Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Юдин, Е. С. Старцев, И. Г. Пермякова, Полу-
групповой формализм Фибоначчи–Пенроуза и морфогенетический синтез квазикристаллических мозаик, *ТМФ*,
2011, том 167, номер 1, 136–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6630>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:36:23

© 2011 г. В. В. Юдин*, Е. С. Старцев*, И. Г. Пермякова*

ПОЛУГРУППОВОЙ ФОРМАЛИЗМ ФИБОНАЧЧИ–ПЕНРОУЗА И МОРФОГЕНЕТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ КВАЗИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МОЗАИК

В рамках аксиоматического подхода построена групповая связка инверсных полугрупп Фибоначчи. Собственная подполугруппа Фибоначчи образует соответствующую связку полугрупп Пенроуза. Последнее можно трактовать как порождающую грамматику морфогенетического синтеза пентасимметричного паркета Пенроуза в числах замощения золотыми ромбами. Данный морфогенетический синтез паркета Пенроуза удовлетворяет принципу скейлинга. Плитки паркета не являются абсолютно твердыми, а отношения их метрических характеристик управляются золотыми и другими замечательными числами. Инвариантами при этом являются характерные формфакторы трехуровневых дуальных алфавитов. Морфогенетический синтез продемонстрирован на примере квартетно-октагональной и бигексагональной мозаик. Рассмотрены кумулятивные свойства замечательных рядов, а также эволюционные аспекты полугрупповых орбит в энтропийном представлении.

Ключевые слова: групповая связка инверсных полугрупп, генератор Фибоначчи, генератор Пенроуза, морфогенез, квартетно-октагональная мозаика, бигексагональная мозаика.

1. ВВЕДЕНИЕ

На множестве квазикристаллических симметрий можно выделить минимальную подгруппу симметрий, которые в определенном смысле достаточно близки к классическим симметриям. Таковыми, по нашему мнению, являются квартетно-октагональная мозаика, мозаика Пенроуза и бигексагональный паркет [1], [2]. Среди представителей этого минимального класса квазикристаллических симметрий хотелось бы выделить паркет Пенроуза [3]–[5], в нем в единый узел связаны три аспекта: проявление золотой симметрии, внутреннее присутствие ряда Фибоначчи и свойство пентасимметричности. Пентасимметричный паркет Пенроуза является одним из фундаментальных примеров квазикристаллической симметрии.

В общих чертах задача, которую решал Пенроуз [6] и другие математики, состоит в бездефектном замощении пространства $\mathbb{R}^n$ минимальным числом плиток. Авторы

*Дальневосточный государственный университет, Владивосток, Россия.
E-mail: yudinvv@mail.ru, ses_1@mail.ru, irina.permyakova@vvsu.ru

многочисленных работ (см., например, [7], [8]), как правило, решают задачу поиска алгоритмов или эвристичных методик, порождающих квазикристаллические паркетты.

Логично ввести понятие алфавита плиток, который, как мы полагаем, для мозаики Пенроуза должен иметь трехуровневый характер. Первый уровень образован парой золотых треугольников Робинсона, второй – пара золотых ромбов – является объединением треугольников Робинсона по золотым сторонам. Именно с этим уровнем и работал Пенроуз при построении своего пентасимметричного паркета [5], [6]. На этом уровне не существует алгоритма пентасимметричного покрытия в логике Тьюринга. Как отмечал сам Пенроуз, поочередное присоединение плиток требует некоторой перестройки предыдущего окружения; здесь он привлекает квантово-механическую парадигму для трактовки интегрального, целостного эффекта [6]. Третий уровень алфавита – дорзальный и звездчатый десятиугольники, состоящие из пяти широких и пяти узких золотых ромбов. С их помощью гораздо проще реализовать покрытие в рамках конструктивных нерекуррентных процедур, хотя при этом необходимо разрешить возможность минимальной пересекаемости. С точки зрения теории информации [5], [9], если иметь в виду теорию кодирования в приложении к задачам замощения, можно реализовать покрытие, используя более простые конструктивные процедуры. Наши десятиугольники и являются теми кодировочными блоками, которыми “записывается текст” Пенроуза [10].

Традиционно для существенного понижения степени неопределенности вводятся разнообразие правила состыковки. При этом плитки наделяются некоторыми метками, стрелками или раскрашиваются тем или иным цветом. Тем самым наряду с самими плитками появляется необходимость учитывать некоторое конечное множество последующих координат, соседств. Необходимо придумать такой математический аппарат, в рамках которого плитка рассматривалась бы совместно с типом контактов, обеспеченных конечным числом простейших комбинаций. В наших работах [9], [11]–[13] предложен такой древесно-графовый формализм задания плиточной грамматики.

Известна роль золотой симметрии и последовательности Фибоначчи в пентасимметричной мозаике Пенроуза, поэтому разумно остановиться на выяснении той алгебраической структуры, которая лежит в основе процесса Фибоначчи. Это сделано в разделах 2, 3 настоящей работы, в результате чего построена групповая связка инверсных полугрупп (ГСИП). Такая алгебраическая конструкция предполагает, что имеет место скейлинговое свойство. Поскольку полугруппы данной связки являются несобственными, необходимо получить собственную подполугруппу, что сделано в разделе 4; именно на этом пути мы получаем ГСИП для системы Пенроуза–Фибоначчи. Фактически покрытие осуществляется не абсолютно твердыми плитками, а плитками с золотым формфактором, причем отношение метрических характеристик этих золотых плиток остается постоянным. Но это означает, что полугруппа должна реализовать преобразование подобия со скейлинговым инвариантом. Однако это не задача замощения, покрытия пространства $\mathbb{R}^2$. В разделах 5, 6 предлагается морфогенетический принцип генерации мозаик [14]–[17] для минимального класса квазикристаллических симметрий. В задаче морфогенеза полученные полугрупповые конструкции работают на числах заполнения золотыми ромбами (модулями второго уровня плиток соответствующих алфавитов).

2. АКСИОМАТИКА СИСТЕМЫ ФИБОНАЧЧИ

Под F -генератором будем понимать итеративно-рекуррентный операционный модуль (фильтр), на выходе которого мы имеем известный ряд Фибоначчи. Генератор описывается в терминах “вход–выход” и задается оператором перехода. Состояние системы определяется векторами на входе и выходе модуля, а движение, преобразование векторных состояний осуществляется путем действия оператора единичного сдвига.

Наша первая задача состоит в установлении структуры операционного модуля на основе простых предположений. Простейшее представление системы Фибоначчи мы реализуем в рамках векторного представления с использованием линейного матричного оператора правого единичного сдвига. Уравнение движения F^+ -генератора таково:

$$(x_n, y_n) = \dots \Delta_F^{+1}(\Delta_F^{+1}(\Delta_F^{+1}(x_0, y_0))). \quad (1)$$

Элементы бивекторов и матричные элементы Δ_F^{+1} -генератора принадлежат множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел. На выходе итеративно-рекуррентной процедуры (1) должна быть последовательность Фибоначчи.

Сформулируем несколько аксиом, которые позволят вскрыть структуру операционного модуля.

АКСИОМА 1. Состояние системы Фибоначчи задается бивектором $(x, y) \in R_F(x, y)$, где $R_F(x, y) \subset R_{\mathbb{N}}(x, y)$, пространство $R_{\mathbb{N}}(x, y)$ – двумерная решетка на $\mathbb{N}$, подпространство $R_F(x, y)$ – двумерная подрешетка на $R_{\mathbb{N}}(x, y)$, являющаяся прямой суммой двух рядов Фибоначчи. Норма бивектора задается как $\text{Norm}(x, y) = x + y$, где x, y – натуральные числа, с ее помощью на $R_{\mathbb{N}}(x, y)$ определена метрика “города”, или хорошо известная манхэттенская метрика, метрика “улиц”. Данный тип абсолютной линейной метрики является внутренней метрикой любой решеточной системы.

АКСИОМА 2. Действие генератора Фибоначчи задается F -цепью

$$(x_n, y_n)\Delta_F^{+1} = (x_{n+1}, y_{n+1}), \quad (x_0, y_0)(\Delta_F^{+1})^n = (x_n, y_n), \quad (2)$$

где $(\Delta_F^{+1})^n$ можно записать в “фильтровой” форме,

$$\Delta_F^{+n} = \prod_{i=1}^n \Delta_F^{+1} = (\Delta_F^{+1})^n. \quad (3)$$

Данные формулы показывают, что $(\Delta_F^{+1})^n$ -генераторы образуют матричную, операторную орбиту, траекторию с групповым свойством.

АКСИОМА 3. Наложим на (2×2) -матрицу единичного правого сдвига Δ_F^{+1} с матричными элементами $\Delta_{ik}^{+1} \in \mathbb{N}$, $i, k = 1, 2$, условия специальности и простоты:

$$|\det \Delta_F^{+1}| = 1, \quad \text{Sp } \Delta_F^{+1} = 1, \quad \Delta_{ik}^{+1} \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1\}. \quad (4)$$

В общем случае $x' = \varphi_1(x, y)$, $y' = \varphi_2(x, y)$, где функции $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ линейные. Потребуем, чтобы $x' = \varphi_1(x, y)$, $y' = \varphi_2(x)$. Тогда переменную x назовем *старшей*, а переменную y – *младшей*.

