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

(Λ определена в (2.19)).

4.4. Пространственно-временная решетка. Обозначим через l, m координаты вдоль потоков, генерируемых построенными L - и M -операторами, соответственно, и рассмотрим натянутую на них двумерную решетку. Векторные поля

$$\partial_l \equiv \partial_u + \partial_v - \partial_n, \quad \partial_m \equiv \partial_u - \partial_v$$

образуют оси координат этой решетки (отметим эквивалентное представление этих векторных полей через антикиральные потоки: $\partial_l = \partial_u + \partial_{\bar{v}} = \partial_{\bar{u}} + \partial_v$, $\partial_m = \partial_{\bar{u}} - \partial_{\bar{v}}$). Сдвинув подходящим образом начало координат, мы можем вложить ее в объемлющую трехмерную решетку как плоскость, задаваемую однородным линейным уравнением

$$u + v + 2n = 0 \quad (4.14)$$

с условием $(u, v, n) \in \mathbb{Z}^3$. Эта двумерная решетка в дальнейшем будет называться *пространственно-временной решеткой* (ПВР). Отметим, что киральная решетка вкладывается в трехмерную в виде плоскости $n = 0$, т.е. она является линейной проекцией ПВР вдоль оси n .

Пространственно-временные координаты l, m вводятся формулами

$$l = \frac{1}{2}(u + v), \quad m = \frac{1}{2}(u - v) \quad (4.15)$$

при условии, что точка (u, v, n) принадлежит ПВР (в тех же предположениях l можно определить и как $l = -n$).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. После очевидного согласования обозначений условие нулевой кривизны для построенной пары составных L - и M -операторов на элементарной ячейке ПВР принимает вид (1.9). Оно сводится к системе нелинейных уравнений для полей в вершинах восьми соседних элементарных кубов трехмерной решетки. Эта система является прямым следствием основных уравнений движения (3.14)–(3.16).

5. R -МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ L – M -ПАРЫ

Наша цель – представить L - и M -операторы (4.13), (4.3), построенные в предыдущем разделе, в виде свертки квантовой R -матрицы с некоторыми векторами в ее квантовом пространстве.

5.1. Квантовая R -матрица. Рассмотрим следующую квантовую R -матрицу со спектральным параметром z :

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{4}[2a(z) + b_+(z) + b_-(z)]I \otimes I + \frac{1}{4}[2a(z) - b_+(z) - b_-(z)]\sigma_3 \otimes \sigma_3 + \\ &+ \frac{1}{4}[b_+(z) - b_-(z)](I \otimes \sigma_3 - \sigma_3 \otimes I) + \frac{1}{2}c(z)(\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2) = \\ &= \begin{pmatrix} a(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_+(z) & c(z) & 0 \\ 0 & c(z) & b_-(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(z) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где σ_i – матрицы Паули, I – единичная матрица, а функции $a(z)$, $b_{\pm}(z)$, $c(z)$ имеют вид

$$a(z) = qz - q^{-1}z^{-1}, \quad b_{\pm}(z) = \xi^{\pm 1}(z - z^{-1}), \quad c(z) = q - q^{-1}. \quad (5.2)$$

Если необходимо, будем писать $R(z) = R(z; q, \xi)$, где q – квантовый параметр, а ξ – параметр дринфельдовского твистования [26, 27]:

$$\begin{aligned} R(z; q, \xi) &= F(\xi)R(z; q, 1)F(\xi), \\ F(\xi) &= \xi^{\frac{1}{4}(I \otimes \sigma_3 - \sigma_3 \otimes I)} = \text{diag}(1, \xi^{\frac{1}{2}}, \xi^{-\frac{1}{2}}, 1). \end{aligned}$$

R -матрица (5.1) удовлетворяет квантовому уравнению Янга–Бакстера при любых q, ξ :

$$R_{12}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)R_{13}\left(\frac{z_1}{z_3}\right)R_{23}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = R_{23}\left(\frac{z_2}{z_3}\right)R_{13}\left(\frac{z_1}{z_3}\right)R_{12}\left(\frac{z_1}{z_2}\right), \quad (5.3)$$

где $R_{12}(z)$ действует в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, как $R(z)$ в первом и во втором пространствах и как I в третьем (аналогично для $R_{13}(z)$ и $R_{23}(z)$).

