Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, О решениях p -адических струнных уравнений, *ТМФ*, 2011, том 167, номер 2, 163–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf6631>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:20:22

© 2011 г.

В. С. Владимиров*

О РЕШЕНИЯХ p -АДИЧЕСКИХ СТРУННЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведен обзор некоторых чисто математических результатов, полученных в граничных задачах для нелинейных псевдодифференциальных уравнений, связанных с открытыми и замкнутыми p -адическими струнами в древесном приближении в случае $d = 1$. Для решений этих задач приведены формулы, устанавливающие связь между числом их нулей, кратностями нулей и числом, показывающим, сколько раз решения меняют знак.

Ключевые слова: p -адическая струна.

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика пространственно-однородных и зависящих от времени ($d = 1$) решений для p -адических замкнутых и открытых струн в древесном приближении описывается следующим общим нелинейным псевдодифференциальным уравнением движения [1]–[5]:

$$\phi^n(t) = (e^{\sigma_0 \partial^2} \phi)(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

в котором n – целое число, $n = p^2$ для замкнутых струн ($\sigma_0 = 1/2$) и $n = p$ для открытых струн ($\sigma_0 = 1/4$); струны называются *четными* или *нечетными* при четных или нечетных p соответственно; здесь p – простое число, $p = 2, 3, 5, \dots$. Уравнение (1) снабжено граничными условиями: для замкнутой струны они имеют вид

$$\phi(\pm\infty) = 1; \quad (2)$$

для открытой струны они имеют вид

$$\phi(-\infty) = 0, \quad \text{если } n \text{ четное,} \quad \begin{cases} \phi(-\infty) = 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ \phi(+\infty) = 1, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (3)$$

Граничные задачи (1), (2) и (1), (3) исследовались в недавних работах [6]–[14]. Отметим, что p -адические модели рассматриваются как “игрушечные” простые аналоги

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: vladim@mi.ras.ru

моделей полевой теории струн [15], соответствующие уравнения изучены в работе [16].

Уравнение (1) эквивалентно нелинейному интегральному уравнению

$$\phi^n(t) = (K_{\sigma_0}\phi)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

в котором интегральный оператор K_σ задается формулой

$$(K_\sigma\phi)(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(t-\tau)^2}{4\sigma}\right] \phi(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Оператор K_σ представляет собой оператор теплопроводности, в котором роль пространственной переменной x играет переменная времени t , а роль переменной времени t – переменная σ . Множество таких операторов образует полугруппу, $K_\sigma K_s = K_{\sigma+s}$, $\sigma > 0$, $s > 0$.

Граничные задачи (1), (2) и (1), (3) эквивалентны граничным задачам для уравнения теплопроводности для *интерполирующей функции*

$$U(\sigma, t) \equiv U(\sigma, t; \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(t-\tau)^2}{4\sigma}\right] \phi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_0,$$

решения $\phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$:

$$U'_\sigma = \frac{1}{4\sigma} U''_{tt}; \quad U(0, t) = \phi(t), \quad U(\sigma_0, t) = \phi^n(t), \quad (5)$$

где $\sigma_0 = 1/2$ или $\sigma_0 = 1/4$.

Многочисленные теоретические работы были посвящены исследованию этого нового класса граничных задач p -адической математической физики – нелинейным псевдодифференциальным уравнениям, формально содержащим бесконечное число производных, что отражает нелокальность таких теорий поля. Эта проблема подробно обсуждалась в целом ряде публикаций (детали см. в работах [6]–[14] и в литературе к этим работам).

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

Мы предполагаем, что решения $\phi(t)$ нашей задачи принадлежат классу вещественных непрерывных функций, отличающихся от тривиальных решений $0, \pm 1$ (вакуумных решений). В работах [8], [9], [11]–[14] исследованы математические свойства решений: существование или несуществование решений, интегрируемость, гладкость, нули и кратности нулей, неравенства, законы сохранения, числа изменений знака и т. д. В частности, было показано, что $1 - |\phi| \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ и $\phi' \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$.