Целые степени генератора Фибоначчи не содержат тривиальный единичный идемпотент, $E \notin \{(\Delta_F^{+1})^n, n = 1, 2, \dots\}$, что является следствием условий (4). Последнее означает, что операторная орбита (3) не может иметь в качестве своего начального элемента тривиальный единичный идемпотент, и поэтому может обладать полугрупповым свойством. Правая компонента ряда Фибоначчи представляет собой разрастающийся, развертывающийся F^+ -ряд с характерными эволюционными признаками [18].

Зададим норму генератора Фибоначчи в следующем виде:

$$\text{Norm } \Delta_F^{+1} = \text{Sp}(\Delta_F^{+1}(\Delta_F^{+1})^T) = \sum_{i,k=1}^2 \Delta_{ik}^{+1}, \quad (5)$$

в общем случае норма генератора не меньше 3. Данная норма согласована с нормой бивектора (см. аксиому 1). Из условия $E \notin \{(\Delta_F^{+1})^n, n = 1, 2, \dots\}$ также следует, что никакое инфинитезимальное преобразование $(\Delta_F^{+1})^n$ -орбиты F^+ -генераторов не может стартовать с единичного, тривиального идемпотента. Тем самым полугрупповое свойство F^+ -ряда существенно и принципиально.

АКСИОМА 4. Наделим полугрупповую орбиту Δ_F^{+1} -генератора естественным эндоморфизмом. Для любых $(x, y) \in R_F(x, y) \subset R_{\mathbb{N}}(x, y)$ потребуем, чтобы

$$\frac{\text{Norm}(x_n, y_n)}{\text{Norm}(x_{n-1}, y_{n-1})} = W^+, \quad \frac{\text{Sp}(\Delta_F^{+1})^n}{\text{Sp}(\Delta_F^{+1})^{n-1}} = W^+, \quad (6)$$

$$\frac{\text{Norm}(x_n, y_n)}{\text{Norm}(x_{n+1}, y_{n+1})} = W^-, \quad \frac{\text{Sp}(\Delta_F^{+1})^n}{\text{Sp}(\Delta_F^{+1})^{n+1}} = W^-, \quad (7)$$

где W^+ и W^- – инварианты, причем

$$W^+ W^- = 1. \quad (8)$$

Как видно из соотношений (6), (7), F^+ -эволюция согласованна, не сохраняет норму и метрику, но сохраняет их отношение, причем для правых (6) и левых (7) сдвигов выполняется условие дуальности, сопряжения (8). Для F^+ -эволюции мы имеем $W^+ = \alpha_2 = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1.618$ – “большое” золотое число, а для обратного F^- -процесса $W^- = \alpha_1 = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618$ – “малое” золотое число. Очевидно, равенство $\alpha_2 \alpha_1 = 1$ отвечает условию (8) именно для системы Фибоначчи. Введенный в аксиоме 4 эндоморфизм имеет скейлинговый тип: процесс Фибоначчи реализуется преобразованиями подобия.

3. ГСИП ФИБОНАЧЧИ

Из приведенных выше аксиом вытекает следующий явный вид F^+ -генератора:

$$\Delta_F^{+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp } \Delta_F^{+1} = 1, \quad \det \Delta_F^{+1} = -1. \quad (9)$$

Матрица Δ_F^{+1} – это известная Q-матрица Фибоначчи [19]. Согласно определению (5) $\text{Norm } \Delta_F^{+1} = \sum_{i,k=1}^2 \Delta_{ik}^{+1} = 3$. Спектр F^+ -генератора состоит из двух собственных значений

$$\lambda_{F_1}^+ = \alpha_2, \quad \lambda_{F_2}^+ = -\alpha_1, \quad (10)$$

Рис. 1. Структура операционного модуля Фибоначчи для разрастающегося ряда Фибоначчи.

положительное собственное значение определяет темп действия генератора F^+ -эволюции и совпадает с “большим” золотым числом. Отрицательность $\det \Delta_F^{+1}$ указывает на несобственный характер действия F^+ -генератора. Соотношения (9) позволяют вскрыть структуру модуля Фибоначчи. На рис. 1 видна принципиально дисимметричная схема F^+ -модуля, что обусловлено структурой генератора Фибоначчи.

Образует F^+ -цепь $(F_n, F_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (F_{n+1}, F_n)$. Видно, что Δ_F^{+1} -генератор осуществляет единичный правый сдвиг бивекторов и генерирует из бивектора $(x_0, y_0) = (1, 1)$ последовательность Фибоначчи. Выражения (9) указывают на один момент в арифметическом алгоритме ряда Фибоначчи: наряду с попарным суммированием $y_i + x_i = x_{i+1}$ надо предусмотреть инверсию

$$x_i = y_{i+1}. \quad (11)$$

Именно это преобразование как раз содержится в фильтре Фибоначчи (см. рис. 1). Инверсия определяет тип фрактальности Фибоначчи, несводимый к процедурам Кантора и Коха [20]. В теории информации есть базовая категория избыточности, которая может принимать разные формы. В частности, для фрактала Кантора характерна некоторая иерархическая “дырчатость”, это отрицательный тип избыточности. В фракталах Коха, наоборот, присутствует некоторая “сверхизвилистость”, это положительный тип избыточности. Но в том и в другом случае размерность Хаусдорфа всегда больше топологической размерности составляющего элемента. В работе [20] предложен совсем иной тип внесения избыточности, в основе которого как раз лежит инверсия (11). В итеративной процедуре каждый раз y -отрезок заменяется на предыдущий x -отрезок, причем на каждом уровне итерации осуществляется соответствующее золотое разбиение. По этой методике в работе [20] получена оценка фрактальности в процессе Фибоначчи: она равна 0.69098.

Используя соотношения (2), (3), строим F^+ -полугрупповую орбиту:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \det(\Delta_F^{+1})^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \pm 1. \quad (12)$$

Матричные элементы степеней Δ_F^{+1} -генератора состоят из членов F^+ -ряда с условием унимодулярности. Последнее подсказывает, что в F^+ -орбите можно выделить собственную подорбиту с положительным детерминантом. Очевидно, этому условию удовлетворяют четные степени генератора. Так была получена полугрупповая орбита Пенроуза [12], [14]. Условие положительности детерминанта степеней Δ_F^{+1} -генераторов является условием морфогенетической реализуемости паркета Пенроуза [14]–[17] с учетом скейлингового эндоморфизма.

Обсуждаемое свойство подобия полугруппы Фибоначчи (аксиома 4) можно сделать наглядным, осуществляя комплексификацию F^+ -полугруппы в пространстве $R_{\mathbb{N}}(F_n, F_{n-1})$:

$$(x_n, y_n) \rightarrow (F_n, F_{n-1}) \equiv F_n + iF_{n-1}, \quad \text{Norm}(F_n, F_{n-1}) = F_n + F_{n-1} = F_{n+1}.$$

В последнем выражении использована метрика “города”. При комплексификации Δ_F^{+1} -генератора должны выполняться условия специальности (9) и сохраняться собственные значения (10). Комплексифицированный $(F^+)^*$ -генератор Фибоначчи (9) имеет вид

$$(\Delta_F^{+1})^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp}(\Delta_F^{+1})^* = 1, \quad \det(\Delta_F^{+1})^* = -1.$$

Общий член комплексифицированной $(F^+)^*$ -цепи записывается как

$$(F_n, F_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = ((F_n + F_{n-1}), F_n) = F_{n+1} + iF_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда нетрудно увидеть, что $(F^+)^*$ является комплексным числом с натуральными действительной и мнимой частями. Матричную форму F^+ -орбиты можно эквивалентно отобразить в триплетную. Комплексифицированная полугрупповая орбита (12) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 5 & 3i \\ -3i & 2 \end{pmatrix}, & \dots, \\ ((\Delta_F^{+1})^*)^n &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & iF_n \\ -iF_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \equiv (F_{n+1}, \pm iF_n, F_{n-1}), \end{aligned} \quad (13)$$

где $(F_{n+1}, \pm iF_n, F_{n-1})$ – триплетная форма записи орбиты.

Необходимо помнить, что на евклидовой плоскости, на базе которой всегда строится комплексная плоскость, действует метрика “города”, а не квадратичная (евклидова) метрика. Вообще говоря, известны три вида комплексных чисел – эллиптические, гиперболические и параболические. Они определяются таблицами умножения, в которых квадрат мнимой единицы равен -1 , $+1$ и 0 соответственно. Эллиптические комплексные числа – это обычные, хорошо известные числа. Гиперболические комплексные числа – это двойные числа, которые геометризуют псевдоевклидову плоскость в теории относительности. К сожалению, четырехмерного обобщения двойных комплексных чисел не существует, именно поэтому используются гиперкомплексные числа типа кватернионов. В нашем случае это эллиптические комплексные числа на натуральной решетке, внутренняя метрика которых как раз и является манхэттенской.