Первое и второе пространства тензорного произведения в (5.1) называются соответственно квантовым и вспомогательным пространствами. Удобно представить R -матрицу как блочную матрицу 2×2 во вспомогательном пространстве. Пусть i, i' – номера блочных строк и столбцов, а j, j' – номера строк и столбцов внутри каждого блока (т.е. в квантовом пространстве). Матричные элементы R -матрицы (5.1) обозначим $R(z)_{jj'}^{ii'}$.

Рассмотрим два вектора $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ в квантовом пространстве (см. (1.4)). Каждый блок R -матрицы – это оператор в квантовом пространстве. Рассмотрим его действие на $|\alpha\rangle$ и последующее скалярное произведение с $\langle\beta|$. В результате получится матрица 2×2 во вспомогательном пространстве:

$$\langle\beta| R(z) |\alpha\rangle_{ii'} = \sum_{jj'} R(z)_{jj'}^{ii'} \alpha_{j'} \beta_j.$$

Подставив матрицу (5.1), находим

$$\begin{aligned} \langle \beta | R(z) | \alpha \rangle &= \begin{pmatrix} \beta_1 \alpha_1 a(z) + \beta_2 \alpha_2 b_+(z) & \beta_2 \alpha_1 c(z) \\ \beta_1 \alpha_2 c(z) & \beta_1 \alpha_1 b_-(z) + \beta_2 \alpha_2 a(z) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} z(q\beta_1 \alpha_1 + \xi \beta_2 \alpha_2) - & (q - q^{-1})\beta_2 \alpha_1 \\ -z^{-1}(q^{-1}\beta_1 \alpha_1 + \xi \beta_2 \alpha_2) & \\ (q - q^{-1})\beta_1 \alpha_2 & zq\xi^{-1}(q^{-1}\beta_1 \alpha_1 + \xi \beta_2 \alpha_2) - \\ & -z^{-1}q^{-1}\xi^{-1}(q\beta_1 \alpha_1 + \xi \beta_2 \alpha_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь и ниже все скалярные произведения вида $\langle \beta | R(z) | \alpha \rangle$ берутся в *первом* (квантовом) пространстве.

5.2. R -матричное представление для L - и M -операторов. Приведем L - и M -операторы (4.12), (4.2) к форме (5.4). Наилучший результат достигается после диагонального калибровочного преобразования

$$\widehat{\mathcal{M}}_{B \leftarrow C}(z) \longrightarrow \mathcal{M}_{B \leftarrow C}(z) = \left(\frac{\tau_n^{p+1}(B) \tau_{n+1}^p(B)}{\tau_n^{p+1}(C) \tau_{n+1}^p(C)} \right)^{\frac{1}{2}} \widehat{\mathcal{M}}_{B \leftarrow C}(z), \quad (5.5)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{D^\dagger \leftarrow A}(z) \longrightarrow \mathcal{L}_{D^\dagger \leftarrow A}(z) = \left(\frac{\tau_{n-1}^{p+1}(D) \tau_n^p(D)}{\tau_n^{p+1}(A) \tau_{n+1}^p(A)} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{L}}_{D^\dagger \leftarrow A}(z) \quad (5.6)$$

и сдвига спектрального параметра

$$z \rightarrow kz, \quad k = \left(\frac{\lambda_{pu} \lambda_{p'u}}{\lambda_{un}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.7)$$

Матрицы $\mathcal{M}_{B \leftarrow C}(kz)$, $\mathcal{L}_{D^\dagger \leftarrow A}(kz)$ нужно выразить через τ -функцию (см. пояснения в конце п. 4.1).