Функция $f(x)$ из класса $\mathcal{C}^2(a, b)$ называется *вогнутой* или *выпуклой* на отрезке (a, b) , если соответственно $f''(x) > 0$ или $f''(x) < 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [17], [18]. Пусть функция f вогнута, функция $\rho > 0$ нормирована, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau) d\tau = 1$, а функция ϕ ограничена на $\mathbb{R}$. Тогда имеет место неравенство

$$f\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau)\phi(\tau) d\tau\right] < \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau)f[\phi(\tau)] d\tau. \quad (6)$$

Если в качестве функции ϕ выбрать решение нашей задачи и положить

$$\rho(t - \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(t - \tau)^2}{4\sigma}\right],$$

то с учетом (5) и неравенства (6) получим неравенство

$$f[U(\sigma, t; \phi)] < U[\sigma, t; f(\phi)],$$

из которого вытекает неравенство для решений $\phi(t)$:

$$f[\phi^n(t)] < [K_{\sigma_0} f(\phi)](t),$$

где $\sigma_0 = 1/2$ или $\sigma_0 = 1/4$.

ПРИМЕР. При $f(x) = x^2$ и $f(x) = -\ln x$ получаются полезные неравенства

$$\begin{aligned}\phi^{2n}(t) &< (K_{\sigma_0} \phi^2)(t), & t \in \mathbb{R}, \\ \phi^n(t) &> \exp(K_{\sigma_0} \ln \phi)(t), & t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Законы сохранения [11], [12]. Для решения задачи ϕ и его интерполирующих функций $U(\sigma, t)$ имеют место следующие нелокальные законы сохранения для задач (1), (2) (замкнутая струна) и (1), (3) (открытая струна) соответственно:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} [1 - U(\sigma, t)] dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - \phi(t)] dt = \text{const}, & \sigma \in [0, 1/2], \\ \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi(t) - U(\sigma, t)] dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi(t) - \phi^n(t)] dt = 0, & \sigma \in [0, 1/4],\end{aligned}$$

которые получаются с помощью интегрирования равенства (4) по $\mathbb{R}$.

3. ОЦЕНКИ КРАТНОСТЕЙ НУЛЕЙ И ЧИСЕЛ ИЗМЕНЕНИЯ ЗНАКА

Непрерывная функция $f(x)$ на отрезке (a, b) (конечном или бесконечном) имеет Z *изменений знака*, если этот отрезок можно разбить на $Z + 1$ отрезков таких, что на каждом отрезке разбиения $f(x) \neq 0$, $f(x) < 0$ или $f(x) > 0$, и на двух соседних отрезках разбиения функция $f(x)$ имеет противоположный знак. Вещественно-аналитическая функция $f(x) = a_0 + a_1x + \dots$ имеет W *изменений знака коэффициентов*, если в последовательности $a_0, a_1, \dots$ происходит W изменений знаков; будем обозначать через W^- число изменения знаков коэффициентов функции $f(-x)$ [17].

Обозначим через N число вещественных нулей, а через N^+ — число положительных нулей функции $f(x)$ (нули исчисляются с учетом кратностей).

Правила Декарта [17], [19]. Если $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ — вещественный многочлен, то для его чисел изменений знаков справедливы следующие соотношения:

$$N - Z = 2q, \quad W - N^+ = 2q', \quad W + W^- \leq k, \quad (7)$$

где q и q' – неотрицательные целые числа; если все нули многочлена P вещественны, то во втором равенстве в (7) $q' = 0$.

ПРИМЕР. Для многочлена $(t-a)(t+b) = t^2 + (b-a)t - ab$ мы имеем следующее:
 если $a > 0$, $b < 0$, то $N = Z = W = 2$, $W^- = 0$;
 если $0 < a < b < 1$, то $N^+ = 1$, $W = W^- = 1$, $Z = 2$;
 если $b = a \neq 0$, то $N = Z = 2$, $W = 1$, $W^- = 1$.