Неевклидово построение динамики триплетов $(F_{n+1}, \pm iF_n, F_{n-1})$ в метрике “города” приведено на рис. 2, показана последовательность следующих триплетов из (13): $(3, \pm 2i, 1)$, $(5, \pm 3i, 2)$, $(8, \pm 5i, 3)$, $(13, \pm 8i, 5)$, $(21, \pm 13i, 8)$. Отношение катетов подобных треугольников на рис. 2 подчиняется золотой инвариантности: $F_{n+1}/F_n =$

Рис. 2. Комплексифицированная динамика триплетов Фибоначчи в комплексных числах.

$F_n/F_{n-1} = \alpha_2$ есть инвариант, как и требовалось в аксиоме 4. Комплексификация триплетов $(\Delta_F^{+1})^n$ (см. соотношения (13)) делает наглядным принцип самоподобия F^+ -эволюции. Такое свойство является необходимым условием фрактальности F^+ -эволюции [21], [22].

Обратим операционный модуль F^+ -системы, изображенный на рис. 1. Структура F^- -модуля запишется так (см. рис. 3):

$$\Delta_F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp } \Delta_F^{-1} = -1, \quad \det \Delta_F^{-1} = -1. \quad (14)$$

Здесь Δ_F^{-1} – генератор левого единичного сдвига, работающий в обратном времени. Спектр генератора Δ_F^{-1} также состоит из двух собственных значений

$$\lambda_{F_1}^- = \alpha_1, \quad \lambda_{F_2}^- = -\alpha_2. \quad (15)$$

Сравнивая их с собственными значениями (10), видим, что логика собственных значений идентична.

Обсудим далее, аналогично разрастающейся F^+ -эволюции, коллапсирующий F^- -процесс (см. рис. 3). Действие Δ_F^{-1} -генератора (14), являющегося единичным левым сдвигом, также приводит к F^- -цепи:

$$(x_n, y_n)\Delta_F^{-1} = (x_{n-1}, y_{n-1}), \quad (F_{n+1}, F_n)\Delta_F^{-1} = (F_n, F_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

На (14), (16) действует та же норма, что и в бивекторном пространстве $R_F(x, y)$. Построим полугрупповую F^- -орбиту:

$$(\Delta_F^{-1})^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}, & n \text{ четное,} \\ \begin{pmatrix} -F_{n-1} & F_n \\ F_n & -F_{n+1} \end{pmatrix}, & n \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (17)$$

Рис. 3. Структура модуля коллапсирующего ряда Фибоначчи.

Стоит отметить появление отрицательных чисел в соотношениях (14), (17). Формально это сводится к расширению множества натуральных чисел до множества целых чисел, однако это не так, поскольку знаки минус указывают лишь на обратные, левые сдвиги (16) по тому же самому ряду. Это и есть коллапсирующий процесс, или процесс, протекающий в обратном времени.

Отталкиваясь от равенств (9) и (14), получаем

$$\Delta_F^{+1} \Delta_F^{-1} = E \notin \{(\Delta_F^{\pm 1})^n, n = 1, 2, \dots\}, \quad (18)$$

следовательно, мы имеем две сопряженные полугрупповые $F^{\pm}$ -компоненты, которые описывают разрастающуюся и коллапсирующую полугруппы. Уже на этом уровне целесообразно ввести понятие *групповой связки инверсных полугрупп Фибоначчи* (ГСИПФ) [23]–[26]:

$$SL \left\{ [R_F(\overrightarrow{x, y}); \Delta_F^{+1}] \bigcup_{\Delta_F^{+1} \Delta_F^{-1} = E} [R_F(\overleftarrow{x, y}); \Delta_F^{-1}] \right\}, \quad (19)$$

где S отвечает условию специальности (унимодулярности), L – свойству линейности, $\bigcup$ – связка через объединение на $E^2 = E$ двух инверсных полугрупп, порождаемых генераторами Фибоначчи $\Delta_F^{\pm 1}$ и действующих на паре бивекторных пространств

$R_F(\overrightarrow{x, y})$, $R_F(\overleftarrow{x, y})$ сопряженных по $t^{\pm}$ -временам (причем объединение происходит при условии (18)).

Обсудим эволюционные свойства ГСИПФ. В любом эволюционном процессе основным функционалом является энтропийный функционал в широком смысле слова [18], [27]. Он должен удовлетворять необходимым и достаточным условиям теоремы Фаддеева–Фейнштейна, но это вовсе не обязательно энтропия Шеннона–Больцмана. Энтропийные аспекты эволюционных процессов имеют под собой определенную основу в виде эргодической теории [28]. Ряд Фибоначчи и соответствующая бивекторная динамика определяются экспоненциальной зависимостью, которая становится линейной в полулогарифмических осях с $\lambda_F^+ \approx 0.475$. Это типичный кумулятивный процесс, и степень его роста должна определяться энтропией бивекторов. Можно рассмотреть энтропийную динамику на двух уровнях. Первый уровень – это уровень бивекторной динамики, а второй – энтропийная мера матричных орбит в триплетной форме. Нетрудно показать, что энтропия бивекторных состояний записывается как

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_{2V}(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_V(F_n, F_{n+1}) = \frac{2F_n F_{n+1}}{(F_n, F_{n+1})^2} = \frac{2}{\alpha_2^3} = \\ &= h_V(\alpha_1, \alpha_1^2) = h_{2V}(\text{gold}) \approx 0.472, \end{aligned} \quad (20)$$

где h_{2V} – энтропия Вайда, выраженная через члены ряда Фибоначчи (F_n, F_{n+1}) . Предельное значение (20) начинает достигаться уже на шестой-седьмой итерации. В целом же поведение бивекторной энтропии имеет ниспадающий характер осцилляторно-волнового типа с выходом на золотой уровень энтропии бивекторов. Тем самым мы получаем энтропийный инвариант в процессе Фибоначчи на бивекторной решетке. Выражение (20) получено для мажоранты энтропии Шеннона (энтропии Вайда). Асимптотика энтропии Шеннона для бивекторов равна

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{2Sh}(F_n, F_{n+1}) \approx 0.665 \text{ нат.} \quad (21)$$

Имеется экспоненциальная зависимость, скорость возрастания которой определяется бивекторной энтропией асимптотических состояний:

$$F(n) = e^{\lambda_F^+ n} \approx e^{0.475n} \approx e^{\lambda_F^{+T} n} = \exp\left(\frac{\alpha_1}{2h_{2Sh}} n\right) \approx e^{0.465n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (22)$$

где λ_F^+ – эмпирический показатель кумулянты Фибоначчи; $\lambda_F^{+T} = \alpha_1/2h_{2Sh}$ – теоретический показатель кумулянты, равный отношению малого золотого числа к бивекторной энтропии Шеннона фильтра Фибоначчи (21).

Обратимся теперь ко второму уровню эволюционной динамики ГСИПФ, которая происходит на матричных орбитах. Снова дадим оценку энтропии на уровне мажоранты энтропии Шеннона для общего триплета:

$$\begin{aligned} h_{3V}\{(\Delta_F^{+1})^n\} &= \frac{F_{n-1}(F_n + F_{n+1}) + F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) + F_{n+1}(F_{n-1} + F_n)}{(F_{n-1} + F_n + F_{n+1})^2} = \\ &= \alpha_1 = h_{3V}(\text{gold}), \end{aligned}$$

что соответствует осцилляторно-волновому понижению энтропии до стационарного золотого уровня $h_{3V}(\text{gold}) = \alpha_1$. Таким образом, процесс Фибоначчи “со всех сторон” характеризуется золотым энтропийным инвариантом. С точки зрения теории информации это означает, что модуль Фибоначчи определяется постоянным золотым количеством разнообразия, порождаемым этим генератором.

По нашему мнению, сугубо детерминированный процесс Фибоначчи характеризуется золотым энтропийным инвариантом, который возникает в процессе низкоэнтропийной эволюции. Общий коэффициент структурированности модуля Фибоначчи равен $7.35\% + 5.6\% \approx 13\%$. Система Фибоначчи в своей эволюции обладает примерно 87% хаотичности.