Для формулировки результата введем векторы

$$| \alpha(u, v, n) \rangle = \begin{pmatrix} \mu \tau_n^p(u, v) \\ \mu^{-1} \tau_n^{p+1}(u, v) \end{pmatrix}, \quad | \beta(u, v, n) \rangle = \begin{pmatrix} \mu \tau_n^{p+1}(u, v) \\ \mu^{-1} \tau_n^p(u, v) \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

где

$$\mu = \left(\frac{\lambda_{un} \lambda_{pu}}{\lambda_{pn} \lambda_{p'u}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.9)$$

и отождествим параметры следующим образом:

$$q = \left(\frac{\lambda_{vn} \lambda_{pu} \lambda_{p'u}}{\lambda_{un} \lambda_{pv} \lambda_{p'v}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \xi = \left(\frac{\lambda_{un} \lambda_{pu} \lambda_{p'v}}{\lambda_{vn} \lambda_{pv} \lambda_{p'u}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \xi' = - \left(\frac{\lambda_{un} \lambda_{vn} \lambda_{pu} \lambda_{pv}}{\lambda_{pn}^2 \lambda_{p'u} \lambda_{p'v}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.10)$$

(отметим, что $\xi \xi' = -\mu^4$). Для краткости положим $\rho \equiv [\lambda_{pn} \lambda_{un} \lambda_{vn} \lambda_{pu} \lambda_{pv} \lambda_{p'u} \lambda_{p'v}]^{1/2}$, тогда $q - q^{-1} = -\lambda_{pn}^{1/2} \lambda_{uv} \Lambda \rho^{-1}$ (напомним, что Λ определена в (2.19)).

Теперь сравнение с (5.4) немедленно приводит к формулам

$$\langle \beta(B) | R(z; q, \xi') | \alpha(C) \rangle = -\lambda_{uv} \rho^{-1} \tau_n^{p+1}(A) \tau_{n+1}^p(A) \mathcal{L}_{D^\perp \leftarrow A}(kz), \quad (5.11)$$

$$\langle \beta(D) | R(z; q, \xi) | \alpha(A^\dagger) \rangle = \Lambda \rho^{-1} \tau_n^{p+1}(C) \tau_{n+1}^p(C) \mathcal{M}_{B \leftarrow C}(kz). \quad (5.12)$$

Преобразование их к виду (1.8), (1.7) требует еще двух простых шагов. Во-первых, зафиксируем линию уровня $m = 0$ (сечение постоянного времени) на ПВР. Она вложена в трехмерную решетку как одномерная решетка с вершинами в точках $A_l = (l, l, -l)$, $l \in \mathbb{Z}$. Введем аналогичные обозначения и для соседних точек: $B_l = (l + 1, l, -l)$, $\overline{B}_l = (l + 1, l - 1, -l)$, $D_l^\perp = A_{l+1} = (l + 1, l + 1, -l - 1)$ и т.д., и положим

$$\mathcal{L}_l(z) = \mathcal{L}_{D_l^\perp \leftarrow A_l}(z), \quad \mathcal{M}_l(z) = \mathcal{M}_{\overline{B}_l \leftarrow A_l}(z). \quad (5.13)$$

Во-вторых, заметим, что

$$\tau_{n+1}^p(u, v) \tau_n^{p+1}(u, v) = \frac{(\lambda_{pn} \lambda_{un} \lambda_{pu} \lambda_{p'u})^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{pn} \lambda_{p'n} - \lambda_{un}^2} \langle \beta(u + 1, v, n) | \alpha(u - 1, v, n + 1) \rangle \quad (5.14)$$

в силу (2.20). Это соотношение позволяет переписать (5.11), (5.12) в виде

$$\mathcal{L}_l(kz) = -\frac{\gamma}{\lambda_{uv}} \frac{\langle \beta(B_l) | R(z; q, \xi') | \alpha(C_l) \rangle}{\langle \beta(B_l) | \alpha(C_{l-1}) \rangle}, \quad (5.15)$$

$$\mathcal{M}_l(kz) = \frac{\gamma}{\Lambda} \frac{\langle \beta(B_l) | R(z; q, \xi) | \check{\beta}(B_{l-1}) \rangle}{\langle \beta(B_l) | \alpha(C_{l-1}) \rangle}, \quad (5.16)$$

где

$$|\check{\beta}(B_l)\rangle = \begin{pmatrix} \mu \tau_{-l}^p(l + 1, l) \\ \mu^{-1} \tau_{-l}^{p+1}(l + 1, l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu^2 \\ \mu^{-2} & 0 \end{pmatrix} |\beta(B_l)\rangle,$$