Предположим, что существуют нетривиальные решения $\phi(t)$ граничных задач (1), (2) и (1), (3). Обозначим через $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ вещественные нули вещественно-аналитической функции $\phi^n(t)$ (множество этих нулей непусто и конечно), а через $s_1, s_2, \dots, s_m$ – их кратности, так что $N = \sum_{k=1}^m s_k$, $N^+ = \sum_{s_k > 0} s_k$ задают полное число корней и число положительных корней функции $\phi^n(t)$ (с учетом кратностей). Пусть

$$s_0 = \max_{1 \leq k \leq m} s_k \quad (8)$$

– максимальная кратность среди $\{s_k\}$. Заметим, что кратности корней в обеих задачах конечны.

Обозначим через Z и z числа изменения знака для функций $\phi^n(t)$ и $\phi(t)$ соответственно; обозначим через W и W^- числа изменения знака коэффициентов функций $\phi^n(t)$ и $\phi^n(-t)$ соответственно. Для решения ϕ введем *характеристический многочлен*

$$P(t) = \prod_{k=1}^m (t - t_k)^{s_k}, \quad (9)$$

так что

$$\phi^n(t) = C(t)P(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

где $C(t)$ – ненулевая вещественно-аналитическая функция. Из представлений (9) и (10) вытекают тривиальные следствия [12]: для нечетных n имеем $1 \leq Z = z \leq m$, и это число равно числу нулей с нечетными кратностями (см. рис. 1, 4, 6); для четных n имеем $Z = 0$ и $1 \leq z \leq m$ (см. рис. 2, 3, 5). Пусть $T_1 < T_2 < \dots < T_z$ – подмножество точек t_k , $k = 1, 2, \dots, m$, в которых функция $\phi(t)$ изменяет знак на $\mathbb{R}$:

$T_i = t_i$, $i = 1, 2, 3$, и $m = z = 3$ (см. рис. 1);

$T_1 = t_1$, $T_2 = t_2$ и $m = z = 2$ (см. рис. 2);

$T_1 = t_1$, $T_2 = t_2$ и $m = z = 2$ (см. рис. 3);

$T_1 = t_1$, $m = 2$ и $z = 1$ (см. рис. 4);

$T_1 = t_1$, $T_2 = t_2$ и $m = z = 2$ (см. рис. 5);

$T_1 = t_1$, $m = 2$ и $z = 1$ (см. рис. 6).

ТЕОРЕМА 1. В задаче (1), (2) число z четное; в задаче (1), (3) число z нечетное. В обоих случаях число z не меньше $s_0 - 1$, т. е.

$$z \geq s_0, \quad (11)$$

где s_0 задается формулой (8).

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала задачу (1), (2). Очевидно, что z – четное число (см. рис. 2, 3, 5). Пусть в противоположность неравенству (11) имеет место неравенство $z \leq s_0 - 1$. Тогда справедливы s_0 соотношений [9]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-t_{s_0})^2} t^i \phi(t) dt = 0, \quad i = 0, 1, \dots, s_0 - 1,$$

из которых следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^z (t - T_i) R(t) dt = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t) R(t) dt, \quad (12)$$

где

$$Q(t) = \prod_{i=1}^z (t - T_i), \quad R(t) = e^{-(t-t_{s_0})^2} \phi(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

а точки T_i , $i = 1, 2, \dots, z$, определены выше. Перепишем соотношение (12) в виде

$$0 = \int_{-\infty}^{T_1} Q(t) R(t) dt + \sum_{i=1}^{z-1} \int_{T_i}^{T_{i+1}} Q(t) R(t) dt + \int_{T_z}^{\infty} Q(t) R(t) dt. \quad (13)$$

С другой стороны, имеем

$$Q(t) = \begin{cases} < 0 & \text{для } t < T_1, \\ > 0 & \text{для } T_1 < t < T_2, \\ \dots\dots\dots, \\ > 0 & \text{для } T_z < \infty; \end{cases} \quad R(t) = \begin{cases} < 0 & \text{для } t < T_1, \\ > 0 & \text{для } T_1 < t < T_2, \\ \dots\dots\dots, \\ > 0 & \text{для } T_z < \infty. \end{cases}$$

Из этих соотношений следует, что подынтегральное выражение $Q(t)R(t)$ в интегралах (13) положительно всюду, за исключением точек t_k , в которых оно обращается в ноль. Это противоречит равенству (13), что доказывает неравенство (11).