Средний генератор Фибоначчи удастся представить в виде линейной комбинации двух матриц Паули $\hat{S}_3$ и $\hat{S}_1$, которые являются нетривиальными единичными идемпотентами [23], [24]:

$$\frac{\Delta_F^{+1} + \Delta_F^{-1}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{S}_3 + \hat{S}_1, \quad \hat{S}_3^2 = \hat{S}_1^2 = E.$$

Матрицы Паули $\hat{S}_3$, $\hat{S}_1$ как операторы, выражающие суть генератора Фибоначчи, осуществляют на комплексных натуральных числах соответствующие инверсии. Это либо простое комплексное сопряжение, либо сопряжение относительно

биссектрисы первого координатного угла решеточного пространства. Таким образом, можно ввести понятие спина для двух полугрупповых компонент ГСИПФ. Для выражений (14)–(17) нельзя определить квазимеры и энтропийные функционалы, тем самым реальной остается только разрастающаяся компонента системы Фибоначчи. Стрела времени Эдингтона в нашей энтропийной трактовке процесса Фибоначчи приобретает спинорную, а не векторную интерпретацию.

4. СИСТЕМА ПЕНРОУЗА КАК СОБСТВЕННАЯ ПОДПОЛУГРУППА ФИБОНАЧЧИ

Собственная подполугруппа предполагает, что определитель генератора полугруппы должен быть положителен и равен единице. При этом достаточно обозначать квадрат оператора Фибоначчи (9):

$$\Delta_P^{+1} = (\Delta_F^{+1})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp } \Delta_P^{+1} = 3, \quad \det \Delta_P^{+1} = +1. \quad (23)$$

Полученный генератор является порождающим для мозаики Пенроуза [14]–[17]. Спектр оператора Пенроуза Δ_P^{+1} двухточечный, $\lambda_{P_1} = \alpha_2^2 \approx 2.618$, $\lambda_{P_2} = \alpha_1^2 \approx 0.318$.

Мы видим, что спектр оператора Пенроуза, в отличие от спектра (10) оператора Фибоначчи (9), состоит из положительных собственных значений и связан с “большим” и “малым” золотыми числами. Положительность спектра генератора Пенроуза как раз отражает собственный характер полугруппы Пенроуза, которая является подполугруппой Фибоначчи. Собственные значения оператора Пенроуза являются квадратами собственных значений (10) оператора Фибоначчи.

Построим P^+ -цепь ($R_P(x, y) \subset R_N(x, y)$ – бивекторное пространство) для различных стартовых бивекторов. В общем виде закон P^+ -цепи будет иметь следующий вид:

$$(1, 1)(\Delta_P^{+1})^n = (F_{2n+2}, F_{2n+1}), \quad (2, 1)(\Delta_P^{+1})^n = (F_{2n+3}, F_{2n+2}). \quad (24)$$

Построим полугрупповую P^+ - орбиту

$$(\Delta_P^{+1})^n = \begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} \equiv (F_{2n+1}, F_{2n}, F_{2n-1}),$$

где $(F_{2n+1}, F_{2n}, F_{2n-1})$ – ее триплетная форма записи.

Наряду с правой полугруппой следует различать и левую полугруппу, в результате чего получаем *групповую связку инверсных полугрупп Пенроуза* (ГСИП) [23]–[26], аналогичную ГСИПФ (19).

Чтобы построить левую P^- -полугруппу, сначала введем левый единичный сдвиговый оператор Пенроуза

$$\Delta_P^{-1} = (\Delta_F^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Sp } \Delta_P^{-1} = 3, \quad \det \Delta_P^{-1} = 1. \quad (25)$$

Условия специальности для обеих компонент подполугруппы одинаковые, что и должно быть для собственных $P^\pm$ -орбит. Очевидно, $\Delta_P^{+1} \Delta_P^{-1} = E$.

Теперь мы подошли вплотную к групповой связке $P^\pm$ -полугрупп. Видно, что некоторые матричные элементы “обратных компонент” как генератора Фибоначчи (14), так и генератора Пенроуза (25) отрицательны, но они указывают всего

лишь обратное направление движения по тому же замечательному ряду. Тем самым отрицательность матричных элементов в генераторах несущественна. Спектр оператора Δ_P^{-1} двухточечный, $\lambda_{P_1}^- = \alpha_2^2$, $\lambda_{P_2}^- = \alpha_1^2$.

Рассмотрим, как действует полученный генератор Δ_P^{-1} . Образует P^- -цепь $(F_{n+1}, F_n)\Delta_P^{-1} = (F_{n-1}, F_{n-2})$. Если сравнить ее с цепью (24), то мы увидим, что они логически идентичны, с той лишь разницей, что двоичный сдвиг левый. Построим теперь P^- -орбиту и запишем ее в триплетном представлении:

$$(\Delta_P^{-1})^n = \begin{pmatrix} F_{2n-1} & -F_{2n} \\ -F_{2n} & F_{2n+1} \end{pmatrix} \equiv (F_{2n-1}, -F_{2n}, F_{2n+1}). \quad (26)$$

И снова $E \notin \{(\Delta_P^{-1})^n, n = 1, 2, \dots\}$, что подтверждает полугрупповые свойства P^- -системы (26). Видно, что по своим алгебраическим свойствам обе компоненты P^+ и P^- идентичны. Сравнивая результаты, касающиеся системы Фибоначчи и системы Пенроуза, мы видим, что вторая отличается от первой лишь удвоенным сдвигом в сравнении с единичным сдвигом. На подрешетке Фибоначчи по ее характерным узлам проводится пара лучей, стартовых из начального вектора $(1, 1)$. Вдоль этих лучей и действуют полугруппы подобия в прямом и обратном времени. Стоит обратить внимание на тангенсы углов наклона, которые равны золотым числам. Как и в случае процесса Фибоначчи, генератор Пенроуза является чисто сдвиговым оператором, но с двоичным шагом. Другим объектом является сама подрешетка Фибоначчи и лучи процессов Фибоначчи–Пенроуза. Именно вследствие условий скейлинга (см. аксиому 4) и наблюдается в целом подобное преобразование при сдвиговом операторе.

На всем протяжении работы мы обращаемся к принципу скейлинга. Это наиболее явный принцип, обеспечивающий подобие групповых связок инверсных полугрупп Фибоначчи–Пенроуза (ГСИПФП). Как известно, подобие (масштабная инвариантность) является необходимым условием фрактальности. В работе [29] подробно рассмотрена фрактальность мозаики Пенроуза в представлении координатных древесных графов Кэли. Этот формализм принципиально отличается от формализма ГСИПФП, которая является порождающей алгебраической структурой квазикристаллического паркета. Введение генератора Пенроуза как квадрата генератора Фибоначчи подсказывает, что по фрактальной размерности последнего можно найти оценку фрактальной размерности паркета Пенроуза как прямую сумму двух процессов Фибоначчи. В результате мы получаем фрактальную размерность паркета Пенроуза, примерно равную 1.382. Такая оценка соответствует свойствам фрактальной размерности в смысле Хаусдорфа–Безиковича [21], [22].

Как видно из соотношений (23), генератор Пенроуза обладает некоторой матричной диссимметрией. Здесь срабатывает принцип старшинства, согласно которому толстый золотой x -ромб является старшим, а тонкий золотой y -ромб – младшим. Для такой градации имеются определенные основания. Разумно объявить старшим тот элемент алфавита, который наиболее часто встречается в мозаике Пенроуза. Так, x -ромб встречается в 70% случаев по сравнению с 30% встречаемости y -ромбов. Отношение числа x -ромбов к числу y -ромбов равно $\alpha_1 + \alpha_2$ – сумме золотых чисел.

Обсудим эволюционные свойства ГСИПП. Будем пользоваться тем же энтропийным формализмом [27], [30], [31], который описан в предыдущем разделе. В нашем представлении эволюция идет по бивекторному каналу, с другой стороны,

Рис. 4. Энтропийная зависимость бивекторов для модуля Фибоначчи (сплошная линия) и системы Пенроуза (штриховая линия).

она работает на операторных орбитах ГСИПП. На рис. 4 показана зависимость энтропии Вайда бивекторной динамики от номера итерации для системы Фибоначчи и системы Пенроуза. Видно, что эволюция ГСИПФ и ГСИПП отвечает осцилляторно-волновой спадающей энтропийной динамике с выходом на золотую энтропию.

Дадим оценку степени упорядоченности η для ГСИПП. В случае бивекторной асимптотики для энтропии Шеннона имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{2\text{Sh}}(F_{2n+2}, F_{2n+1}) \approx h_{2\text{Sh}}(0.618, 0.382) \approx 0.665 \text{ нат}, \quad \eta_{2\text{Sh}} = 4.06\%. \quad (27)$$

Аналогичные характеристики для энтропии Вайда бивекторной динамики выглядят следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{2V}(F_{2n+2}, F_{2n+1}) = h_{2V}(0.618, 0.382) \approx 0.47214, \quad \eta_{2V} = 5.6\%. \quad (28)$$

Результаты, приведенные на рис. 4, и выражения (27), (28) указывают, что существует эволюционный инвариант для обеих систем. Именно инвариант (27) определяет экспоненциальную кумулянту для процессов Фибоначчи и Пенроуза. Таким образом, и в этом случае

$$\lambda_F^{+T} = \frac{\alpha_1}{2h_{2\text{Sh}}} \approx \frac{0.618}{1.33} = 0.465. \quad \lambda_F^{+T} = \lambda_F^+ \pm 1.5\%,$$

откуда видно, то темп эволюции ГСИПП и ГСИПФ полностью определяется бивекторной энтропией Шеннона.