а константа γ дается формулой

$$\gamma = [\lambda_{vn} \lambda_{pv} \lambda_{p'v}]^{\frac{1}{2}} (\lambda_{pn} \lambda_{p'n} - \lambda_{un}^2).$$

Эти формулы отличаются от анонсированных во введении только несущественными общими множителями. Чтобы привести обозначения в полное соответствие, достаточно просто переобозначить векторы: $|\alpha(C_l)\rangle \rightarrow |\alpha(l)\rangle$, $|\beta(B_l)\rangle \rightarrow |\beta(l)\rangle$. Далее везде положим

$$|\alpha(l)\rangle = \begin{pmatrix} \mu \tau_{-l}^p(l, l + 1) \\ \mu^{-1} \tau_{-l}^{p+1}(l, l + 1) \end{pmatrix}, \quad |\beta(l)\rangle = \begin{pmatrix} \mu \tau_{-l}^{p+1}(l + 1, l) \\ \mu^{-1} \tau_{-l}^p(l + 1, l) \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Положение этих векторов на трехмерной решетке схематически показано на рис. 5. Сечение постоянного времени $m = 0$ — это цепочка вершин $(\dots, A_{l-1}, A_l, A_{l+1}, \dots)$. Штриховой линией показана трансляция, которую осуществляет M -оператор (5.16).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. L -оператор $\mathcal{L}_l(z)$ (5.15) имеет две точки вырождения: $z = k$ и $z = kq^{-1}$. В первой из них R -матрица пропорциональна оператору перестановки $\mathcal{P}$ в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$: $R(1; q, \xi') = (q - q^{-1})\mathcal{P}$. Следовательно,

$$\mathcal{L}_l(k) = \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \Lambda \frac{|\alpha(l)\rangle \langle \beta(l)|}{\tau_{-l}^{p+1}(l, l) \tau_{-l+1}^p(l, l)} \quad (5.18)$$

Рис. 5

(ср. с (1.3)). Во второй точке вырождения имеем

$$\mathcal{L}_l(kq^{-1}) = \lambda_{pn}^{\frac{1}{2}} \Lambda \frac{|\tilde{\beta}(l)\rangle \langle \tilde{\alpha}(l)|}{\tau_{-l}^{p+1}(l, l) \tau_{-l+1}^p(l, l)}, \quad (5.19)$$

где

$$|\tilde{\beta}(l)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -\xi' \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\beta(l)\rangle, \quad |\tilde{\alpha}(l)\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\xi')^{-1} & 0 \end{pmatrix} |\alpha(l)\rangle.$$

Формулы типа (5.15), (5.16) для той же самой L - M -пары могут быть записаны также в терминах векторов $|\tilde{\alpha}(l)\rangle, |\tilde{\beta}(l)\rangle$.

6. ПРЕДЕЛ НЕПРЕРЫВНОГО ВРЕМЕНИ

В этом разделе мы покажем, что r -матричная формула (1.5) для локального M -оператора является вырожденным случаем R -матричной формулы (1.7). Как следует из раздела 2, величина λ_{uv} играет роль постоянной решетки для дискретного времени m . Поэтому на первый взгляд предел непрерывного времени должен означать $\lambda_v \rightarrow \lambda_u$, т.е. $q \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow 1$ в $R(z; q; \xi)$, так что в согласии с (1.5) мы действительно получаем ту же формулу, но с классической r -матрицей. Однако дело обстоит не так просто. Действительно, при таком пределе $\lim_{q \rightarrow 1} |\tilde{\beta}_l\rangle = |\alpha_l\rangle$, что в общем случае заведомо неверно. Корректный способ перехода к пределу несколько сложнее и требует некоторых пояснений.

6.1. Предельная форма M -оператора. В пределе непрерывного времени L -оператор (5.15) остается неизменным. Наивный предел не дает желаемого результата именно из-за того, что при изменении λ_v меняются структура ПВР, а значит, и L -

оператор. При правильном взятии предела постоянная решетки должна стремиться к нулю, не меняя λ_u и λ_v .