Задача (1), (3) может быть рассмотрена аналогичным образом. Теорема доказана.

Приведем некоторые примеры для небольших значений m и $z \leq m$. Утверждения, сформулированные ниже, доказываются непосредственно с использованием теоремы 1 и правил Декарта.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть в задаче (1), (2) число n нечетное. Тогда имеют место следующие утверждения:

если $m = 2, s_0 = 1$, то $\sigma_1 = 1 = \sigma_2$ и $z = 2$ (см. рис. 2);

если $m = 2, s_0 = 2$, то $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$ и $z = 2$ (см. рис. 5);

если $m = 2, s_0 = 2$, то $\sigma_1 = 2 = \sigma_2$ и $z = 2$ (см. рис. 3).

Пусть в задаче (1), (3) число n четное. Тогда имеют место следующие утверждения:

если $m = 3, s_0 = 1$, то $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$ и $z = 3$ (см. рис. 1);

если $m = 2, s_0 = 2$, то $\sigma_1 = 2 = \sigma_2$ и $z = 1$ (ситуация, изображенная на рис. 6, невозможна ввиду (11));

если $m = 2, s_0 = 2$, то $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2$ и $z = 1$ (ситуация, изображенная на рис. 4, невозможна).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Число Z изменений знаков функции ϕ^n и число W изменений знаков коэффициентов функции ϕ^n удовлетворяют соотношениям $N = Z + 2q$, $W = N^+ + 2q'$, где q и q' — неотрицательные целые числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения следует из первого и второго правил Декарта [17].

Несуществование решений. Было доказано, что для граничной задачи (1), (2) с четным $p^2 = 4$ (и даже в случае $p^2 \rightarrow 2n$) что не существует непрерывных четных не убывающих при $t > 0$ решений [6], [12].

Возникает проблема, возможно ли существование непрерывных решений с очень сильной осцилляцией или даже разрывных (кусочно-непрерывных) решений в вышеприведенных задачах?

4. ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДОВ ТЕЙЛОРА

Для расширения решений задач, сформулированных в терминах многочленов Эрмита, необходимо задать масштаб весовых сепарабельных пространств Гильберта $\mathcal{L}_2^\alpha$, $0 < \alpha < \infty$, состоящих из функций на $\mathbb{R}$, измеримых и интегрируемых с квадратом относительно меры

$$d\mu_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2} dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu_\alpha(t) dt = 1, \quad \alpha > 0,$$

со следующими скалярным произведением и нормой:

$$(f, g)_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t) d\mu_\alpha(t), \quad \|f\|_\alpha = \sqrt{(f, f)_\alpha}, \quad f, g \in \mathcal{L}_2^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Ключевая формула [9]. Пусть ϕ – решение уравнения (1), принадлежащее пространству $\mathcal{L}_2^1$, и пусть $a_k = (\phi, H_k)_1$ – его коэффициенты Фурье относительно ортогональной системы (многочленов Эрмита) $H_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, так что

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{H_k(t)}{2^k k!} \quad \text{в } \mathcal{L}_2^\alpha, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{2^k k!} = \|\phi\|_1^2.$$

Тогда функция $\phi^n(t)$ разложима в ряд Тейлора [12],

$$\phi^n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!}, \quad (14)$$

который сходится локально равномерно на $\mathbb{R}$. Нам теперь понадобится неравенство Харди [20]: если функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ принадлежит классу Харди в единичном круге, то имеет место следующая оценка¹⁾:

$$\frac{1}{2} \int_{|z|=1} |f(z)| dz > \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{n+1}. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть ϕ – нетривиальное решение уравнения (1), принадлежащее пространству $\mathcal{L}_2^1$. Тогда имеет место следующая оценка для коэффициентов его ряда Фурье $a_k = (\phi, H_k)_1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{(k+1)!} < \pi \sqrt{e} I_0\left(\frac{1}{2}\right) \approx 5.50084, \quad (16)$$