Проведем оценку эволюционного процесса с точки зрения матричных орбит. Для этого рассмотрим асимптотику энтропийной динамики для триплетов Фибоначчи и Пенроуза:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{3\text{Sh}}(F_{n-1}, F_n, F_{n+1}) \approx 1.02567 \text{ нат}, \quad \eta_{3\text{Sh}} = 6.64\%, \quad (29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{3\text{V}}(\Delta_{\text{P}}^{+1})^n = \alpha_1 \approx 0.618, \quad \eta_{3\text{V}} = 7.35\%. \quad (30)$$

Триплетная энтропийная эволюционная динамика также обладает характерными чертами бивекторной динамики, но особую ценность приобретают асимптотические значения. Согласно формулам (30) мажоранта Шеннона для энтропии Вайда является принципиально золотой и в триплетном случае тоже указывает на наличие золотого энтропийного инварианта процесса эволюции. И, наконец, согласно формулам (27), (29) мы получаем общую меру структурированности процессов $\eta_{\Sigma} = \eta_{2\text{Sh}} + \eta_{3\text{Sh}} = 10.7\%$, в соответствии с этим выражением эволюция Фибоначчи–Пенроуза обладает примерно 11% структурированности, при этом почти 90% отводится на хаотичность процесса эволюции ГСИПФ.

В завершение раздела укажем на связь, которая существует между генераторами Фибоначчи и Пенроуза [21], [22]: $\Delta_{\text{P}}^{\pm 1} = E \pm \Delta_{\text{F}}^{\pm 1}$. Данное равенство является ортогональным/антиортогональным разложением единичной матрицы. Из всего вышесказанного видно, что в случае коллапсирующих процессов и Фибоначчи, и Пенроуза на матричных орбитах нельзя ввести квазивероятностные меры, соответственно, невозможно построение энтропийного функционала. Тем самым стрела времени Эдингтона может быть обусловлена только разрастающейся полугруппой Фибоначчи–Пенроуза [25], [26].

5. ГСИПФ И МОРФОЛОГИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПАРКЕТА ПЕНРОУЗА

Как видно из предыдущих рассуждений, алгебраические структуры Фибоначчи и Пенроуза работают на числах заполнения, определенных на золотых ромбах (второй уровень алфавита). Классические задачи замощения и разбиения решались на минимальном алфавите плиток, которые являются абсолютно твердыми. Мы отказываемся от этого положения. Можно рассмотреть класс золотых ромбов, объединенных единым золотым формфактором, который представляет собой топологический показатель. При постоянстве золотого формфактора метрические характеристики должны управляться аксиомой 4. Тем самым естественным является введение преобразования подобия при чисто сдвиговых генераторах Фибоначчи и Пенроуза. Найденная алгебраическая структура как раз реализует собственную подполугруппу Пенроуза.

Выпишем в явном виде преобразования Пенроуза:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2x_1 + y_1, & x_1 &= 5x_2 + 3y_2, & x_2 &= 13x_3 + 8y_3, & \dots; \\ y_0 &= x_1 + y_1, & y_1 &= 3x_2 + 2y_2, & y_2 &= 8x_3 + 5y_3, & \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Наше понимание морфогенеза тесно связано с его пониманием в теориях эволюции [18]. При любом определении морфогенеза, по нашему мнению, необходимо указать три важнейших, определяющих признака. В качестве первого признака

Рис. 5. Шесть поколений морфогенетического синтеза паркета Пенроуза.

выступает некоторый стартовый ген, роль которого в нашем случае будет играть символ алфавита в соответствующих квазикристаллических мозаиках. Второй признак эквивалентен понятию роста, который может быть представлен в двух версиях: разрастающаяся или коллапсирующая системы. Однако не любой тип роста согласуется с понятием морфогенеза, и здесь появляется третий признак: принимаются во внимание такие типы роста, при которых сохраняется в некотором смысле подобие растущего модуля. Это и есть те самые преобразования, которые порождены аксиомой 4. При вышеуказанных трех условиях еще одним, возможно главным, признаком мы бы назвали выполнение условия золотого подобия или другого вида подобия, использующего иные замечательные ряды.

Опираясь на преобразования (31), можно сформулировать единственные конструктивные процедуры, задающие морфогенез паркета Пенроуза. На первом шаге выбираем в качестве рамки золотой x -ромб, который будет затравочным геном. Затем, учитывая скейлинг (аксиома 4), внутрь помещаем копию x -ромба. Возникает вопрос: где расположить его внутри первого ромба и как его оконтурить алфавитом нижнего уровня. Согласно формулам (31) на этом шаге должны присутствовать два x -ромба и один y -ромб. При выполнении требования минимальности паркета у внутренней копии x -ромба останутся свободными по крайней мере две стороны, к каждой из которых будет примыкать единственный y -ромб. Следовательно, последний должен распадаться на два золотых узких треугольника Робинсона. И, наконец, первая итерация завершается автоматической достройкой противоположного конца исходного гена толстыми треугольниками Робинсона. Тогда выполняется условие внутреннего заполнения исходной рамки (гена) по формуле $x_0 = 2x_1 + y_1$ (рис. 5).

Вторая итерация должна использовать результаты первой итерации и дополнять конструкцию по формуле $x_1 = 5x_2 + 3y_2$. Из рис. 5 видно, что на втором шаге в исходном ромбе образуется выпуклое ядро полигонального типа в соответствии

с формулой $3x_2 + 2y_2$. Лимит y -ромбов уже исчерпан вследствие соответствующей матричной структуры полугруппы Пенроуза. На рис. 5, очевидно, два других x -ромба появятся на противоположных концах, разбившись на толстые треугольники Робинсона.

Уже на первых двух итерациях автоматически (вследствие структуры ГСИПФП) появляется дорзальная симметрия, которая остается характерной и при дальнейших итерациях (см. рис. 5). Однако уже в этих схемах появляется возможность автоматически ввести понятие “голова–хвост”. Покрытие на третьем шаге получается следующим образом. Внутри x -ромба (гена) формируется дорзальный представитель третьего уровня алфавита. Затем заполняется первая координационная сфера дорзального десятиугольника, при этом мы стараемся выполнить равенство $x_2 = 13x_3 + 8y_3$. Последним шагом третьей итерации является дополнение левого конца x -ромба двумя дорзально-симметричными толстыми треугольниками Робинсона, которые не вошли в первую координационную сферу дорзального декагона.

На четвертой итерации мы уже видим два декагона – дорзальный и звездчатый, который располагается в центре x -ромба. Затем они дорациваются первой координационной сферой и дополняются соответствующими треугольниками Робинсона на краях.

Глядя на шестую итерацию на рис. 5, можно высказать правдоподобную гипотезу, согласно которой граничное число треугольников Робинсона будет стремиться с ростом номера итерации к нулю по сравнению с внутренним заполнением “генной рамки” золотыми ромбами. Последнее образует однородное классическое покрытие, разбиение, при этом данное разбиение, покрытие получено с использованием преобразования подобия ГСИПФП.

В предыдущем рассмотрении результат, приведенный на рис. 5, получен как конструктивное сопровождение найденной нами алгебраической полугрупповой структуры в пространстве алфавита. Теперь пойдем обратным путем: рассматривая мозаику Пенроуза и опираясь на золотую симметрию, постараемся установить некоторую структуру подобия, желательно близкую к изображенной на рис. 5. Не будем априори заявлять никаких соображений по поводу свойств алгебраической полугрупповой структуры. На рис. 6 показан паркет Пенроуза, построенный на декогональном уровне алфавита. Такая ситуация вполне соответствует одному из принципов теории кодирования. Оптимальный (в смысле минимума затраченных символов в кодовом слове вторичного алфавита) код наиболее легко достигается на “блочном” уровне. Легче всего решать задачу эффективного кодирования не на символьном уровне (золотых ромбах), а на фразеологическом уровне – дорзальном и звездчатом декагонах [10], [13], [17].

Как видно из рис. 6, стартовым геном является звездчатый декагон, а от него концентрическими фронтами проводится упаковка евклидовой плоскости парами декагонов. При этом следует указать характерную алгебру логики декагонального синтеза паркета Пенроуза: звездчатые декагоны никогда не контактируют между собой; между звездчатым и дорзальным декагонами возможно простое пересечение по золотому y -ромбу; два дорзальных декагона имеют между собой сложное пересечение с комбинацией типа “змей”; возможен случай контакта двух дорзальных декагонов без пересечения по единичной стороне золотого x -ромба.

Рис. 6. Паркет Пенроуза, синтезированный морфогенетическим методом на алфавите звездчатого и дорзального декагона.