Чтобы этого добиться, надо использовать те дополнительные возможности, которые предоставляет подход Мивы [13]. Именно, введем переменную w — еще одну копию кирального потока v с переменной Мивы λ_w . Билинейные уравнения из раздела 2, очевидно, остаются справедливыми при замене v и λ_v на соответственно w и λ_w . Теперь можно устремлять $\lambda_w \rightarrow \lambda_u$ (что в пределе даст непрерывный поток), не меняя λ_v и тем самым сохраняя все параметры неизменными. Положим

$$\hat{q} = \left(\frac{\lambda_{wn}\lambda_{pu}\lambda_{p'u}}{\lambda_{un}\lambda_{pw}\lambda_{p'u}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \hat{\xi} = \left(\frac{\lambda_{un}\lambda_{pu}\lambda_{p'w}}{\lambda_{wn}\lambda_{pw}\lambda_{p'u}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad -\lambda_{uw} \equiv \varepsilon \quad (6.1)$$

и рассмотрим предел $\varepsilon \rightarrow 0$, в котором имеем

$$\hat{q} = 1 + \frac{\lambda_{p'u}\lambda_{un} + \lambda_{pu}\lambda_{p'n}}{2\lambda_{un}\lambda_{pu}\lambda_{p'u}} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \hat{\xi} = 1 + \frac{\lambda_{p'u}\lambda_{un} - \lambda_{pu}\lambda_{p'n}}{2\lambda_{un}\lambda_{pu} + \lambda_{p'u}} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (6.2)$$

Дискретные M -операторы определены с точностью до умножения на скалярную функцию от z , не зависящую от динамических переменных. Для взятия непрерывного предела удобно нормировать M -оператор условием $\mathcal{M}_l^0(z) = I$ при $\varepsilon = 0$. Тогда следующий член разложения (порядка ε) дает локальный M -оператор для непрерывного потока.

Рис. 6

Чтобы выполнить эту программу, рассмотрим четырехмерную решетку с координатами (u, v, w, n) . Сечение ПВР $m = 0$ вложено в нее как одномерная подрешетка с вершинами $A_l = (l, l, 0, -l)$, $l \in \mathbb{Z}$. Непрерывный M -оператор в узле A_l получается разложением дискретного M -оператора $\mathcal{M}_{\overline{B}'_l \leftarrow A_l}^0(z) = \lambda_{un}k(z - z^{-1})I + O(\varepsilon)$, который осуществляет трансляцию $A_l = (l, l, 0, -l) \rightarrow \overline{B}' = (l + 1, l, -1, -l)$. Переходя к нормированному M -оператору, получаем

$$\mathcal{M}_{\overline{B}'_l \leftarrow A_l}^0(z) = I + \varepsilon \widetilde{M}_l(z) + O(\varepsilon^2). \quad (6.3)$$

На рис. 6 для наглядности изображена (u, w) -плоскость в четырехмерной решетке ($v = \text{const}$, $n = \text{const}$). В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ точка $\overline{B}'_l$ стремится к точке A_l , т.е. параллелограмм сжимается и целиком ложится на ось u . Нас интересует описание этого процесса

в первом порядке по ε . Используя равенства (4.3), (2.13), получаем

$$\widetilde{M}_l(kz) = \frac{1}{2\lambda_{p'u}(z - z^{-1})} \begin{pmatrix} \frac{1}{z} - z + \left(z + \frac{1}{z}\right) U_l & 2\mu^{-2} \frac{\tau_{-l}^p(l+1, l) \tau_{-l+1}^p(l-1, l)}{\tau_{-l}^{p+1}(l, l) \tau_{-l+1}^p(l, l)} \\ 2\mu^{-2} \frac{\tau_{-l}^{p+1}(l+1, l) \tau_{-l+1}^{p+1}(l-1, l)}{\tau_{-l}^{p+1}(l, l) \tau_{-l+1}^p(l, l)} & 2 \frac{z\lambda_{p'u}}{\lambda_{un}} + 2 \frac{\lambda_{p'u}}{z\lambda_{pu}} + \\ & + z + \frac{1}{z} - \left(z + \frac{1}{z}\right) U_l \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

где

$$U_l \equiv \frac{\tau_{-l}^{p+1}(l+1, l) \tau_{-l+1}^p(l-1, l)}{\tau_{-l+1}^p(l, l) \tau_{-l}^{p+1}(l, l)}.$$

Отметим дополнительную свободу, которая позволяет переопределить $\widetilde{M}_l(z)$, добавив член $h(z)I$ с произвольной скалярной функцией $h(z)$, не зависящей от динамических переменных. Это, очевидно, не меняет условие нулевой кривизны (1.6). Ниже мы используем эту свободу для переопределения M -оператора.