где $I_0(t)$ – функция Бесселя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из неравенства Харди (15), примененного к целой функции.

$$\phi^n(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z-\tau)^2} \phi(\tau) d\tau, \quad z = t + iy. \quad (17)$$

Известно, что для нетривиального решения неравенство $|\phi(\tau)| < 1$ выполнено при всех $\tau \in \mathbb{R}$. Поэтому из (17) следует оценка

$$|\phi^n(z)| < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{y^2 - (t-\tau)^2} d\tau = e^{y^2}. \quad (18)$$

Применяя неравенства (15) и (18) к функции (14), получим неравенство (16):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{(k+1)!} &< \frac{1}{2} \int_{|z|=1} |\phi^n(z)| dz < \int_{|z|=1} e^{y^2} dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{\sin^2 \theta} d\theta = \\ &= \int_0^1 \frac{e^u}{\sqrt{u(1-u)}} du = \pi \sqrt{e} I_0\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательство завершено.

¹⁾В книге [20] на стр. 454 в неравенстве Харди содержится опечатка.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность И. Я. Арефьевой за критические замечания относительно первого варианта статьи, С. В. Бочкареву за указание на неравенство Харди (15) и Е. В. Писковскому за вычисление интеграла в (19). Работа была частично поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-7675.2010.1) и РФФИ (грант № 08-01-00727).

Список литературы

- [1] P. H. Frampton, Y. Okada, *Phys. Rev. D*, **37**:10 (1988), 3077–3079.
- [2] L. Brekke, P. G. O. Freund, *Phys. Rep.*, **233**:1 (1993), 1–66.
- [3] I. V. Volovich, *Class. Quant. Grav.*, **4**:4 (1987), L83–L87.
- [4] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-Адиический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [5] L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **302**:3 (1988), 365–402.
- [6] N. Moeller, B. Zwiebach, *JHEP*, **10** (2002), 034, 39 pp., arXiv: hep-th/0207107.
- [7] N. Moeller, M. Schnabl, *JHEP*, **01** (2004), 011, 18 pp., arXiv: hep-th/0304213.
- [8] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 355–368, arXiv: math-ph/0306018.
- [9] В. С. Владимиров, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 55–80.
- [10] N. Barnaby, N. Kamran, *JHEP*, **02** (2008), 008, 39 pp., arXiv: 0809.4513.
- [11] V. S. Vladimirov, *Sci. China Ser. A*, **51**:4 (2008), 754–764.
- [12] В. С. Владимиров, “О нелинейных уравнениях p -адических струн для скалярных полей тахионов”, *Избранные вопросы математической физики и p -адического анализа*, Сб. статей, Тр. МИАН, **265**, ред. И. В. Волович, Е. Ф. Мищенко, МАИК, М., 2009, 254–272.
- [13] V. S. Vladimirov, *P-Adic Num. Ultramet. Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 79–87.
- [14] D. V. Prokhorenko, *On some nonlinear integral equation in the (super)string theory*, arXiv: math-ph/0611068.
- [15] I. Ya. Aref’eva, P. B. Medvedev, A. P. Zubarev, *Nucl. Phys. B*, **341**:2 (1990), 464–488.
- [16] I. Ya. Aref’eva, A. S. Koshelev, L. V. Joukovskaya, *JHEP*, **09** (2003), 012, 15 pp., arXiv: hep-th/0301137.
- [17] G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis: Bd. 2. Funktionentheorie, Nullstellen, Polynome, Determinanten, Zahlentheorie*, Springer, Berlin, 1925.
- [18] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.
- [19] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, ГИТТЛ, М., 1953.
- [20] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.

Поступила в редакцию 13.10.2010