На рис. 6 показана концентрическая система вложенных и повернутых на 180° пентагонов, проведенных через “пятилистники”. Радиусы этих пентагонов относятся друг к другу, как золотые числа. На рис. 7 показан результат некоторых преобразований системы таких пентагонов. Суть этих преобразований состоит в следующем. Над паркетами, находящимися в пентагональных рамках, производится сжатие с коэффициентами, равными степеням α_1 , при этом допускается поворот на 180° (рис. 7б, 7е). Затем полученные паркеты накладываются на первичные, изображенные на рис. 7а, 7д. В результате получаем паркеты, приведенные на рис. 7в, 7ж. Окончательные результаты (рис. 7г, 7з) являются следствием наблюдения через “окошко”, являющееся золотым x -ромбом. Сравнивая с рис. 5, нетрудно увидеть полную тождественность паркетов. Эта структура подобия органически присуща паркету Пенроуза и получена как следствие существования золотой симметрии.

Можно сделать вывод, что найденная нами прямым методом структура подобия приводит к предложенной выше алгебраической полугрупповой структуре. Фак-

Рис. 7. Результаты преобразований над “пятилистниками”: первая итерация (а–г); четвертая итерация (д–з).

тически мы на эмпирическом уровне получили необходимое и достаточное условие морфогенетического синтеза паркета Пенроуза.

6. ГСИП КВАРТЕТНО-ОКТАГОНАЛЬНОЙ МОЗАИКИ И ЕЕ МОРФОГЕНЕЗ

На квартетно-октагональном паркете (Q-паркете) также можно выделить трех-уровневый дуальный алфавит. На первом уровне присутствуют два равнобедренных треугольника с углами при вершине в 45° и 90° . Второй уровень образуется так же, как и для мозаики Пенроуза, объединением по особой стороне. В результате мы получаем соответственно ромб с острым углом 45° и квадрат. Последний и был использован нами в качестве затравочного гена процесса редупликации. Здесь, как и в морфогенезе мозаики Пенроуза, мы работали на втором, слоговом уровне алфавита. Третий, фразеологический, уровень представлен единственным восьмиугольником.

Для квартетно-октагональной мозаики (Q-мозаики) можно развить аналогичный полугрупповой формализм. На данном этапе мы ограничимся заданием исходного генератора (правого и левого), а затем, возведя в квадрат, придем к генератору для Q-мозаики. В качестве генераторов первого уровня выберем следующие:

$$\begin{aligned}
 \Delta_Q^{1+} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \det \Delta_Q^{1+} &= -1, & \text{Sp } \Delta_Q^{1+} &= 2; \\
 \Delta_Q^{1-} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & \det \Delta_Q^{1-} &= -1, & \text{Sp } \Delta_Q^{1-} &= -2; \\
 \Delta_Q^{1+} \Delta_Q^{1-} &= E, & E &\notin \{(\Delta_Q^{1\pm})^n\}, & n &= 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{32}$$

Правый генератор описывает процесс разрастания, а левый – процесс коллапсирования. Структура этих генераторов также продиктована принципом старшинства: y -компонента генератора обсуждаемой мозаики имеет больший матричный элемент, так как доля y -ромбов составляет 58.58%, а доля x -квадратов – 41.42%. Отношение числа y -ромбов к числу x -квадратов равно $\sqrt{2}$. Снова видим, что эти генераторы описывают несобственную полугруппу, следовательно, возникает вопрос о построении собственной подполугруппы.

Выдержим вновь квадратичный принцип формирования генератора для Q -мозаики:

$$\begin{aligned} (\Delta_Q^{1+})^2 &= \Delta_Q^{2+} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, & \det \Delta_Q^{2+} &= 1, & \text{Sp } \Delta_Q^{2+} &= 6; \\ (\Delta_Q^{1-})^2 &= \Delta_Q^{2-} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, & \det \Delta_Q^{2-} &= 1, & \text{Sp } \Delta_Q^{3-} &= 6. \end{aligned} \quad (33)$$

Как и положено для собственной полугруппы, мы имеем дело со строго положительными единичными определителями генераторов. Поведение $\text{Sp } \Delta_Q^{1\pm}$ и $\text{Sp } \Delta_Q^{2\pm}$ также отражает переход от несобственных к собственным полугруппам и к тому же в сравнении со случаем паркета Пенроуза соотношения (33) указывают, что Q -мозаика является квазидетерминированной структурой второго порядка. Не будем отдельно рассматривать свойства генераторов (32), (33), отметим лишь, что коэффициент подобия равен $K_Q = \lambda_{\max}^{1+} = 1 + \sqrt{2}$, где $\lambda_{\max}^{1+}$ – максимальное положительное собственное значение генератора Δ_Q^{1+} .

Генераторы (33) фактически задают преобразование на пространстве алфавита:

$$\begin{aligned} n=1: \begin{cases} x \rightarrow 3x' + 4y', \\ y \rightarrow 2x' + 3y', \end{cases} & n=2: \begin{cases} x \rightarrow 17x' + 24y', \\ y \rightarrow 12x' + 17y', \end{cases} \\ n=3: \begin{cases} x \rightarrow 99x' + 140y', \\ y \rightarrow 70x' + 99y', \end{cases} & \dots, \end{aligned} \quad (34)$$

где через x обозначен квадрат, а через y – ромб. Нетрудно видеть, что матрицы преобразования являются четными степенями исходных генераторов. Уравнения движения генератора Δ_Q^{1+} для различных стартовых векторов выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} (1, 0)\Delta_Q^{1+} &= (1, 2), & (1, 2)\Delta_Q^{1+} &= (3, 4), \\ (3, 4)\Delta_Q^{1+} &= (7, 10), & (7, 10)\Delta_Q^{1+} &= (17, 24), & \dots; \\ (1, 1)\Delta_Q^{1+} &= (2, 3), & (2, 3)\Delta_Q^{1+} &= (5, 7), \\ (5, 7)\Delta_Q^{1+} &= (12, 17), & (12, 17)\Delta_Q^{1+} &= (29, 41), & \dots. \end{aligned}$$

Им соответствуют ряды

$$\begin{aligned} q_{(1,0)}: & \quad (1, 0) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (7, 10) \rightarrow (17, 24) \rightarrow \dots; \\ q_{(1,1)}: & \quad (1, 1) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (5, 7) \rightarrow (12, 17) \rightarrow (29, 41) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

объединение которых дает замечательный ряд (Q -ряд)

$$1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 17, 24, 29, 41, \dots, \quad (35)$$

идентичный ряду, полученному с помощью матричных орбит генератора из (32),

$$(\Delta_Q^{1+})^n: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow{2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{3} \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \xRightarrow{4} \begin{pmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots,$$

с триплетной записью орбиты

$$(1, 1, 2), (2, 3, 4), (5, 7, 10), (12, 17, 24), \dots$$

Видим, что Q-ряд (35) дает триплетную запись орбиты генератора:

$$1, 1, \overbrace{2, 3, 4}^2, 5, 7, 10, \overbrace{12, 17, 24}^4, 29, 41, 58, \overbrace{70, 99, 140}^6, \dots$$

Общий вид орбиты в триплетной записи можно записать следующим образом:

$$q_{i-2} + q_{i-1} = q_{i+1}, \quad q_{i-1} + q_i = q_{i+2}, \quad 2q_{i+1} = q_{i+3}, \quad \dots$$

Данный алгоритм наследует алгоритм Фибоначчи с добавлением удвоения.

Полученный замечательный Q-ряд в полулогарифмических осях приобретает линейную форму. Данное свойство указывает на существенно экспоненциальный характер кумулянты, которая является менее крутой, чем аналогичная кумулянта для системы Фибоначчи–Пенроуза. Эта кумулянта также обусловлена соответствующей замечательной константой $\beta_1 = \sqrt{2} - 1$ для Q-ряда и бивекторной энтропией Шеннона Q-системы:

$$Q(n) = e^{\tilde{\lambda}_Q^+ n} \approx e^{0.3041n} \Leftrightarrow e^{\lambda_Q^{T+} n} = \exp\left(\frac{\beta_1}{2h_{2\text{Sh}}} n\right) \approx e^{0.305n}, \quad (36)$$

где $\tilde{\lambda}_Q^+$ и λ_Q^{T+} – эмпирический и теоретический показатели кумулянты Q-ряда, β_1 – минимальное замечательное число для Q-системы, $h_{2\text{Sh}} \approx 0.6783$ – асимптотическая энтропия Шеннона для бивекторов состояния Q-системы. Из соотношений (22), (36) видно, что степень кумулятивного взрыва $Q(n)$ и $F(n)$ полностью определяется энтропией бивекторных состояний. Та система, которая обладает большей энтропией, будет иметь меньший темп эволюции. Так, например, эволюция системы Фибоначчи–Пенроуза примерно в 1.57 раз “круче”, чем эволюция Q-системы.