6.2. Сравнение с r -матричной формулой. Вместо того чтобы находить предел правой части выражения (5.16) непосредственно, проще подставить в (1.5) векторы (5.17) и некоторую пробную классическую r -матрицу и, воспользовавшись формулой (5.4), сравнить результат с (6.4). В качестве первого приближения возьмем стандартную классическую r -матрицу

$$\begin{aligned} r^{(0)}(z) &= \frac{1}{2(z - z^{-1})} [(z + z^{-1})I \otimes I + 2\sigma_1 \otimes \sigma_1 + 2\sigma_2 \otimes \sigma_2 + (z + z^{-1})\sigma_3 \otimes \sigma_3] = \\ &= \frac{1}{z - z^{-1}} \begin{pmatrix} z + z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z + z^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

которая дает нужный результат в решеточной модели СГ. Эта матрица кососимметрическая, т.е. при $z_1 \neq z_2$ удовлетворяет свойству $r_{12}^{(0)}(z_1/z_2) = -r_{21}^{(0)}(z_2/z_1)$, где используются обозначения из п. 5.1. Подставляя векторы (5.17) и эту r -матрицу в (1.5) и пользуясь уравнением (2.21), находим

$$\frac{\lambda_{pn}\lambda_{p'n} - \lambda_{un}^2}{2\lambda_{un}\lambda_{pu}\lambda_{p'u}} \frac{\langle \beta(l) | r^{(0)}(z) | \alpha(l-1) \rangle}{\langle \beta(l) | \alpha(l-1) \rangle} - \widetilde{M}_l(kz) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_{p'u}^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_{pu}^{-1} - \lambda_{un}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

где в правой части собраны члены, нарушающие нужное нам равенство. Их достаточно простой вид говорит о том, что наше первое приближение не так уж плохо. Чтобы получить в правой части нуль, надо ввести две поправки: одну в $\widetilde{M}_l(z)$, а другую в $r^{(0)}$. Первая из них — это, скорее, вопрос определения непрерывного M -оператора, который мы имеем право переопределить, воспользовавшись отмеченной выше свободой:

$$M_l(z) \equiv \widetilde{M}_l(z) + \frac{1}{4}(\lambda_{p'u}^{-1} + \lambda_{pu}^{-1} - \lambda_{un}^{-1})I. \quad (6.7)$$

Вторая поправка более важна. Обозначим через $r^{(\kappa)}(z)$ модифицированную r -матрицу:

$$r^{(\kappa)}(z) = r^{(0)}(z) + \kappa I \otimes \sigma_3, \quad (6.8)$$

$$\kappa = \frac{\lambda_{p'u}\lambda_{un} - \lambda_{pu}\lambda_{p'n}}{2(\lambda_{pn}\lambda_{p'n} - \lambda_{un}^2)}. \quad (6.9)$$

Очевидно, κ -член нарушает кососимметричность. Тем не менее $r^{(\kappa)}(z)$ является классической r -матрицей, так как удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера, записанному в форме, модифицированной применительно к не обязательно кососимметрическим r -матрицам [28]:

$$\left[r_{12}^{(\kappa)} \left(\frac{z_1}{z_2} \right), r_{13}^{(\kappa)} \left(\frac{z_1}{z_3} \right) \right] + \left[r_{12}^{(\kappa)} \left(\frac{z_1}{z_2} \right), r_{23}^{(\kappa)} \left(\frac{z_2}{z_3} \right) \right] + \left[r_{32}^{(\kappa)} \left(\frac{z_3}{z_2} \right), r_{13}^{(\kappa)} \left(\frac{z_1}{z_3} \right) \right] = 0. \quad (6.10)$$

Учтя эти поправки, мы перепишем (6.6) как r -матричную формулу:

$$M_l(kz) = \frac{\lambda_{pn}\lambda_{p'n} - \lambda_{un}^2}{2\lambda_{un}\lambda_{pu}\lambda_{p'u}} \frac{\langle \beta(l) | r^{(\kappa)}(z) | \alpha(l-1) \rangle}{\langle \beta(l) | \alpha(l-1) \rangle}. \quad (6.11)$$