Задержим свое внимание на эволюционных свойствах *групповой связки инверсных полугрупп Q-системы* (ГСИПQ). Как и выше (при исследовании эволюционных свойств ГСИПФП), мы считаем необходимым привлечь энтропийный формализм [9], [27]. В качестве одного из нетривиальных примеров можно привести метод диагностики порядка–беспорядка для развитых наноструктур кварцевых и металлических стекол, аморфных пленок и квазикристаллических мозаик из работ [30], [31], где также изложена методика критических индексов для энтропийных перколяционных зависимостей [31] указанных сред. Оказалось, что все такие зависимости на координатных древесных графах Кэли решеточных и сеточных систем для таких сред принадлежат к единому гиперболическому классу зависимостей с критическим индексом, не превосходящим единицу. Тем самым в наносистемах разупорядоченных сред реализуется дальнейшее упорядочение фрактального типа. Последний факт подробно рассмотрен в работе [29].

При изучении энтропийных аспектов эволюции ГСИП мы будем рассматривать два направления: во-первых, оценим энтропию состояний модулей Фибоначчи, Пенроуза и модуля для квартетно-октагональной (4/8)-мозаики, во-вторых, дадим оценку энтропийной меры эволюции, основанную на энтропии полугрупповых орбит. В дальнейшем обсуждается только полугруппа разрастающегося типа.

Энтропию бивектора ГСИПQ в шеноновском представлении запишем как

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_{2\text{Sh}}(Q_{n-1}, Q_n) &= -\beta_1 \ln \beta_1 - (1 - \beta_1) \ln(1 - \beta_1) = -(\sqrt{2} - 1) \ln(\sqrt{2} - 1) - \\ &\quad - (2 - \sqrt{2}) \ln(2 - \sqrt{2}) \approx h(0.4142) + h(0.5858) \approx \\ &\approx 0.365078 + 0.31327 = 0.67835 = H(P(x), P(y)). \end{aligned} \quad (37)$$

Это та самая энтропия, которая используется в (36), а последнее выражение является энтропией всей квартетно-октагональной мозаики в целом. Она как раз определяется вероятностями встретить x -квадрат и y -ромб с углом при вершине 45° . Для этого же случая укажем бивекторную энтропию (4/8)-паркета в представлении Вайда, которая является мажорантой энтропии Шеннона:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{2\text{V}}(Q_n, Q_{n+1}) = \frac{2Q_n Q_{n+1}}{(Q_n + Q_{n+1})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})^2} \approx 0.4853. \quad (38)$$

Для энтропий (37) и (38) приведем соответствующие коэффициенты структурированности: $\eta_{2\text{Sh}} = 2.14\%$, $\eta_{2\text{V}} = 2.95\%$.

Оценим энтропию полугрупповых орбит в триплетной форме. Напрямую использовать энтропию Шеннона при поиске асимптотик неудобно, лучше перейти к верхним вайдовским оценкам энтропии, которые допускают аналитическое представление. Приведем общую формулу энтропии Вайда n -го триплета,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_{3\text{V}}(Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1}) &= \\ &= \frac{Q_{n-1}(Q_n + Q_{n+1}) + Q_n(Q_{n-1} + Q_{n+1}) + Q_{n+1}(Q_{n-1} + Q_n)}{(Q_{n-1} + Q_n + Q_{n+1})^2} = \\ &= \frac{4}{2 + 3\sqrt{2}} \approx 0.64075, \end{aligned} \quad (39)$$

для которой мера структурированности квартетно-октагональной мозаики составит $\eta_{3\text{V}}(Q) = 3.89\%$. Шенноновские выражения для энтропии и коэффициента структурированности данной мозаики таковы: $h_{3\text{Sh}}(Q) \approx 1.05968$, $\eta_{3\text{Sh}}(Q) = 3.54\%$.

На рис. 8 показана энтропийная динамика триплетных орбит для энтропии Вайда (мажоранты энтропии Шеннона) квартетно-октагональной мозаики. И снова, как и для системы Фибоначчи–Пенроуза, наблюдается спадающее осцилляторно-волновое поведение энтропии триплетных орбит. В результате процесса эволюции мы приходим к стационарным значениям энтропии (39). С точки зрения эргодической теории [28] мы снова сталкиваемся с законом сохранения энтропии, который справедлив уже при $n = 4, 5, 6$. Наша ГСИПQ определяется соответствующим энтропийным инвариантом как в бивекторном, так и в триплетном представлениях. В определенной мере мы имеем дело с некоторым аналогом теорем Нётер [25], [26] в энтропийном представлении. Можно было бы сформулировать теорему, согласно которой всякая эволюция, подчиняющаяся алгебраической структуре типа ГСИП, имеет своим инвариантом энтропию бивекторных состояний и энтропию матричных орбит.

Рис. 8. Энтропийная динамика триплетных орбит вайдовской мажоранты шенноновской энтропии 4/8 мозаики.

Приведем суммарный структурный коэффициент энтропийного использования потенциала возможностей Q-системы: имеем $\eta_{\Sigma Sh} = \eta_{2 Sh} + \eta_{3 Sh} \approx 5.68\%$ и $\eta_{\Sigma V} = \eta_{2 V} + \eta_{3 V} \approx 6.84\%$. Данные выражения следует сопоставить с формулами (27)–(31) для системы Фибоначчи–Пенроуза, которая лучше структурирована, организована, чем квартетно-октагональная; Q-система более хаотична, хотя в основе редупликации мозаики лежат детерминированные правила. Сравнение систем можно производить также на уровне бинарных и триплетных энтропий в формах Шеннона и Вайда. По этим энтропийным показателям также видно, что Q-паркет имеет значительно большую энтропию, чем золотая энтропия системы Фибоначчи–Пенроуза. Также можно провести сопоставление систем с точки зрения кумулятивного показателя. Так, по этому показателю система Фибоначчи–Пенроуза обладает более чем в полтора раза высоким эволюционным потенциалом по сравнению с Q-системой.

Посмотрим, как удастся реализовать “подсказки” структуры ГСИПQ в задаче морфогенетического синтеза квартетно-октагональной мозаики. Как и положено в морфогенезе, выберем в качестве стартового гена, например, квадрат. Согласно нашим аксиомам а также традиционному пониманию морфогенеза при редупликации с соблюдением принципа подобия мы должны получить копию квадрата. Обсудим первый шаг морфогенетического синтеза, указанного на рис. 9. Метрические отношения управляются аксиомой 4. Обратимся к формуле (34), точнее, к ее первому шагу $x \rightarrow 3x' + 4y'$, согласно которому x -квадрат должен распасться на три меньших x -квадрата и четыре y -ромба. Заметим, что y -ромб является старшей переменной, и к тому же число y -ромбов равно числу сторон квадрата. Поэтому напрашивается картина состыковки внутреннего квадрата с четырьмя y -ромбами, изображенная на рис. 9 ($n = 1$). Оставшееся пространство внутри большого ромба автоматически бездефектно заполняется половинками квадрата. Включая центральный квадрат, всего может быть только три квадрата.

Рис. 9. Три поколения морфогенетического синтеза квартетно-ортогональной мозаики.

Рассмотрим второй шаг. Его удобно интерпретировать как третий уровень алфавита Q-мозаики, который реализуется восьмиугольником с заполнением $2x$ и $4y$. Вспоминая принцип блочного кодирования из теории информации, будем работать на более высоком уровне алфавита. В центре помещаем квадрат в уменьшенной копии, затем вокруг него описываем четыре восьмиугольника, которые бездефектно осуществляют состыковку (см. рис. 9, $n = 2$). Затем в вершинах квадратной рамки вставляем фрагменты из квадратиков с двумя ромбами. Оставшиеся места (по два на сторону x -рамки) заполняем половинками квадрата. Можно проверить, что на втором шаге выполнено преобразование $x \rightarrow 17x' + 24y'$.

Данная процедура может быть итеративно продолжена с соблюдением соответствующего подобия метрических характеристик и при сохранении топологических формфакторов. Сравнивая процедуры морфогенеза на рис. 5 и на рис. 9, легко видеть их однотипность. При реализации ГСИП автоматически возникает дорзальная симметрия, а также появляется дифференциация “голова–хвост”, причем ни для первого, ни для второго не надо вводить никаких морфогенетических полей или специальных программных меток. Нетрудно показать, что при больших номерах итераций на рис. 5 и рис. 9 относительная доля приграничных треугольников стремится к нулю, и мы получаем возможность в асимптотике перейти к однородным мозаикам.

В завершение этого раздела без особых подробностей приведем результат морфогенеза для бигексагональной мозаики. Алфавит бигексагональной мозаики вырожден. Первый уровень составляет единственный гексаромб (ромб с углом 60°), второй уровень – гексазвезда из таких ромбов, а фразеологический уровень исчерпывается пересечением двух гексазвезд по минимальному гексаромбу. Нетрудно видеть (см. рис. 10), что полученные поколения по числу элементов соответствуют степеням числа 9 ($0, 1, 2, 3, \dots$).

Полезно сравнить рис. 10 с рис. 5 и рис. 9. Сразу видно, что дорзальная симметрия остается и в этом случае, однако у бигексагональной мозаики отсутствует дифференциация “голова–хвост”. Мы это связываем с достаточно простым алфавитом. Фактически нижний уровень алфавита представлен единственным гексагоном, а высший (фразеологический) дается объединением с пересечением пары гексазвезд.

Рис. 10. Три поколения морфогенетического синтеза бигексагональной мозаики.

Именно этому уровню отвечают шаги $n = 2, 3$ на рис. 10. Вновь имеет место принцип блочной упаковки. Во всех трех мозаиках реализуется единый принцип морфогенетического синтеза, в основе которого лежит универсальная алгебраическая структура типа ГСИП. Бигексагональную мозаику также можно снабдить сильно упрощенной алгебраической конструкцией из рассматриваемого нами класса. Если работать в терминах порождающих матриц, то отличный от нуля матричный элемент, равный 3, будет единственным. Несмотря на то что определитель матрицы равен нулю, для нее можно образовать матричные орбиты по обычным правилам мультипликации, а также применить “квадратичный” прием получения генератора для бигексагональной мозаики. В результате мы получим траекторию, или соответствующий замечательный ряд на решеточном пространстве, описываемый показательной функцией с основанием 3. Тангенс угла наклона траектории на фазовой плоскости (n_{i+1}, n_i) равен 1.0986, что уместно сопоставить с аналогичными значениями для систем Фибоначчи–Пенроуза и $(4/8)$ -паркета. Именно этот ряд управляет числом гексаромбов в итерациях на рис. 10.

Хотя на всем протяжении нашей статьи мы существенно использовали именно преобразование подобия (аксиому 4), на втором уровне алфавита (ромбическом) нам удалось одновременно решить задачу классического замощения, покрытия, разбиения плоскости $\mathbb{R}^2$. Решение этой задачи было проведено непрямым методом с помощью отказа от принципа абсолютной твердости плиток и реализации преобразований ГСИП. Морфогенетический класс эвристических правил синтеза квазикристаллических паркетов, базирующихся на ГСИП, по крайней мере, заслуживает внимания.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках аксиоматического подхода построена ГСИП для системы Фибоначчи. В отличие от инверсных полугрупп Вагнера–Престона, обратимость в которых определяется относительно нетривиального единичного идемпотента, ГСИПФ наследует обыкновенную обратимость с исключением этого тривиального идемпотента из начальных точек полугрупповых орбит. Вкратце рассмотрены свойства ГСИПФ, приведены уравнения движения, матричные орбиты и замечательные ряды, порождаемые этими структурами. Рассмотрены кумулятивные эволюционные свойства ГСИПФ. Показано, что наряду с наименьшей золотой константой степень кумулятивности определяется также бивекторной энтропией состояния модуля Фибоначчи.

Выделена собственная компонента ГСИПФ, которая является ГСИП для системы Пенроуза. ГСИПФ обладает теми же аналитическими, алгебраическими свойствами, что и ГСИПФ. Генератор ГСИПФ есть квадрат генератора ГСИПФ. Кумулятивные и эволюционные свойства ГСИПФ и ГСИПФ также идентичны. Обе алгебраические конструкции обладают единым золотым энтропийным инвариантом, поэтому можно говорить о единой ГСИП для систем Фибоначчи–Пенроуза. С точки зрения алгебраической теории полугрупп установлена связь между генераторами, которая является ортогональным/антиортогональным разложением единицы. Полусумма генераторов сводится к сумме спиновых матриц Паули, что приводит к наделению эволюционных процессов спиновой характеристикой. В этом смысле только разрастающаяся компонента ГСИПФ приобретает временную направленность, которая имеет спинорную интерпретацию.

Аналогичная алгебраическая конструкция ГСИПQ построена для квартетно-октагональной мозаики, а также бигексагонального паркета. С помощью структурных особенностей ГСИПQ предложена морфогенетическая реализация этого паркета.

Для случая мозаики Пенроуза удалось найти прямое доказательство существования оснований для ГСИПФ, опираясь только на золотое свойство декагонального паркета Пенроуза. Фактически на эмпирическом уровне приведены доказательства необходимых и достаточных условий существования ГСИП при наличии энтропийного инварианта в бивекторном и орбитальном представлениях.

Для всех трех типов квазикристаллических симметрий последовательно решена задача морфогенетического синтеза паркетов, решение существенно опирается на структуру и топологические особенности соответствующих ГСИП.

Список литературы

- [1] Д. Гратиа, *УФН*, **156:10** (1988), 347–364.
- [2] А. М. Братковский, Ю. А. Данилов, Г. И. Кузнецов, *ФММ*, **68:6** (1989), 1045–1095.
- [3] П. В. Стивенс, А. И. Гоулдман, *В мире науки*, 1991, № 6, 14–21.
- [4] Д. Р. Нельсон, *В мире науки*, 1986, № 10, 19–28.
- [5] М. Гарднер, *От мозаик Пенроуза к надежным шифрам*, Мир, М., 1993.
- [6] Р. Пенроуз, *Новый ум короля*, Едиториал УРСС, М., 2003.
- [7] G. Y. Onoda, P. J. Steinhardt, D. P. DiVincenzo, J. E. S. Socolar, *Phys. Rev. Lett.*, **60:25** (1988), 2653–2656.
- [8] H.-C. Jeong, *Phys. Rev. Lett.*, **98:13** (2007), 135501, 4 pp., arXiv: 0704.0848.
- [9] В. В. Юдин, Т. А. Писаренко, Е. А. Любченко, *Информодинамика сетевых структур. Вероятность. Древесные графы. Фракталы*, ДВГУ, Владивосток, 2003.
- [10] Д. А. Полянский, *Теоретико-информационный анализ минимального класса квазикристаллических структур*, Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, ДВГУ, Владивосток, 2005.
- [11] В. В. Юдин, Т. А. Писаренко, Е. А. Любченко, Е. А. Савчук, *Кристаллография*, **44:3** (1999), 413.
- [12] В. В. Юдин, Т. А. Писаренко, Е. А. Любченко, О. А. Чуднова, Ю. А. Карыгина, *Кристаллография*, **47:2** (2002), 224–232.
- [13] В. В. Юдин, Т. А. Писаренко, Е. А. Любченко, О. А. Чуднова, *Изв. РАН. Сер. физ.*, **65:10** (2001), 1405–1410.
- [14] Ю. А. Карыгина, *Фрактальная кристаллография квазикристаллических структур в древесно-графовом представлении на группах подобия*, Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, ДВГУ, Владивосток, 2002.

- [15] В. В. Юдин, Ю. А. Карыгина, *Кристаллография*, **46:6** (2001), 1004–1008.
- [16] Ю. А. Карыгина, В. В. Юдин, *Материаловедение*, 2001, № 12, 12–16.
- [17] В. В. Юдин, Е. А. Любченко, Т. А. Писаренко, “Фрактальность квазикристаллической мозаики Пенроуза в представлении древесных графов Кейли”, *Сб. науч. трудов “Прикладная синергетика, фракталы и компьютерное моделирование структур”*, ред. А. А. Оксогоев, ТГУ, Томск, 2002, 343.
- [18] В. Эбелинг, А. Энгель, Р. Файстель, *Физика процессов эволюции*, Эдиториал УРСС, М., 2001.
- [19] H. W. Gould, *Fibonacci Quart.*, **19:3** (1981), 250–257.
- [20] В. В. Юдин, Е. С. Старцев, И. Г. Пермякова, “Фрактал Фибоначчи как новый тип фрактальности”, *материалы XII Всероссийского семинара “Моделирование неравновесных систем”*, ИВМ СО РАН, Красноярск, 2009, 207.
- [21] А. Д. Морозов, *Введение в теорию фракталов*, ННГУ, Н. Новгород, 1999.
- [22] Р. М. Кроновер, *Фракталы и хаос в динамических системах*, Постмаркет, М., 2000.
- [23] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп*, т. 2, Мир, М., 1972.
- [24] Е. С. Ляпин, *Полугруппы*, ГИФМЛ, М., 1960.
- [25] В. В. Юдин, *Об одной нелоренцовой форме принципа релятивистской инвариантности*, Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Ун-т дружбы народов, М., 1970.
- [26] В. В. Юдин, А. Д. Ершов, *Изв. вузов. Физика*, 1970, № 6, 49–53.
- [27] Н. Мартин, Дж. Ингленд, *Математическая теория энтропии*, Мир, М., 1988.
- [28] И. П. Коренфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980.
- [29] A. N. Mikhalyuk, P. L. Titov, V. V. Yudin, *Phys. A*, **389:19** (2010), 4127–4139.
- [30] В. В. Юдин, П. Л. Титов, А. Н. Михалюк, *ТМФ*, **164:1** (2010), 88–107.
- [31] В. В. Юдин, П. Л. Титов, А. Н. Михалюк, *Изв. РАН. Сер. физ.*, **73:9** (2009), 1340–1347.

Поступила в редакцию 2.04.2010,
после доработки 13.09.2010