При $\kappa = 0$ (т.е. $\lambda_{p'u}\lambda_{un} = \lambda_{pu}\lambda_{p'n}$) мы возвращаемся к стандартной r -матрице. (Именно этот случай реализуется в модели СГ на решетке с непрерывным временем.) Заметим, что в этом случае $\hat{\xi} = 1 + O(\varepsilon^2)$ (см. (6.2)) и классическая r -матрица получается как “росток” квантовой:

$$r^{(0)}(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R(z; \hat{q}, \hat{\xi}) - (z - z^{-1})I \otimes I}{(\hat{q} - 1)(z - z^{-1})}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Появление некососимметрической r -матрицы (6.8) есть знак того, что L -оператор при $\kappa \neq 0$ не ультралокален. В этом случае скобки Пуассона для элементов матрицы монодромии $\mathcal{T}$ даются общей квадратичной алгеброй скобок Пуассона

$$\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\} = r_{12}^+ \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_1 s_{12}^+ \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_2 s_{12}^- \mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2 r_{12}^-,$$

изучавшейся (вместе с ее квантовыми аналогами) в работах [29–31]. Матрицы $r^\pm, s^\pm$ удовлетворяют ряду условий, обеспечивающих антисимметрию и выполнение тождества Якоби. Кроме того, в интегрируемых моделях выполняется условие $r^+ + s^+ = s^- + r^-$. При этих условиях (некососимметрическая) r -матрица $r^+ - s^-$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера в форме (6.10). В нашем случае четверка матриц r^+, s^+, s^-, r^- выглядит следующим образом: $r^+ = r^{(0)}$, $s^+ = -\kappa \sigma_3 \otimes I$, $s^- = -\kappa I \otimes \sigma_3$, $r^- = r^{(0)} + \kappa(I \otimes \sigma_3 - \sigma_3 \otimes I)$, и, таким образом, $r^+ - s^- = r^{(\kappa)}$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат этой работы – R -матричное представление (5.15), (5.16) локальной L – M -пары для классической дискретной модели МГ. На наш взгляд, тот факт, что

типичные квантовые R -матрицы естественным образом появляются в чисто классической задаче, важен и интересен сам по себе. Чтобы обнаружить их в классических дискретных задачах, нужно перейти к билинейному формализму Хироты и воспользоваться интерпретацией дискретных потоков, данной Мивой. Мы также показали, что компоненты векторов $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ (представляющих L -оператор в точке вырождения) являются τ -функциями.

Напомним, что квантовое уравнение Янга–Бакстера уже возникало в связи с чисто классическими интегрируемыми задачами, хотя и в другом контексте [32, 33], однако класс его решений, по-видимому, очень далек от R -матриц известных квантовых интегрируемых моделей. В нашей конструкции роль квантового уравнения Янга–Бакстера остается пока неясной. Не используя его явно, мы показали, что одна из наиболее популярных квантовых R -матриц – тригонометрическая R -матрица спиновой XXZ -цепочки – участвует в представлении нулевой кривизны для классических дискретных уравнений. Мы полагаем, что объяснение этого факта будет тем не менее основано на квантовом уравнении Янга–Бакстера.

Стоит подчеркнуть, что параметр квантовой деформации q в нашем контексте не имеет прямого отношения к квантованию. Он определяется размером и формой элементарной ячейки ПБР, на которой задана классическая модель. Было бы интересно увидеть эту скрытую R -матричную структуру на квантовом уровне. Векторы $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ при этом будут иметь операторные компоненты. Если бы такое обобщение действительно существовало, это бы означало, что с квантовой интегрируемой моделью ассоциированы две разные R -матрицы, а не одна. В то же время это могло бы служить некоторым объяснением полученных нами R -матричных формул: в классическом пределе вырождается только одна из этих R -матриц, а вторая остается квантовой.

Среди других связанных с этим проблем отметим следующие. Прежде всего, необходимо провести детальное сопоставление с гамильтоновым формализмом, которое в нашем изложении отсутствует. Было бы чрезвычайно полезно точнее охарактеризовать алгебру скобок Пуассона для элементов L -оператора (4.12) (вообще говоря, не ультралокальную) и, взяв ее в качестве отправной точки, дать альтернативный вывод r -матричной формулы (6.11) для M -оператора. Другая нерешенная задача – найти аналог нелокальной производящей функции (1.2) M -операторов для систем в дискретном времени. Наконец, было бы интересно распространить всю конструкцию на самую общую модель с матричной L – M -парой 2×2 – дискретный аналог уравнения Ландау–Лифшица (магнетик типа XYZ). При этом спектральный параметр – это точка эллиптической кривой, и не вполне ясно, как билинейный формализм обобщается на этот случай (как, например, будет выглядеть условие редукции (3.2)).

Благодарности. Автор благодарен П. Вигману, А. Волкову, И. Кричеверу, О. Липану и С. Харчеву за полезные обсуждения, а также Т. Астаховой за помощь в подготовке рисунков. Эта работа была частично поддержана грантом РФФИ № 00-02-16477.

Список литературы

- [1] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [2] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [3] А. В. Забродин. Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 66. С. 620–625.
- [4] Е. К. Склянин. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 95. С. 55–128.
- [5] А. G. Izergin, V. E. Korepin. Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 199–205; Nucl. Phys. B. 1982. V. 205. P. 401–413.
- [6] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 13–63.
- [7] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин. Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М.: Наука, 1992.
- [8] M. Jimbo, T. Miwa. Publ. RIMS Kyoto Univ. 1983. V. 19. P. 943–1001.
- [9] G. Segal, G. Wilson. Publ. IHES. 1985. V. 61. P. 5–65.
- [10] R. Hirota. J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. P. 1424–1433.
- [11] R. Hirota. J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. P. 2074–2078.
- [12] R. Hirota. J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3785–3791.
- [13] T. Miwa. Proc. Japan Acad. A. 1982. V. 58. P. 9–12.
- [14] E. Date, M. Jimbo, T. Miwa. J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51. P. 4116–4131.
- [15] S. Saito, N. Saitoh. Phys. Lett. A. 1987. V. 120. P. 322–326; J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 1052–1055.
- [16] Е. К. Склянин. Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 27–34.
- [17] L. Faddeev, A. Volkov. Lett. Math. Phys. 1994. V. 32. P. 125–133.
- [18] A. Volkov. Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. P. 313–329.
- [19] А. Ю. Волков, Л. Д. Фаддеев. ТМФ. 1992. Т. 92. С. 207–214.
- [20] V. Bazhanov, A. Bobenko, N. Reshetikhin. Commun. Math. Phys. 1996. V. 175. P. 377–400.
- [21] R. Kashaev, N. Reshetikhin. Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 251–266.
- [22] K. Ueno, K. Takasaki. Adv. Stud. Pure Math. 1984. V. 4. P. 1–95.
- [23] А. В. Забродин. ТМФ. 1997. Т. 113. С. 179–230.
- [24] И. М. Кричевер. УМН. 1978. Т. 33. № 4. С. 215–216.
- [25] I. Krichever, P. Wiegmann, A. Zabrodin. Commun. Math. Phys. 1998. V. 193. P. 373–396.
- [26] В. Г. Дринфельд. Алгебра и анализ. 1990. Т. 1. № 6. С. 114–148.
- [27] N. Reshetikhin. Lett. Math. Phys. 1990. V. 20. P. 331–335.
- [28] O. Babelon, C.-M. Viallet. Phys. Lett. B. 1989. V. 237. P. 411–416.
- [29] L. Freidel, J. M. Maillet. Phys. Lett. B. 1991. V. 262. P. 278–284.
- [30] F. W. Nijhoff, H. W. Capel, V. G. Papageorgiou. Phys. Rev. A. 1992. V. 46. P. 2155–2158.
- [31] М. С. Семенов-Тянь-Шанский. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1993. Т. 200. С. 156–166.
- [32] Е. К. Склянин. Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1985. Т. 146. С. 119–136.
- [33] A. Weinstein, P. Xu. Commun. Math. Phys. 1992. V. 148. P. 309–343.

Поступила в редакцию
28.IV.2000 г.